

# Inhoud | Contents

258 Colofon

259 Redactioneel *Derk Pik*

260 Agenda

262 Nieuws

## Afscheidsrede | Valedictory Lecture

266 Van doodtrap tot erger *Peter Sander*

## Onderzoek | Research

274 A mystery about to be solved *Frank den Hollander, Fabio Toninelli*

279 Tensegrities *Chris Heunen, Dick van Leijenhorst*

284 Een eenvoudig bewijs van de priemgetalstelling *Jaap Korevaar*

292 Snelle pakken *Nando Timmer*

## Evenementen | Events

296 Vijftig jaar geleden *Herman te Riele, Jaap Top*

## Onderwijs | Education

304 Examens in de steigers *Gerard Stroomer, Nol Reebok*

308 NOCW 50 jaar *Wim Kleijne*

315 Een constructief bewijs van de middelwaardestelling *Yun-Qui Shen, Tjalling Ypma*

## Promotionele activiteiten | Promotional Activities

317 Niet iedereen wordt leraar *Iris van Gulik-Gulikers*

## Boeken | Books

320 Boekbesprekingen

## Rubrieken | Departments

265 Oud Archief *Danny Beckers*

314 Onder de rijzende zon *Raimundas Vidunas*

319 Brieven *Letters to the editor*

341 Problemen/UWC

## Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

### Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde  
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden  
Postbus 9512  
2300 RA Leiden  
tel. 071-5277121, fax 071-5277101  
<http://www.nieuwarchief.nl>

### Hoofredactie

Jaap Molenaar (j.molenaar1@tue.nl)  
Jaap Top (top@math.rug.nl)

### Eindredactie

Derk Pik (dpik@math.leidenuniv.nl)

### Bladmanager/Advertenties

Reinie Ern   (erne@nieuwarchief.nl)  
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden  
Postbus 9512, 2300 RA Leiden  
tel. 071-5277121, fax 071-5277101

### Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@wens.kun.nl)  
Rainer Kaenders (r.kaenders@ils.kun.nl)  
Hans Melissen (j.b.m.melissen@its.tudelft.nl)

### Bureauredactie

Jos Brakenhoff (naw@nieuwarchief.nl)  
Annelies Hafkenscheid (naw@nieuwarchief.nl)

### Medewerkers

Danny Beckers (KUN), Jan van de Craats (KMA),  
Hans Cuyper (TUE), Robbert Fokink (TUD), Geert-  
je Hek (UVA), Joop Kolk (UU), Ger Koole (VU), Jan  
van Neerven (TUD), Hans Sterk (TUE), Chris Zaal  
(FI)

### TeX-ondersteuning

Marko Boon (marko@win.tue.nl)  
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

### Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)  
Uitgeverij Ten Brink  
Postbus 41, 7940 AA Meppel  
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

### Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden v  r het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

### Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library  
Centrum voor Wiskunde en Informatica  
Postbus 94079  
NL-1090 GB Amsterdam

### Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)  
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

### Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

### Programmatuur (CONTEXT)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

### Druk

Giethoorn ten Brink, Meppel

## Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. Het genootschap werd in 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Het is 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap. De contributie voor leden van het KWG bedraagt    70 per jaar. Gepensioneerden betalen    35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor à 25 per jaar. Pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG.

Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van    50.

Members of the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay    50 instead of the full membership fee of Å 70 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members.

A postage charge of Å 5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of    7,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor à 90 respectievelijk    105.

Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

### Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)  
Uitgeverij Ten Brink  
Postbus 41, 7940 AA Meppel  
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

### Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Jan van Mill (VU, *voorzitter*), Herman te Riele (CWI, *secretaris*), Fieke Dekkers (UU, *penningmeester*), Henk Broer (RUG), Klaas Pieter Hart (TUD), Metha Kamminga (NHL), Annette Kik (CWI), Vivi Rottschäfer (UL).

## Informatie voor auteurs

### Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

### Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

### Volgende nummers

| nummer | verschijningsdatum | deadline kopij |
|--------|--------------------|----------------|
| 1      | 04-03-2005         | 11-11-2004     |
| 2      | 03-06-2005         | 10-02-2005     |
| 3      | 16-09-2005         | 10-05-2005     |
| 4      | 03-12-2005         | 10-08-2005     |

## Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen.



Centrum voor Wiskunde  
en Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit  
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit  
Nijmegen

## Op het omslag

Turbulentie kan de prestatie van schaatsers nadelig beïnvloeden. Kan men het oppervlak van het schaatspak zo maken dat dit effect vermindert? Zie pagina 292. (Foto: Marianne Timmer tijdens haar 1500 meter op de Wereldbeker allround in Heerenveen, 2003 (c) Jiri Büller/HH)

# Kinderen

In het internetartikel *Child Prodigies* van psycholoog Joanna Schaffhausen op de website *Brain connection* worden kinderen met een exceptioneel hoog IQ beschreven. Het blijkt dat er slechts enkele disciplines zijn waar veel echte wonderkinderen voorkomen: de wiskunde, het schaken en de muziek. Zij heeft er ook een verklaring voor: ze beargumenteert dat kinderen zich vaak aangetrokken voelen tot onderwerpen, spellen en dergelijke, die gebaseerd zijn op symbolische representaties die zich in vaste patronen tot elkaar verhouden. Dit zou kunnen betekenen dat kinderen wel eens veel gevoeliger voor abstracties kunnen zijn dan wij op dit moment denken.

Zelf heb ik inmiddels ook een heel klein beetje ervaring mogen opdoen met lesgeven aan kinderen. De eerste twee maanden van dit jaar heeft de klas van mijn jongste dochter (zes jaar, groep 3) gewerkt aan een project over de ruimte. De juf heeft het degelijk aangepakt: in de klas hangen de zon en planeten, die de kinderen zelf van papier-maché gemaakt hebben, waaronder natuurlijk Saturnus met zijn ring. Aan de muren zijn foto's te zien van de landing op de maan en van marslandertjes. De kinderen mogen boeken en andere attributen van huis meenemen om tentoon te stellen.

Omdat mijn dochter heeft verteld dat wij een telescoop hebben, werd ik gevraagd om daarover voor de zesjarigen iets te vertellen. Ik kom met twee verhalen: eerst kunnen de kinderen met vergrootglazen de werking van de telescoop nabootsen, waarna iedereen even door de telescoop mag kijken naar de Montessorischool aan de overkant van het plein en daarna vertel ik een verhaal over de omloopsnelheden van de verschillende planeten. Het blijkt dat de kinderen de omloopsnelheid van de aarde, maar ook van sommige andere planeten al weten. Midden in mijn verhaal vraagt iemand opeens: "Wat zijn zwarte gaten?" Op die vraag heb ik niet gerekend. Ik vertel zo goed en kwaad als het gaat alles wat ik er van af weet, maar hij onderbreekt me al spoedig en vraagt: "Wanneer vallen ze aan?"

Het is interessant om te zien hoe gemakkelijk kinderen omgaan met typische bèta-onderwerpen, maar ook hoe het appelleert aan hun fantasie. Een half jaar later moesten de kinderen (inmiddels in groep 4) als rekenopdracht een soort driehoek van Pascal construeren. De vraag was om een gedeeltelijk ingevulde driehoek te completeren met positieve gehele getallen. (Natuurlijk heeft de meester het niet over positieve gehele getallen, en

ook niet over Pascal.) Of het nu aan de rekenmethode (*Alles telt*) ligt of aan de manier waarop de meester het heeft gebracht, het resultaat was dat mijn dochter samen met een vriendinnetje de hele middag aan de keukentafel driehoeken heeft zitten in te vullen. De grap is namelijk dat het niet altijd gaat.

Eigenlijk zijn heel veel bèta-onderwerpen door hun lichte speelse karakter juist heel geschikt voor kinderen. Natuurlijk gaat het niet op voor alle kinderen, maar veel kinderen houden gewoon van puzzelen.

Nu kan je als kind in het algemeen gemakkelijk naar muzikles of op schaken, maar heel wat moeilijker op wiskunde. Gelukkig zijn er de zomerkampen van de stichting *Vierkant voor Wiskunde* en kan een school besluiten om mee te doen aan de Kangoeroewedstrijd, maar voor de basisschoolleerling die wat meer van wiskunde wil weten bestaan er niet veel mogelijkheden. Zou zo iets realiseerbaar zijn, een *Pythagoras* voor basisscholieren?

Ik weet niet veel van psychologie, maar ik denk dat de interesse voor bèta-onderwerpen op de basisschool begint. Dan zijn kinderen ook nog niet zo met zichzelf bezig. Persoonlijk vind ik het dan ook nogal vreemd dat de abstractere onderwerpen in het onderwijs steeds verder naar achteren worden verschoven en vaak worden vervangen door zware modelleringsproblemen. 'Hoe vertaal ik dit verhaal naar een wiskundige formulering' in plaats van 'Kijk: een nieuw idee!'

Het lijkt me erg belangrijk dat leerlingen op de basisschool en vervolgens ook scholieren op de middelbare school in een vroeg stadium volop in aanraking kunnen komen met wiskunde. Daartoe zijn initiatieven zoals de Kangoeroewedstrijd, de zomerkampen van Vierkant voor Wiskunde, het tijdschrift *Pythagoras* en zeer zeker ook de Wiskunde-Olympiade van groot belang. Met name voor de Wiskunde-Olympiade is het van het grootste belang dat in wiskunde geïnteresseerde kinderen zo vroeg mogelijk met de wiskundige ideeën in aanraking kunnen komen.

En nu eens niet omdat dat voor ons land zo economisch nuttig zou zijn, maar omdat er kinderen genoeg zijn die zo iets graag willen leren.

**Derk Pik**  
eindredacteur Nieuw Archief voor Wiskunde  
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden  
Postbus 9512, 2300 RA Leiden  
drpik@math.leidenuniv.nl

# Agenda

Upcoming Events

## december 2004

17 december

### ☐ Cognitieve Linguïstiek Dag

Taalwetenschap vanuit cognitieve invalshoek, met aandacht voor aangrenzende disciplines.

**plaats** Drift 21, Utrecht

**info** [www.uilots.let.uu.nl/events/coglingdag.htm](http://www.uilots.let.uu.nl/events/coglingdag.htm)

21 december

### ☐ Wiskunde: dienstmaagd of koningin?

Studiedag voor wiskundeleraren. Wordt wiskunde op school behandeld om dienstbaar te zijn aan andere vakken of staat het op zichzelf?

**plaats** Rijksuniversiteit Groningen

**info** Wout de Goede: [wdg@math.rug.nl](mailto:wdg@math.rug.nl)

## januari 2005

3–7 januari 2005

### ☐ Dynamical Systems, Probability Theory and Statistical Mechanics

Workshop over Random Spatial Structures

**plaats** EURANDOM, Eindhoven

**info** [www.eurandom.tue.nl/abstracts\\_seminars/2005.htm](http://www.eurandom.tue.nl/abstracts_seminars/2005.htm)

7 januari

### ☐ Op het kruispunt

Oratie van prof.dr. N.P. Landsman bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar Analyse.

**plaats** Radboud Universiteit Nijmegen

**info** [K.vanderVeer@dbf.kun.nl](mailto:K.vanderVeer@dbf.kun.nl)

8 januari

### ☐ Wintersymposium KWG

Thema: Wiskunde en verkeer. Organisatie: Metha Kamminga.

**plaats** Academieggebouw, Utrecht

**info** <http://webserv.nhl.nl/~kamminga/wintersymposium>

12–14 januari

### ☐ Sixth International Workshop on Computational Semantics

Workshop Semantiek met doel wetenschappers uit diverse disciplines met interesse in het berekenen van betekenis in taal samen te brengen.

**plaats** Tilburg

**info** [let.uvt.nl/research/TI/sigsem/iwcs/iwcs6](http://let.uvt.nl/research/TI/sigsem/iwcs/iwcs6)

19 januari

### ☐ Nascholingscursus Simulatie en Kansrekening op TI-83 en PC

Cursus voor leraren om kansexperimenten op de computer en met de grafische rekenmachine uit te voeren.

**plaats** Vrije Universiteit, Amsterdam

**info** [www.feweb.vu.nl/ectrie/nl/vwo.html](http://www.feweb.vu.nl/ectrie/nl/vwo.html)

20–21 januari

### ☐ Workshop The Economics & Finance of Extremes

Doel: het bestuderen van grote claims in de financiële markten en hun statistisch gedrag.

**plaats** EURANDOM, Eindhoven

**info** [www.eurandom.tue.nl](http://www.eurandom.tue.nl)

24–26 januari 2005

### ☐ Lunteren 4th Winter School on Financial Mathematics

Speciale onderwerpen: *Financieel beheer en verzekering en Optimaliseringsmethoden.*

**plaats** CongresHotel De Werelt, Lunteren

**info** <http://remote.science.uva.nl/~spreij/stieltjes/winterschool.html>

31 januari–4 februari 2005

### ☐ Study Group Mathematics with Industry 2005

Wiskundigen komen samen om te brainstormen over industriële problemen.

**plaats** Vrije Universiteit, Amsterdam

**info** [www.few.vu.nl/~swi2005](http://www.few.vu.nl/~swi2005)

## februari 2005

2–5 februari

### ☐ Workshop Rare Events in Communication Networks

Organisator: Onno Boxma.

**plaats** EURANDOM, Eindhoven

**info** [www.eurandom.tue.nl](http://www.eurandom.tue.nl)

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,  
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,  
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.  
Email: [naw@math.leidenuniv.nl](mailto:naw@math.leidenuniv.nl)

4–5 februari

#### ☐ Nationale Wiskunde Dagen

Levenswetenschappen, topologie, rechtspraak, getaltheorie,  $e^{\pi i} + 1 = 0$ , wiskunde en verwondering.

**plaats** De Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

**info** [www.fi.uu.nl/nwd](http://www.fi.uu.nl/nwd)

14–16 februari 2005

#### ☐ European Grid Conference 2005

Internationale conferentie op het gebied van numerieke wiskunde.

**plaats** Amsterdam Science Park

**info** <http://genias.biz/egc2005>

14–18 februari

#### ☐ Stieltjes Onderwijsweek: Global and Variational Methods for ODEs and PDEs

Sprekers: Jan Bouwe van den Berg, Felix Otto, Mark Peletier, Rob van der Vorst

**plaats** Lorentz Center, Leiden

**info** [www.win.tue.nl/~mpeletie/StieltjesOW2005](http://www.win.tue.nl/~mpeletie/StieltjesOW2005)

## maart 2005

14–18 maart

#### ☐ EIDMA/EURANDOM Minicourse Symmetry Studies

Vijfdaagse minicursus over Symmetrie. Voordrachten door Marlos Viana (University of Illinois, Chicago), en Arjeh Cohen (TUE).

**plaats** TUE, Eindhoven

**info** [www.win.tue.nl/math/eidma/courses](http://www.win.tue.nl/math/eidma/courses)

14–18 maart

#### ☐ Workshop on Self-similar Random Structures Hausdorff Dimension and Branching

Sprekers: Russel Lyons, Balint Virag

**plaats** EURANDOM, Eindhoven

**info** [www.eurandom.tue.nl](http://www.eurandom.tue.nl)

16–19 maart

#### ☐ International workshop Stochastic Systems

Speciaal aandachtsgebied: hoogdimensionale stochastische systemen

**plaats** Lorentz Center, Leiden

**info** [www.lc.leidenuniv.nl](http://www.lc.leidenuniv.nl)

18 maart

#### ☐ Kangoeroe wiskundewedstrijd

Wiskundewedstrijd voor scholieren

**plaats** basis- en middelbare scholen

**info** [www.math.kun.nl/kangoeroe](http://www.math.kun.nl/kangoeroe)

26 Maart–4 april

#### ☐ 1st World Congress and School on Universal Logic

Congres bedoeld voor studenten en jonge onderzoekers in alle aspecten van de logica.

**plaats** Montreux, Zwitserland

**info** [www.uni-log.org](http://www.uni-log.org)

## april 2005

11 april

#### ☐ Statistische Dag

Jaarcongres van de Vereniging voor Statistiek en Operations Research. Uitreiking van de Van Dantzig prijs. Jury: Richard Gill, Hans van Houwelingen, Jan Karel Lenstra, Jan Magnus en Tom Snijders.

**plaats** Vrije Universiteit, Amsterdam

**info** [www.vvs-or.nl/main.htm](http://www.vvs-or.nl/main.htm)

## mei 2005

9–11 mei

#### ☐ Workshop Risk Measures & Risk Management General Aspects

Wiskundig onderzoekers ontmoeten specialisten uit de financiële wereld en het actuariaat.

**plaats** EURANDOM, Eindhoven

**info** [www.eurandom.tue.nl](http://www.eurandom.tue.nl)

27 mei

#### ☐ From Here to Infinity

Symposium ter ere van Nico Temme's afscheid van het CWI.

**plaats** CWI, Amsterdam

**info** [www.cwi.nl/events](http://www.cwi.nl/events)

28 mei

#### ☐ HKRWO SYMPOSIUM XI

Bijeenkomst van de historische Kring Reken- en Wiskunde Onderwijs, gewijd aan de geschiedenis van de kansrekening en statistiek in het Nederlandse onderwijs.

**plaats** Hogeschool Domstad te Utrecht

**info** [www.fi.uu.nl/hkrwo/Programma/symp11.html](http://www.fi.uu.nl/hkrwo/Programma/symp11.html)

## juni–juli 2005

13–17 juni

#### ☐ EIDMA minicourse Computational Methods in Public Key Cryptology

Vijfdaagse minicursus over computatieve methoden in de Public Key Cryptology. Lezingen door Arjen Lenstra en Tanja Lange.

**plaats** TUE, Eindhoven

**info** [www.win.tue.nl/math/eidma/courses/minicourses/lenstralange/lenstralange.html](http://www.win.tue.nl/math/eidma/courses/minicourses/lenstralange/lenstralange.html)

24–28 juli

#### ☐ The 25th European Meeting of Statisticians

Internationale conferentie gewijd aan alle aspecten van de statistiek.

**plaats** Oslo, Noorwegen

**info** [www.ems2005.no](http://www.ems2005.no)

28 juli–3 augustus

#### ☐ Logic Colloquium 2005

Internationaal congres in het kader van de ASL European Summer Meeting over alle aspecten van de logica.

**plaats** Athene, Griekenland

**info** [www.math.uoa.gr/~lc2005](http://www.math.uoa.gr/~lc2005)

# Nieuws

| News

## Jack van Lint overleden

Op dinsdag 28 september is prof.dr. J.H. van Lint overleden. Jack van Lint was van 1959 tot 1999 als hoogleraar aan de Technische Universiteit Eindhoven verbonden. Als 27-jarige was hij de jongste hoogleraar van de toenmalige Technische Hogeschool Eindhoven. Hij introduceerde midden jaren zestig de discrete wiskunde als nieuw toepassingsgebied van wiskunde in Nederland, na een sabbatical op het *Bell Labs* in de Verenigde Staten. Dit zou later leiden tot zijn betrokkenheid bij de *Philips Research Laboratories*, in het bijzonder bij het inbouwen van foutverbeterende codes in de compact disc. In 1972 werd Van Lint adviseur van het Mathematisch Centrum te Amsterdam, waar dankzij zijn inspanningen een invloedrijke werkgroep discrete wiskunde ontstond. Voor zijn wetenschappelijk werk en zijn invloed op het wiskundecurriculum ontving hij diverse eerbewijzen. Hij werd in 1972 lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen en was eredoctor aan de Technische Universiteit Bucharest (Roemenië), de Universiteit van Bergen (Noorwegen), de Xi'an Jiatong Universiteit (China) en de Universiteit van Gent.

Op bestuurlijk terrein vervulde Van Lint vele functies. Hij was decaan van de faculteit Wiskunde en Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven, hij was rector van deze universiteit en als laatste officiële functie was hij wetenschappelijk directeur van het Stan Ackermans Instituut. In 2001 was hij voorzitter van de onderwijsvisitatiecommissie Wiskunde. Hij was dit jaar benoemd tot erelid van het Koninklijk Wiskundig Genootschap (zie voor een interview: Nieuw Archief voor wiskunde, september 2004, pagina 212).

*bron: persbericht Technische Universiteit Eindhoven*



Jack van Lint, 5 juli 2004, bij het interview voor het NAW

## Nederland wint zilver op wereldkampioenschap hoofdrekenen

De Nederlander Jan van Koningsveld (35) is tweede geworden op het wereldkampioenschap hoofdrekenen, dat op zaterdag 30 oktober plaatsvond in het Duitse Annaberg-Buchholz. Wereldkampioen werd de Britse kernfysicus Robert Fountain (35), die als kind geïnspireerd werd door een televisieshow van het Nederlandse rekenwonder Willem Klein (1912–1986).

Aan het wereldkampioenschap namen zestien mannen en één vrouw deel. De deelnemers bestreden elkaar op vier onderdelen: kalenderrekenen, optellen, vermenigvuldigen en worteltrekken. Als houder van het wereldrecord was Van Koningsveld favoriet op het onderdeel vermenigvuldigen (twee achtcijferige getallen keer elkaar). Door zenuwen werd hij op dit onderdeel vierde. Bij het worteltrekken eindigde

*Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland.*

*Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijgaande activiteiten wordt verslag gedaan.*

*Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien?*

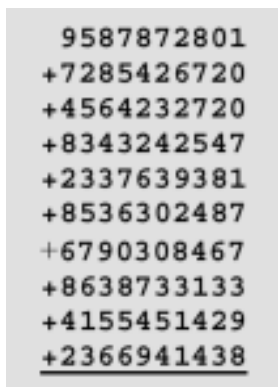
*Stuur dan uw bijdrage (ongeveer 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar [naw@math.leidenuniv.nl](mailto:naw@math.leidenuniv.nl). De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.*

hij echter als eerste.

Het wereldkampioenschap werd georganiseerd in het Saksische mijnwerkersstadje Annaberg-Buchholz, woon- en werkplaats van de Duitse rekenmeester Adam Ries (1492–1559). Elementen uit de rekenmethode van deze Duitse evenknie van onze Willem Bartjens — het ‘Rechnen auf der Linie’ — worden in de regio nog steeds levend gehouden.

Jan van Koningsveld woont in het Duitse Emden. Hij is getrouwd en heeft twee kinderen. Van beroep is hij ‘Bilanzbuchhalter’. Ook al heeft hij zijn hele leven in Duitsland gewoond, op het wereldkampioenschap vertegenwoordigde hij Nederland; dankzij zijn Nederlandse vader heeft hij een Nederlands paspoort. Meer informatie: [www.recordholders.org/en/events/worldcup04](http://www.recordholders.org/en/events/worldcup04)

Chris Zaal



Een van de opgaven bij het onderdeel optellen. Er moesten tien van deze sommen worden gemaakt.

### Fontyshogeschool Eindhoven in de media

Op 19 augustus van dit jaar plaatste Geert-Jan Uytendewilligen, student aan de Fontyshogeschool in Eindhoven, een artikelje van minder dan drie pagina's op de Mathematics Arxiv webserver: <http://arxiv.org/abs/math.CA/0408264>. Het werk van Uytendewilligen beschrijft een oplossing van de algemene veeltermvergelijking

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0.$$

Dankzij het klassieke werk van Abel en Ruffini weten we al zo'n 200 jaar, dat dit voor  $n > 4$  niet mogelijk is in termen van *radicalen*: een formule in de  $a_j$  waarin naast sommen, verschillen, producten en quotiënten alleen hogere-machts-wortels voorkomen, kan voor een oplossing van de algemene vergelijking niet bestaan.

Uytendewilligen beschrijving van een oplossing is dan ook anders. Hij zet op de plek van  $a_0$  een variabele, zeg  $t$ , en hij merkt vervolgens op dat de vergelijking impliciet een oplossing  $x = x(t)$  als functie van  $t$  geeft. Een beginwaarde als  $x(0) = 0$  legt dan, mits  $a_1 \neq 0$ , die oplossing vast. De oplossing  $x(t)$  is verder algebraïsch over de rationale functies  $\mathbb{C}(t)$ , en dus voldoet  $x(t)$  aan een lineaire differentiaalvergelijking met rationale functies in  $t$  als coëfficiënten. Hiermee zijn, in een machtreeksontwikkeling  $x = \sum b_k t^k$ , gegeven de eerste paar  $b_k$  gemakkelijk de volgende te bepalen. In de hoop dat hierin tenslotte  $t = a_0$  gesubstitueerd kan worden (er zijn nog heel wat vrijheden in het probleem, zoals helemaal aan het begin  $x$  door  $x + c$ , voor constante  $c$  kan worden vervangen), heb je dan een uitdrukking voor een oplossing.

Zowel uit theoretisch oogpunt als vanuit numerieke bruikbaarheid

is dit weinig interessant. Wellicht is het interessantste aspect, dat de media, ongehinderd door veel kennis van zaken, volop aandacht aan de ‘ontdekking’ besteedde. Op de website van Kennislink is de discussie voor een deel terug te vinden. Opvallend is dat zelfs nu de nieuwsberichten van Fontyshogeschool nog spreken van een ‘ontdekking’, waarbij de wiskunde tot nu toe slechts de gevallen met graad  $n \leq 6$  (!) zou hebben opgelost.

Het huidige geval van *science by media* doet, ondanks enkele evidente verschillen, in allerlei opzichten terugdenken aan het geval van de Zweedse studente Elin Oxenhielm, die eind 2003 een belangrijk speciaal geval van het 16de probleem van Hilbert zou hebben opgelost.

Jaap Top

### Lanchesterprijs Alexander Schrijver

Op maandag 25 oktober 2004 heeft Alexander Schrijver, onderzoeker aan het Centrum voor Wiskunde en Informatica en hoogleraar wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam, de Frederick W. Lanchester Prize in Denver, VS ontvangen.

Deze prijs wordt jaarlijks toegekend door het *Institute for Operations Research and the Management Sciences* aan iemand die een uitzonderlijke bijdrage heeft geleverd aan het vakgebied Operations Research and Management Sciences.

Professor Schrijver heeft zich onderscheiden door zijn boek *Combinatorial Optimization Polyhedra and Efficiency*, Springer-Verlag, Berlijn, 2003. De prijs bestaat uit een erepenning en een geldbedrag. Schrijver won ook in 1987 de Lanchester prijs.

Alexander Schrijver promoveerde in 1977 aan de Vrije Universiteit te Amsterdam na doctoraalonderzoek aan het toenmalige Mathematisch Centrum (nu Centrum voor Wiskunde en Informatica). Hij was onder meer hoogleraar aan de Universiteit van Tilburg en keerde in 1989 als onderzoeker terug naar het Centrum voor Wiskunde en Informatica, wat hij combineerde met een hoogleraarschap aan de Universiteit van Amsterdam.

Schrijver bekleedde veel internationale gasthoogleraarschappen en ontving onder meer de *Fulkerson Prize* (in 1982 en 2003) van de *American Mathematical Society* en de *Mathematical Programming Society*, de *Lanchester prize* (1987) van de *Operations Research Society of America* en de *Dantzig Prize* (2003) van de *Society for Industrial and Applied Mathematics* en de *Mathematical Programming Society*. Sinds 1995 is hij lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. In 2002 eerde de University of Waterloo in Canada hem met een eredoctoraat.

Godelief Nieuwendijk, CWI Amsterdam

### WetenWeek ook in 2004 weer groot succes

De WetenWeek trok weer meer bezoekers dan in voorgaande jaren. Ruim 239.000 bezoekers bezochten dit jaar de vierhonderd activiteiten die in het teken stonden van wetenschap en techniek. Het grote aantal bezoekers betekent een relatieve stijging van meer dan dertig procent ten opzichte van 2003. De activiteiten stonden in het teken van het thema ‘Gebruik je hersens!’.

De afsluiting vond plaats in museum Naturalis (Leiden) en stond geheel in het teken van magnetisme met kindercolleges en het bouwen van Geomag-bouwwerken. Het magnetisch bouwspel *Geomag* verovert op dit moment de wereld als de nieuwe spelsensatie. De Italiaan Claudio Vincentelli ontwierp dit spel dat bestaat uit transparante, gekleurde, geometrische vormen en magnetische staafjes. Een professionele Geomagbouwer had in het atelier een bouwwerk gemaakt om te laten

zien wat er allemaal mogelijk is met Geomag. Alle aanwezigen konden in Naturalis een poging wagen om dit te evenaren en mooie prijzen te winnen.

Daarnaast volgden kinderen een speciaal college over magnetisme met allerlei spannende experimenten. Het kindercollege werd verzorgd door Nang Arsala, docent Natuurkundedidactiek aan de Universiteit Leiden.

De WetenWeek is een jaarlijks terugkerend evenement dat georganiseerd wordt door Stichting *Weten*. De WetenWeek is inmiddels uitgegroeid tot hét landelijke evenement dat kennisinstellingen, bedrijven en het Nederlandse publiek bij elkaar brengt om de interactie tussen wetenschap en maatschappij te vergroten. De WetenWeek 2004 werd mogelijk gemaakt door KNAW, NWO, Z@ppelin, Discovery Channel en de Volkskrant.

bron: ANP Pers Support, Wendy Pouwer

### Stockholm 2004: the Fourth European Congress of Mathematics

Het vierde Europese wiskundecongres heeft plaatsgevonden in de week van 27 juni in Stockholm. Het was georganiseerd door de *Kunliga Tekniska Högskolan* (Technische Hogeschool te Stockholm) en de universiteit van Stockholm. Het congres wordt eens in de vier jaar gehouden: in 1992 in Parijs, in 1996 in Budapest, in 2000 in Barcelona en straks, in 2008, in Amsterdam. Het congres werd bezocht door 930 deelnemers, er waren 300 poster-presentaties en uiteindelijk 62 lezingen. Men had speciaal moeite gedaan om ook plenaire lezingen te organiseren met sprekers uit andere exacte disciplines, zoals de natuurkunde, scheikunde en biologie.

De EMS-prijzen voor uitzonderlijk onderzoek, verricht door onderzoekers onder de 35 jaar, bestonden elk uit vijfduizend euro. Er waren tien prijzen te verdelen onder 54 inzenders. Onder de mededingers bevond zich geen enkele Nederlander. De prijzen werden gewonnen door (europese) studenten uit Heidelberg, Uppsala, Stockholm, Genève, Rome, Toulouse, Tel Aviv, van het Courant Institute (twee keer), van de Princeton University en van het Clay Mathematics Institute in Massachusetts.

bron: EMS newsletter 51, 53



### Rekenen volgens Bartjens in Zwolle

Ter gelegenheid van de heruitgave van het rekenboek *De Cijfferinghe* van Willem Bartjens staat Zwolle in de week van 15–19 november 2004 in het teken van Bartjens. Op 15 tot en met 17 november zijn er rekendictees op de middelbare scholen van Zwolle. Op donderdag 18 november

nemen inwoners en prominenten van Zwolle het tegen elkaar op in het hoofdrekenen tijdens het Groot Zwolsch Bartjens Rekendictee. Aan het einde van de week worden de eerste exemplaren van de heruitgave officieel overhandigd aan wethouder Martin Knol en Vincent Icke.

De dertienhonderd derdeklassers van het vmbo, havo en vwo van Zwolse middelbare scholen krijgen voor twaalf rekensommen dertig minuten de tijd. Rekenmachines en mobieltjes zijn niet toegestaan. De beste leerling van iedere school mag meedoen aan het Groot Zwolsch Rekendictee dat voor de eerste keer op 18 november in de Nieuwe Buitensociëteit wordt gehouden.

Een wiskundeleraar heeft aan een snelle blik op de opgaven van het rekendictee ‘volgens Bartjens’ genoeg om zijn oordeel te vellen. “Leuk voor de liefhebber, maar contraproductief voor de gemiddelde scholier.”

Als de derdejaars havo-scholieren zich over de opgaven buigen, neigen de meeste gezichtsuitdrukkingen eerder naar verschrikt dan intelligent. “Cijfers zeggen deze kinderen niet zoveel meer. Bij een getal tussen nul en één kunnen ze zich niets meer voorstellen”, fluistert Van Egmond als de leerlingen zich aan de twaalf vragen wagen. “Van een breuk schrikken ze zich wild.” Horror voor een vijftienjarige dus, vraag één: “Op zijn school in Zwolle had Willem Bartjens waarschijnlijk leerlingen in de kost. Als de soepkan van Maritgen Bartjens - de vrouw van Willem — voor  $\frac{4}{7}$  deel gevuld is kan ze er 64 kommen soep uit scheppen. Hoeveel kommen haalt ze uit haar pan als hij voor  $\frac{6}{7}$  deel gevuld is.

Marise en Eva, beiden 15 jaar oud, kijken elkaar halverwege het rekendictee met rode koontjes aan en schieten in de lach. “Omdat het zo moeilijk is”, vertelt Marise. Ze is al aan vraag twaalf toe, “maar ik heb heel veel niet ingevuld. Normaal gebruiken we altijd een rekenmachine.” Grote schrik bij de meiden als blijkt dat degene die de opgaven het beste heeft gemaakt, doorgaat voor het lokale kampioenschap hoofdrekenen. Nee toch, niet nog zo’n kwelling, klinkt het.

Wat later, in de lerarenkamer, wordt de rekentoets met wat meer welwillendheid ontvangen. De sectie wiskunde van de Thorbecke Scholengemeenschap blijkt niet vies van de rekenkunde. “Wiskunde is leuk omdat het je kan uitdagen”, enthousiasmeert docent Rens Zwaan. Collega Philip Thijsse rukt de opgaven bijna uit zijn handen en maakt de oplossing voor vraag 12 inzichtelijk. “Leuke vraag, hoor.” Maar de leraren zetten zich over hun eigen voorliefde voor rekenspelletjes heen als hen gevraagd wordt naar de waarde van dit rekendictee.

Vanuit de leerling beoordeeld — zoals dat tegenwoordig moet in onderwijsland — is het niet zo’n sterke wedstrijd. Te moeilijk. “Onze vmbo’ers willen we dit al niet aan doen. Je wilt leerlingen juist prikkelen, en ze zich niet dom laten voelen. Voor onze havisten is dit eigenlijk al te pittig.” Toch is het initiatief van zo’n wedstrijd lovenswaardig, oordelen ze. Maar, merkt Rens Zwaan fijntjes op, eigenlijk wordt het de leerlingen nu nóg te makkelijk gemaakt. Want hoofdrekenen, zegt hij, doe je alleen met je hoofd. “En nu mochten ze nog een kladblaadje gebruiken.”

De volgende leerlingen kunnen het beste ‘volgens Bartjens’ rekenen: Guus Dijkerman van het Van der Capellen Scholengemeenschap; Ruben te Wierik van het Gymnasium Ceeleum; Marit Bolmer van het Thomas a Kempiscollege; Lieke de Boer van de Thorbecke Scholengemeenschap; Andries van Benthem van het Agnieten College, locatie CCC en Willem Tigelaar van het Greijdanus College. Zij wonnen een mp3-speler.

bron: weblog Zwolle en [www.zwolle.nl](http://www.zwolle.nl)

## Danny Beckers

Dorpsstraat 26-A

6582 AN Heumen

d.beckers@inter.nl.net

# Oud Archief

De Nederlandse schoolmeester Bartjens schreef een leerboek voor het rekenen dat zijn naam voorgoed heeft gevestigd. Danny Beckers, onderzoeker op het gebied van de geschiedenis van de wiskunde, vertelt over het leven en werk van deze beroemdheid.

Buiten de eigen beroepskring genieten wiskundigen geen bekendheid. De uitzondering die deze regel bevestigt vormt de spreekwoordelijk bekende zeventiende-eeuwse schoolmeester Willem Bartjens. Het gezegde “volgens Bartjens” betekent volgens de dikke Van Dale: “nauwkeurig uitgerekend, volgens de regels der rekenkunde”. Nu zullen er niet veel mensen zijn die nog weten wie Bartjens was, laat staan dat ze weten dat Bartjens vooral bekend is geworden met een rekenboek dat hij in 1604 publiceerde. Maar zijn naam geniet bekendheid onder brede lagen van de Nederlandse bevolking —iets dat zelfs van wiskundige grootheden als Huygens en Brouwer niet gezegd kan worden.



Bartjens werd geboren in 1569. Over zijn geboorteplaats is niets met zekerheid bekend. Hij publiceerde *De Cijfferinghe* in 1604. Hij woonde toen te Amsterdam, waar hij sinds 1591 school hield. Bartjens hield een zogeheten Fransche school. Dat was een particuliere school, meestal gedraaid door een onderwijzer en diens vrouw, waar leerlingen van niet onbemiddelde ouders kwamen die in eerste instantie wilden leren lezen en schrijven in het Frans en Nederlands. Vaak betrof het kinderen van koop- of ambachtslieden die graag hadden dat hun kinderen later de zaak overnamen. Dat betekende dat ook les in goede manieren, rekenen en boekhouden vaak op het programma stonden. Dat dit bij Bartjens inderdaad het geval was blijkt uit een lofdicht die een leerling van Bartjens aan een editie van diens boek liet toevoegen:

*Na dat ick door u[w] vlijt / was konstich onderwesen / In Cyffer-konst / in Tael / in Schrijven en in Lesen / ...*

*En hoe ick eerlijck oock / myn Ouders sou ontmoeten / En hoe ick ander Li'en eerbiedich sou begroeten / ...*

*Tzint hebb' ick meest altijd gelegentheyt verbeyt / Om u voor sulcken Doent te thoonen Danckbaerheyt.*

In 1618 verhuisde Bartjens naar Zwolle om daar de stads Fransche school te gaan houden. Te Zwolle verwierf hij zijn naam en faam, bezorgde hij een heruitgave van zijn rekenboek en publiceerde hij een vervolgdeel op *De Cijfferinghe*. In 1638 overleed hij.

De rekenboeken van Bartjens zouden ruim twee eeuwen lang het Nederlandse rekenonderwijs beïnvloeden. Wie ze vandaag de dag openslaat wordt getroffen door de veelheid aan rekenregels die —in onze ogen— op hetzelfde neerkomen. Zo behandelt Bartjens bij de *Geselschaps rekeninghen* een rekenrecept ten behoeve van situaties waarin kooplieden samenwerken. Ieder legt een bepaald bedrag in, waarmee handel wordt gedreven. Na afloop wordt de winst of het verlies verdeeld in evenredigheid met ieders ingelegde som.

In het rekenrecept dat Bartjens onder de titel *Menginghe* aanbiedt worden goud en zilver van verschillende waarde met elkaar vermengd en luidt de vraag wat de waarde van een bepaalde hoeveelheid van het mengsel is. Vandaag de dag zouden we de opgaven gebruiken als toepassingen van rekenen met verhoudingen, maar Bartjens dacht niet in termen van theorie die kon worden toegepast. Het verband tussen de rekenregels, zo hij het al opmerkte, was niet wat hem interesseerde in het rekenonderwijs.

Rekenonderwijs in de tijd van Bartjens diende een zuiver praktisch doel. Wie kon rekenen kwam in aanmerking voor een positie als rekenknecht aan een van de handelshuizen, voor allerlei technische beroepen moest men kunnen rekenen. Dat betekende dat ouders bereid waren er extra voor te betalen om hun kroost ook te leren rekenen. Het betekende ook dat men graag zo snel mogelijk praktische resultaten wilde zien. Voor de toekomstige koopman waren er andere rekenregels relevant dan voor de zoon van de edelsmid. Door de opbouw van zijn boek kon Bartjens de leerling die regels geven die relevant waren voor zijn toekomstige praktijk.

Tot diep in de negentiende eeuw werd *De Cijfferinghe* herdrukt. De naam van Bartjens gold voor velen als een kwaliteitsstempel. Niet voor niks staat het gezegde “volgens Bartjens” nog steeds in het Nederlandse woordenboek. Bartjens roem was vergelijkbaar met de bekendheid van de Duitse rekenmeester Adam Riese (met bijbehorende gezegde “nach Adam Riese”), de Franse Bertrand Barrême (“d’après Barrême”) en de Brit Edward Cocker (“according to Cocker”). Allemaal bekende reken- of schoolmeesters. Allen schreven populaire rekenboeken die veel herdrukken beleefden. Wanneer u als wiskundige in het woordenboek terecht wilt komen dan weet u dus wat u te doen staat! ☞

## Literatuur

Danny Beckers en Marjolein Kool (ed.), *Willem Bartjens, De Cijfferinghe (1604)*, Hilversum: Verloren (2004)

## Peter Sander

Faculteit Technologie Management

Technische Universiteit Eindhoven

Postbus 513

5600 MB Eindhoven

p.c.sander@tm.tue.nl

## Afscheidsrede

# Van doodtrap

Hoe kan een consument er zeker van zijn dat een nieuw aangeschaft apparaat goed functioneert? Kan hij er vanuit gaan, dat het allemaal goed werkt, of doet hij er beter aan meteen een verzekering af te sluiten tegen defecten, zoals bijvoorbeeld bij digitale camera's heel gebruikelijk is? Op 10 oktober 2004 heeft Peter Sander afscheid genomen van de Technische Universiteit Eindhoven. Hij is vanaf 1977 verbonden geweest aan deze universiteit, waar hij eerst lector en later hoogleraar Toepassingen van de Statistiek is geweest. Zijn interesse gaat in het bijzonder uit naar de bijdrage van de statistiek aan het ontwerpen, fabriceren en instandhouden van industriële producten.

*Hij begon met planten en dieren, met al wat om hem was — en als hij er lang op gestaard had werden het cijfers. Alles viel uiteen tot cijfers, — bladen vol cijfers. Dat vond docter Cijfer heerlijk, en hij zeide, dat het hem licht werd, als de cijfers kwamen, — doch voor Johannes was dat duisternis.*

Uit: De Kleine Johannes door Frederik van Eeden (1870–1930)

Toen ik in de zestiger jaren in Utrecht wiskunde studeerde, had ik het voorrecht om bij professor Freudenthal (1905–1990) het college Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek te volgen. College lopen bij Freudenthal was een genoegen. Niet omdat hij volgens de gebruikelijke maatstaven een briljant docent was, maar wel omdat hij de wiskunde voor je ogen liet ontstaan, inclusief de onvermijdelijke missers en doodlopende wegen. Bij Freudenthal gebeurde altijd wat. Ook op mondelinge tentamens, zoals ik uit eigen ervaring kan vertellen. Freudenthal gaf onder andere het vak Grondslagen van de meetkunde. Ik had een afspraak gemaakt voor een mondelinge tentamen en dat liep heel redelijk. Tot hij

weer een nieuw probleem aan de orde stelde en zijn betoog uiteraard afrondde met een vraag. Ik had zijn redenering echter absoluut niet begrepen en dat liet ik mij ook spontaan ontvallen. Hierop liet hij zich achterover vallen in zijn stoel, dacht een paar minuten na, in elk geval leek het zo lang, en zei toen: “ja, ja, ja, dat is ook allemaal onzin”. Daarna stelde hij nog een vraag over heel iets anders en liet me toen vertrekken met een negen. Tot op de dag van vandaag heb ik het gevoel dat mijn onbegrip meer aan mij lag dan aan hem.

Als opening van dit afscheidscollege wil ik u graag een voorbeeld geven uit het college van Freudenthal. Het aardige van dit voorbeeld is zowel gelegen in de oorsprong van de waarnemingen, als in het feit dat de waarnemingen perfect kunnen worden gemodelleerd met een van de beroemdste kansverdelingen uit de statistiek, namelijk de Poissonverdeling, genoemd naar de Franse wiskundige Siméon-Denis Poisson, die leefde van 1781–1840. De praktische waarde van de methode zal u aan het einde van het college duidelijk worden.

Poisson was geïnteresseerd in het gebruik

van kansrekening bij de rechtsspraak en daarbij leidde hij de later naar hem genoemde verdeling af [6]. De Poissonverdeling bleef in de kast liggen tot Ladislaus Josephowitsch von Bortkiewicz, een in Rusland geboren Duitse hoogleraar van Poolse afkomst, hem er in 1898 uithaalde. Von Bortkiewicz modelleerde een onalledaagse situatie met behulp van de Poissonverdeling. Het gaat over het aantal soldaten uit het Pruisische leger dat per jaar en per troepenonderdeel overleed ten gevolge van een trap van een paard. De aantallen doden zijn gebaseerd op 10 korpsen over een periode van 20 jaar, namelijk van 1875–1894 [9]. In totaal werden 122 soldaten door een paard doodgetrapt. Tabel 1 geeft de aantallen.

Von Bortkiewicz vroeg zich af of de Poissonverdeling als kansmodel zou passen bij de waargenomen aantallen doden. De Poissonverdeling is niets anders dan een formule waarmee onder bepaalde voorwaarden de kansen op 0, of 1, of 2, enzovoorts successen kunnen worden berekend. In het voorbeeld identificeren we een geslaagde doodtrap als een succes. De formule luidt:

$$P(k \text{ successen}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \text{ voor } k = 0, 1, 2, \dots$$

Hierin is  $e = 2.718281828\dots$ , een notatie die in 1731 door Euler werd ingevoerd.

Voor de parameter  $\lambda$  kunnen we in beginsel een willekeurig positief getal kiezen, maar er zijn theoretische argumenten om in ons



Peter Sander

# tot erger

voorbeeld  $\lambda$  gelijk te kiezen aan het gemiddeld aantal doden per korpsjaar. Daar er 200 korpsjaren zijn en 122 doodgetrapte soldaten, zijn er gemiddeld  $122 : 200 = 0.61$  doden per korpsjaar.

Nu we  $\lambda$  gelijk aan 0.61 hebben gekozen, kunnen we met behulp van de Poissonverdeling voor elke waarde van  $k$  de kans uitrekenen op  $k$  doodgetrapte soldaten. Als we deze kansen vermenigvuldigen met het aantal korpsjaren, dus met 200, dan vinden we de verwachte frequenties. Tabel 2 geeft de resultaten.

Als we de verwachte frequenties vergelijken met de werkelijke frequenties, dan zien we dat de getallen sprekend op elkaar lijken. We concluderen hieruit, in navolging van Von Bortkiewicz, dat de werkelijke aantallen doodgetrapte Pruisische soldaten prima beschreven kunnen worden met een Poissonverdeling.

Ik kan me voorstellen dat u de overeenkomst tussen de waargenomen frequenties en de verwachte frequenties zo goed vindt, dat u zich afvraagt of Von Bortkiewicz met de getallen heeft geknoeid. Wel, er zijn in de literatuur inderdaad artikelen te vinden waarin Von Bortkiewicz wordt beticht van vals spel. In werkelijkheid waren er namelijk 14 legerkorpsen, maar hij rapporteert slechts over 10 korpsen. Ra, ra, ra, waar zijn die vier korpsen gebleven?

De eerste die hier over viel was Whitaker [12]. Von Bortkiewicz antwoordde dat die vier korpsen niet waren meegenomen, om-

dat deze een geheel andere organisatie hadden dan de beschreven korpsen [10]. Zo telde elk van de beschreven korpsen 25 squadrons, terwijl een van de weggelaten korpsen maar liefst 40 squadrons telde. Het argument van Von Bortkiewicz snijdt natuurlijk hout. Stel namelijk dat die vier extra korpsen veel groter zijn dan die andere 10; zelfs zo groot dat in elk van die vier korpsen gemiddeld wel 100 doden per jaar vallen. Dan geven dus 10 korpsen elk hooguit vijf doden per jaar, en vier korpsen elk zo'n 100 doden per jaar. Dit past natuurlijk in het geheel niet bij een Poissonverdeling.

Dames en heren, met dit voorbeeld heb ik u laten zien dat kansmodellen de potentie hebben om werkelijke situaties uitstekend te beschrijven. Het is een van de eerste voorbeelden die bewust mijn interesse wekten in de toepasbaarheid van kansmodellen. Lang daarvoor waren mijn ervaringen met kansen eerder teleurstellend van aard, als ik voor de zoveelste keer bij *Mens Erger Je Niet* op een cruciaal moment weer eens geen zes had gooid. De frustratie van mijn opa was overigens nog een maat groter: met enige regelmaat vernielde hij uit pure woede op zaterdagavond het spel, waarna hij op maandag weer een nieuw kocht.

## Het doel van de statistiek

Van oudsher is de statistiek een hulpmiddel bij het nemen van beslissingen. Vanuit deze invalshoek is de definitie van Barnett aantrekkelijk [2]: "Statistics is the study of how infor-

mation should be employed to reflect on, and give guidance for action in, a practical situation involving uncertainty."

Dit betekent dat wij een verschijnsel waarnemen (information), dat de waarnemingsuitkomsten ons niet al vooraf bekend zijn (uncertainty), en dat die waarnemingen ons inzicht verhogen (reflect on) en van nut zijn bij het nemen van maatregelen (give guidance for action).

Omdat deze definitie de indruk kan wekken dat de statistiek pas een rol gaat spelen als de waarnemingen zijn gedaan, voeg ik er gelijk aan toe dat de statistiek in het bijzonder waardevol is bij het structureren van problemen en het opzetten van experimenten. Als een probleem niet goed is gestructureerd en de experimenten niet goed zijn opgezet en uitgevoerd, dan is het erg optimistisch om er op te vertrouwen dat de statistiek toch nog wel kans zal zien om met slimme rekenpartijen allerlei zinvolle verschijnselen op te sporen die

| Aantal doodgetrapte soldaten per korpsjaar | Waargenomen frequentie |
|--------------------------------------------|------------------------|
| 0                                          | 109                    |
| 1                                          | 65                     |
| 2                                          | 22                     |
| 3                                          | 3                      |
| 4                                          | 1                      |
| $\geq 5$                                   | 0                      |
| Totaal                                     | 200                    |

**Tabel 1** Frequentieverdeling van het aantal doodgetrapte Pruisische soldaten per korpsjaar

| Aantal doodgetrapte soldaten per korpsjaar | Waargenomen frequentie | Frequentie volgens Poissonverdeling |
|--------------------------------------------|------------------------|-------------------------------------|
| 0                                          | 109                    | 108.7                               |
| 1                                          | 65                     | 66.3                                |
| 2                                          | 22                     | 20.2                                |
| 3                                          | 3                      | 4.1                                 |
| 4                                          | 1                      | 0.6                                 |
| $\geq 5$                                   | 0                      | 0.1                                 |
| Totaal                                     | 200                    | 200                                 |

Tabel 2 Vergelijking tussen de waargenomen frequenties en de verwachte frequenties

in de getallenbrij zijn verborgen.

Veelal wordt de statistiek gebruikt als beslissingen moeten worden genomen over een populatie — en daarmee bedoel ik een verzameling van elementen waarop men de conclusies van het onderzoek wil betrekken — terwijl onvoldoende informatie beschikbaar is. Met behulp van de statistiek kan dan worden gepoogd tegen zo gering mogelijke kosten voldoende informatie over die populatie in handen te krijgen om een verantwoorde beslissing te kunnen nemen. Daartoe wordt een steekproef uit de populatie onderzocht en vervolgens wordt gepoogd om de toevallige uitkomsten van de steekproef te generaliseren tot uitspraken over de populatie. Laat ik dit toelichten.

#### Voorbeeld 1

Als een fabrikant zich afvraagt of een partij lucifers al dan niet aan de eisen voldoet, dan ligt het voor de hand om een willekeurige steekproef uit de productie te nemen en voor elk van de lucifers uit de steekproef vast te stellen of hij goed brandt. De lucifers uit de steekproef zijn na de test alleen geschikt om weggegooid te worden. Het restant van de populatie lucifers is wel relevant en over de kwaliteit van die lucifers kunnen we mogelijk iets zeggen op grond van de uitkomst van de steekproef. Als van de 100 lucifers in de steekproef er 3 niet voldoen, dan verwachten we in de populatie ook ongeveer 3% lucifers van onvoldoende kwaliteit.

De steekproef mag natuurlijk niet worden gemanipuleerd.

#### Voorbeeld 2

Als u zaterdagochtend op de markt 3 kilo appels koopt, en de marktkoopman weegt die 3 kilo voor u af, dan hoopt u dat die prachtige appels aan uw kant van de kraam een eerlijk beeld geven van de appels die de koopman aan zijn kant van de kraam afweegt.

De statistiek stelt een onderzoeker in staat om:

- Informatie over een te onderzoeken verschijnsel op een efficiënte en effectieve manier te verzamelen, onder meer door de goede experimenten te doen.
- Verzamelde informatie op een zodanige wijze te bewerken, dat zinvolle conclusies mogelijk zijn over de populatie waaruit de informatie afkomstig is.
- De opzet van een onderzoek, de meetuitkomsten en de conclusies op een inzichtelijke wijze te presenteren met behulp van grafieken, tabellen en kengetallen.

Het aardige van de statistiek zit hem in het feit dat we alleen kijken naar situaties waarin toeval een belangrijk rol speelt. Immers: als je alles van tevoren weet, dan is er geen aardigheid meer aan.

#### Toepassen van statistiek

Zoals Freudenthal mijn interesse in de statistiek heeft gewekt, zo heeft professor Leppink mij het grote verschil geleerd tussen theoretische kennis hebben en die kennis kunnen toepassen. Leppink was hoogleraar Mathematische Statistiek en de oprichter van het Instituut voor Mathematische Statistiek van de Rijksuniversiteit Utrecht. Een van de doelen van dat instituut was om het gebruik van de statistiek door onderzoekers van de universiteit aan te moedigen. Dat heeft heel wat jaren perfect gewerkt. Hierdoor werden de medewerkers van het instituut betrokken bij de meest uiteenlopende onderzoeken. Zij dienden dan ook een brede belangstelling te hebben, want statistiek toepassen zonder de moeite te nemen je in te werken in het vakgebied van de onderzoeker, is een kansloos gebeuren. Dan neem je je vak niet serieus. Ik zal nu aan de hand van enkele aspecten toelichten wat het toepassen van statistiek zo boeiend maakt.

#### Modelleren van het probleem

Dit is een van de boeiendste en ook moeilijkste facetten uit het leven van een statisticus. Toepassen van statistiek betekent dat

het probleem van de onderzoeker gewoonlijk moet worden aangescherpt en vervolgens vertaald in een kwantitatief model dat zich leent voor een statistische analyse. Bij deze vertaling wordt het oorspronkelijke probleem ontleed in relevante en minder relevante aspecten. Door de minder relevante aspecten buiten beschouwing te laten, wordt het probleem behapbaar. Dit is een delicaat gebeuren, want als relevante aspecten ten onrechte worden weggelaten, dan representeert het kwantitatieve model de werkelijkheid in onvoldoende mate. Anderzijds, als niet relevante aspecten worden meegenomen in het model, dan wordt het model nodeloos gecompliceerd.

Uiteraard laat de statisticus zich bij het bouwen van een model mede sturen door zijn theoretische kennis van de statistiek, zeg maar: door alle modellen die hij kent; maar hij mag natuurlijk het oorspronkelijke probleem geen geweld aan doen. Zo nodig moeten nieuwe terreinen worden bewandeld en nieuwe statistische theorieën worden ontwikkeld.

Als het model eenmaal is opgesteld, dan wordt veelal een experiment uitgevoerd. Vervolgens worden de meetuitkomsten geanalyseerd en gepresenteerd. Tenslotte worden de resultaten van de statistische analyse vertaald naar het oorspronkelijke probleem.

In het bijzonder bij de volgende twee vertaalslagen is een intensieve samenwerking tussen de onderzoeker en de statisticus noodzakelijk:

- van het probleem naar het statistische model
- van de uitkomst van de statistische analyse naar het antwoord op de oorspronkelijke vraag.

Een onderzoeker heeft gewoonlijk onvoldoende kennis om de mogelijkheden van de statistiek optimaal te benutten, en een statisticus die denkt dat hij zelfstandig het probleem van de onderzoeker kan vertalen in een statistisch model, zelfstandig kan besluiten welke statistische analyses zinvol zijn, en zelfstandig de uitkomsten kan terugvertalen naar het oorspronkelijke probleem, heeft er weinig van begrepen.

#### Experimenteren

Zonder twijfel is het grootste nut van de statistiek gelegen in de besparing in tijd en geld die kan worden bereikt door experimenten op te zetten die het gewenste inzicht verschaffen met behulp van een minimum aan inspanningen. Een niet efficiënt experiment leidt mo-

gelijk wel tot de juiste inzichten, maar tegen onnodig hoge kosten. Zo denken veel onderzoekers dat de invloed van meerdere factoren moet worden onderzocht door achtereenvolgens elk van die factoren te variëren bij constant houden van de andere factoren. Dit is echter meestal een weinig gelukkige methode. Deze methode leidt tot nodeloos veel experimenten, en veelal tot verkeerde conclusies.

#### Voorbeeld 3

Stel dat de opbrengst van een chemisch proces wordt beïnvloed door twee factoren: de temperatuur en de reactietijd. Het zou kunnen zijn dat onafhankelijk van de temperatuur de opbrengst bij een reactietijd van 6 minuten 10 eenheden hoger is dan bij een reactietijd van 2 minuten. Zie figuur 1.

Het zou echter ook kunnen zijn dat er een meer complexe relatie is tussen reactietijd, temperatuur en opbrengst. Het zou kunnen zijn dat een reactietijd van 2 minuten een relatief hoge opbrengst geeft bij een temperatuur van 80 °C, maar een relatief lage opbrengst bij een temperatuur van 40 °C, terwijl dit bij een reactietijd van 6 minuten juist andersom is. Zie figuur 1.

Wie in een dergelijke situatie op een efficiënte wijze de maximale opbrengst wil verkrijgen, doet er wijs aan de reactietijd en de temperatuur op een intelligente wijze simultaan te variëren.

Mijn ervaring is dat, in het bijzonder in het bedrijfsleven, heel wat experimenten worden gedaan zonder dat men serieus heeft overdacht wat het probleem precies is en welk experiment verstandig lijkt. Na afloop van het experiment komt men dan vaak tot de conclusie dat niet het gewenste resultaat is bereikt. Kennelijk neemt men het woord nadenken veel te letterlijk. Men denkt na, nadat het experiment is uitgevoerd. Men zou vóór het uitvoeren van het experiment moeten denken. Ik propageer om naast het woord nadenken ook het woord vóordenken te gebruiken. In mijn onderwijs poog ik het voorddenken te stimuleren door het luiheidprincipe te hanteren: gij zult slechts handelen nadat gij hebt vastgesteld dat die handeling een relevante bijdrage levert aan de oplossing van het probleem. Bij twijfel: denk! Studenten houden van dit principe, zij gebruiken het graag, in het bijzonder als ik ze vertel dat de voortgang van hun werk mij tegenvalt.

#### Metten

Experimenteren betekent ook meten. Als je niet nauwkeurig genoeg kunt meten, dan kun

je ook niet vaststellen of waargenomen verschillen aan de meetmethode liggen of aan de situatie. Hoe nauwkeurig moet worden gemeten, hangt af van de doelstelling.

#### Voorbeeld 4

Op de Olympische winterspelen van 2002 in Salt Lake City schaatste Jochem Uytendehaage een wereldrecord op de 10 km heren: 12 min 58.92 seconde. De tijd wordt gemeten in honderdsten van een seconde. In 0.01 seconde reed Jochem ruim 12.8 centimeter. De 10 km bestaat uit 25 rondjes van 400 meter, dus de lengte van de baan mag hooguit 5 millimeter afwijken van 400 meter, want anders klopt de 10 km tijd niet meer. Die nauwkeurigheid is niet van belang als we alleen willen bepalen wie de gouden medaille moet krijgen, maar wel als we de tijd als wereldrecord willen erkennen.

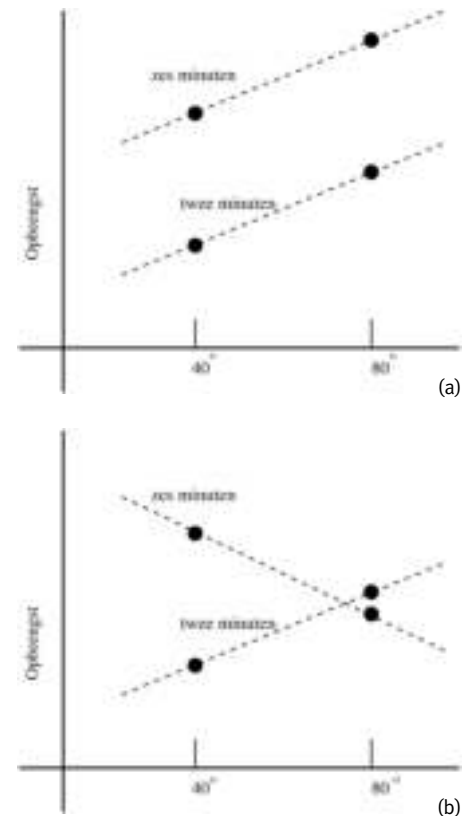
Een heel ander probleem doet zich voor bij het meten van complexe begrippen, daarmee bedoel ik begrippen die zijn opgebouwd uit verschillende kenmerken.

#### Voorbeeld 5

Op diezelfde Olympische winterspelen werd in een andere hal gestreden om de gouden medaille bij het paardrijden, naar mijn smaak een van de aardigste onderdelen van het kunstschaatsen. Om voor de hand liggende redenen is er bij dat nummer nogal eens verschil van mening over welk paar de gouden medaille verdient. In 2002 had het Russische paar Jelena Bereznaja en Anton Sikhuralidze met vijf stemmen tegen vier de voorkeur van de jury, maar onder druk van de publieke opinie werd ook aan het Canadese paar Jamie Sale en David Pelletier een gouden medaille uitgereikt. Hoe moeilijk is meten en hoe nauwkeurig lukt dat?

#### Analyseren en presenteren van meetuitkomsten

Als de meetuitkomsten beschikbaar zijn, dan volgt de analyse. Gezien de overvloed aan statistische programmatuur is het bijzonder verleidelijk om allerlei dingen uit te rekenen. Zonder inzicht in achter de getallen verborgen structuren kunnen zulke rekenpartijen tot volstrekt verkeerde gedachten leiden. Daarom hoort elke analyse te beginnen met een visuele analyse: grafieken. Kwantitatieve analysetechnieken komen pas aan bod ná een grafische analyse. In elke complexe situatie zijn grafieken onmisbaar. Daarom zit er bij een doos vol planken, schroeven en moeren altijd een werktekening, want met alleen tekst krijgt uw buurman de kast nooit in elkaar.



**Figuur 1** De relatie tussen de temperatuur en de opbrengst is onafhankelijk (a) respectievelijk afhankelijk (b) van de reactietijd.

Ik gebruik een beroemde dataset om u duidelijk te maken dat een grafische weergave de essentie van waarnemingen veelal helderder kan weergeven dan tabellen. Tabel 3 geeft de dataset.

Aan zo'n tabel met getallen valt niet veel af te lezen, daarom is het gebruikelijk om sets met getallen samen te vatten in enkele kernwaarden. In dit geval doe ik dat door u te vertellen dat voor elk van de vier paren  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_1, y_2)$ ,  $(x_1, y_3)$ ,  $(x_2, y_4)$  het volgende geldt:

|                                         |                |
|-----------------------------------------|----------------|
| Aantal waarnemingen:                    | 11             |
| Gemiddelde van de $x$ -waarden:         | 9.0            |
| Gemiddelde van de $y$ -waarden:         | 7.5            |
| Standaardafwijking van de $x$ -waarden: | 3.3            |
| Standaardafwijking van de $y$ -waarden: | 2.0            |
| Regressielijn:                          | $y = 3 + 0.5x$ |
| Correlatie tussen $x$ en $y$ :          | 0.82           |

De paren worden in figuur 2 grafisch weergegeven. De figuur toont verschijnselen die uit tabel 3 niet zijn af te lezen.

Het zal u duidelijk zijn: grafieken zijn onmisbaar om een goed inzicht te krijgen in complexe verschijnselen en om veronderstellingen te verifiëren die in het gebruikte model zijn besloten.

| $x_1$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $x_2$ | $y_4$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 10    | 8.04  | 9.14  | 7.46  | 8     | 6.58  |
| 8     | 6.95  | 8.14  | 6.77  | 8     | 5.76  |
| 13    | 7.58  | 8.74  | 12.74 | 8     | 7.71  |
| 9     | 8.81  | 8.77  | 7.11  | 8     | 8.84  |
| 11    | 8.33  | 9.26  | 7.81  | 8     | 8.47  |
| 14    | 9.96  | 8.10  | 8.84  | 8     | 7.04  |
| 6     | 7.24  | 6.13  | 6.08  | 8     | 5.25  |
| 4     | 4.26  | 3.10  | 5.39  | 19    | 12.50 |
| 12    | 10.84 | 9.13  | 8.15  | 8     | 5.56  |
| 7     | 4.82  | 7.26  | 6.42  | 8     | 7.91  |
| 5     | 5.68  | 4.74  | 5.73  | 8     | 6.89  |

Tabel 3 De dataset van Anscombe [1]

### Terugvertalen naar de praktijk

Naar mijn mening is de meest voorkomende fout bij het toepassen van statistische methoden, dat uit het oog wordt verloren waarvoor deze methoden dienen. Dit wordt in de hand gewerkt door de wijze waarop auteurs van leerboeken statistische methoden en technieken behandelen. De nadruk ligt in de leerboeken, de goede uitzonderingen daargelaten, altijd op de statistiek en niet op het oorspronkelijke probleem.

Onderzoekers stellen gewoonlijk hypothesen op die met behulp van statistische methoden worden geverifieerd. Daarbij volgt men trouw een rekenschema en concludeert aan het einde dat de uitkomst al dan niet significant is, en als gevolg hiervan wordt een hypothese wel of niet verworpen. Menig onderzoeker vergeet daarbij dat er twee soorten significantie bestaan: statistische significantie en praktische significantie; en deze twee hebben niets met elkaar te maken. Elk verschil, hoe klein ook, is statistisch significant als er voldoende waarnemingen worden gedaan. In de praktijk is een verschil echter alleen een verschil als het verschil maakt.

In wetenschappelijke tijdschriften is met regelmaat te zien dat voor de praktijk van alledag irrelevante zaken zinloos in de belangstelling staan doordat de uitkomsten van een experiment statistisch significant zijn bij de gehanteerde steekproefomvang.

Diezelfde tijdschriften doen vermoeden, dat talloze voor de praktijk van alledag interessante verschijnselen ònvoldoende belangstelling krijgen doordat de uitkomsten van de betreffende experimenten niet statistisch significant zijn bij de gegeven steekproefomvang en de gekozen statistische analysemethode.

### Gebruik van voorkennis

Een onderzoeker begint een onderzoek altijd

met een bepaald beeld van de werkelijkheid. Soms is dat beeld nog vaag en soms is het al vrij scherp. Onderzoek is altijd geënt op bestaande kennis en levert aanvullende informatie. Na het onderzoek trekt de onderzoeker conclusies op grond van zijn subjectieve ervaring aangevuld met de resultaten van zijn laatste onderzoek. Savage [8] geeft drie beroemde voorbeelden om het gebruik van subjectieve kennis van de onderzoeker bij het interpreteren van waarnemingen te verduidelijken. Ik geef deze voorbeelden hier kort weer.

- In het eerste voorbeeld refereert Savage aan een voorbeeld van Fisher [4], waarin een mevrouw claimt dat zij kan proeven of eerst de melk of eerst de thee werd ingeschonken. In een experiment waarin zij tien kopjes thee krijgt aangeboden, geeft zij voor elk kopje thee inderdaad correct de volgorde aan waarin de melk en de thee werden ingeschonken.
- Het tweede voorbeeld betreft een musicus die beweert dat hij aan een bladzijde uit een partituur kan zien of het van Haydn of van Mozart is. De musicus wijst in een experiment inderdaad voor elk van 10 bladzijden correct de componist aan.
- In het derde voorbeeld verklaart een lichtelijk beneveld persoon dat hij kan voorspellen of de uitkomst van een worp met een muntstuk kruis of munt oplevert. De man krijgt de kans om zijn bewering hard te maken met behulp van een experiment. Hij voorspelt voor 10 achtereenvolgende worpen de uitkomst correct.

Voor elk van de drie voorbeelden geldt dat als de hoofdpersoon domweg gokt, de kans op 10 maal correct beslissen gelijk is aan ongeveer één promille. Op grond van extra — subjectieve — informatie hecht Savage aan de uitkomsten van de experimenten echter geheel verschillende waarde. In de situatie van de theedrinkende dame is hij niet overtuigd, maar sluit hij niet uit dat de volgorde inderdaad invloed heeft op de smaak. Dat een musicus aan de partituur kan zien of deze afkomstig is van Haydn of van Mozart, lijkt hem vanzelfsprekend en de uitkomst van het experiment bevestigt zijn mening. Dat de benevelde man 10 maal correct de uitkomst van een worp met een munt voorspelt, vindt Savage puur dronkemansgeluk, hij hecht daar in het geheel geen waarde aan.

De klassieke statistiek kan met deze voorbeelden niet goed uit de voeten. De klassieke statistiek poogt zich te beperken tot het analyseren van de uitkomsten van experimenten, zonder gebruik te maken van additionele informatie. Niettemin gebruikt de klassieke

statistiek de ervaring van onderzoekers toch, maar slechts gedeeltelijk. Wél wordt het type kansverdeling waaruit de waarnemingen afkomstig zijn veelal bekend verondersteld, bijvoorbeeld een Poissonverdeling, maar er wordt bijvoorbeeld géén kennis gebruikt over de vermoedelijke waarde van de parameters die in het model voorkomen, zoals de  $\lambda$  in de Poissonverdeling. Uitspraken over die parameters mogen alleen zijn gebaseerd op eigen experimenten.

Daar statistici zich de beperkingen van de klassieke statistiek natuurlijk uitstekend realiseren, is er een theorie ontwikkeld, de zogenaamde Bayesiaanse statistiek, die bedoeld is om op een consistente wijze de bestaande inzichten te kunnen bijstellen als nieuwe informatie beschikbaar komt. Zeker in vakgebieden waarin het doen van waarnemingen een kostbare zaak is, is een Bayesiaanse aanpak onmisbaar. Tenslotte wordt het maatschappelijk niet aanvaard als een olie-maatschappij 10 raffinaderijen laat ontploffen enkel en alleen om de statistisch gewenste steekproefgrootte te halen. Het ligt dan meer voor de hand om naast de waarnemingen ook de kennis van experts te gebruiken. Dit is precies wat de Bayesiaanse statistiek beoogt.

Kortom: alleen op de beurs mag voorkomen niet worden gebruikt.

### Bedrijfszekerheid

Als u een product koopt, dan verwacht u dat dit product gedurende een redelijke tijd, gewoonlijk substantieel langer dan de garantieperiode, naar genoegen functioneert. De wet dwingt fabrikanten om uw verwachtingen te honoreren. Ik zal eerst ingaan op het begrip bedrijfszekerheid en daarna wijzen op de bescherming die de wet aan consumenten biedt in geval de leverancier geen deugdelijk product levert.

Al kort na mijn benoeming aan deze universiteit heb ik mij gericht op het gebruik van statistiek bij het ontwerpen, produceren en instandhouden van producten. De systeemgrenzen zijn daarbij van belang. Wie vergeet om het systeem te optimaliseren, maar zich concentreert op het optimaliseren van deelprocessen, komt makkelijk tot verkeerde conclusies. Zo leidt de taakstelling 'reducere de onderhoudskosten met 10%' licht tot machinestilstand en dus tot minder productie. De schade kost dan al gauw een veelvoud van de besparingen op het onderhoud.

Bedrijfszekerheid richt zich op het optimaliseren, gegeven allerlei randvoorwaarden, van de kans op de succesvolle werking van een systeem. Om dit doel te bereiken moet

het optreden van storingen worden tegengegaan. Kenmerkend voor storingen is dat ze op onvoorziene, en gewoonlijk ongelukkige, momenten optreden. De systeemspecificaties geven aan onder welke omstandigheden het systeem heel moet blijven, en onder welke omstandigheden het mag falen.

#### Voorbeeld 6

Op 6 oktober 1981 steeg een Fokker Friendship in Rotterdam op voor een vlucht naar Eindhoven. Het toestel kwam daar nooit aan. Het kwam in de trechter van een orkaan, de rechtervleugel brak af, en 8 minuten na vertrek lagen de resten van het toestel bij Moerdijk. Dat die vleugel afbrak was correct; het probleem was dat het toestel nooit in die orkaan terecht had mogen komen.

Het moment waarop producten falen wordt natuurlijk beïnvloed door variatie tussen componenten, variatie tijdens productie en variatie tussen gebruikers. Bij beschouwingen over productkwaliteit poogt men daarom variatie waar mogelijk uit te bannen. Toch is variatie niet alleen negatief. Een deel van onze genoegens halen we juist uit het feit dat er variatie is. Ieder heeft nu eenmaal zijn eigen smaak en zijn eigen financiële mogelijkheden. Soms is variatie zelfs essentieel. Stel u voor dat bij het maken van popcorn alle maïskorrels op hetzelfde moment zouden 'poppen'. Een explosie zou het gevolg zijn. Ook bij het reduceren van variatie dienen we dus eerst de rol van variatie in het systeem te begrijpen, daarna kunnen we eventueel besluiten om delen van die variatie te reduceren.

De vakgroep Quality and Reliability Engineering besteedt veel aandacht aan de bedrijfszekerheid van consumentenelektronica. Door de hoge innovatiegraad en de drang van fabrikanten om als eerste een nieuw product op de markt te hebben, is de bedrijfszekerheid het kind van de rekening. U kunt zich dat wel voorstellen. Als het een half jaar kost om een innovatief product te ontwikkelen en te fabriceren, dan is de bereidheid gering om ook nog eens een half jaar uit te trekken om het product grondig te testen.

Het gevolg is dat producten bij de gebruiker lang niet altijd vlekkeloos functioneren. Het ligt daarom voor de hand dat fabrikanten pogen om snel na de introductie vast te stellen welke problemen zich bij de gebruiker voordoen en hoe frequent. Helaas is dit geen eenvoudige procedure. Ik noem twee oorzaken:

1. Als een apparaat niet goed werkt, dan ligt dat tegenwoordig meestal niet aan het falen van een component. Meestal ligt het

aan het complexe samenspel tussen componenten, modules en/of apparaten. De oorzaak is daardoor moeilijk op te sporen, daar moeten specialisten aan te pas komen met speciale apparatuur. Het apparaat wordt dan gewoonlijk meegenomen naar een speciale werkplaats. Hierdoor wordt het product echter uit het systeem gelicht, en daardoor verdwijnt het samenspel dat tot het niet-correct functioneren leidde.

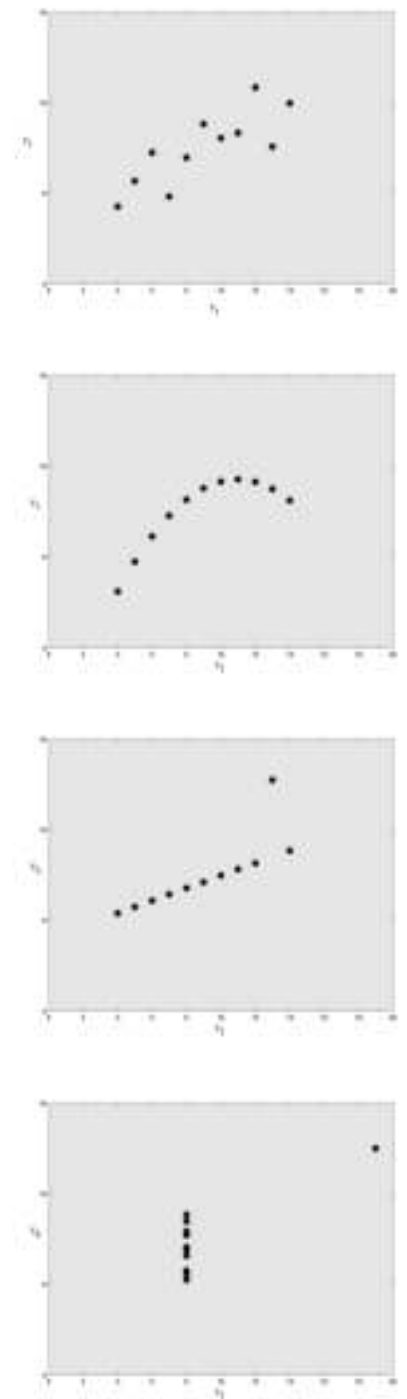
2. Door eindeloze logistieke processen is het heel normaal als de fabrikant na de start van de productie pas na een halfjaar de eerste terugkoppeling krijgt over veldproblemen. Het zou kunnen zijn dat dit komt omdat die problemen zo zeldzaam zijn, maar dat is helaas niet het geval. Na een halfjaar is het product vaak al niet meer te koop en daardoor ziet de ontwerper de veldinformatie als mosterd na de maaltijd. Voor productontwikkeling zou de Wet van Murphy als volgt kunnen worden geformuleerd:

*De informatie die een wijziging in een ontwerp noodzakelijk maakt, wordt pas aan de ontwerper geopenbaard nadat de productie al is gestart.*

#### De wet

Gelukkig beschermt de wet de consument tegen al te overmoedige acties van fabrikanten. Dit is niets nieuws, al zo'n 4000 jaar geleden werd van fabrikanten verwacht dat zij een kwalitatief fatsoenlijk product leverden. Het enige verschil met tegenwoordig is dat de straffen vroeger wat serieuzer waren. De oudste geschreven wettekst is zo'n kleine 4000 jaar oud en stamt uit Babylon. Daar leefden toen de Sumeriërs, een hoog ontwikkeld volk; zo kenden zij de stelling van Pythagoras al ruim 1000 jaar voor Pythagoras werd geboren. Ook het wiel is vermoedelijk door de Sumeriërs uitgevonden. Ik weet niet of zij al zover waren gevorderd met de bedrijfszekerheid, dat zij ook het reservewiel hebben uitgevonden.

In 1763 voor Christus versloeg Hammoerabi de Sumeriërs in Rim-Sin en dat was het begin van het Babylonische Rijk. Hammoerabi liet de al eeuwen bestaande gebruiken vastleggen in wetten. Wie de originele versie daarvan wil lezen, moet naar het Louvre gaan; daar staat de bijna drie meter hoge stèle waar de 282 wetten van Hammoerabi zijn ingebeiteld. Inbeiteln van wetteksten is lang in zwang gebleven; zo'n 500 jaar na Hammoerabi beitelde Mozes de tien geboden in de Stenen Tafelen. Die tien geboden zijn wat de inter-



**Figuur 2** Grafische weergave van de gegevens uit tabel 3

menselijke relaties betreft in wezen een korte samenvatting van de 282 wetten van Hammoerabi. Alleen voegde Mozes er niet-aardse wetten aan toe. Hammoerabi was zijn tijd ver vooruit, want hij hanteerde toen al een strikte scheiding van kerk en staat.

Het uitgangspunt van Hammoerabi is dat de sterke de zwakke niet mag onderdrukken. Dat wordt naar de huidige normen vaak wat zwaar aangezet, zoals in wet 229:



Blokdiagram van de V1

*Als een bouwmeester voor een particulier een huis gebouwd heeft, en de constructie is niet sterk genoeg, waardoor het huis instort en de bewoner doodt, dan moet ook de bouwmeester worden gedood.*

In gewone taal betekent dit niets anders dan dat de koper mag verwachten dat een deugdelijk product wordt geleverd. Wet 230 voerde de druk op de bouwmeester nog wat op:

*Als de zoon van de bewoner wordt gedood, dan moet ook de zoon van de bouwmeester worden gedood.*

Tegenwoordig vinden we dit oog-om-oog, tand-om-tand-principe niet humaan. Het doel om de misdadiger op te voeden tot een gewaardeerd medeburger weegt nu zwaarder dan de behoefte om te straffen. Wet 232 spreekt ons meer aan:

*Als goederen worden beschadigd, dan zal de bouwmeester alle schade vergoeden, bovendien zal hij het huis uit eigen middelen opnieuw opbouwen.*

Daar het Tweestromenland de bakermat van onze beschaving is, spreekt het vanzelf dat onze wetten zijn gebaseerd op de wetten van Hammoerabi. Ik noem twee van onze wetten die aansluiten bij de gedachte dat de consument moet worden beschermd.

Ik begin met de wet op de productaansprakelijkheid volgens het Burgerlijk Wetboek Boek 6, Titel 3, Afdeling 3 [11]. De kern van deze wet is dat een fabrikant gedurende 10 jaar na verkoop van het product verantwoordelijk wordt gehouden voor schade die het gevolg is van een gebrek in zijn product. Het begrip gebrek is breed gedefinieerd. Volgens artikel 186 is een product gebrekkig indien het niet de veiligheid biedt die men daarvan mag verwachten, alle omstandigheden in aanmerking

genomen. Schade kan betekenen dood of lichamelijk letsel, maar schade kan ook gevolgschade zijn.

Hoe zinvol deze wet ook is, ik denk dat vaker een beroep zal worden gedaan op de conformiteitswet die ons beschermt als een product niet doet wat wij er in redelijkheid van mogen verwachten. Deze wet heeft lak aan garantiebepalingen, maar gaat uit van de gedachte dat een product aan redelijke verwachtingen behoort te voldoen. Letterlijk staat in artikel 17 sub 2 van het Burgerlijk Wetboek Boek 7, Titel 1, Afdeling 2 [11]:

*De koper mag verwachten dat de zaak de eigenschappen bezit die voor een normaal gebruik daarvan nodig zijn en waarvan hij de aanwezigheid niet behoefde te betwijfelen, alsmede de eigenschappen die nodig zijn voor een bijzonder gebruik dat bij de overeenkomst is voorzien.*

Ik heb sterk de indruk dat winkeliers hun uiterste best doen om deze wet uit de publiciteit te houden. Sterker nog, zij trachten u te verleiden om tegelijk met uw aankoop nog een aanvullende verzekering te kopen om de garantietermijn met één of twee jaar op te rekken. Onzin, want dan betaalt u voor dingen die in de conformiteitswet al zijn geregeld. Postbus 51 van het Ministerie van Justitie is daar helder over [7]. Ik citeer:

*Vaak biedt een verkoper tegen een extra bedrag bovenop de koopsom een aanvullende garantie in de vorm van een serviceverzekering. Een koper doet er verstandig aan goed te overwegen wat hij hierdoor extra krijgt bovenop de wettelijke rechten die de consument al heeft. De serviceverzekering biedt mogelijk niet veel meer dan de koper al aan wettelijke rechten heeft.*

Postbus 51 geeft het volgende voorbeeld:

*De verkoper of de producent garandeert bijvoorbeeld dat een horloge zeker 40 jaar zal werken. Gaat het horloge eerder stuk, dan krijgt de koper een nieuwe. De koper kan, indien reparatie mogelijk is, ook verlangen dat het horloge wordt gerepareerd.*

Het aardige van de wet is dat hij niet alleen goed is voor u, maar zeker ook voor mijn collega's in de vakgroep Quality and Reliability Engineering, want hierdoor is de relevantie van hun werkterrein in de wet verankerd.

### Oorlogstuig

Ieder van mijn generatie herinnert zich dat op 4 oktober 1957 de Spoetnik werd gelanceerd, de eerste kunstmaan van de historie. De Spoetnik was een soort aluminium kogel met een diameter van 58 cm en een gewicht van 84 kg. De lancering maakte uiteraard bui-

tengewoon veel indruk in de wereld en was zeker voor de Amerikanen een schok. Tenslotte hadden zij praktisch alle raketgeleerden uit nazi-Duitsland naar de VS gehaald, met als kopstuk, natuurlijk, Wernher von Braun.

Al vanaf 1936 werkten Von Braun en andere raket specialisten in Peenemünde, een legerbasis in de Baltische Zee, aan raketten [5]. Hitler zag aanvankelijk niet veel heil in die activiteiten. Dat veranderde pas in 1943, toen hij inzag dat de oorlog voor hem verkeerd dreigde af te lopen. Eén groep werkte aan de V1 en een andere, onder leiding van Von Braun, aan de V2. De V2 was een echte supersonische raket; hij vloog met zo'n kleine 5000 km per uur in 5 minuten van Den Haag naar Londen. Het belangrijkste doel van de V2's was trouwens niet Londen maar Antwerpen, omdat Antwerpen voor de geallieerden de belangrijkste aanvoerhaven voor materieel was.

De V1 was geen raket, maar een onbemand vliegtuigje. Letterlijk een vliegende bom, met een lengte van ongeveer 8 meter, met 900 kg springstof en een straalmotor. Hij vloog met zo'n 600 km/uur in ruim 20 minuten van Noord Frankrijk naar Londen. De V1 was veel goedkoper en sneller te produceren dan de V2. De namen V1 en V2 kwamen uit het brein van Goebbels, die niet voor niets minister van propaganda was. De V stond voor Vergeltung.

Ik concentreer mij op de bedrijfszekerheid van de V1 en begin daarom met een eenvoudige technische beschrijving. De V1 kon na de lancering niet meer worden bestuurd, dus de koers moest van tevoren zorgvuldig worden bepaald. Om de koers in het horizontale vlak te handhaven was in de neus een gyrokompas ingebouwd; een barometer moest zorgen dat de juiste hoogte werd aangehouden.

Als de V1 boven Londen was gearriveerd, dan moest de motor stoppen. Hiertoe was de neus voorzien van een kleine propeller. Als deze het vooraf berekende aantal omwentelingen had gemaakt, dan werden de hoogterolers gedraaid, ging de neus naar beneden en stopte de benzinetoevoer vanzelf. Bij de inslag werd de stroomkring van het ontstekingsmechanisme gesloten en dit leidde tot de beoogde ontploffing.

Het werkte allemaal niet erg nauwkeurig, maar het doel was ook niet om strategische objecten te vernietigen, het doel was om dood en verderf te zaaien. Op 13 juni 1944 werden de eerste tien V1's afgevuurd. Het was geen groot succes. Vier crashten ter plekke, twee verdwenen spoorloos in het Kanaal, slechts vier haalden de overkant van het kanaal; drie daarvan kwamen in het open veld terecht en één kwam zo'n drie km van Tower Bridge,

zijn eigenlijke doel. Het resultaat was drie doden en een beschadigde treinbrug. Er werden ruim 9000 V1's op Engeland afgevuurd en ongeveer 2400 hiervan bereikten hun bestemming. De piloten van de RAF vonden het een sport om naast de V1 te vliegen, hun vleugel onder de vleugel van de V1 te brengen en het ding dan om te kieperen.

De hoofdreden voor de onbetrouwbaarheid van de V1 (en ook van de V2) was het ontbreken van elementaire kennis van kansrekening. Ik zal dat toelichten.

Als we de V1 terugbrengen tot zijn meest elementaire onderdelen, dan ziet hij er uit zoals in figuur 3 is weergegeven.

De V1 functioneert alleen naar behoren als elk van de vier delen correct functioneert. Dus én de motor, én het brandstofsysteem, én het navigatiesysteem, én de explosieven.

Von Braun dacht dat de kans dat een systeem werkt wordt bepaald door de zwakste schakel. Stel dat elke module met kans 0.8 correct functioneert. Volgens Von Braun zou dan 80% van de V1's in Londen ontploffen. De kansrekening leert echter dat onder deze omstandigheden slechts 41% in Londen zal ontploffen.

Robert Lüsser was de projectleider van de V1. Hij zag dat het toestel buitengewoon onbetrouwbaar was, maar hij had geen idee waardoor dat kwam. Ten einde raad haalde hij er een wiskundige bij, Perushka. Deze rekende hem voor hoe je de betrouwbaarheid van een seriesysteem bepaalt. Vanaf dat mo-

ment vloog de betrouwbaarheid van de V1 omhoog. Gedurende de laatste maanden van het gebruik van de V1 functioneerde zo'n 95% volgens het boekje. Het tragische voor Lüsser was dat toen de tegenmaatregelen van de Engelsen ook aardig op orde waren, waardoor nauwelijks meer dan 5% van de op Londen gerichte V1's door de diverse veiligheidslagen drong.

Ondanks de beperkingen van de V1 waren de geallieerden er uiteraard behoorlijk van onder de indruk. Een belangrijke strategische vraag luidde: konden de Duitsers hun vliegende bommen doeltreffend richten, of werden ze op goed geluk richting Londen geschoten? Om deze vraag te beantwoorden haalde men in Londen in navolging van Von Bortkiewicz de Poissonverdeling uit de kast [3]. Als de Duitsers de V1's niet goed konden richten, dan zou het aantal inslagen per hectare in Londen Poissonverdeeld moeten zijn. Met de doodgetrapte soldaten uit het begin van dit college in het achterhoofd, kost het u natuurlijk geen moeite om de geëigende aanpak te bepalen:

- u verdeelt Londen in stukken van gelijk oppervlak
- u telt hoeveel V1's in elk stuk neerkwamen
- u vergelijkt de gevonden frequenties met de verwachte frequenties volgens de Poissonverdeling.

Tijdens de oorlog verdeelde men een deel van Zuid-Londen in 576 stukken van 25 hectare en hield men bij hoeveel V1's in elk stuk neerkwamen. In het betreffende deel van Lon-

| Aantal inslagen | Waargenomen frequentie | Frequentie volgens Poissonverdeling |
|-----------------|------------------------|-------------------------------------|
| 0               | 229                    | 226.7                               |
| 1               | 211                    | 211.4                               |
| 2               | 93                     | 98.5                                |
| 3               | 35                     | 30.6                                |
| 4               | 7                      | 7.1                                 |
| $\geq 5$        | 1*                     | 1.6                                 |
| Totaal          | 576                    | 576                                 |

**Tabel 4** Frequentieverdeling van het aanslagen inslagen per stuk van 25 hectare in Zuid-Londen. \* Het aantal inslagen was 7.

den werden 537 inslagen geteld. Tabel 4 geeft de verdeling van de V1's over die 576 stukken.

De Poissonverdeling met  $\lambda = 537 : 576 = 0.9323$  inslagen per 25 hectare levert de verwachte frequenties in de rechter kolom. De overeenkomst tussen de waargenomen frequentie en de verwachte frequentie is dermate duidelijk dat men concludeerde dat de Nazi's niet konden richten. De tabel geeft dus een statistische onderbouwing voor de stelling dat de Duitsers niet uitwaren op het vernietigen van relevante doelen, maar dat dood en verderf zaaien de insteek was. Het nut van deze kennis was dat belangrijke veiligheidsinstallaties het beste konden worden beschermd door ze te verspreiden over het platteland; de kans was dan heel klein dat de Duitsers die installaties zouden raken.  $\leftarrow$

## Literatuur

- 1 Anscombe, F.J. (1973): Graphs in statistical analysis. *American Statistician*, 27, 17–21.
- 2 Barnett, V. (1973): *Comparative Statistical Inference*. Wiley, London.
- 3 Clarke, R.D. (1946): An application of the Poisson distribution. *Journal of the Institute of Actuaries*, 22, 481.
- 4 Fisher, R.A. (1966): *Design of Experiments*. Oliver and Boyd, London.
- 5 Kokhuis, G.J.I. (1972): *Van V1 tot Ruimtevaart*. Duwaer & Zonen, Amsterdam.
- 6 Poisson, S-D. (1837): *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités*. Des Regles Generales Du Calcul Des Probabilites, Paris, Bachelier.
- 7 Postbus 51 (2004): <http://www.justitie.nl/publicaties/brochures.en.factsheets/factsheets>
- 8 Savage, L.J. (1961): *The Subjective Basis of Statistical Practice*. Report, University of Michigan, Ann Arbor.
- 9 Von Bortkiewicz, L.J. (1898): *Das Gesetz der Kleinen Zahlen*. Teubner, Leipzig.
- 10 Von Bortkiewicz, L.J. (1915): Realismus und Formalismus in der mathematischen Statistik. *Allgemeines Statistisches Archiv*, 9, 225–256.
- 11 Wetten (2004): <http://wetten.overheid.nl>
- 12 Whitaker, L. (1914): On the Poisson law of small numbers. *Biometrika*, 10, 36–71.

Frank den Hollander

EURANDOM  
Postbus 513  
5600 MB Eindhoven  
denhollander@eurandom.tue.nl

Fabio Toninelli

Institut für Mathematik  
Universität Zürich  
Winterthurerstrasse 190  
CH-8057 Zürich  
toninell@math.unizh.ch

## Research Spin glasses

# A mystery about to

The study of spin glasses started some thirty years ago, as a branch of the physics of disordered magnetic systems. In the late 1970's and early 1980's it went through a period of intense activity, when experimental and theoretical physicists discovered that spin glasses exhibit new and remarkable phenomena. However, a real understanding of the behaviour of these systems was not achieved and little progress was made in the next twenty years, especially in mathematical terms. In the 1990's various related systems were studied with mounting success, most notably, neural networks and random energy models. Since a couple of years the field has again entered a phase of exciting development. Some of the main mathematical questions surrounding spin glasses are currently being solved and a full understanding is at hand. In this paper we sketch the main steps in this development, which is interesting not only for the physical and the mathematical relevance of this research field, but also because it is an example where scientific progress follows a tortuous path.

Fabio Toninelli worked as a postdoc in the Random Spatial Structures programme at EURANDOM, and recently left for a post-doc position at the University of Zürich. Frank den Hollander is supervisor of the RSS-group and scientific director of EURANDOM.

Let us begin with a brief history of magnetic materials. All matter is composed of a large number of atoms. Atoms carry a *spin*, i.e., a microscopic 'magnetic moment' generated by the motion of the electrons around the nucleus. This spin, which in turn generates a microscopic magnetic field around the atom, can be viewed as a vector in three-dimensional space. To simplify matters, assume that for this vector only two opposite directions are allowed, *up* and *down*. In *ferromagnets*, materials capable of attracting

pieces of iron placed in their vicinity, each spin has a tendency to align with the spins in its neighbourhood. At high temperature, the motion of the spins is so erratic that at any time about half of them are pointing up and half are pointing down. Consequently, the net macroscopic magnetisation is zero, i.e., the individual microscopic magnetic fields generated by the spins cancel each other out. As the temperature is lowered, the erratic motion of the spins reduces and the spins become more and more sensitive to their mutual

interaction. The characteristic feature of ferromagnets is that there is a *critical temperature*,  $T_c$ , below which the spins exhibit *collective behaviour* in that a majority of them point in the same direction (either a majority up or a majority down). This phenomenon is called *spontaneous magnetisation* (see Figure 1).

Below  $T_c$  the individual microscopic magnetic fields sum up coherently to create a macroscopic magnetic field, which is what is ultimately responsible for the ferromagnet's capability to attract iron. It is important to emphasize that this seemingly natural picture took a long time to emerge — from 1895 (Curie) until 1944 (Onsager) — and that the genius of many illustrious theoretical physicists and mathematicians was necessary in order to fully establish that this is what actually happens.

The microscopic theory that explains the collective behaviour of atoms is called *statistical physics*. According to this theory, a system in equilibrium is described with the help of an energy functional, called *Hamiltonian*, which associates with each microscopic configuration of the system a macroscopic energy. In our case a config-

# be solved

uration means a complete list of the orientations of all the spins. If the spins are located at the sites  $x$  in a macroscopic box  $\Lambda$ , and if  $s_x \in \{+1, -1\}$  denotes the value of the spin at site  $x$  (+1 for up and -1 for down), then the configuration is

$$s = \{s_x : x \in \Lambda\}$$

and the Hamiltonian of the ferromagnet is

$$H(s) = - \sum_{\substack{x,y \in \Lambda \\ x \sim y}} s_x s_y,$$

where  $x \sim y$  means that  $x$  and  $y$  are neighbouring sites. Thus, each pair of neighbouring aligned spins gets energy -1, each pair of neighbouring anti-aligned spins gets energy +1. At a given temperature  $T$ , the state of the system is described by the *Gibbs distribution* associated with  $H$ ,

$$\mu_T(s) = \frac{1}{Z_T} e^{-H(s)/kT}, \quad s \in \{+1, -1\}^\Lambda,$$

where  $k$  is Boltzmann's constant and  $Z_T$  normalizes  $\mu_T$  to a probability distribution:  $\mu_T(s)$  is the probability that the system assumes configuration  $s$ . When  $T$  is

lowered,  $\mu_T$  tends to concentrate more and more around the configurations having minimal energy, the so-called *ground states* of the system. For the ferromagnet these ground states are those configurations where all the spins have the same value. Indeed, it is only when  $s_x = +1$  for all  $x$  or  $s_x = -1$  for all  $x$  that all terms in  $H(s)$  give a negative contribution, leading to the maximal value for  $\mu_T(s)$ . This maximum is a pronounced peak when  $T$  is small, explaining why for low temperature in a typical configuration the majority of the spins is aligned.

## Spin glasses

Now that we have briefly introduced some important concepts from the theory of magnetism, we are in a position to explain what spin glasses are. Consider a system of spins, as before, but assume that some pairs of neighbouring spins prefer to be aligned, while the others prefer to be anti-aligned. The former are said to have a *ferromagnetic* interaction, the latter an *anti-ferromagnetic* interaction. Say that for any given pair of spins the type of interaction is chosen *randomly* with equal probability. It is because of this randomness in the in-

teractions that such systems are called *disordered*.

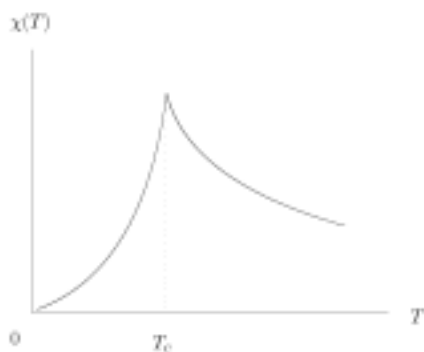
In terms of the Hamiltonian, the above model can be defined as

$$H(s) = - \sum_{\substack{x,y \in \Lambda \\ x \sim y}} J_{xy} s_x s_y,$$

where, for each  $x \sim y$ ,  $J_{xy}$  can be either +1 (indicating a ferromagnetic interaction) or



**Figure 1** Spontaneous magnetisation: the magnetisation  $m(T)$  as a function of the temperature  $T$  for a typical configuration of the spins;  $m(T)$  is the difference between the number of up-spins and the number of down-spins divided by the total number of spins. The characteristic feature of ferromagnets is that there is a *critical temperature*,  $T_c$ , below which the spins exhibit *collective behaviour* in that a majority of them point in the same direction (either a majority up or a majority down). By symmetry, configurations with the opposite magnetisation  $-m(T)$  are equally likely.



**Figure 2** The magnetic susceptibility  $\chi(T)$  as a function of the temperature  $T$ .  $\chi(T)$  measures the sensitivity of the system to the application of a magnetic field and shows a cusp at the critical temperature  $T_c$ . This cusp signals a freezing of the spins in random directions.

–1 (indicating an anti-ferromagnetic interaction), with probability  $\frac{1}{2}$  each. This Hamiltonian was introduced in 1975 by Edwards and Anderson [8], in an attempt to describe a class of disordered magnetic systems found a few years earlier by experimental physicists and termed ‘spin glasses’. Examples in this class are disordered magnetic alloys, i.e., metals containing random magnetic impurities, such as AuFe or CuMn.

What is the analogue in this case of the behaviour depicted in Figure 1? Even at low temperature there is no reason why the majority of the spins should be aligned. Indeed, due to the equal competition between ferromagnetic and anti-ferromagnetic interactions the corresponding magnetisation  $m(T)$  will be zero for all  $T$ . One might thus conclude that the model simply has no critical temperature and therefore exhibits no interesting phenomena.

However, in the early 1970’s it was found *experimentally*, by Cannella and Mydosh [6] and by Tholence and Tournier [19], that there still is a critical temperature below which the system undergoes an *ordering transition*, in the sense that the spins act coherently in some sort of way (see Figure 2). This fact came as a surprise to the physicists.

In simplified terms, what happens is the following. Above  $T_c$ , the spins behave essentially independently from one another, i.e., their orientation is hardly influenced by the spins in their neighbourhood. As a result, the typical configurations of the system are those that are completely disordered. This is true both for the ferromagnet and for the spin glass. Below  $T_c$ , however, the spins show cooperative behaviour and can be found in

more than one class of typical configurations. In the case of the ferromagnet described above, there are *two* classes of typical configurations, namely, those having magnetisation  $+m(T)$  and  $-m(T)$ , respectively. These classes of configurations are called *pure states*. In the case of the spin glass, instead, there are *many* pure states, which are not characterised by a non-zero magnetisation, but rather by the occurrence of many ‘mesoscopic domains’ (microscopically large but macroscopically small) in which the spins show some form of ‘local magnetic order’. In fact, a whole ‘hierarchy’ of such domains occurs. At present it is not yet clear what the features of these domains precisely are. The important point, however, is that the existence of a transition at  $T_c$  is experimentally observable.

The Edwards-Anderson model is far too difficult to be analysed theoretically in detail, even today. In fact, condensed matter physicists have been disputing heatedly in the past three decades about what precisely happens at low temperature. In 1975 Sherrington and Kirkpatrick [15] introduced a simplified version of this model. The difference with the Edwards-Anderson model is that each spin is influenced not only by its neighbouring spins, but by *all* the spins in the system. The corresponding Hamiltonian reads

$$H(s) = -\frac{1}{|\Lambda|^{1/2}} \sum_{\substack{x,y \in \Lambda \\ x \neq y}} J_{xy} s_x s_y,$$

where  $J_{xy}$  is +1 or –1, with probability  $\frac{1}{2}$  each, for all  $x \neq y$  (rather than for  $x \sim y$  only), and a factor  $1/|\Lambda|^{1/2}$  is added to normalise the interaction. In statistical physical jargon, the Sherrington-Kirkpatrick model is a *mean-field approximation* of the Edwards-Anderson model. Strange as it may seem, this type of approximation actually makes the model easier.

For a history of spin glasses up to 1986, we refer to Binder and Young [2].

### Replica symmetry breaking

The article by Sherrington and Kirkpatrick carried the rather innocent title *A solvable model of a spin glass*. The authors never imagined that they were giving birth to one of the most exciting enigmas of modern statistical physics. The solution they proposed, assuming so-called ‘repli-

ca symmetry’, turned out to be incorrect, and even self-contradictory as they themselves realised very well. It was only a few years later, in 1980, that the Italian theoretical physicist Giorgio Parisi [14] proposed a different solution, known as the *continuous replica symmetry breaking scheme*, which could account for many of the experimental observations (both laboratory experiments and computer simulations).

Replica symmetry breaking theory predicts the existence of a collective behaviour with many *exotic features*, never before observed in any physical system. In simple words, Parisi’s theory predicts that the Hamiltonian of the Sherrington-Kirkpatrick model has *many* ground states (growing in number as the volume of the system increases), which are *highly disordered* and which do not seem to be related to one another via simple transformations. In contrast, recall that the ferromagnetic Hamiltonian has only *two* ground states, one with all spins up and one with all spins down, which are *fully ordered* and which are related to one another via a global inversion of all the spins. Moreover, it turns out that for the Sherrington-Kirkpatrick model, by choosing a *different realisation of the disorder* (i.e., a different choice for the random interactions  $J_{xy} = \pm 1$ , again with probability  $\frac{1}{2}$  each), the new ground states in general have nothing to do with the old ones. Even more surprisingly, if the disorder realisation is kept fixed but the volume of the system is increased, then the new ground states are not related to the old ones either (‘chaotic size dependence’). In spite of this extremely irregular situation, according to Parisi’s theory the collection of *all* the ground states has some regular, highly non-trivial, geometrical structure, called *ultrametricity*, which is *not* modified when the disorder realisation is changed. So, what distinguishes the region above the critical temperature  $T_c$  from the one below, for the Sherrington-Kirkpatrick model? Suppose that we take two copies — two *replicas* — of the system, with the *same* realisation of the disorder, and compute the *overlap* between them, i.e.,

$$q(s^{(1)}, s^{(2)}) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda} s_x^{(1)} s_x^{(2)},$$

where  $s^{(1)}$  and  $s^{(2)}$  are the configurations of the first and the second replica, respec-

tively. Then, above  $T_c$  the overlap is zero for typical configurations (typical with respect to the Gibbs distribution and the disorder realisation), while below  $T_c$  it can assume a range of non-zero *random* values. This can be explained as follows. Recall that, at low temperature, the Gibbs distribution is peaked around the ground states of the system. Consequently, the configurations in the two replicas will each be very close to one of the ground states (not necessarily the same one), which causes a non-zero overlap. Due to the erratic nature of the ground states, the overlap does not have a fixed value: it varies randomly with the ground states.

Replica symmetry breaking theory came as a shock to the physics community, not only for the novelty of the phenomena predicted, but also for the way in which it was presented. It happens frequently that theories formulated by physicists are not mathematically rigorous, and contain a number of assumptions and simplifications that need to be justified. Often full mathematical proofs come only much later. Here the situation was more delicate: the works of Parisi and co-workers were not only non-rigorous, they were based on such strange and daring techniques that it was hard to see how the relevant statements could be formulated in a proper mathematical language. This is why part of the mathematics community has regarded Parisi's theory as somewhat magic. Still, the phenomena predicted by the theory were so appealing, and its range of applications so wide, that it soon became a standard tool for theoretical physicists, who were much more excited by its power than worried by its lack of mathematical sense and precision. One could say that Parisi had discovered a new world.

A review of the results of replica symmetry breaking theory up to 1987 can be found in Mézard, Parisi and Virasoro [12].

### Towards a solution

The reader might wonder at this point whether all the excitement about the Sherrington-Kirkpatrick model is really justified. After all, it is only an approximate version of the more difficult — but more realistic — Edwards-Anderson model, which remains unsolved. In fact, it is not yet clear how much we really learn about the Edwards-Anderson model from a detailed analysis of the Sherrington-

Kirkpatrick model. According to a scenario put forward by Newman and Stein (see Newman [13]), the behaviour of the two models may well turn out to be qualitatively different: the main phenomena related to replica symmetry breaking may not occur in 'short range' models like the Edwards-Anderson model. Still, the excitement is understandable. First, the study of the Sherrington-Kirkpatrick model has taught us a lot and continues to do so. In the attempts to understand this model, new ideas and techniques have been invented and further developed that are extremely interesting and that have turned out to be fruitful for other statistical physical models as well. Second — and more importantly — it has gradually become clear that the knowledge gained through the analysis of the Sherrington-Kirkpatrick model can be applied to a variety of — apparently unrelated — problems in mathematics, physics and engineering. These problems have therefore come to be considered as belonging to the realm of spin glasses. Examples are neural networks (models for memory and learning), error correcting codes (used in communications engineering to recover the information transmitted through a noisy channel) and random combinatorial optimisation (problems of decision in the presence of many mutually competing requirements).

From the moment the replica symmetry breaking theory came into being, trying to prove — or to disprove — the predictions of Parisi and co-workers became an exciting challenge for many among the best mathematical physicists. The task proved to be quite hard and frustrating, and for almost twenty years progress was painfully slow. Much effort was devoted to the search for and the study of mathematical models that would be easier than the Sherrington-Kirkpatrick model, but that would still exhibit replica symmetry breaking effects. In particular, the Generalized Random Energy Model, introduced by Derrida [7] in 1985, shows striking similarities with the Sherrington-Kirkpatrick model, yet is exactly solvable. The structure of the Gibbs distribution in this model has been analysed in full mathematical detail by Bovier and Kurkova [4]. Similarly, extensive rigorous results have been obtained by Bovier, Gayraud and Picco for the Hopfield model of neural networks (see [3] and references therein). The

latter is a paradigm for auto-associative memory, i.e., systems that try to recognize words — or *patterns* — that were previously memorized. In this case, the spins should be interpreted as the states of the neurons located at the various sites:  $s_x = +1$  if the neuron at site  $x$  is sending electric pulses,  $s_x = -1$  if it is not. When varying the number of memorized patterns, the behaviour can range from a ferromagnetic type to a spin glass type. For an overview of the expanding panorama of spin glasses up to 1998, see Bovier and Picco [5].

It gradually became clear — more through failures than through positive results — that completely new ideas were needed to make significant progress in the comprehension of replica symmetry breaking. It is only in the last few years that we are witnessing a rapid and unexpected boost in the mathematical understanding of the key questions. Surprisingly, the missing new ideas turned out to be relatively simple, although they were very hard to find. The first steps in this breakthrough were taken in 2000–2002 by the Italian mathematical physicist Francesco Guerra [10], together with Fabio Toninelli [11], building on earlier work by Ghirlanda and Guerra [9]. As a result, some of the mathematical questions that had been tackled in vain in the preceding twenty years could finally be solved. One important result is the existence of the 'thermodynamic limit' for the Sherrington-Kirkpatrick model. This means that physical quantities, like the energy of the ground states divided by the volume of the system, converge to a well defined limit when the volume of the system tends to infinity. The proof of this fact is quite standard in statistical physics for models with 'short range' interactions, but it is not for mean-field models, especially not for disordered ones. Another important result is that with the help of certain rigorous comparison identities — so-called *sum rules* — the thermodynamic properties of the Sherrington-Kirkpatrick model can be compared with the corresponding expressions given by Parisi's theory. These sum rules concern the *free energy*  $f(T, |\Lambda|)$  as a function of the temperature  $T$  and the volume  $|\Lambda|$ , a quantity of central importance in statistical physics, from which all thermodynamic properties of the system can be deduced. This free energy is related to the Gibbs distribution  $\mu_T$  via the relation  $f(T, |\Lambda|) =$

$-kT \log Z_T$ . The result is that  $f(T, |\Lambda|)$  can be related to the free energy predicted by Parisi's theory via an identity of the type

$$f(T, |\Lambda|) = f^{\text{Parisi}}(T, |\Lambda|) + R(T, |\Lambda|),$$

where  $R(T, |\Lambda|)$  is an 'error term'. Proving the validity of Parisi's theory is equivalent to showing that  $R(T, |\Lambda|)/|\Lambda|$  tends to zero in the thermodynamic limit  $|\Lambda| \rightarrow \infty$ . A particularly important fact is that  $R(T, |\Lambda|)$  turns out to be non-negative, so that Parisi's free energy at least is a lower bound for  $f(T, |\Lambda|)$ , a fact that itself is rich in physical implications (see Toninelli [20]). Subsequently, Aizenman, Sims and Starr [1] obtained Guerra's sum rules through a general variational prin-

ciple and showed that Parisi's free energy arises from a restriction of this variational principle to 'ultrametric structures'. This restriction is optimal precisely when replica symmetry breaking theory correctly describes the Sherrington-Kirkpatrick model.

These new ideas provoked great excitement in the scientific community, and new feverish work began. The last part of this story is still in progress and is keeping the excitement high. In July 2003 the French mathematician Michel Talagrand, who has been working on the problem intensively and who has introduced many new ideas in this field since the mid 1990's (see [16]), announced (see [17]) that he was able to complete the mathematical proof of Parisi's solution, extending the method of sum rules invented by Guerra. The de-

tails of the proof were made public only in April 2004 [18]. It is not hard to imagine the impression this development has produced on the experts. It seems that the full mathematical justification of Parisi's theory, explaining the mysterious features of the Sherrington-Kirkpatrick model, is finally at hand.

Currently, research in this rapidly evolving field is being carried out by a number of groups, including the RSS-group at EURANDOM, the European institute for research on stochastic phenomena located at the Technical University of Eindhoven, The Netherlands. 

### Acknowledgment

The authors are grateful to Aernout van Enter (Groningen) for detailed comments on a draft of this paper.

### References

- 1 M. Aizenman, R. Sims and S. Starr, 'An extended variational principle for the SK spin-glass model', *Phys. Rev. B* (68) (2003) 214403.
- 2 K. Binder and A.P. Young, 'Spin glasses: Experimental facts, theoretical concepts, and open questions', *Rev. Mod. Phys.* (58) (1986) p. 801–976.
- 3 A. Bovier and V. Gayrard, 'Hopfield models as generalized random mean field models', *Mathematical Aspects of Spin Glasses and Neuronal Networks*, Progress in Probability (41), Birkhäuser, Basel, 1998, p. 3–89.
- 4 A. Bovier and I. Kurkova, 'Rigorous results on some simple spin glass models', *Markov Proc. Related Fields* (9) (2003) p. 209–242.
- 5 A. Bovier and P. Picco (eds.), *Mathematical Aspects of Spin Glasses and Neuronal Networks*, Progress in Probability (41), Birkhäuser, Basel, 1998.
- 6 V. Cannella and J.A. Mydosh, 'Magnetic ordering in gold-iron alloys', *Phys. Rev. B* (6) (1972) p. 4220–4237.
- 7 B. Derrida, 'A generalization of the random energy model which includes correlations between energies', *J. Physique Lett.* (46) (1985) p. L401–L407.
- 8 S.F. Edwards and P.W. Anderson, 'Theory of spin glasses', *J. Phys. F: Metal Phys.* (5) (1975) p. 965–974.
- 9 S. Ghirlanda and F. Guerra, 'General properties of overlap distributions in disordered spin systems. Towards Parisi ultrametricity', *J. Phys.* (A31) (1998) p. 9149–9155.
- 10 F. Guerra, 'Broken replica symmetry bounds in the mean field spin glass model', *Commun. Math. Phys.* (233) (2003) p. 1–12.
- 11 F. Guerra and F.L. Toninelli, 'The thermodynamic limit in mean field spin glass models', *Commun. Math. Phys.* (230) (2002) p. 71–79.
- 12 M. Mézard, G. Parisi and M.A. Virasoro, *Spin Glass Theory and Beyond*, World Scientific, Singapore, 1987.
- 13 C.M. Newman, *Topics in Disordered Systems*, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1997.
- 14 G. Parisi, 'The order parameter for spin glasses: a function on the interval  $[0, 1]$ ', *J. Phys.* (A13) (1980) p. 1101–1112.
- 15 D. Sherrington and S. Kirkpatrick, 'A solvable model of a spin-glass', *Phys. Rev. Lett.* (35) (1975) p. 1792–1796.
- 16 M. Talagrand, *Spin Glasses: A Challenge for Mathematicians*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* (46), Springer, Berlin, 2003.
- 17 M. Talagrand, 'The generalized Parisi formula', *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* (337) (2003) p. 111–114.
- 18 M. Talagrand, 'The Parisi formula', to appear in *Ann. Math.*
- 19 J.L. Tholence and R. Tournier, 'Susceptibility and remnant magnetization of a spin glass', *J. Phys. (Paris) Colloq.* (35) (1974) C4, p. 229–235.
- 20 F.L. Toninelli, 'About the Almeida-Thouless transition line in the Sherrington-Kirkpatrick mean field spin glass model', *Europhys. Lett.* (60) (2002) p. 764–767.

## Chris Heunen

Faculteit NWI  
Radboud Universiteit Nijmegen  
Postbus 9010  
6500 GL Nijmegen  
heunen@math.ru.nl

## Dick van Leijenhorst

Faculteit NWI  
Radboud Universiteit Nijmegen  
Postbus 9010  
6500 GL Nijmegen  
bolke@cs.ru.nl

# Tensegrities

Wie wel eens het Kröller-Müller museum heeft bezocht, zal in de beeldentuin zeker de hoge toren, opgetrokken uit louter stalen balken en kabels, hebben gezien. Deze 'Needle Tower' is een werk van Kenneth Snelson en dit beeld is niet de enige vorm die op deze manier is te construeren. In dit artikel wordt ingegaan op enkele wiskundige aspecten van deze constructies: hoe kunnen we deze zogenaamde tensegrities, of houtje-touwtje-figuren, klassificeren op structuur? Chris Heunen studeert momenteel af op het gebied van complexiteitstheorie bij onder andere Dick van Leijenhorst, universitair hoofddocent aan de Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica van de Radboud Universiteit Nijmegen. Zij stellen een nieuwe aanpak ter classificatie voor, waarbij ze echter snel tegen complexiteitstheoretische harde problemen aanlopen.

Een *tensegrity* is een structuur die zijn integriteit behoudt onder spanning. Het concept is van Kenneth Snelson ([10]), een Amerikaanse beeldhouwer, en is populair geworden door de befaamde architect Buckminster Fuller. De voornaamste toepassingen liggen dan ook in de bouwkunde: vanwege hun geringe gewicht, opvouwbaarheid, en de geringe invloed van uitwendige krachten, zijn tensegrities ideaal voor bijvoorbeeld daken van voetbalstadia. Maar ook in de ruimtevaart liggen toepassingen, en in de celbiologie.

Tensegrities bestaan slechts uit twee elementen: balken en kabels. Tenminste, zo worden ze in de bouwkunde genoemd. Maar je kunt ook zelf speelgoedvarianten construeren uit houtjes en

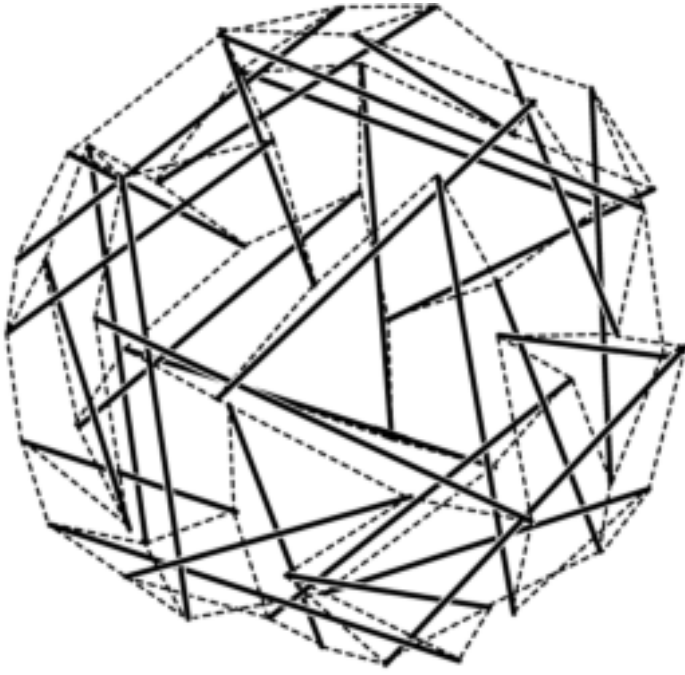
touwtjes, en ze hebben dan ook wat weg van *Hoberman spheres* en *Bucky balls*. Als je het goed doet, kun je de touwtjes zelfs vervangen door elastiekjes, zonder dat dat invloed heeft op het uiterlijk: in plaats van een rigide bouwwerk krijg je er dan een die vanzelf zijn vorm weer aanneemt na een val of een mep. (Maar daarover later meer.) De touwtjes houden dus tegelijkertijd het hele bouwsel bijeen maar de houtjes uit elkaar.

De figuren zijn niet alleen fascinerend om te zien (Snelson maakt er kunstwerken van) en om mee te spelen, maar ook wiskundig interessant: wat is een tensegrity eigenlijk, wiskundig gezien? Hoe kan het zijn vorm behouden? Kunnen we ze klassificeren? Velen is groepentheorie aangeleerd aan de hand van de 17 behangpatronen. Zo lijken ook de wat onbekendere tensegrities geschikt om mooie wiskunde met een fraai voorbeeld te ondersteunen.

## Wat is een tensegrity?

Laten we maar meteen beginnen met de definities en eisen. Een tensegrity is een verzameling punten  $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{R}^3$ . Tussen twee van zulke punten loopt ofwel een houtje, ofwel een touwtje, ofwel niks. Dit stellen we voor met de 'typefunctie'  $t : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \{\text{houtje, touwtje, niks}\}$ .

Elke verbinding heeft een bepaalde 'stijfheid'; dit modelleren we met een functie  $c : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbf{R}^+$ . Voor elastiek zal  $c$  kleiner zijn dan voor staalkabel, want de eerste 'trekt minder hard' dan de laatste bij gelijke uitrekking. Uiteraard is  $c(i, j) = 0$  als  $v_i$



Een tensegrity met 30 houtjes (doorgetrokken) en 70 touwtjes (gestippeld)

en  $v_j$  niet verbonden zijn. (Natuurkundigen zullen  $c$  als de veerconstante herkennen.)

Tenslotte veronderstellen we een functie  $r : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , die de rustlengte van elke verbinding representeert. Te allen tijde hebben we dus voor elke  $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$t(i, j) = \text{houtje} \Rightarrow \|v_i - v_j\| \leq r(i, j)$$

$$t(i, j) = \text{touwte} \Rightarrow \|v_i - v_j\| \geq r(i, j)$$

Een houtje 'duwt een punt weg', terwijl een touwtje 'aan een punt trekt'; het lijkt misschien verrassend dat houtjes uit kunnen rekken, maar in de bouwkunde worden vaak telescopische staven gebruikt. Daarom is het ook nutteloos zowel een houtje als een touwtje tussen twee punten te hebben, en zijn onze  $t, c$  en  $r$  dus welgedefinieerd.

Een fatsoenlijke tensegrity is stabiel, wat wil zeggen dat bij elk punt de trekkende kracht de duwende opheft. Een stabiele tensegrity voldoet dus volgens Hooke aan

$$\forall_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n c(i, j) \cdot \left( v_i - v_j - r(i, j) \frac{v_i - v_j}{\|v_i - v_j\|} \right) = 0 \quad (1)$$

We eisen ook dat een tensegrity samenhangend is. Bovendien mogen de houtjes elkaar niet aanraken, in het bijzonder niet in hun eindpunten. Dit weer om bouwkundige redenen: kogelgewrichten zijn moeilijk. Zo'n gewricht kunnen we echter gemakkelijk simuleren, in figuur 1 zijn bijvoorbeeld 3-gewrichten gesimuleerd door touwtjes:

De hoofdvraag waarin we nu geïnteresseerd zijn, is 'welke tensegrity-structuren  $(v_1, \dots, v_n, t, c, r)$  voldoen aan (1) voor vaste  $n \in \mathbf{N}$ '. En 'structuur' bedoelen we hierbij in de groepentheo-

retische zin: als je een tensegrity  $v_1, \dots, v_n$  hebt, dan voldoet een willekeurige permutatie die  $t, c$  en  $r$  respecteert natuurlijk ook, maar dat vinden we flauw.

### Eerder werk

Als je echter op zoek gaat in de literatuur, zul je hier weinig over vinden. Het meeste is gericht op ingenieurs [2–3]. Maar zoals gezegd zijn er ook toepassingen in de celbiologie [4–5]. En in de ruimtevaart; er zijn zelfs theorieën dat het universum zelf de structuur van een tensegrity heeft — zwarte gaten leveren compressie (houtjes), terwijl gelinkte melkwegstelsels spanningen daartussen vormen (touwvtjes). Af en toe kom je exotischere toepassingen zoals [6] tegen, waarmee ingenieurs met op tensegrities gebaseerde filmbeelden kunnen inschatten hoe stevig een constructie is. Ook kun je op een cultus stuiten die gebaseerd is op het idee dat tussen mensen ook aantrek- en afstootkrachten werken.

Wiskundig is er echter weinig verricht. Het enige noemenswaardige werk is dat van Connelly en Back [1]: zij maakten een catalogus van tensegrities. Het idee hierachter is in zekere zin 'top-down'. Ze schrijven een symmetriegroep voor, en gaan vervolgens na welke tensegrity-structuren hieraan voldoen. Dit levert een alleraardigste lijst op, met plaatjes en al, zie [11].

Naast voldoende voorwaarden stellen wij ons echter ook noodzakelijke ten doel. Dat noodzaakt ons tot grovere methoden, meer in een 'bottom-up' stijl.

### Nieuwe aanpak

We gebruiken dan ook een andere aanpak dan Connelly en Back in [1]. Ten eerste scheiden we de structuur van een tensegrity van zijn realisatie. Mits juist uitgevoerd, heeft dat als voordeel dat de klassificatie gemakkelijk verloopt, en daarna enkel nog een filtering op daadwerkelijk realiseerbare klassen gedaan hoeft te worden.

De structuur leggen we vast in een graaf. Om precies te zijn, een ongerichte, complete, rib-gekleurde graaf. Als punten van de graaf nemen we simpelweg  $1, \dots, n$ . De ribbe  $\{i, j\}$  geven we 'kleur'  $t(i, j)$ . We spreken vervolgens af welke symmetrieën we toelaatbaar achten, en laten zien dat deze symmetriegroep werkt op onze grafen. Vervolgens kunnen we de symmetrieklassen bepalen als de banen van de collectie grafen onder de groep.

Maar dan hebben we teveel klassen: het vastleggen van de tensegrity-structuur in een graaf lijkt weliswaar heel natuurlijk, het is ook enkel dat. De graaf zegt alleen iets over verbondenheid, maar niets over fysische realiseerbaarheid. We moeten dus nog een eliminatieproces toepassen op de klassen. Dit komt erop neer dat we voor elke klasse moeten nagaan of er  $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{R}^3$  zijn die voldoen aan (1),  $c$  en  $r$ .

### Grafen en groepen

Ten eerste zullen we  $n$  maar eens vastleggen. Uit de stabiliteitseis (1) volgt direct dat er geen punten zijn die enkel door touwtjes bereikt worden. En omdat verder houtjes disjunct zijn, weten we dus dat elk houtje precies twee punten met zich meebrengt, en dat dat dus ook alle punten zijn. Noodzakelijkerwijs moet  $n$  dus even zijn, laten we zeggen  $n = 2N$ , waarbij dus  $N$  het aantal houtjes is.

Vervolgens kunnen we de  $2N$  punten in de graaf een standaard-oriëntatie toebedelen, omdat we weten dat er  $N$  houtjes zijn. Deze normaalvorm neemt alvast iets van de keuzevrijheid

in  $t$  weg. We kiezen de punten zó, dat precies tussen  $2i - 1$  en  $2i$  een houtje loopt:  $t(2i - 1, 2i) = \text{houtje}$  (zie figuur 2).

Merk trouwens even op dat het niets uitmaakt of we nu met de complete graaf werken, of dat we de niks-verbindingen gewoon uit de graaf weglaten.

Zij nu  $\Gamma$  de verzameling van al deze complete, rib-gekleurde grafen met  $2N$  punten. Een element  $\gamma$  van  $\Gamma$  is dus een functie, die aan een ribbe  $\{i, j\}$  zijn 'kleur'  $t(i, j)$  toekent. Zij verder  $\tilde{\Gamma}$  de deelverzameling van  $\Gamma$  van alle grafen op normaalvorm:  $\tilde{\Gamma} = \{\gamma \in \Gamma : \forall 1 \leq i \leq N [\gamma(\{2i - 1, 2i\}) = \text{houtje}]\}$ .

Met  $S_X$  noteren we de symmetrische groep op de eindige verzameling  $X$ , dus de verzameling permutaties van  $X$  met als operator functiecompositie. Hierbij zullen we  $S_{\{1, 2, \dots, k\}}$  afkorten tot  $S_k$ . Herinner dat een groepswerking van een groep  $G$  op de verzameling  $\Gamma$  een homomorfisme  $G \rightarrow S_\Gamma$  is, dus een afbeelding die de groepsstructuur bewaart. Men gaat eenvoudig na dat permuteren van de punten een groepswerking is op  $\Gamma$ . Met andere woorden:  $S_{2N}$  werkt op  $\Gamma$ .

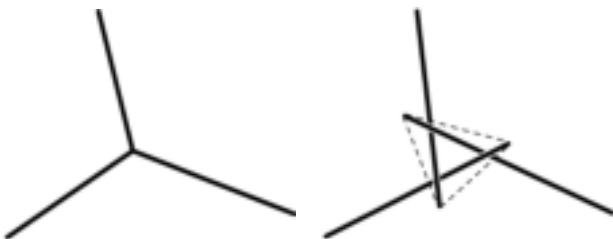
We zouden nu direct kunnen proberen de banen van  $\Gamma$  onder  $S_{2N}$  te bepalen. Het blijkt echter dat dit erg inefficiënt is qua rekenwerk. Maar nadat we de klassen bepaald hebben, gaan we toch de realiseerbare daaruit filteren. Als we dus de niet-realiseerbare tensegrity-structuren eerder in het proces kunnen elimineren, scheelt dit alleen maar rekenwerk.

En we kunnen net zo goed wat heuristisch eerder toepassen. Een goed idee is om houtjes te permuteren in plaats van punten ( $S_N$  in plaats van  $S_{2N}$ ). Maar omdat een permutatie van punten ook de eindpunten van een houtje kan verwisselen, moeten we naast alle houtjes permuteren ook elk houtje apart omkeren (met  $S_2$ ). Deze combinatie heet het kransproduct [7].

**Definitie.** Zij  $G$  en  $H$  groepen, waarvan  $H$  op een verzameling  $X$  werkt. Schrijf  $G^X$  voor de verzameling functies  $X \rightarrow G$ . We maken nu van  $G^X$  een groep door de operatie van  $G$  puntsgewijs door te voeren: voor  $f, g \in G^X$  definiëren we  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ , waarbij de  $\cdot$  in de rechterzijde de operatie van  $G$  is. Nu werkt  $H$  op  $G^X$  door de operatie  $hf(x) = f(hx)$  voor  $f : X \rightarrow G, h \in H$  en  $x \in X$ . Het kransproduct van  $G$  en  $H$ , notatie  $G \wr H$ , is het direct product  $G^X \rtimes H$ .

Het is de grootste ondergroep van  $S_X$  die de partities van  $X$ , geïnduceerd door de actie van  $H$  op  $X$ , invariant laat. Net als  $S_{2N}$  op  $\Gamma$  werkt, werkt ook  $S_2 \wr S_N$  op  $\tilde{\Gamma}$ . We bewijzen nu dat we door houtjes in plaats van punten te permuteren geen essentiële mogelijkheden verliezen.

**Stelling.** Door  $S_2 \wr S_N$  te gebruiken in plaats van  $S_{2N}$  verliezen we geen banen. Preciezer: representanten van banen van  $\tilde{\Gamma}$  onder



Figuur 1 Simulatie van 3-gewrichten door touwtjes



Snelson's 'Needle Tower' in het Kröller-Müller museum



$S_2 \wr S_N$  vormen tevens een compleet stel baanrepresentanten voor  $\Gamma$  onder  $S_{2N}$ .

**Bewijs.**  $S_2 \wr S_N$  werkt op  $\tilde{\Gamma}$ , en dus zijn er onder deze groep een aantal banen  $\tilde{O}_1, \tilde{O}_2, \dots, \tilde{O}_k$  voor zekere  $k \in \mathbb{N}$ . Elke baan bevat nu een representant (op normaalvorm!): er zijn  $\tilde{\gamma}_1 \in \tilde{O}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \tilde{O}_2, \dots, \tilde{\gamma}_k \in \tilde{O}_k$  zodat  $\tilde{\gamma}_i(\{2j - 1, 2j\}) = \text{houtje}$  voor  $1 \leq i \leq k$  en  $1 \leq j \leq N$ .

We zagen al dat ook  $S_{2N}$  op  $\Gamma$  werkt, en dat er onder  $S_{2N}$  dus ook banen  $O_1, O_2, \dots, O_l$  zijn voor zekere  $l \in \mathbb{N}$ .

Het is triviaal dat iedere  $S_{2N}$ -baan  $O$  een  $\gamma$  op normaalvorm bevat. Maar dan bevat  $O$  ook de baan  $\tilde{O}_i$  van  $\gamma$  onder de werking van  $S_2 \wr S_N$  op  $\tilde{\Gamma}$ , en daarmee ook diens representant  $\tilde{\gamma}_i$ .

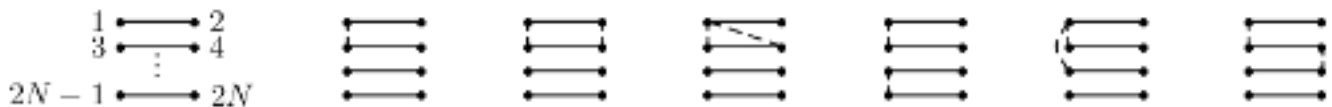
Stel nu dat  $O$  ook nog een  $\tilde{\gamma}_j$  bevat. In dat geval geldt voor  $\pi \in S_{2N}$  dat  $\pi(\tilde{\gamma}_i) = \tilde{\gamma}_j$ . Maar dan laat  $\pi$  de partitie  $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2N - 1, 2N\}$  invariant, en is  $\pi$  dus een element van  $S_2 \wr S_N$ . Dus moet wel  $i = j$  gelden!

De  $\tilde{\gamma}_i$  vormen dus inderdaad een compleet stel baanrepresentanten voor  $S_{2N}$ , en we mogen ons inderdaad beperken tot het berekenen van de  $\tilde{\gamma}_i$ .  $\square$

Merk op dat de groep  $G$  die we zo krijgen en willen laten werken op  $\tilde{\Gamma}$  voortgebracht wordt door de permutaties  $(1\ 2), (1\ 3)(2\ 4)$  en  $(1\ 3 \dots 2N - 1)(2\ 4 \dots 2N)$ .

We hebben nu dus een kanonieke groep  $G$ , die op een natuurlijke manier alle symmetrieën van onze grafen bevat. Bekijk nu de collectie  $\tilde{\Gamma}$  van alle grafen op normaalvorm, en laat  $G$  hierop werken. Wat we nu zoeken zijn de banen van  $\tilde{\Gamma}$  onder  $G$ . Eén representant van elke baan is zelfs voldoende.

Om dit exponentiële probleem aan te pakken gebruiken we de methode van 'tabular programming': we beginnen bij de 'blaadjes van de recursie' en combineren die opwaarts, terwijl we onderweg alles weggooien wat we niet meer nodig hebben. In dit geval verdelen we de gezochte klassen onder in aantal touwtjes  $K$ , en



Figuur 2 Standaard-oriëntatie van punten, en de zes gevonden structuren voor 4 houtjes en hoogstens 2 touwtjes ( $N = 4, K \leq 2$ )

bepalen de verzameling representanten van banen incrementeel. De structuur waarvan we gebruikmaken is die van de normaalvorm.

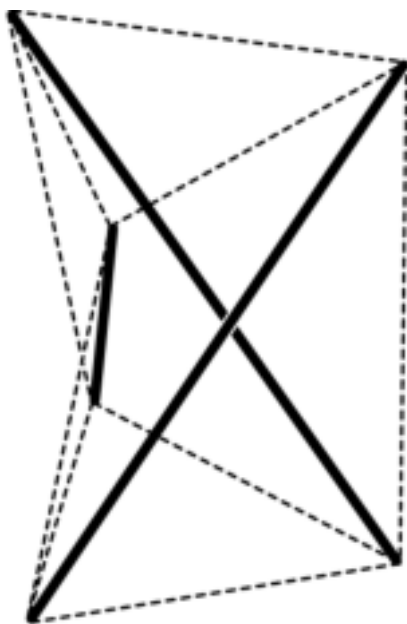
Voor de beginwaarde  $K = 1$  is het duidelijk dat er maar één tensegrity-structuur is met  $N$  houtjes en 1 touwtje: het maakt niet uit tussen welke twee houtjes het touwtje is gespannen (herinner dat een touwtje niet tussen dezelfde twee punten als een houtje kan lopen).

Dan gaan we alle klassen met  $K$  touwtjes uitbreiden tot  $K + 1$  touwtjes. Neem een klasse met  $K$  touwtjes. We fixeren deze eerste  $K$  touwtjes, en bekijken waar het volgende touwtje gespannen kan worden. Dus voor elke klasse met  $K$  touwtjes krijgen we nul of meer klassen met  $K + 1$  touwtjes.

Hoewel er bij  $N$  houtjes maar  $2N(N - 1)$  touwtjes mogelijk zijn, hoeven we niet verder te gaan dan halverwege,  $K = N(N - 1)$ . Dit omdat een tensegrity met  $K > N(N - 1)$  een gelijke structuur heeft als een tensegrity met  $N(N - 1) - K$  touwtjes. We hoeven alleen maar de touwtjes te 'inverteren', dat wil zeggen touwtjes verwijderen waar die waren, en invoegen waar ze niet waren. En dat is veel gemakkelijker dan de tweede helft net zo berekenen als de eerste.

We hebben dus het volgende algoritme: zij  $N$  gegeven, en  $G$  onze symmetriegroep. Begin met  $K = 1$  en neem als eerste touwtje  $t_1 = \{1, 3\}$ . Zet  $R = \{G\}$ . Fixeer nu het eerste touwtje, dat wil zeggen, beschouw als nieuwe groep  $G := \bigcap_{g \in G} \text{Stab}_{\{t_1\}}(g)$ , en neem  $R := R \cup G$ ,  $K := K + 1$ . Herhaal dit proces totdat  $K = N(N - 1)$ , en bepaal de tweede helft door 'touwtjes-inversie'.

Als we dit procédé uitvoeren voor  $N = 4$  zolang  $K \leq 2$ , krijgen we inderdaad wat we intuïtief zouden verwachten, zie figuur 2.



Figuur 3 De enige tensegrity met 3 houtjes

Met het lemma van Burnside en de daarop voortbouwende stelling van Polya kunnen we nu het aantal banen (en daarmee het aantal gevonden representanten) verifiëren [9].

**Lemma.** (Burnside) Stel dat een eindige groep  $G$  op een verzameling  $X$  werkt. Dan is het aantal banen van  $X$  onder  $G$  gelijk aan  $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Stab}_X(g)|$ .

**Stelling.** (Polya) Stel dat een eindige groep  $G$  op een verzameling  $X$  werkt. Dan is het aantal banen van  $X$  onder  $G$  met  $k$  kleuren gelijk aan  $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} k^{\#(g)}$ . Hierbij stelt  $\#(\pi)$  het minimum aantal cycli van de permutatie  $\pi$  voor.

Helaas is het bewijs van het lemma van Burnside een kwestie van tellen en sommige objecten daarbij weg te laten, en is niet constructief. Maar we kunnen het nog steeds gebruiken ter verificatie.

### Realisatie

Goed, we hebben dus nu alle theoretisch mogelijke klassen van tensegrity-structuren met  $N$  houtjes. Maar we hebben ook alleen pas die structuur. In termen van onze definities: we hebben alleen pas rekening gehouden met de typefunctie  $t$ , en nog niet met de fysische beperkingen  $c, r$  en (1). Uit al deze klassen moeten we nog degenen pikken die echt mogelijk zijn, dus degenen waarvoor  $c$  en  $r$  bestaan die aan (1) voldoen.

Laten we eerst maar eens aannemen dat  $c$  constant is (behalve natuurlijk de verplichte  $c(i, j) = 0$  zodra  $t(i, j) = \text{niks}$ ). Dat is niet zo onredelijk, want als je een tensegrity bouwt heb je toch niet de neiging om hier weer eens elastiek, daar weer eens staalkabel te gebruiken.

We doen dus even net of  $v_1, \dots, v_n$  en  $r$  variabel zijn, en proberen hiervoor de stabiliteitsvergelijkingen (1) op te lossen.

Het slechte nieuws is nu dat dit nog niet meevalt. Het gaat hier om een vectorieel stelsel non-lineaire vergelijkingen. Daar kennen wij helaas geen specifieke oplossingsmethode voor. Dus grepen we maar naar een generieke methode, die van Gröbner-bases. Helaas is deze methode dubbel-exponentieel: als er  $n$  onbekenden zijn, kost het  $O(2^{2^n})$  elementaire rekenstappen om een oplossing te vinden.

### Resultaten

Dit alles is uitgeprogrammeerd in *Magma*, een computer-algebrasysteem, dat weet heeft van zowel groepen als Gröbner-bases. *Magma's* algoritmen staan bekend als zeer snel, en het is uitermate moeilijk om zelf met snellere op de proppen te komen.

En omdat Gröbner-bases inherent 'moeilijk' zijn, heeft ook *Magma* hier helaas last van: met een weekend rekentijd kwamen we niet verder dan  $N = 4$ , dus tensegrities met 4 houtjes.

Zo bleek dat er maar één essentiële tensegrity-structuur is met

3 houtjes. Dit is ook meteen de kleinste ruimtelijk construeerbare, en als je wat knutselt met 3 houtjes vind je hem ook vanzelf. Het is wat moeilijk om uit een projectie het object te zien, maar zo ziet het er ongeveer uit als figuur 3

Met 4 houtjes kun je twee essentiële verschillende tensegrities maken: beide zijn net als bovenstaande 'cylinder-vormig', alleen is de een 'linkshandig' en de ander 'rechtshandig'. Het verschil zit hem in de draaihoek van het bovenvlak.

### En nu?

Dat valt natuurlijk wel een beetje tegen. Met wat knutselen vind je bijvoorbeeld ook zó een tensegrity met zes houtjes (namelijk heel symmetrisch, zet de uiteinden van de houtjes maar in de middelpunten van de vlakken van een denkbeeldig dodecaëder).

Wat kan er dan beter? Het is duidelijk dat we de dubbele-exponentieelheid in de realisatie-fase moeten zien te vermijden. Maar hoe? Het lijkt erop alsof we alle informatie die we hebben ook gebruikt hebben. Misschien zijn er toch betere methodes voor dit soort stelsels waar wij toevallig geen weet van hebben? Maar

je zou ook kunnen proberen te bewijzen dat het onmogelijk is niet in complexiteitstheoretische harde problemen te geraken zonder meer aannames. Anders eerst meer aannames doen om daaruit een patroon te proberen te herkennen? Welke aannames dan?

Misschien is er nog meer fysieke heuristiek die we kunnen gebruiken in de realisatie-fase? Technieken als die in [8] lijken veelbelovend. Eenieder die zich geroepen voelt hieraan te werken, nodigen we hier van harte toe uit.

Concluderend kunnen we in ieder geval stellen dat tensegrities zeker wiskundig interessant zijn, al zijn ze niet zo bekend. Met grafen, groepen en algebra hebben we een manier gevonden om tensegrities te klassificeren, zij het geen al te beste manier wat betreft efficiëntie. 

### Dankwoord

Onze dank gaat uit naar Bernd Souvignier voor vruchtbare discussies over het onderwerp, Jozef Hooman voor begeleiding bij andere presentaties over dit werk, en Lotte Hollands voor nuttige opmerkingen bij het natuurkundige deel.

### Referenties

- 1 R. Connelly en A. Back, *Mathematics and tensegrity*, American Scientist, 1998
- 2 D. Williamson en R.E. Skelton, *A general class of tensegrity structures: Topology and prestress equilibrium analysis*, 2001
- 3 R. Connelly en W. Whiteley, *Second-order rigidity and prestress stability for tensegrity frameworks*, SIAM Journal of Discrete Mathematics, 1996
- 4 N. Wang en anderen, *Mechanical behavior in living cells consistent with the tensegrity model*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 2001
- 5 S. Wending, C. Oddou, en D. Isabey, *Non-dimensional expression of the stiffening response of tensegrity structure as a function of strain: application to cell mechanics*, Journal of Biomechanics, 1998
- 6 K.A. Liapi, *A visualization method for the morphologic exploration of tensegrity structures*, Proceedings of Information Visualisation, 2001
- 7 H. Straubing, *The wreath product and its applications*, Formal Properties of Finite Automata, 1988
- 8 T.F. Havel, I.D. Kuntz, en G.C. Crippen, *The theory and practice of distance geometry*, Bulletin of Mathematical Biology, 1983
- 9 F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, 1969
- 10 [www.kennethsnelson.net](http://www.kennethsnelson.net).
- 11 [mathlab.cit.cornell.edu/visualization/tenseg/](http://mathlab.cit.cornell.edu/visualization/tenseg/).

## Jaap Korevaar

KdV Instituut voor Wiskunde  
Universiteit van Amsterdam  
Plantage Muidersgracht 24  
1018 TV Amsterdam  
korevaar@science.uva.nl

### Overzichtsartikel

# Een eenvoudig bewijs van

Onlangs is in de serie Grundlehren der mathematischen Wissenschaften het boek 'Tauberian Theory, a Century of Developments' van de hand van Jaap Korevaar verschenen. Het plan voor het boek lag er al enige tientallen jaren en sinds 1999 heeft hij er onafgebroken aan gewerkt. Belangrijke Tauberstellingen doen uitspraken over convergentie van machtreksen op grond van hun gedrag aan de rand van het convergentiegebied. De theorie kent vele mooie toepassingen, onder andere in de analytische getaltheorie. Jaap Korevaar, vooraanstaand specialist op Tauber-gebied, is emeritus hoogleraar analyse aan de Universiteit van Amsterdam. Hij laat zien dat met de huidige kennis van de Taubertheorie een eenvoudig bewijs van de priemgetalstelling is te geven.

Het meest directe bewijs van de priemgetalstelling verkrijgt men uit een eenvoudige vorm van de Wiener-Ikehara-stelling. Deze vorm wordt afgeleid door aanpassing van Newmans methode van contour-integratie.

#### Inleiding

Zij  $\pi(t)$  het aantal priemgetallen niet groter dan  $t$ . De beroemde priemgetalstelling (PGS) zegt dat

$$\pi(t) \sim \frac{t}{\log t} \quad \text{als } t \rightarrow \infty. \quad (1)$$

In woorden:  $\pi(t)$  gedraagt zich asymptotisch als  $t/\log t$ , dat wil zeggen, de verhouding van de eerste tot de tweede grootte nadert tot 1 als  $t \rightarrow \infty$ . Hier betekent  $\log$  de natuurlijke logaritme.

Een aardig boekje over de PGS is [16]; zie ook [1] en [13] voor geschiedenis en ontwikkelingen.

Op grond van tellingen veronderstelden Euler, Gauss en Legendre reeds dat  $t/\log t$  een redelijke benadering is voor  $\pi(t)$ . Later vond Chebyshev constanten  $c < 1 < C$  (vrij dicht bij 1) zodanig, dat voor  $t \geq t_0$ ,

$$c \frac{t}{\log t} \leq \pi(t) \leq C \frac{t}{\log t}. \quad (2)$$

De eerste bewijzen van de PGS verschenen in 1896; zij werden (min of meer onafhankelijk) gevonden door Hadamard [5] en de la Vallée Poussin [17]. Beide auteurs maakten gebruik van Hadamard's theorie van gehele (dat wil zeggen overal analytische) functies, die speciaal met het oog op de PGS ontwikkeld was. De bewijzen waren heel ingewikkeld, maar enkele jaren later kon de la Vallée Poussin ook een schatting voor  $\pi(t)$  afleiden met een goede restterm. Sindsdien hebben vele wiskundigen eenvoudigere bewijzen van (1) gezocht en gevonden. Hier moet men allereerst Landau noemen; zie [11]. Een belangrijke doorbraak kwam met de Taubertheorie van Wiener (1928–1932); zie [18], [19]. De zogenaamde Wiener-Ikehara stelling levert de meest directe weg naar de PGS; vergelijk het artikel van zijn leerling Ikehara [7] en de artikelen [12], [2]. Uit Wieners werk volgt dat de PGS equivalent is met het feit, dat de zogenaamde Riemann zetafunctie  $\zeta(z)$  geen nulpunten heeft op de lijn  $\{\operatorname{Re} z = 1\}$ ; zie [9] of [10] (sectie III.3).

Voor complexe  $z = x + iy$  met reëel deel  $x$  groter dan 1 wordt

# de priemgetalstelling

de zetafunctie gegeven door de som van de Dirichletreeks

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}. \quad (3)$$

Deze formule maakt  $\zeta(z)$  een analytische functie op het halfvlak  $\{\operatorname{Re} z > 1\}$ . Voor andere waarden van  $z$  definieert men  $\zeta(z)$  als de analytische voortzetting van de somfunctie in (3). Het blijkt dat  $\zeta(z)$  analytisch is in het gehele complexe vlak, behalve in het punt  $z = 1$ . Daar heeft de zetafunctie een pool van de eerste orde, met residu 1. Met andere woorden, het (voor  $z = 1$  continu gemaakte) verschil

$$g(z) = \zeta(z) - \frac{1}{z-1} \quad (4)$$

is een gehele analytische functie.

De meeste bewijzen van de priemgetalstelling gebruiken het nulpuntvrij zijn van de zetafunctie op de lijn  $\{\operatorname{Re} z = 1\}$ . De voornaamste uitzonderingen zijn de zogenaamde elementaire bewijzen van Selberg [15] en Erdős [4] uit 1949. 'Elementair' betekent hier: 'vrij van complexe analyse'. Deze bewijzen zijn ingenieus maar zeer ingewikkeld. De Selberg–Erdős methode heeft tenslotte geleid tot bijna even goede restschattingen voor  $\pi(t)$  als de complexe methoden; zie [3]. Het boek [10] behandelt diverse bewijzen van de PGS met behulp van Tauberstellingen.

In 1980 publiceerde Newman [14] een betrekkelijk eenvoudig bewijs voor de PGS met behulp van complexe analyse. Twee va-

riaties op zijn bewijs, die overigens sterk op elkaar lijken, staan in [8] en [20]. In dit artikel wordt Newmans methode aangepast om het volgende speciale geval te bewijzen van de Wiener–Ikehara stelling, dat voldoende is voor de PGS.

**Stelling 1.** *Stel dat de Dirichletreeks*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}, \quad \text{met coëfficiënten } a_n \geq 0, \quad (5)$$

*convergeert in het halfvlak  $\{\operatorname{Re} z > 1\}$ . De somfunctie  $f(z)$  zal analytisch zijn in dat open halfvlak; stel nu dat er een constante  $A$  is zodanig, dat het verschil*

$$g(z) = f(z) - \frac{A}{z-1} \quad (6)$$

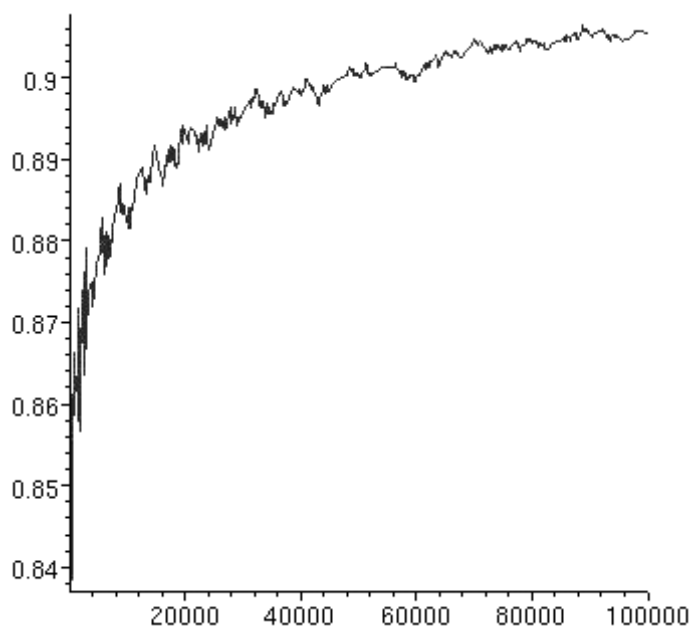
*een analytische (of continue) voortzetting heeft tot het gesloten halfvlak gegeven door  $\{\operatorname{Re} z \geq 1\}$ . Veronderstel tenslotte dat de partiële sommen  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  begrensd worden door een constante maal  $n$ . Dan geldt*

$$s_n \sim An \quad \text{als } n \rightarrow \infty, \quad (7)$$

*dat wil zeggen,  $s_n/n \rightarrow A$ .*

Als illustratie kan het geval van de zetafunctie dienen. Hier is  $a_n \equiv 1$  en heeft men (6) met  $A = 1$ . Het is duidelijk dat hier de conclusie  $s_n \sim n$  geldig is!

De hypothese  $s_n \leq Cn$  in stelling 1 kan gemist worden en zij



**Figuur 1** Grafiek van  $n / \log n$  gedeeld door het aantal priemgetallen niet groter dan  $n$

komt niet voor in de oorspronkelijke Wiener–Ikehara stelling. Met een wat ingewikkelder redenering dan die in dit artikel kan de extra hypothese uit de overige onderstellingen afgeleid worden.

#### Afleiding van de priemgetalstelling

We beginnen met het Eulerproduct voor  $\zeta(z)$ : voor  $\operatorname{Re} z > 1$  geldt

$$\begin{aligned}\zeta(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{p \text{ priem}} \left(1 + \frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \dots\right) \\ &= \prod_{p \text{ priem}} \frac{1}{1 - p^{-z}}.\end{aligned}\quad (8)$$

De productformule volgt uit de unieke representatie van een natuurlijk getal  $n \geq 2$  als product van machten van priemgetallen:

$$n = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}, \quad \text{waar } p_1 < \cdots < p_r, \quad m_j \geq 1.$$

In het bijzonder volgt uit (8), dat  $\zeta(z) \neq 0$  voor  $\operatorname{Re} z > 1$ .

Logaritmische differentiatie van het (omgekeerde) Euler product geeft

$$f_1(z) = -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{p \text{ priem}} \frac{p^{-z} \log p}{1 - p^{-z}} = \sum_{p \text{ priem}, m \geq 1} \frac{\log p}{p^{mz}}. \quad (9)$$

Door herschikking van de termen krijgt men de Dirichletreeks

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^z}, \quad (10)$$

waarin de coëfficiënten gegeven worden door de von Mangoldt functie,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} 0 & \text{als } n = 1, \\ \log p & \text{als } n = p^m \text{ met } p \text{ priem en } m \geq 1, \\ 0 & \text{als } n \text{ tenminste twee verschillende} \\ & \text{priemfactoren heeft.} \end{cases} \quad (11)$$

In dit geval geven de partiële sommen van de coëfficiënten de Chebyshev functie  $\psi$ :

$$s_n = \psi(n) = \sum_{k=1}^n \Lambda(k) = \sum_{p^m \leq n} \log p. \quad (12)$$

Uit de tweede Chebyshev ongelijkheid (2) volgt onmiddellijk, dat

$$\psi(n) = \sum_{p \leq n} \left[ \frac{\log n}{\log p} \right] \log p \leq \pi(n) \log n \leq Cn; \quad (13)$$

zie lemma 3. Chebyshev wist ook al, dat de (toen nog onbewezen) priemgetalstelling equivalent is met de asymptotische relatie

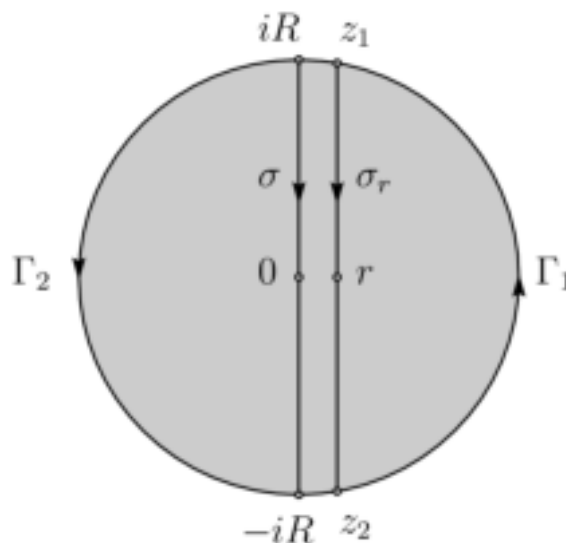
$$\psi(n) \sim n; \quad (14)$$

zie [11]. We zullen deze equivalentie in lemma 4 verifiëren.

Voor de toepassing van stelling 1 moeten we weten, hoe  $f_1(z)$  zich gedraagt wanneer  $z$  naar de rand van het halfvlak  $\{\operatorname{Re} z > 1\}$  toeloopt. We gebruiken nu het *essentiële feit* dat  $\zeta(z) \neq 0$  op de lijn  $\{\operatorname{Re} z = 1\}$ ; zie lemma 2. Hieruit volgt dat  $f_1(z) = -\zeta'(z)/\zeta(z)$  analytisch is in alle punten van die lijn, behalve natuurlijk in het punt  $z = 1$ . Tenslotte volgt uit het feit dat  $\zeta(z)$  zich rond het punt  $z = 1$  gedraagt als  $1/(z-1)$ , dat  $f_1(z)$  zich daar precies zo gedraagt. Samenvattend,

$$g_1(z) = f_1(z) - \frac{1}{z-1} \quad (15)$$

is analytisch in alle punten van het gesloten halfvlak  $\{\operatorname{Re} z \geq 1\}$ .



**Figuur 2** De integratiewegen behorende bij het bewijs van stelling 2

De getallen  $a_n = \Lambda(n)$  en de bijbehorende functies  $f = f_1$  en  $g = g_1$  voldoen aan de voorwaarden van stelling 1 met  $A = 1$ ; de partiële sommen  $s_n = \psi(n)$  zijn begrensd door  $Cn$ . Conclusie:

$$\psi(n) \sim n \quad \text{als } n \rightarrow \infty.$$

Hiermee is aangetoond dat de PGS volgt uit stelling 1.

### Herformulering van stelling 1

Voor het bewijs voeren we een reductie uit tot een stelling over Laplace-getransformeerden van begrensde functies. Neem aan dat de voorwaarden van stelling 1 vervuld zijn en definieer

$$s(v) = \sum_{k \leq v} a_k,$$

zodat  $s(v)$  niet afnemend is,  $s(v) = s_n$  voor  $n \leq v < n+1$  en  $s(v) = 0$  voor  $v < 1$ ; het quotiënt  $s(v)/v$  zal begrensd zijn. Met partiële sommatie volgt nu uit (5) dat voor  $\operatorname{Re} z > 1$ ,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n - s_{n-1}}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \left\{ \frac{1}{n^z} - \frac{1}{(n+1)^z} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n z \int_n^{n+1} v^{-z-1} dv = z \int_1^{\infty} s(v) v^{-z-1} dv. \end{aligned} \quad (16)$$

In verband met (6) kan men dan schrijven

$$\begin{aligned} g(z) - A &= f(z) - \frac{A}{z-1} - A = f(z) - \frac{Az}{z-1} \\ &= z \int_1^{\infty} \left\{ \frac{s(v)}{v} - A \right\} v^{-z} dv. \end{aligned} \quad (17)$$

Voor  $v \geq 1$  substituëren we tenslotte

$$v = e^t, \quad \frac{s(v)}{v} - A = e^{-t} s(e^t) - A = \rho(t); \quad (18)$$

we nemen  $\rho(t) = 0$  voor  $t < 0$ . Op grond van de gegevens is  $\rho(t)$  een begrensde functie, die voor  $t \rightarrow \infty$  niet snel kan afnemen. Preciezer gezegd, voor  $t > u$  geldt

$$\rho(t) - \rho(u) \geq -\varepsilon(t, u), \quad \text{waar } \varepsilon(t, u) \rightarrow 0 \quad (19)$$

als  $u \rightarrow \infty$  en  $0 < t - u \rightarrow 0$ . Inderdaad, in ons geval is het verschil  $\rho(t) - \rho(u)$  voor  $t > u \geq 0$  gelijk aan

$$e^{-t} s(e^t) - e^{-u} s(e^u) \geq (e^{-t} - e^{-u}) s(e^u) \geq -C \{1 - e^{-(t-u)}\}.$$

Elke functie  $\rho$ , die aan (19) voldoet, wordt een *langzaam afnemende functie* genoemd, ofschoon zo'n functie best toenemend zou kunnen zijn!

We beschouwen nu de Laplace-getransformeerde van  $\rho$ :

$$\begin{aligned} L\rho(z) &= \int_0^{\infty} \rho(t) e^{-zt} dt = \int_1^{\infty} \left\{ \frac{s(v)}{v} - A \right\} v^{-z-1} dv \\ &= \frac{g(z+1) - A}{z+1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Alfred Tauber werd op 5 november 1866 geboren in Bratislava (Slowakije) en stierf op 26 juli 1942 in het concentratiekamp van Theresienstadt. Hij studeerde aan de universiteit van Wenen, waar hij ook zijn Habilitationsschrift verdedigde. Hij was hoogleraar aan deze universiteit van 1908 tot 1933 en werkte gedurende deze tijd ook als actuaire. Zijn wetenschappelijk werk verrichtte hij grotendeels op het terrein van de analyse, maar ook was hij geïnteresseerd in actuariële theorie, statistiek en kansberekening.



Copyright: Bildarchiv der Österreichischen Nationalbibliothek, Wien

Uit de hypothesen van stelling 1 volgt dat  $L\rho(z)$  analytisch is voor  $\operatorname{Re} z > 0$ , en een analytische of continue voortzetting heeft tot het gesloten halfvlak  $\{\operatorname{Re} z \geq 0\}$ . Te bewijzen is, dat  $\rho(t) \rightarrow 0$  als  $t \rightarrow \infty$ . Stelling 1 volgt dus uit de (algemenere)

**Stelling 2.** Zij  $\rho(t) = 0$  voor  $t < 0$  en  $|\rho(t)| \leq M < \infty$  voor  $t \geq 0$ . De Laplace-getransformeerde

$$G(z) = L\rho(z) = \int_0^{\infty} \rho(t) e^{-zt} dt, \quad z = x + iy, \quad (21)$$

definieert dan een analytische functie voor  $x > 0$ . Stel dat  $G(x + iy)$  voor  $-R \leq y \leq R$  uniform (of in  $L^1$ ) convergeert naar een limietfunctie  $G(iy)$  als  $x \searrow 0$ . Dan geldt voor elke positieve  $T$  en  $\delta$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_T^{T+\delta} \rho(t) dt \right| &\leq \frac{4M}{R} \\ &+ \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-R}^R G(iy) \frac{e^{\delta iy} - 1}{y} \left( 1 - \frac{y^2}{R^2} \right) e^{iTy} dy \right|. \end{aligned} \quad (22)$$

Als in de onderstellingen  $R$  willekeurig groot genomen mag worden en  $\rho$  bovendien langzaam afnemend is, heeft men

$$\rho(T) \rightarrow 0 \quad \text{als } T \rightarrow \infty. \quad (23)$$

### Bewijs van stelling 2

Eerst volgt het bewijs van ongelijkheid (22).

**Bewijs.** We beschouwen de volgende functie, die analytisch is in het gehele  $z$ -vlak:

$$G_T(z) = \int_0^T \rho(t) e^{-zt} dt, \quad z = x + iy. \quad (24)$$

We moeten dan het verschil

$$G_{T+\delta}(0) - G_T(0) = \int_T^{T+\delta} \rho(t) dt \quad (25)$$

afschatten.

#### Bij het symposium ter gelegenheid van de tachtigste verjaardag

Ter gelegenheid van de tachtigste verjaardag van Jaap Korevaar organiseerde Jan Wiegerinck in januari 2003 een feestelijk symposium met vier sprekers, waaronder drie van de promovendi van Korevaar. De sprekers staken de breedheid van Jaap en de invloed die hij op hen had niet onder stoelen of banken. Ook zijn enthousiaste, heldere en inspirerende manier van lesgeven, zijn liefde voor de wiskunde en zijn werkkraft werden genoemd: tien jaar geleden ging hij met pensioen maar vrijwel dagelijks kon men hem aantreffen op het KdV-instituut, de laatste jaren werkend aan een boek over Tauberstellingen.

*Jaap, niet alle lezers zullen weten dat je vijftiengintig jaar in de Verenigde Staten gewerkt hebt.*

Ik begon in 1940 met mijn studie, door de oorlogsomstandigheden grotendeels op eigen houtje en met maar weinig gelegenheid om hulp van anderen te krijgen. Na mijn studie werkte ik op het Mathematisch Centrum (nu CWI), de University of Wisconsin in Madison en de University of California in San Diego. In 1974 kwam ik terug naar Nederland als hoogleraar aan de UvA.

*In 1993 ging je met pensioen. Je bleef onderzoek doen en vatte het plan weer op een boek te schrijven over Taubertheorie. Wat is Taubertheorie?*

Stel je voor dat je een reeks  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \dots$  hebt, dan kun je je afvragen wanneer je deze reeks sommeerbaar met som  $A$  noemt. Je denkt dan onmiddellijk aan

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \rightarrow A,$$

anders gezegd als de reeks convergent is met som  $A$ . Maar het kan voorkomen dat een reeks niet convergent is maar dat we toch een som willen toekennen aan de reeks. Zo noemen we de reeks Cesàro-sommeerbaar als de rij van partiële sommen Cesàro-convergent is:

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n} \rightarrow A$$

Dan heeft de divergente reeks  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  wèl een (Cesàro) som, namelijk  $\frac{1}{2}$ , anders gezegd Cesàro-sommeerbaarheid is krachtiger dan gewone convergentie. Sommige reeksen zijn ook niet sommeerbaar in deze nieuwe zin. Nog krachtiger is Abel-sommeerbaarheid van de reeks. Dat houdt in dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ convergent is voor } |x| < 1$$

$$\text{en } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow A \text{ als } x \uparrow 1$$

(i) Zij  $\Gamma$  de positief georiënteerde cirkel  $C(0, R) = \{|z| = R\}$ ; zie figuur 2. De stelling van Cauchy geeft

$$2\pi i G_T(0) = \int_{\Gamma} G_T(z) \frac{1}{z} dz. \quad (26)$$

Denkend aan grote  $T$  ligt het voor de hand, om  $G_T(z)$  in het rechter halfvlak  $\{x > 0\}$  te vergelijken met  $G(z)$ :

$$|G_T(z) - G(z)| = \left| \int_T^{\infty} \rho(t) e^{-zt} dt \right| \leq M \int_T^{\infty} e^{-xt} dt = \frac{M}{x} e^{-Tx}. \quad (27)$$

Enigszins analoog heeft men voor  $x = \operatorname{Re} z < 0$ ,

$$|G_T(z)| = \left| \int_0^T \rho(t) e^{-zt} dt \right| \leq \int_0^T M e^{-xt} dt < \frac{M}{|x|} e^{-Tx}. \quad (28)$$

(ii) Voor grote  $x$  wordt de factor  $e^{-Tx}$  in (27) veel kleiner dan nodig is, terwijl in (28), de factor  $e^{-Tx} = e^{T|x|}$  juist veel te groot kan worden. Eén van Newmans briljante ideeën [14] was om in een Cauchy formule zoals (26), een factor  $e^{Tz}$  te introduceren onder het integraalteken:

$$2\pi i G_T(0) = \int_{\Gamma} G_T(z) e^{Tz} \frac{1}{z} dz.$$

Blijft nog het probleem dat de noemers  $x$  en  $|x|$  in (27), (28) voor kleine  $|x|$  problemen geven. Hiervoor bedacht Newman de volgende ingenieuze oplossing: vervang de factor  $1/z$  in de Cauchy formule door  $(1/z) + z/R^2$ . Op de cirkel  $\Gamma$  geldt

$$\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} = \frac{2x}{R^2}, \quad (29)$$

en volgens de residuënstelling heeft men

$$2\pi i G_T(0) = \int_{\Gamma} G_T(z) e^{Tz} \left( \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz. \quad (30)$$

(iii) In verband met (27) en (30) wil men ook  $G(z)$  over een geschikte weg integreren. Maar  $G(z)$  is in het algemeen niet analytisch in het linker halfvlak  $\{x < 0\}$ , dus die functie kan men niet over  $\Gamma$  integreren. Wel kan men de stelling van Cauchy toepassen op  $G(z)/z$ , of op

$$G(z) e^{Tz} \left( \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right),$$

als men integreert over een weg die geheel in het rechter halfvlak ligt. We voeren enkele speciale integratiewegen in. Zij  $\Gamma_1$  het deel van  $\Gamma$  in het rechter halfvlak,  $\Gamma_2$  het deel van  $\Gamma$  in het linker halfvlak. We noteren met  $\sigma$  het georiënteerde segment van de imaginaire as van  $iR$  naar  $-iR$ ; zie figuur 2. Vervolgens voeren we, voor kleine  $r > 0$ , de hulpweg  $\sigma_r$  in, die bestaat uit het gedeelte van de lijn  $x = r$  tussen het bovenste snijpunt  $z_1 = r + i\sqrt{R^2 - r^2}$  met de cirkel  $\Gamma$ , en het onderste snijpunt  $z_2 = r - i\sqrt{R^2 - r^2}$ . Het deel van  $\Gamma_1$  tussen  $z_2$  en  $z_1$  noemen we  $\Gamma_{1,r}$ . Dan geldt volgens Cauchy

$$0 = \int_{\Gamma_{1,r} + \sigma_r} G(z) e^{Tz} \left( \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz. \quad (31)$$

(iv) Combinatie van (30) en (31) geeft voor elke kleine  $r > 0$

$$\begin{aligned} 2\pi i G_T(0) &= \int_{\Gamma_{1,r}} \{G_T(z) - G(z)\} e^{Tz} \left( \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \\ &\quad + \int_{\Gamma - \Gamma_{1,r}} G_T(z) e^{Tz} \left( \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \\ &\quad - \int_{\sigma_r} G(z) e^{Tz} \left( \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \\ &= I_1(R, r, T) + I_2(R, r, T) - I_3(R, r, T), \end{aligned} \quad (32)$$

zeg. Er is een analoge formule voor  $G_{T+\delta}(0)$ . Op het eind moeten wij het verschil  $G_{T+\delta}(0) - G_T(0)$  afschatten, in het bijzonder ook

$$\begin{aligned} I_3(R, r, T + \delta) - I_3(R, r, T) &= \int_{\sigma_r} G(z) \{e^{(T+\delta)z} - e^{Tz}\} \left( \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \\ &= \int_{\sigma_r} G(z) \frac{e^{\delta z} - 1}{z} \left( 1 + \frac{z^2}{R^2} \right) e^{Tz} dz. \end{aligned}$$

Wegens het gegeven randgedrag van  $G(x + iy)$  voor  $x \searrow 0$  mogen we hier  $r$  naar nul laten gaan, en dat mag dan ook in de formule voor  $G_{T+\delta}(0) - G_T(0)$ . Als resultaat verkrijgen we de ongelijkheid

$$\begin{aligned} 2\pi |G_{T+\delta}(0) - G_T(0)| &\leq \left| \int_{\sigma} G(z) \frac{e^{\delta z} - 1}{z} \left( 1 + \frac{z^2}{R^2} \right) e^{Tz} dz \right| \\ &\quad + |I_1(R, 0, T + \delta) - I_1(R, 0, T) + I_2(R, 0, T + \delta) - I_2(R, 0, T)|. \end{aligned} \quad (33)$$

Hier verwijst  $I_j(R, 0, \cdot)$  naar integralen, verkregen door  $\Gamma_{1,r} = \Gamma_1$  te nemen en  $\sigma_r = \sigma$ .

(v) Uit (32), (27) en (29) volgt

$$\begin{aligned} |I_1(R, 0, T)| &\leq \int_{\Gamma_1} |G_T(z) - G(z)| |e^{Tz}| \left| \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right| |dz| \\ &\leq \int_{\Gamma_1} \frac{M}{x} e^{-Tx} e^{Tx} \frac{2x}{R^2} |dz| \\ &= \frac{2M}{R^2} \pi R = \frac{2\pi M}{R}. \end{aligned} \quad (34)$$

Op analoge manier geven (32), (28) en (29) dat

$$|I_2(R, 0, T)| \leq \int_{\Gamma_2} |G_T(z) e^{Tz}| \left| \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right| |dz| \leq \frac{2\pi M}{R}. \quad (35)$$

Dezelfde ongelijkheden gelden voor  $|I_j(R, 0, T + \delta)|$ .

Combinatie van (25) met (33)–(35), en deling door  $2\pi$ , geeft

$$\left| \int_T^{T+\delta} \rho(t) dt \right| \leq \frac{4M}{R} + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\sigma} G(z) \frac{e^{\delta z} - 1}{z} \left( 1 + \frac{z^2}{R^2} \right) e^{Tz} dz \right|.$$

Substitueert men hier  $z = iy$  met  $-R \leq y \leq R$ , dan volgt de gewenste ongelijkheid (22).  $\square$

Zo is de reeks  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$  niet Cesàro-sommeerbaar maar wel Abel-sommeerbaar, met som  $\frac{1}{4}$ . De Oostenrijkse wiskundige Tauber (1866–1942) bewees in 1897 een omkering van de implicatie ‘convergent  $\Rightarrow$  Abel-sommeerbaar’, en wel onder de extra conditie dat  $na_n \rightarrow 0$ . Later, in 1911, bewees Littlewood dat begrensdsheid van de rij  $na_n$  ook voldoende is voor deze omkering. Dit is de start geweest van veel van zulke stellingen: een sterke vorm van sommeerbaarheid plus een extra conditie die een zwakkere vorm van sommeerbaarheid impliceert. Hardy en Littlewood introduceerden de term Tauberstelling voor een dergelijke omkering. Sinds het begin van de vorige eeuw heeft het gebied zich sterk ontwikkeld. Ik wil graag één belangrijke impuls noemen: de getaltheorie, in het bijzonder het zoeken naar eenvoudiger bewijzen van de priemgetalstelling.

*Waarom schrijf je er een boek over?*

Taubertheorie is een omvangrijk gebied van de wiskunde waar meer dan een eeuw aan gewerkt is, en waar nóg steeds mensen aan werken. Ikzelf heb daar ook mijn bescheiden steentje aan bijgedragen. Ik ben redelijk goed op de hoogte van de literatuur op dat gebied en had het gevoel dat het goed zou zijn die theorie nu eens systematisch te rangschikken, met eenheid in de terminologie, zo mogelijk ook met hier en daar een eenvoudiger bewijs. Ik had als beeld voor ogen een boek waarin de stand van zaken van dit moment weergegeven is. Enkele tientallen jaren geleden was mij al eens gevraagd een dergelijk boek te schrijven, maar hoewel ik wel al wat materiaal verzameld had was het er nooit van gekomen. In 1999 ben ik er uiteindelijk toch aan begonnen. Waar je bij het schrijven van zo’n overzicht mee geconfronteerd wordt is dat het boek steeds maar uitgebreider wordt.

*Het is duidelijk dat je dit project met veel plezier gedaan hebt. Maar zo iets neemt natuurlijk veel tijd in beslag. Kwam je nog aan andere bezigheden toe?*

Andere liefhebberijen zoals tuinieren en het luisteren naar muziek schoten er wel eens bij in, zeker de laatste tijd. Verder weet je dat ik het erg leuk vind om te wandelen. Ook daar had ik wat minder tijd voor, maar ik denk het binnenkort weer meer te gaan doen. Er zijn nog zoveel paden in Nederland waarover ik niet gelopen heb! Nog niet zo lang geleden schrok ik niet terug voor een tochtje van een kilometer of 25. Nu is 18 kilometer genoeg, je wordt tenslotte een jaartje ouder, nietwaar.

Peter de Paepe in: *Nieuwsbrief van het Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde*.

Vervolgens bewijzen we de tweede bewering in stelling 2.

**Bewijs.** (vi) Voor vaste  $\delta$  en  $R$  zal de laatste integraal in (22) naar nul gaan als  $T \rightarrow \infty$ . Inderdaad, als  $G(z)$  analytisch is op het segment  $[-iR, iR]$  van de imaginaire as, kan men partiële integratie toepassen:  $e^{iTy} dy = \{1/(iT)\} de^{iTy}$ , enz. Weet men alleen dat de randwaarden  $G(iy)$  continu zijn of integreerbaar, dan kan men

het Riemann–Lebesgue lemma gebruiken. De conclusie is in beide gevallen dat

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \left| \int_T^{T+\delta} \rho(t) dt \right| \leq \frac{4M}{R}. \quad (36)$$

(vii) We nemen nu aan dat  $R$  willekeurig groot gekozen mag worden. Dan zal voor elk getal  $\delta > 0$ ,

$$\int_T^{T+\delta} \rho(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{als } T \rightarrow \infty. \quad (37)$$

Onderstel tenslotte dat  $\rho(t)$  langzaam afnemend is; zie (19). De ongelijkheid

$$\int_T^{T+\delta} \{\rho(t) - \rho(T)\} dt \geq - \int_T^{T+\delta} \varepsilon(t, T) dt$$

laat zien, dat

$$\delta \rho(T) \leq \int_T^{T+\delta} \rho(t) dt + \int_T^{T+\delta} \varepsilon(t, T) dt.$$

Uit (37) en de eigenschappen van  $\varepsilon(t, u)$  volgt dan, dat voor gegeven  $\varepsilon > 0$  en voldoende kleine  $\delta > 0$ ,

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \delta \rho(T) \leq \varepsilon \delta, \quad \limsup_{T \rightarrow \infty} \rho(T) \leq \varepsilon.$$

Dit geldt voor elke  $\varepsilon > 0$ , zodat  $\limsup \rho(T) \leq 0$ . Voor een ongelijkheid in de andere richting kan men beginnen met  $\int_{T-\delta}^T \rho(t) dt$ .  $\square$

### Enkele nuttige eigenschappen

We verifiëren hier enkele eigenschappen van de zetafunctie en de functies  $\pi(\cdot)$  en  $\psi(\cdot)$ , die nodig waren voor de afleiding van de PGS uit stelling 1. Diverse boeken bevatten meer achtergrondinformatie; klassieke titels zijn [11] en [6].

**Lemma 1.** *De functie*

$$g(z) = \zeta(z) - \frac{1}{z-1}, \quad \operatorname{Re} z > 1 \quad (38)$$

*heeft een analytische voortzetting tot het halfvlak  $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ .*

**Bewijs.** Uit (16) en (17) volgt dat

$$g(z) = \zeta(z) - \frac{1}{z-1} = 1 + z \int_1^\infty ([v] - v) v^{-z-1} dv. \quad (39)$$

Omdat  $[v] - v$  begrensd blijft, definieert de laatste integraal een analytische functie op het halfvlak  $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ .  $\square$

**Lemma 2.** *De functie  $\zeta(z)$  heeft geen nulpunten op de lijn  $\{\operatorname{Re} z = 1\}$ .*

**Bewijs.** Het Euler product (8) voor  $z = x + iy$  met  $x > 1$  geeft:

$$\begin{aligned} \log |\zeta(x + iy)| &= \operatorname{Re} \sum_p -\log(1 - p^{-z}) = \operatorname{Re} \sum_p \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} p^{-kz} \\ &= \sum_{p,k} \frac{1}{k} p^{-kx} \cos(ky \log p). \end{aligned} \quad (40)$$

Gebruik nu de nuttige relatie

$$3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta = 2(1 + \cos \theta)^2 \geq 0 \quad \text{voor alle (reële) } \theta.$$

In combinatie met (40) geeft zij voor  $\theta = ky \log p$ :

$$3 \log \zeta(x) + 4 \log |\zeta(x + iy)| + \log |\zeta(x + 2iy)| \geq 0,$$

zodat

$$\zeta^3(x) |\zeta^4(x + iy)| |\zeta(x + 2iy)| \geq 1 \quad (x > 1). \quad (41)$$

Stel nu een ogenblik dat de analytische functie  $\zeta(z)$  een nulpunt zou hebben in het punt  $z = 1 + iy$  (natuurlijk met  $y \neq 0$ ). Dan zou  $\zeta^4(z)$  daar een nulpunt hebben van tenminste de orde 4, zodat  $\zeta^4(x + iy) = O\{(x-1)^4\}$  wanneer  $x \searrow 1$ . Daar echter  $\zeta(x) = O\{1/(x-1)\}$  zou het linkerlid van (41) tot nul moeten naderen wanneer  $x \searrow 1$ , een duidelijke tegenspraak!  $\square$

**Lemma 3.** *De telfunctie  $\pi(t)$  voor de priemgetallen wordt voor  $t \geq 2$  begrensd door een constante maal  $t / \log t$ .*

**Bewijs.** De binomiaalcoëfficiënt  $\binom{2n}{n}$  is deelbaar door alle priemgetallen  $p$  in  $(n, 2n)$ , dus ook door hun product. Zodoende geldt

$$\prod_{n < p < 2n} p \leq \binom{2n}{n} < 2^{2n}.$$

Voor  $n = 2^{k-1}$  volgt hieruit

$$(\log 2^{k-1}) \{\pi(2^k) - \pi(2^{k-1})\} \leq \sum_{2^{k-1} < p < 2^k} \log p < 2^k \log 2,$$

$$\pi(2^k) - \pi(2^{k-1}) < \frac{2^k}{k-1},$$

zodat voor  $k \geq 3$  en  $m = [k/2]$ ,

$$\begin{aligned} \pi(2^k) &< \pi(2^{m+1}) + \frac{2^k}{k-1} + \frac{2^{k-1}}{k-2} + \cdots + \frac{2^{m+2}}{m+1} \\ &\leq 2^{[k/2]+1} + \frac{2^{k+1}}{k/2} \leq C \frac{2^k}{k}. \end{aligned} \quad \square$$

**Lemma 4.** *De asymptotische relatie  $\psi(t) \sim t$  voor de Chebyshev functie is equivalent met de priemgetalstelling.*

**Bewijs.** Analoog aan (13) heeft men voor  $t \geq 2$ :

$$\psi(t) = \sum_{n \leq t} \Lambda(n) \leq \pi(t) \log t. \quad (42)$$

Voor  $2 \leq u < p \leq t$  geldt

$$\pi(t) = \pi(u) + \sum_{u < p \leq t} 1 \leq \pi(u) + \sum_{u < p \leq t} \frac{\log p}{\log u} < u + \frac{\psi(t)}{\log u}.$$

Combinatie van (42) en (43) laat zien dat

$$\pi(t) \frac{\log t}{t} < \frac{1}{\log t} + \frac{\psi(t)}{t} \frac{\log t}{\log t - 2 \log \log t}. \quad (43)$$

Door  $u = t / \log^2 t$  te nemen vindt men

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t) \frac{\log t}{t} = 1 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(t)}{t} = 1.$$

□

## Referenties

- 1 Bateman, P.T. and Diamond, H.G., A hundred years of prime numbers. *Amer. Math. Monthly* **103** (1996), 729–741.
- 2 Bochner, S., Ein Satz von Landau und Ikehara. *Math. Z.* **37** (1933), 1–9.
- 3 Diamond, H.G., Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **7** (1982), 553–589.
- 4 Erdős, P., On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **35**, 374–384.
- 5 Hadamard, J., Sur la distribution des zéros de la fonction  $\zeta(s)$  et ses conséquences arithmétiques. *Bull. Soc. Math. France* **24**, 199–220.
- 6 Hardy, G.H. and Wright, E.M., An introduction to the theory of numbers, fifth edition. Clarendon Press, Oxford, 1979. (First edition 1938.)
- 7 Ikehara, S., An extension of Landau's theorem in the analytic theory of numbers. *J. Math. and Phys. M.I.T.* **10** (1931), 1–12.
- 8 Korevaar, J., On Newman's quick way to the prime number theorem. *Math. Intelligencer* **4** (1982), 108–115.
- 9 Korevaar, J., A century of complex Tauberian theory. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **39** (2002), 475–531.
- 10 Korevaar, J., *Tauberian Theory*. Grundlehren der math. Wiss. vol. 329, Springer, Berlin, 2004.
- 11 Landau, E., *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I, II*. Teubner, Leipzig, 1909. (Second edition with an appendix by P. T. Bateman, Chelsea Publ. Co., New York, 1953.)
- 12 Landau, E., Über den Wienerschen neuen Weg zum Primzahlsatz. *Sitz.-Ber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Klasse*, 1932, 514–521.
- 13 Narkiewicz, W., The development of prime number theory. Springer Monographs in Math., Springer, Berlin, 2000.
- 14 Newman, D.J., Simple analytic proof of the prime number theorem. *Amer. Math. Monthly* **87** (1980), 693–696.
- 15 Selberg, A., An elementary proof of the prime-number theorem. *Ann. of Math. (2)* **50**, 305–313.
- 16 Tenenbaum, G. and Mendès France, M., The prime numbers and their distribution. Student Math. Library vol. 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000. (Translation of the French edition of 1997.)
- 17 de la Vallée Poussin, C., Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, I. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* **20:2**, 183–256.
- 18 Wiener, N., Tauberian theorems. *Ann. of Math.* **33** (1932), 1–100.
- 19 Wiener, N., The Fourier integral and certain of its applications. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1933.
- 20 Zagier, D., Newman's short proof of the prime number theorem. *Amer. Math. Monthly* **104** (1997), 705–708.

## Nando Timmer

Leerstoel Windenergie

Faculteit Luchtvaart-en Ruimtevaarttechniek

Technische Universiteit Delft

Kluyverweg 1

2629 HS Delft

w.a.timmer@lr.tudelft.nl

### Vakantiecursus 2003 De weerstand van schaatsers

# Snelle pakken

Van 7 tot en met 9 januari 2005 wordt in Heerenveen het Europees Kampioenschap All-round schaatsen gehouden. Het wereldkampioenschap vindt een maand later, op 5 en 6 februari plaats in Moskou. De Nederlanders zullen als altijd weer sterk vertegenwoordigd zijn. De laatste jaren speelde meerdere keren ook de Nederlandse sporttechnologie een rol. Eerst kwam in 1996 de klapschaats en in 1998 de strips op de schaatspakken. Nando Timmer, aerodynamicus en onderzoeker op het gebied van windenergie, vertelt hoe het werkt.

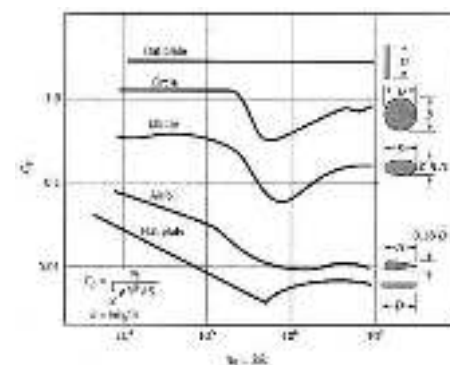
De International Herald Tribune schreef: "speed skaters make history", USA Today sprak van "the new edge in speedskating". In eigen land kopte de Volkskrant "Romme leidt stayers naar nieuw tijdperk" en het NRC Handelsblad jubelde "Nederland zet de schaatswereld op z'n kop met strips". Het is maandag 9 februari 1998, een dag na de 5000 m schaatsen voor heren op de Olympische Winterspelen van Nagano, Japan. De eerste 4 plaatsen van het eindklassement van deze 5 km werden bezet door Nederlanders. Gianni Romme breekt zijn oude wereldrecord met 8,43 seconden. De nummer 2, Rintje Ritsma, haalt 6 seconden van zijn eigen toptijd af en num-

mer 3, Bart Veldkamp, uitkomend voor België, haalt de eerste olympische schaatsmedaille voor onze Zuiderburen binnen door zijn eigen persoonlijk record met maar liefst 11 seconden te verbeteren. Hij eindigde eveneens onder het oude record van Romme. Eindelijk weer eens goud voor Nederland op de 5 km, de tweede gouden medaille ooit op deze afstand, na die van Ard Schenk in Sapporo 1972. De Nederlanders droegen in Nagano als enigen in het internationale gezelschap zigzag strips op het hoofd en de onderbenen. De twee onderzoekers van de TU Delft, die de strips ontwikkeld hadden, waren even het middelpunt van het universum en de TU Delft zette die week paginagrote advertenties in de grote landelijke dagbladen om zichzelf te promoten met dit prachtige resultaat van Delfts onderzoek. Euforie en scepsis, protesten en triomf, het was er allemaal en een paar stukjes foam op de schaatskleding van de heren en dames coryfeeën van de Nederlandse schaatsploeg speelden daarbij een belangrijke rol.

#### Kwam het door de strips?

Niemand zal het ooit weten. Er is nu eenmaal geen vergelijkingsmateriaal voorhanden; tijden gereden door dezelfde schaatsers op de-

zelfde dag onder dezelfde omstandigheden, maar zonder de zigzagstrips. Het is mogelijk dat de strips alleen een placebo-werking hadden, maar het is niet waarschijnlijk. Echter, de helaas reeds overleden uitvinder van de moderne klapschaats, Gerrit-Jan van Ingen Schenau, heeft eens gezegd: "wetenschappers maken geen kampioenen". Dat is de enige zekerheid; de Nederlandse medaillewinnaars mogen vooral zichzelf op de borst slaan met het succes van Nagano. Toptijden rijdt men niet door 'ribbelstrookjes', zoals de strips ook wel genoemd werden, op het pak te plakken. Daarvoor zijn allereerst ta-



**Figuur 1** Het verloop van de weerstandcoëfficiënt met het Reynoldsgetal voor diverse objecten<sup>1</sup>

lent, training, techniek en doorzettingsvermogen noodzakelijke vereisten. Maar de juiste materiaalkeuze speelt daarbij een niet geheel ondergeschikte rol. In het volgende zullen de achtergronden van de schaatsstrips belicht worden. Vervolgens zal de lijn doorgetrokken worden naar de huidige snelle schaatspakken.

### Luchtweerstand

Ruwweg 80% van de weerstand die een schaatser ondervindt is luchtweerstand. Enkele procenten winst in deze aëroodynamische weerstand vertaalt zich al snel in een betere eindtijd. De luchtweerstandskracht  $D$ , uitgedrukt in Newton wordt gegeven door :

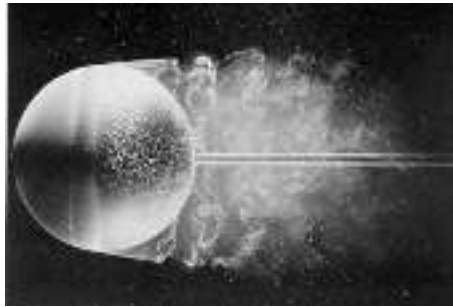
$$D = C_d \cdot \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot S \quad (1)$$

Hierin is  $\rho$  de luchtdichtheid in  $\text{kg/m}^3$ ,  $V$  de snelheid in  $\text{m/s}$ ,  $S$  het frontaal oppervlak in  $\text{m}^2$  en  $C_d$  de weerstandscoefficiënt. Een ieder die de Japanse sprinter Shimizu heeft zien schaatsen met zijn neus bijna op het ijs, beseft dat het verkleinen van het frontaal oppervlak directe gevolgen moet hebben voor de snelheid. De luchtdichtheid speelt eveneens een grote rol bij de eindtijden. Helaas voor de Heerenveense baan Thialf zullen banen op grote hoogte de wereldrecords blijven leveren. De verschillen met laaglandbanen zijn dermate groot, dat dit niet goed gemaakt kan worden door bijvoorbeeld 'beter' ijs te maken. In tabel 1 is de luchtdichtheid gegeven voor de banen in Heerenveen en Salt Lake City, met daarbij de baanrecords voor heren. Die van Salt Lake City zijn tevens de huidige wereldrecords. Voor beide locaties is de haltemperatuur  $15^\circ\text{C}$ .

De derde belangrijke parameter die de snelheid bepaald is de weerstandscoefficiënt  $C_d$ . De hoogte van deze parameter toont in welke mate het object dat in de stroming staat 'gestroomlijnd' is. Stroomlijn is belang-

| Locatie                    | Heerenveen | Salt Lake City |
|----------------------------|------------|----------------|
| hoogte (m)                 | 0          | 1400           |
| $\rho$ ( $\text{kg/m}^3$ ) | 1.225      | 1.035          |
| 500 m                      | 34.83      | 34.22          |
| 1000 m                     | 1.10.41    | 1.07.18        |
| 1500m                      | 1.46.63    | 1.43.95        |
| 5 km                       | 6.29.31    | 6.14.66        |
| 10 km                      | 13.03.40   | 12.58.92       |

**Tabel 1** De relatie tussen de baanhoogte en de baanrecords voor een laag- en een hooglandbaan



**Figuur 2** Visualisatie van de stroming om een bol met behulp van rook. Links laat de laminaire grenslaag los. Rechts wordt via een groef langs kunstmatige weg de stroming turbulent gemaakt, zodat het zog kleiner wordt.<sup>2</sup>

rijk, weten we uit de praktijk. Een vliegtuig (of een auto) moet stroomlijn hebben, anders is de weerstand te hoog en wordt te veel brandstof verbruikt.

### Drukweerstand

Bij de weerstandscoefficiënt speelt de vorm van het object een belangrijke rol. Een stomp voorwerp heeft een hogere  $C_d$  dan een druppelvormig object. De stroming om lichaamsdelen zoals benen en hoofd heeft wel iets weg van die om bollen en cilinders. Daarom wordt hierna de werking van de strips uitgelegd aan de hand van deze vormen. Van voorwerpen met ronde vormen, zoals bollen en cilinders, varieert de  $C_d$  met het Reynoldsgetal. Dit schalingsgetal geeft de verhouding weer tussen de wrijvingskrachten en de mechanische krachten in de stroming. Het Reynoldsgetal wordt gegeven door:

$$Re = V \cdot \frac{D}{\nu} \quad (2)$$

Hierin is  $V$  de snelheid,  $D$  een karakteristieke lengte, (voor een cilinder of bol is dat de diameter) en  $\nu$  de kinemaethische viscositeit van het medium. De variabele  $\nu$  is afhankelijk van de temperatuur en de druk in het medium. Voor lucht bij  $15$  graden Celcius en  $1013$  mBar is  $\nu$  ongeveer  $15 \times 10^{-6}$ . Als van twee objecten met dezelfde vorm, maar andere afmetingen, in een ander medium, met een andere snelheid het Reynoldsgetal overeenkomt, is het stromingspatroon eveneens hetzelfde. Ze hebben dan dezelfde  $C_d$ . In figuur 1 is het verloop van de weerstandscoefficiënt met het Reynoldsgetal weergegeven voor diverse objecten.

### Het kritieke Reynoldsgetal

Voor niet-gestroomlijnde objecten met ronde vormen blijkt er een significante vermindering van de  $C_d$  plaats te vinden bij een bepaald Reynoldsgetal. Dit noemen we het kritieke Reynoldsgetal. De verlaging van  $C_d$ , voor



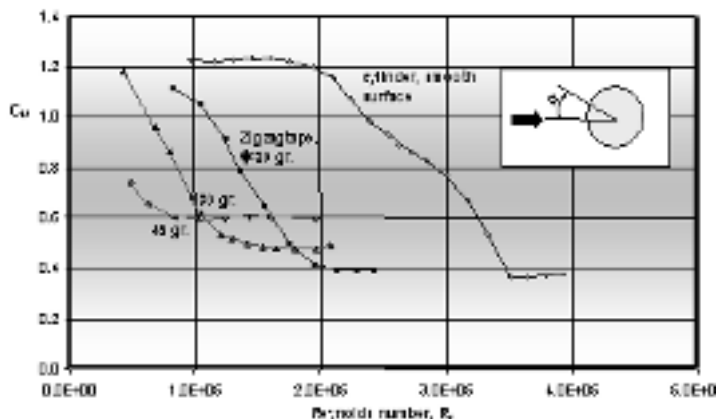
cilinders zelfs tot eenderde van de oorspronkelijke waarde, hangt samen met een verandering in het karakter van de stroming rond de cilinder. Het luchtlaagje dat over het oppervlak stroomt noemen we de 'grenslaag'. Bij lage  $Re$  is de grenslaag laminair, dwz netjes gelaagd en rustig. Het nadeel van deze laminaire grenslaag is dat hij — door de wrijving — snel zijn energie kwijtraakt en niet de ronding van de bol helemaal kan blijven volgen. Ergens in de buurt van het dikste punt van de cilinder laat de grenslaag los van het oppervlak en duwt de buitenstroming weg, zodat er een breed 'zog' ontstaat. In dit zog zijn de snelheid en de druk laag. Een en ander is te vergelijken met de 'slipstream' achter een vrachtauto. Men wordt als het ware meegezogen. Het resultaat is dat er een groot drukverschil is tussen de voorkant (waar de lucht tegen op botst) en achterkant van de cilinder (waar de lage druk heerst). De cilinder heeft dan een grote 'drukweerstand'. Deze drukweerstand is veel groter dan de wrijvingsweerstand van de luchtdeeltjes langs het oppervlak.

### Glad is niet altijd beter

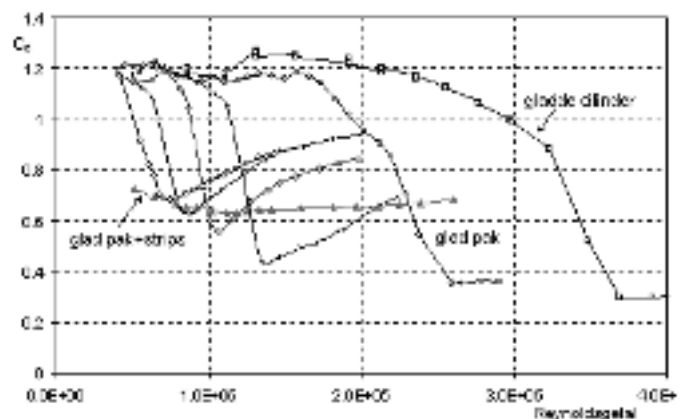
Als we het Reynoldsgetal groter maken (hetzij door de snelheid te vergroten bij vaste diameter en omgevingscondities, hetzij door de diameter te vergroten bij vaste snelheid, hetzij door het medium te variëren) tot aan het kritieke Reynoldsgetal dan verandert het ka-



**Figuur 3** Bart Veldkamp in de openstraal windtunnel van de TUDelft. Hij staat op een rekstrookbalans om de weerstandskracht te meten. Met een woldraadje worden loslaatgebieden getraceerd.



**Figuur 4** Het effect van de plaats van het zigzagtape (gemeten vanuit het voorste punt) op de weerstandscoefficiënt van een cilinder. Het tape werd aan weerszijden van de neus aangebracht.



**Figuur 5** De weerstandscoefficiënt van een cilinder bekleed met stoffen met verschillende ruwheid als functie van het Reynoldsgetal

rakter van de grenslaag gaandeweg van laminair naar 'turbulent', dat wil zeggen, warrelige en chaotische bewegingen van de luchtdeeltjes van de grenslaag. Hierdoor vindt er energieuitwisseling plaats met de stroming die eerst nog buiten de grenslaag zat, en niet te maken had met de wandwrijving, zodat de turbulente grenslaag meer energie heeft en veel langer de ronding van de cilinder kan blijven volgen. Het resultaat is dan dat het zog kleiner is en de druk in het zog hoger. De drukweerstand is dan drastisch afgenomen en de totale weerstand van de cilinder ook. De snelheid waarbij deze overgang van laminair naar turbulent op de juiste manier plaatsvindt hangt af van de grootte van  $v$  en de diameter van de cilinder. Voor cilinders met een diameter van circa 15 cm ligt deze snelheid op minstens 30 m/s. Er is

echter een mogelijkheid deze snelheid te verlagen. Op kunstmatige wijze kan de grenslaag turbulent gemaakt worden door het oppervlak ruw te maken of door een ander soort verstoring aan te brengen. Dit is in beeld gebracht in figuur 2.

Door een juiste keuze kan zo het kritieke getal van Reynolds verlaagd worden tot een waarde, die bijvoorbeeld in het schaatsen voorkomt. Ook de putjes in een golfballetje zijn aangebracht met hetzelfde doel: verlaging van de drukweerstand, zodat het balletje verder komt.

#### Zigzagtape

Dat voor de benen en het hoofd van de schaatsers zigzagtape gebruikt werd, verbaast insiders niet. Bij windtunnelproeven aan profielen voor zweefvliegtuigen werd dit tape al

langer gebruikt. Ook bij deze profielen komt loslating van de laminaire grenslaag voor. Het zigzagtape bleek door de werveltjes die van de puntjes afkomen een zeer efficiënte manier om de grenslaag turbulent te krijgen. Hoe dat in de praktijk werkt laat figuur 6 zien. Met behulp van fluorescerende olie is de stroming op het been zichtbaar gemaakt. Links het kale been, rechts het been met zigzagtape. De brede, lichtgekleurde lijn op het been links laat de loslaatlijn zien. De stroming laat daar los en van achteren wordt olie aangevoerd door terugstroming in het zog achter het been. Rechts is te zien dat de stroming het been beter omvat. De loslaatlijn ligt een stuk meer naar achteren. Goed zijn ook de werveltjes te zien die van de puntjes van het tape afkomen. De vraag is nu, waar het tape precies moet worden aangebracht en hoe dik het moet zijn. Daar is met behulp van cilindermetingen informatie over verkregen. Figuur 4 laat de relatie zien tussen de positie van het tape en de resulterende weerstandscoefficiënt van de cilinder als functie van het Reynoldsgetal. De onderbenen van een schaatser hebben een gemiddelde Reynoldsgetal in de orde van  $10^5$ . Een hoek van 30 tot 45 graden vanaf het voorste punt van het been lijkt daarvoor het meest geschikt. Het blijkt, dat het kunstmatig storen van de grenslaag ook een prijs heeft. Het kritieke Reynoldsgetal komt wel bij een lagere waarde te liggen, maar het minimum van de  $C_d$  komt niet meer zo laag. Variatie van de dikte van het tape geeft een vergelijkbaar verloop te zien.



**Figuur 6** Het effect van zigzagtape op de loslaatlijn. Het been links vertoont vroege laminaire loslating (de dikke lijn door het midden van het been). Het been rechts heeft turbulente loslating ten gevolge van de zigzagstrip.

#### De openstraal windtunnel

Op echte benen is een en ander geverifieerd met topschaatsers als proefkonijn. In Figuur 3 ondergaat Bart Veldkamp een test in de openstraal windtunnel van de TUDelft. Hij staat op een plateau, waarmee de weerstand wordt ge-

meten met behulp van een rekstrookbalans.

Gemiddeld werd bij de topschaatsers in de wintunnel een verlaging in weerstand ten gevolge van de strips gevonden van circa 5%, hetgeen overeenkomt met circa 0,5 seconde per rondje. In de bochten bevindt de schaatser zich uiteraard niet in de standaardhouding, zodat de totale winst wat lager uitvalt. Men heeft nogal getwijfeld aan de waarde van de metingen voor de praktijk, omdat men vond dat de statische houding van de schaatser in de windtunnel niet overeenkomt met de schaatspraktijk. Dat blijkt reuze mee te vallen. De dynamiek bij het schaatsen op de wat langere afstanden zou zich moeten vertalen in variatie van de invalshoek van het been. Omdat de lucht stilstaat is deze bij het grootste gedeelte van de schaatsbeweging — zelfs in de bochten — betrekkelijk gering. Metingen aan het been van figuur 6 lieten zien, dat bij invalshoek variaties van circa +/-15 graden gebruik van het tape nog steeds een weerstandsverlaging oplevert.

### Nieuwe pakken

Het nadeel van de zigzagstrips is het feit dat ze bij iedere wedstrijd weer opnieuw moeten worden aangebracht. Bovendien is het moeilijk om voor de armen en de bovenbenen, die veel meer dynamiek vertonen dan de rest van het lichaam, een eenduidige locatie te vin-

den waarop de strips kunnen worden aangebracht. In de huidige generatie wedstrijdpakken is daarom het verstorende effect van de strips verwerkt via het gebruik van verschillende ruwe stoffen. Afhankelijk van het Reynoldsgetal (c.q. de lokale dikte van arm of been en de snelheid) moet dan de stof worden gekozen die de laagste weerstand geeft. In samenwerking met het Rotterdamse adviesbureau FlowTec Aerodynamics is onderzoek verricht naar stoffen die in aanmerking komen voor toepassing in sportkleding. Figuur 5 laat de experimenteel bepaalde weerstandscoefficienten zien van een cilinder bekleed met verschillende stoffen, ieder met zijn eigen specifieke ruwheid.

Gaan we ervan uit dat de onderbenen van een schaatser een gemiddeld Reynoldsgetal van ca. 100.000 hebben, dan zijn er volgens figuur 5 stoffen die beslist niet in aanmerking komen, omdat ze wel effect hebben, maar bij een te hoge snelheid. Duidelijk is het afwijkende gedrag te zien van een gladde stof met zigzagstrips. In tegenstelling tot de ruwe stof, die een duidelijke 'dip' in de weerstand laten zien, blijft de weerstandscoefficient van een cilinder met gladde stof en zigzagtape constant over een breed gebied van snelheden. Als de strips niet gebruikt worden, moet de ontwerper dus gerichter keuzes maken, meer weten van het materiaal waarmee hij



**Figuur 7** De Pool Pavel Zygmunt in de windtunnel tijdens proeven aan een pak met driehoekige applicaties en verschillende stoffen op armen en benen

werkt, om met de juiste configuratie te komen. De ruwheid van de stof kan gemaakt worden door verschillende breisels toe te passen, maar ook stoffen met applicaties komen in aanmerking. In figuur 7 is de Poolse schaatser Zygmunt te zien, die een windtunneltest ondergaat gehuld in een pak van Nederlands fabrikaat, waarop een driehoekige applicatie is aangebracht op bovenbenen en hoofd. Op de onderbenen en armen is een stof met verschillend breisel toegepast. De rest van het lichaam heeft een gladde stof.

De nieuwe generatie pakken zonder strips werd voor het eerst gebruikt op de Olympische Winterspelen van Salt Lake City, 2002. De Nederlandse schaatser kwamen uit in een pak van Amerikaanse makelij. 

### Referenties

- 1 D.F. Young, B.R. Munson en Th.H. Okiishi, *A Brief Introduction to Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc. New York 1997.
- 2 H. Werlé, 'Transition et décollement: visualisations au tunnel hydrodynamique de l'ONERA, *Recherche Aérospatiale* 198, p. 331–345, 1980.

**Herman te Riele**

Centrum voor Wiskunde en Informatica  
Postbus 94079  
1090 GB Amsterdam  
herman@cwi.nl

**Jaap Top**

Vakgroep Wiskunde, Rijksuniversiteit Groningen  
Postbus 800  
9700 AV Groningen  
top@math.rug.nl

**ICM 1954**

# Vijftig jaar geleden

In 2008 organiseert het Koninklijk Wiskundig Genootschap in Amsterdam het Fifth European Congress of Mathematics (5ECM). Al heeft het KWG daarvoor nog vier jaar tijd, toch biedt het een goede aanleiding om terug te kijken op het andere grote in Amsterdam gehouden wiskundecongres. Het twaalfde International Congress of Mathematicians (ICM) vond hier vijftig jaar geleden, van 2 tot 9 september 1954, plaats. Herman te Riele, een van de organisatoren van het 5ECM en Jaap Top, hoofdredacteur van het Nieuw Archief voor Wiskunde, geven hier een impressie van dat congres.

Als voorloper van de reeks ICM's wordt wel het wereldcongres van wis- en sterrenkundigen tijdens de Wereldtentoonstelling in Chicago in 1893 genoemd. Er namen 45 wiskundigen aan deel. De Duitsers Felix Klein en Eduard Study plus hun Italiaanse collega Bernard Paladini vertegenwoordigden er het niet-Amerikaanse deel van de wiskunde. De echte reeks begint vier jaar later, in Zürich. Als hoofddoel wordt geformuleerd "De persoonlijke betrekkingen tussen wiskundigen uit verschillende landen te stimuleren". De 'M' in ICM staat dan ook nadrukkelijk voor 'Mathematicians' en niet voor 'Mathematics'.

Tot de eerste wereldoorlog gaat dit prima. Het tweede congres in Parijs, evenals de voorloper in Chicago samenvallend met een Wereldtentoonstelling, werd beroemd vanwege Hilberts lijst van 23 problemen voor de twintigste eeuw. De oorlog brengt daar evenwel verandering in. In 1920 in Straatsburg en eveneens in 1924 in Toronto zijn Duitse wiskundigen niet welkom, en de 'M' gaat toch maar 'Mathematics' betekenen.

Al wordt deze verandering later teruggedraaid en mogen de Duitsers er vanaf 1928 (Bologna) weer bij, de controverses hierover en de in de persoon van L.E.J. Brouwer scherpe, pro-Duitse Nederlandse over-

tuiging was toch een belangrijke reden dat niet al voor de tweede wereldoorlog een ICM in Amsterdam plaatsvond.

In 1954 was het dan zover. Deel 1 van de uit drie banden bestaande proceedings van het congres geeft een indruk van acht dagen Amsterdam, waarbij werkelijk alles uit de kast is gehaald. Het geheel werd georganiseerd onder auspiciën van het Wiskundig Genootschap. Het werd een congres met Prins Bernard als beschermheer en met een lijst van 34 personen die het ere-comité vormden, beginnend met vijf ministers, en dan via de burgemeesters van de grote steden en alle rectores magnifici van de Nederlandse universiteiten tot uiteindelijk de directeurs van DSM en Philips en de voorzitters van de lerarenverenigingen Wimecos en Liwenagel.

**Deelnemers en Amerikanen**

De lijst van 'regular members and their associates' beslaat 53 pagina's, en laat onder meer zien dat in veel gevallen hele gezinnen voor het ICM naar Amsterdam zijn gekomen. H.R. Woltjer zegt, als vertegenwoordiger van het ministerie van onderwijs, in zijn toespraak bij de openingsplechtigheid, dat de persoonlijke contacten het succes van het congres aanzienlijk kunnen versterken. Dit illustreert Woltjer met een citaat van Whitehead overgenomen uit een boek van Lucien Price: "Van mijzelf ben ik alleen maar de zoveelste hoogleraar, maar met mijn vrouw erbij ben ik eersterangs." We vinden in de congresdeelnemerslijst de toenmalig wiskundestudent en latere VVD-politicus Frits Bolkestein, terwijl ook Nicolas Bourbaki zich heeft ingeschreven, evenals jonge Nederlandse wiskundigen als De Boer en Levelt en Singh Varma (Nijmegen), Murre en Van de Ven (Leiden), Scheffer (Delft), Strooker en Veldkamp (Utrecht), Van Lint (Eindhoven) met alle achter hun naam het woord 'student' of 'assistent'. Ondanks hun aanwezigheid en nog ve-

le andere assistenten/studenten (de statistieken op p. 134–138 geven een totaal van ruim 170), klaagt congresvoorzitter J.A. Schouten in zijn presidentiële toespraak, dat de gemiddelde leeftijd van de deelnemers te hoog is: net boven de veertig. Dat er nu zo'n 1550 deelnemers waren en vier jaar eerder in Cambridge (Massachusetts) ruim 2300, lag volgens Schouten aan het feit dat er deze keer 1170 Amerikanen minder dan de vorige keer waren. Onder meer de naam Bourbaki in de lijst zal te maken hebben met de voetnoot "Not all the members listed below attended the congress personally".

### Theedoeken

Op cultureel gebied viel er veel te genieten. Als onderdeel van de openingsceremonie in het Concertgebouw verzorgde Fania Chapiro twee pianorecitals en een dag later, op vrijdagavond, speelde het concertgebouworkest onder dirigent Eduard van Beinum voor het gezelschap. Maandagavond was er kamermuziek door het Hollands Strijkkwartet.

Het Stedelijk Museum (de toenmalig directeur was W. Sandberg) had een tentoonstelling met werken van de nog onbekende M.C. Escher georganiseerd, wiens werk "[...] shows many mathematical tendencies and is connected in a remarkable way with the mathematical way of thought". In het Koninklijk Instituut voor de Tropen toonde en verkocht linnenfabrikant E.J.F. van Dissel uit Eindhoven theedoeken. Ze waren gewoven naar een ontwerp van hoogleraar Balthasar van der Pol. Het

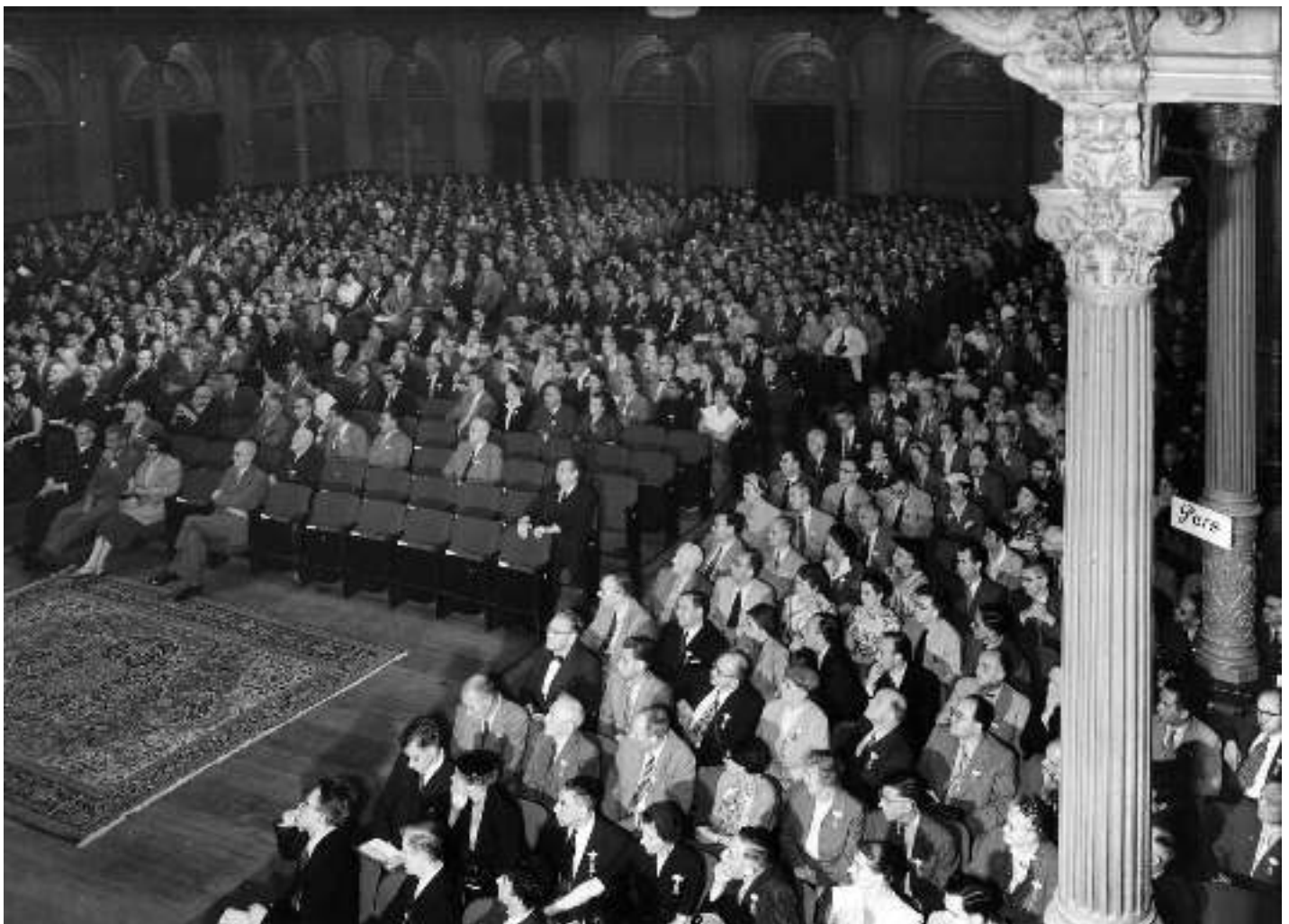
motief op de kledjes stelde de 'Gaussische priemenvrijheid' (priemelementen in de ring  $\mathbb{Z}[i]$ ) voor.

Zelfs over de door de deelnemers te dragen badge was goed nagedacht. Het werd een aardewerken geval in de vorm van de trapgevel van een Amsterdams grachtenhuis. Dezelfde figuur werd voor het congresembleem gebruikt, op de ballonnen bij het dansfeest, en prijkt op de voorkant van de drie congresbanden. Of er een stilistische of een andere reden is, waarom het congres hier IMC en niet ICM wordt genoemd, zoals elders in de proceedings, weten we niet. Middels verkeersborden werden tijdens het congres de sprekers herinnerd aan de hen toegestane tijd. Ook hier betekende rood licht stoppen. 

Graag willen we Ay Ong en Rob van Rooijen (Bibliotheek CWI) en Hendrik Lenstra danken voor hun hulp bij het verzamelen van materiaal voor dit artikel.

### Literatuur

1. J.C.H. Gerretsen en J. de Groot, Eds., *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1954*, Vol. I, II, III, Groningen, P. Noordhoff N.V., 1957
2. D.J. Albers, G.L. Alexanderson en C. Reid, *International Mathematical Congresses. An illustrated history, 1893–1986*, New York, Springer-Verlag, 1987



De openingsbijeenkomst in het Concertgebouw.

Boer J. H. de, Assistent. - Botanicuslaan 17, Haren (Gron.), Netherlands.  
 Boerdijk Dr Ir A. H., Physicist. - Kivilleaan 4, Eindhoven, Netherlands.  
 Boerner Prof. H. - Fichtestr. 13, Gießen, Deutschland.  
 Frau L. Boerner.  
 Böhm Ing. Corrado - Via San Crescenzianno 20, Roma, Italia.  
 Mme E. Böhm.  
 Bohnenblust Prof. H. F. - 1728 Pepper Drive, Altadena, California, U.S.A.  
 Mrs H. F. Bohnenblust.  
 Bohun-Chudyniv Prof. Dr V. - 280 East 10th Street, New York 9, N.Y., U.S.A.  
 Bol Prof. Dr G. - Post Daxlingen 17b, Heuweiler, Deutschland.  
 Frau G. Bol.  
 Boland J. Ch., - Veldhofweg 48, Gooisewijk (Gld.), Netherlands.  
 Bolder Dr H. - Koninkl. Shell Laboratorium, Badhuysweg 3, Amsterdam N., Netherlands.  
 Bolkestein F., Student. - Olympiaplein 27, Amsterdam-Z., Netherlands.  
 Boll L., Rosset-Redakteur. - Karower Chaussee Tornau, Berlin-Buch, Deutschland.  
 Both F., Assistent. - 26 Rue Sautter, Genève, Suisse.  
 Bompiani Prof. E. - Via Verona 22, Roma, Italia.  
 Mme M. Bompiani.  
 Mrs A. V. Borsconi.

Kodaira Prof. Dr K. - Math. Dept., Princeton Univ., Princeton, N.J., U.S.A.  
 Mrs S. Kodaira.  
 Koecher Dr Max - Ostmarkstr. 53, Münster, Westf., Deutschland.  
 Frau H. Koecher.  
 Kogbetliantz Prof. Dr E. G. - International Business Machines Corp., 436 West 110th Street, New York 27, N.Y., U.S.A.  
 Mrs M. Nicholds.  
 Kokama Prof. Dr J. F. - Haringvlietstraat 51, Amsterdam-Z., Netherlands.  
 Mrs G. Kokama-v. d. Stouwe.  
 Kolchin Prof. E. R., Ph. D. - Columbia University, New York 27, N.Y., U.S.A.  
 Mrs K. Kolchin.  
 Master P. Kolchin.  
 Miss E. Kolchin.  
 Master R. Lorr.  
 Kolden E. S., Lektor. - Omdals Vei 8, Kristiansand S., Norway.  
 Kolmogorov A. - Academy of Sciences of the U.S.S.R., Moscow, U.S.S.R.  
 Kolodner Dr I. L. - Inst. of Math. Sciences, New York Univ., 25 Waverly Place, New York 3, N.Y., U.S.A.  
 König Dr H. - Mergentheimerstrasse 182, Würzburg, Deutschland.  
 Koel Dr O., Teacher. - Joop Rykstraat 4, Amsterdam (W.), Netherlands.  
 Mrs J. W. Koel-Haasing.  
 Koopman Prof. B. O. - Dept. of Mathematics, Columbia Univ., New York 27, N.Y., U.S.A.  
 Korevaar Prof. Dr J. - Dept. of Math., Univ. of Wisconsin, Madison 4, Wisc., U.S.A.

Bourbaki Nicolas, Directeur libre de Recherches. - 2 rue de la Croix, Nancy et 11 rue Pierre Curie, Paris V, France.



Boven: fragmenten uit de deelnemerslijst. Onder: ontvangst door koningin Juliana op Paleis Soestdijk. Met de klok mee vanaf de koningin: J.A. Schouten, F. Severi, E. Bompiani, M.L. Cartwright en M.H. Stone.



Boven: J.A. Schouten, voorzitter van het Wiskundig Genootschap en van het organisatiecomité van het Congres, spreekt het welkom uit. Onder: De heren achter de groene tafel tijdens de openingszitting: v.l.n.r. F. Loonstra, H.D. Kloosterman, H.R. Woltjer, Arn.J. d'Ailly, J.A. Schouten, O. Veblen, E. Bompiani, J.F. Koksma, J. Haantjes, H. Weyl.

THURSDAY, 2<sup>nd</sup> SEPTEMBER10.30 Concertgebouw, van Baerlestraat  
OPENING SESSION\*)

1. A few words of welcome by the President of the „Wiskundig Genootschap“ and of the Organizing Committee, Prof. Dr J. A. Schouten.
2. Opening of the Congress by the Burgomaster of Amsterdam.
3. Election of the President of the Congress.
4. Presidential Address.
5. Musical interlude: — Piano Solo by Fania Chapiro  
*F. Chopin:*  
*Impromptu in a flat major op. 29*  
*Nocturne in c minor op. 48*  
*Scherzo no. 2 in b flat minor op. 31*
6. Address by the President of the Fields' Medal Committee 1954, Prof. Dr H. Weyl. Presentation of medals.
7. Musical interlude: — Piano Solo by Fania Chapiro  
*C. Debussy:*  
*Suite pour le Piano*  
(*trilude – sarabande – toccata*)
8. Communications by the Executive Committee of the International Mathematical Union.
9. Final address by the representative of the Government.

In the evening of the opening-day, the Netherlands Government represented by His Excellency Mr. J. J. Cals, Minister of Education, and the Amsterdam Municipality, represented by the Burgomaster, Mr. Arn. J. d'Ailly, held an official reception in the rooms of the Rijksmuseum.

During Friday, September 3<sup>rd</sup>, scientific sessions took place; in the meantime there were several excursions for associate members. In the evening a concert by the Concertgebouw orchestra took place in the Concertgebouw for the members of the Congress. The program of this concert, which was conducted by Eduard van Beinum, consisted of the following works:

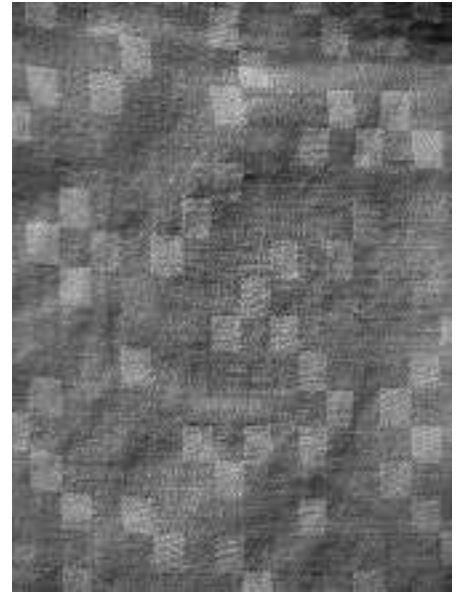
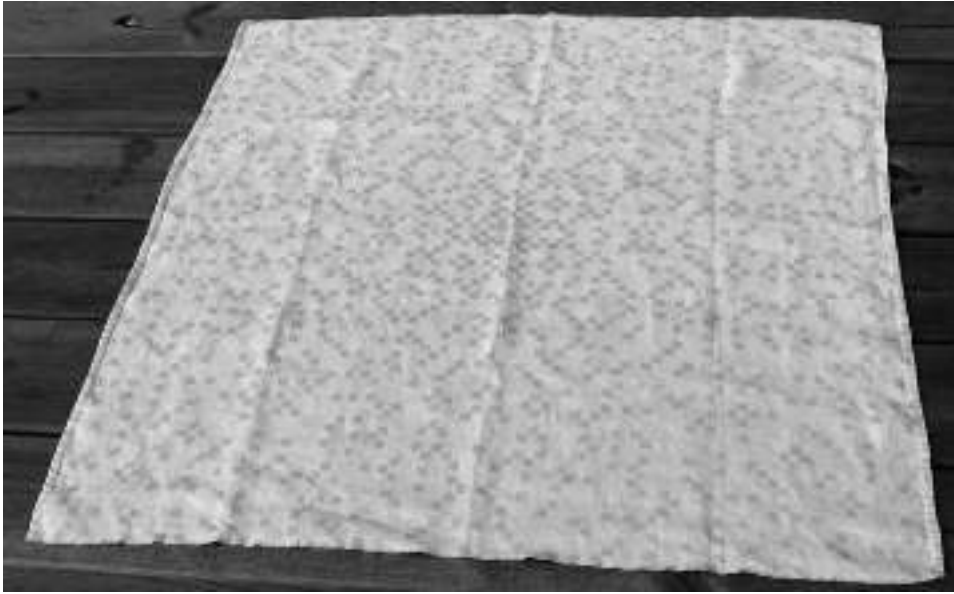
1. Second Suite in b minor, Johann Sebastian Bach  
(Ouverture, Rondeau, Sarabande, Bourrée I, Bourrée II, Polonaise, Menuet, Badinerie)  
Solo flute: Hubert Barwahser
2. Concerto in f major, KV 459, for piano and orchestra, Wolfgang Amadeus Mozart  
(Allegro, Allegretto, Allegro assai)  
Piano Soloist: Hans Henkemaans
3. Symphonische etude, Hendrik Andriessen  
(Quasi adagio, allegro, con spirito, adagio, allegro vivace)
4. La Mer, Claude Debussy  
Trois esquisses symphoniques  
(De l'aube à midi sur la mer; Jeux de vagues; Dialogue du vent et de la mer).



Boven: op de openingsessie, waar de Fields medal werd uitgereikt aan K. Kodaira en J.P. Serre, gaf Fania Chapiro een pianorecital. Op vrijdagavond gaf het Concertgebouworkest onder leiding van Eduard van Beinum een concert. Onder: Slotvoordracht van Andrei Kolmogorov in de grote zaal van het Concertgebouw. Zie ook het artikel van Henk Broer: 'KAM theory, the legacy of Kolmogorov's 1954 paper' in *Bull. of the AMS*, vol. 4, nr. 4, pp. 507–521.



Boven, links: A. van Wijngaarden heeft zijn *Facit*-handrekenmachine meegenomen, mogelijk om de snelrekenaar Pascal te controleren. Pascal was de pseudoniem van Willem Klein. Onder: John von Neumann houdt de eerste uurvoordracht in een voltallige zitting in het Concertgebouw.



Among the technical items may be mentioned the Congress emblem which was designed by Mr D. Kortenoeven, assistant of the Mathematical Centre at Amsterdam. It showed the step-gable of a so-called Amsterdam "Grachten-huis"; the main type of a merchant's house, dating from the 17th century, as one still finds along the canals of Amsterdam. The same design was used for the badge which was carried out in Dutch crockery by the ceramist Mr Marcel B. Keezer at Leiden.

Further, in most lecture-rooms there were traffic-lights operated by the chairman in order to keep the speakers to the time allotted. Yellow light meant: you can speak for another two minutes, red light meant: stop.

Finally may be mentioned the arrangements with the Amsterdam Municipal Tramways, which furnished a passe-partout to the Congressists, allowing unlimited free use of the local trams, busses and ferries during the Congress. Similar arrangements were made with some musea and the Zoological garden "Artis".



Boven: theedoek met de Gaussische priemgetallen: de wiskundige en radiopionier Balthasar van der Pol overtuigde de linnenfabrikant E.J.F. van Dissel en zonen, Eindhoven, van de schoonheid van dit patroon. Er werden rode, groene, blauwe en gele vervaardigd. De verkoop van de theedoeken hield nog tot jaren na het congres aan. Rechts is een detail afgebeeld. Midden: het logo van het congres en enige technische mededelingen. Onder, links: J.F. Koksma in gesprek met een andere bezoeker. Links mevrouw Koksma. Rechts: de uitreiking van de *Fields medal* aan K. Kodaira en J.P. Serre door H. Weyl.



Boven, links: schaaksimultaanséance door Max Euwe in het politiebureau aan de Elandsgracht 117. Rechts en beneden: congresbal in *Bellevue*.

Gerard Stroomer

*Citogroep*  
Nieuwe Oeverstraat 50,  
6811JB Arnhem  
gerard.stroomer@citogroep.nl

Nol Reebok

*Adres bij redactie bekend*

## Onderwijs

# Examens in de steigers

Niet alleen scholieren maken wiskunde-examens, ook andere geïnteresseerden, zoals professionele wiskundigen halen de examens van de website van de Citogroep en lossen de vraagstukken op. Vanuit hun perspectief houden zij de examens wiskunde B1 en B1,2 van het vwo tegen het licht. Af en toe is hierbij de eigen middelbare schooltijd het enige referentiekader en dan vragen ze zich af of dit nou alles is wat er nog geleerd wordt.

Voor de kritiek uit de universitaire wereld op de examens vwo wiskunde B is niet mals. Zijn de examens werkelijk zo slecht als daar wordt beweerd? In dit artikel vertellen Gerard Stroomer en Nol Reebok hoe de examens tot stand komen en welke ontwikkelingen de afgelopen jaren van invloed zijn geweest op de inhoud van de examens. Geven de eindexamens zicht op de huidige stand van cultuuroverdracht in ons vak? Bepalen de examens het onderwijs of is het andersom? Gerard Stroomer is toetsdeskundige bij de Citogroep en Nol Reebok (pseudoniem) is lid van de constructiegroep wiskunde B vwo.

De Tweede Kamer heeft in 1998 het nieuwe examenprogramma voor vwo wiskunde B in de Tweede Fase vastgesteld. De voorstellen hiervoor zijn geformuleerd door een vakontwikkelgroep, ingesteld door het ministerie van OCW. Deze voorstellen zijn in het *Profi-project*, ook ingesteld door het ministerie van OCW, uitgewerkt in concreet voorbeeldmatig lesmateriaal en door middel van veldexperimenten onderzocht op haalbaarheid. Ook heeft het *Profi-team* trajectenboeken geschreven voor auteurs en examenmakers, waarin de programma's worden beschreven en

afgebakend [1]. De trajectenboeken zijn geschreven in samenwerking met twee resonansgroepen. Hierin hadden, naast enkele leden van de vakontwikkelgroep en vertegenwoordigers van de Citogroep, de Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven vwo, havo, vmbo (CEVO) en de Onderwijsinspectie, ook hoogleraren en universitair docenten zitting.

In de Regeling profielen 2000 zijn de examenprogramma's aangepast: wegens gebleken overladenheid is een aantal eindtermen geschrapt [2].

### De CEVO

De Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven bestaat uit een algemeen bestuur, waarin het georganiseerde onderwijsveld is vertegenwoordigd, en uit een vaksectie voor elk examenvak. Elke vaksectie, dus ook de vaksectie wiskunde B, bestaat uit een voorzitter en twee leden. Deze twee leden geven als leraar les aan examenkandidaten. De voorzitter van de vaksectie is afkomstig uit het wetenschappelijk onderwijs of hoger beroepsonderwijs. Eén van de leden wordt benoemd op voordracht van de vakgebonden organisatie (Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren), het andere lid op voordracht van de personeelsorganisaties. De voorzitter en de leden van de vaksectie hebben een zittingsduur van drie jaar. Hun benoeming kan met twee termijnen verlengd worden tot maximaal negen jaar.

De CEVO werkt met een hoge mate van zelfstandigheid onder de eindverantwoordelijkheid van de minister. De taak van de CEVO is geregeld in het Eindexamenbesluit artikel 39. De CEVO geeft enige uitvoeringsregels voor

het centraal examen: het examenrooster, de bij een examen toegestane hulpmiddelen, regels voor de beoordeling van een examen. Zij stelt na afloop van een examen de definitieve normering vast.

De vaksectie stelt het examenmodel wiskunde B vast. Daarin staat hoe lang een examen duurt, welke onderwerpen aan de orde komen, en in welke mate, en welke vaardigheden (zoals informativaardigheden en gebruik van de grafische rekenmachine). In het examenmodel staat ook hoeveel contexten en hoeveel vragen het examen omvat en welke hulpmiddelen gebruikt mogen worden. De vaksectie geeft met het examenmodel aan de Citogroep een gespecificeerde opdracht voor de productie van opgaven voor het centraal examen. Ook bespreekt de vaksectie voorstellen voor het examen en stelt zij het examen vast [3].

### De Citogroep

Met de opdracht van de CEVO gaat de Citogroep aan de slag. Bij het examen wiskunde B vwo zijn twee toetsdeskundigen betrokken en een constructiegroep. De leden van de constructiegroep zijn allen werkzaam in het voortgezet onderwijs. De constructiegroep ontwerpt de opgaven waaruit een examen wordt samengesteld. Daarna moet het geheel nog bijgeschaafd worden om te zorgen dat de set opgaven voldoet aan het examenmodel. Zodra de keus voor de opgaven is gemaakt en een aantal verbeterlagen is uitgevoerd, leggen de toetsdeskundigen het eerste concept voor aan de CEVO-vaksectie. De CEVO-vaksectie levert commentaar op de opgaven waarmee de toetsdeskundigen en

de constructiegroep weer aan het werk gaan. Regelmatig worden vragen in de praktijk getest. Na een paar keer commentaar en nog enkele verbeterlagen kan het examen worden vastgesteld. Vóór de vaststelling wordt het examen gescreend door een onafhankelijke screener (meestal een ex-lid van de CEVO-vaksectie, of iemand met een specifieke deskundigheid). Het hele proces duurt per examen meer dan een jaar en moet afgerond zijn in de maand september voorafgaande aan het examen. Daarna wordt het examen gereed gemaakt voor de drukker.

### Het examenprogramma is veranderd

In het voorwoord van de syllabus Wiskunde B vwo [4], in opdracht van de CEVO samengesteld door de Citogroep, schrijft de voorzitter van de CEVO, J. Bouwsma:

“De Vernieuwde Tweede Fase van havo en vwo betekent een ingrijpende verandering op alle gebieden van het onderwijs. Pedagogisch, didactisch, vakinhoudelijk en organisatorisch verandert er veel. Dit leidt ook tot veranderingen in de examinering. [...] In de centrale examens zijn de veranderingen tweërlei:

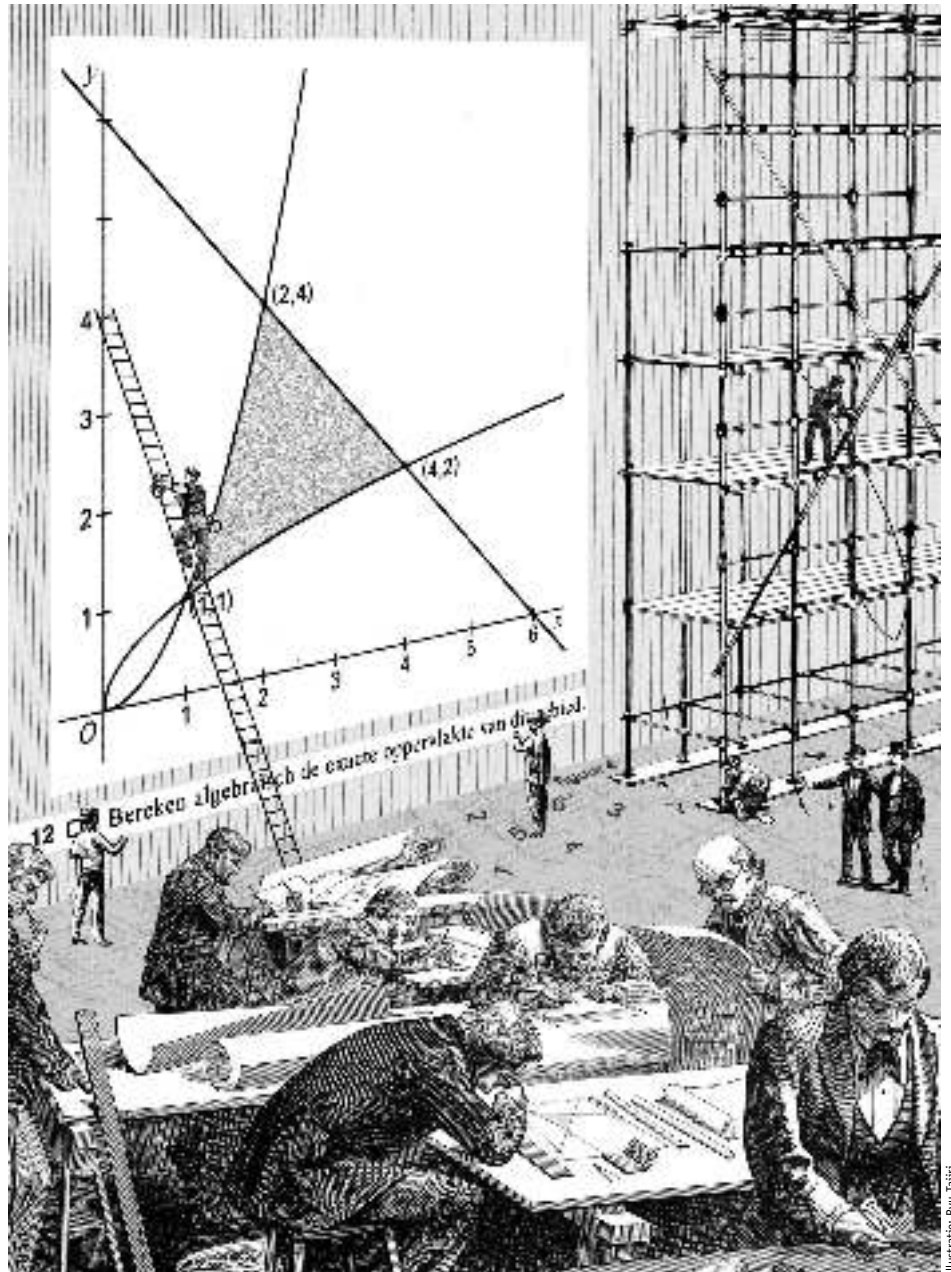
- De vakinhouden in de nieuwe examenprogramma's en dus in de nieuwe examens zijn veranderd. [...]
- De nieuwe examenprogramma's zijn sterker dan voorheen gericht op vaardigheden. Voor een deel kunnen deze vaardigheden het best geëxamineerd worden in het schoolexamen. In de centrale examens zullen vaardigheidsvragen voorzover dat in een schriftelijk examen kan ook een plaats gaan innemen. [...]

De vakinhoudelijke verandering in wiskunde B illustreren we aan de hand van het domein Differentiaal- en Integraalrekening dat ook al in het oude examenprogramma voorkwam. Over de verandering staat in het rapport van de vakontwikkelgroep (zie [1], blz. 7):

“De benadering van de analyse zal een dynamisch karakter hebben en er dienen, meer dan in het huidige onderwijs, numerieke accenten te worden gelegd. Door meer nadruk te leggen op differentiequotiënt en Riemannsom als discreet-numerieke benadering van afgeleide en integraal, kan de typisch analytische begripsvorming beter tot zijn recht komen en kan worden voorkomen dat differentiëren en integreren door leerlingen worden ervaren als het toepassen van een serie algebraïsche trucs.”

Nog een citaat uit dit rapport ([1], blz. 7):

“De exercitie met het algebraïsch differentiëren kan zich in principe beperken tot



elementaire gevallen (standaardfuncties en combinaties daarvan), nu men ervan kan uitgaan dat iedere toekomstige student aan universiteit of hogeschool toegang zal hebben tot een computer-algebrapakket. Bovendien zal de leerling bij het differentiëren gebruik kunnen maken van een formulekaart.”

### De examens zijn veranderd

Als gevolg van de veranderingen in het examenprogramma is ook de inhoud van de examens zelf veranderd. Wim Groen vergelijkt in zijn artikel Vier decennia wiskundeonderwijs (Nieuw Archief voor Wiskunde, december 2003) examenopgaven over differentiaal- en integraalrekening uit 1962, 1982 en 2002. Om dubbelures met dat artikel te vermijden bekijken we hier hoe de verandering van het examenprogramma doorwerkt in opgaven uit het domein Goniometrische functies. We kiezen examenopgaven uit 1991 en 2002 (zie figuren 1 en 2).

De opgave uit 1991 bestaat uit standaardvragen. Dezelfde vragen hebben de leerlingen al tientallen keren geoefend, alleen de kromme zelf is nieuw. De laatste vraag is, zoals toen gebruikelijk, het tekenen van de kromme. Er is grote nadruk op rekentechniek, inzicht is niet echt nodig.

De opgave uit 2002 heeft niet zo'n standaarddrijtje vragen en heeft een dynamischer karakter. De opgave eindigt niet met een tekening, maar begint ermee. De opgave is minder goed op routine te maken; er is meer

**Opgave 1**

Ten opzichte van een rechtthoekig assenstelsel  $Oxy$  is voor  $t \in (-\pi, \pi)$  de kromme  $K$  gegeven door

$$x = 1 + 2 \sin t \quad \text{en} \quad y = \ln(1 + \cos t)$$

- 1 ☐ Onderzoek welke waarden  $x$  kan aannemen en onderzoek welke waarden  $y$  kan aannemen.
- 2 ☐ Bereken de coördinaten van de snijpunten van  $K$  met de  $x$ -as en bereken in één decimaal nauwkeurig de coördinaten van de snijpunten van  $K$  met de  $y$ -as.
- 3 ☐ Bereken de coördinaten van de punten van  $K$  waarin de raaklijn aan  $K$  evenwijdig is met een van de coördinaatassen.
- 4 ☐ Geef een vergelijking van de asymptoot van  $K$  en toon aan dat deze asymptoot tevens symmetrisch is van  $K$ .
- 5 ☐ Teken  $K$ .

**Figuur 1** Examen 1991 eerste tijdvak

creativiteit voor nodig. Rekentechniek speelt niet zo'n prominente rol, maar wordt niet vergeten.

De opgave uit 1991 zou waarschijnlijk in 2002 slecht gemaakt zijn. De opgave uit 2002 zou in 1991 ook slecht gemaakt zijn. De opgaven zijn zo verschillend omdat ze horen bij verschillende examenprogramma's.

De opgave uit 2002 is een illustratie van hetgeen in het trajectenboek over goniometrie is te lezen (blz. 23): "In vergelijking met het 'oude' programma valt in het nieuwe domein goniometrische functies vooral de nadruk op bewegingen op; goniometrische functies worden gebruikt om bewegingen te modelleren. Daarnaast is het gebruik van de GR een nieuw aspect. Minder aandacht dan voorheen wordt besteed aan het oplossen van goniometrische vergelijkingen. De formulekaart maakt het uit het hoofd leren van formules overbodig."

### De relatie onderwijspraktijk — examens

Als gevolg van het Profi-experiment, de trajectenboeken en de wiskundemethoden is het onderwijs veranderd. De examenmakers maken hun opgaven op grond van het examenprogramma, maar staan ook met beide benen in de onderwijspraktijk. Als de onderwijspraktijk verandert, heeft dat via de leden van de constructiegroep, met enige vertraging, ook invloed op de examens. De leden van de constructiegroep weten namelijk wat goed gaat in de klas en wat niet, en houden daar vanzelf rekening mee bij de constructie van hun opgaven. Omgekeerd is het natuurlijk ook waar dat de examens invloed hebben op de onderwijspraktijk. Als een bepaalde activiteit weinig aan bod komt in examens, zal op den duur daaraan in de lessen minder aandacht worden besteed.

Overigens gaat de wederzijdse beïnvloe-

ding langzaam. Veranderingen worden pas na jaren goed zichtbaar.

### Kritiek

Binnen sommige universitaire kringen bestaat weinig begrip voor de huidige examens wiskunde B in het vwo; zie onderstaande citaten.

- "Het curriculum daar (op het vwo) is treurig, de examenopgaven zijn treurig en de manier waarop het werk nagekeken wordt is treurig. Het bewijzen is uit de lesstof verdwenen en in plaats daarvan hebben we realistische wiskunde gekregen die abstracties schuwt." (H. Barendregt, NRC, 07-11-02)
- "De wiskundige inhoud van de zes onderdelen is gering, soms zelfs zeer gering. [...] Vaardigheid in het manipuleren van formules en vindrijkheid bij het vinden van sluitende redeneringen worden niet verlangd [...] De manier waarop de grafische rekenmachine mag worden ingezet betekent niet minder dan een uitroeien van de wiskundige cultuur." (F. Keune, Kennisnet, 25-05-04)
- "Het is triest om te zien hoe weinig men hedentendage in zes jaar leert [...] Ook dit jaar valt het op dat de algebraïsche vaardigheden zijn gereduceerd tot optellen en delen." (J. van Lint, Kennisnet, 25-05-04)

Natuurlijk zijn er ook andere geluiden:

- "Een blik op de eindtermen leert dat deze tweede fase wiskunde bestaat uit een ambitieuze lijst van onderwerpen met een enorme variatie. Daar zitten ook hele leuke onderwerpen bij, ook wat stokpaardjes van deze of gene, en het wiskundig bewijs is in ere hersteld en wordt onderwezen aan de hand van de vlakke meetkunde in de tweede fase. Verder is er ook een lijst van verplichte vaardigheden, die een eerste- of

tweedejaars wiskundestudent niet zouden misstaan. Dat is de theorie. Nu de praktijk. [...] Als we de recente examens als representatief mogen beschouwen, moeten we concluderen dat de zogenaamde context opgaven en realistische wiskunde ook bij de 'harde' wiskunde B hun intrede hebben gedaan en een belangrijke rol spelen." (F. Beukers, Oratie 22 okt. 2001, NAW sept. 2002) [Overigens toont Beukers zich in het vervolg niet zo gelukkig met contextrijke opgaven in het examen.]

De nieuwe examens (of misschien beter: de nieuwe examenprogramma's) beantwoorden blijkbaar niet aan wat men ervan verwacht. Dat komt misschien ook omdat de voorlichting naar de vervolgopleidingen over de nieuwe examenprogramma's en de achtergronden daarvan onvoldoende is geweest. In de volgende paragrafen pogen we alsnog een en ander toe te lichten.

### Vroeger was alles ...

Kritiek is niet nieuw. Vóór de invoering van de tweede fase pleit J. Wessels in het artikel 'Wiskunde-B-examen vooral opzitten en pootjes geven' in de *Cursor* van 3 oktober 1996 al voor minder standaard examens:

- "De manier waarop wiskunde B geëxamineerd wordt, is zodanig dat de leerling een aantal kunstjes moet kennen, hij moet als het ware opzitten en pootjes geven." Volgens Wessels is het hoofddoel van de docent namelijk om zoveel mogelijk mensen te laten slagen voor het Wiskunde-B-examen. Wessels: "Dat bereikt hij het beste door de leerlingen te drillen, ze veel trucjes te leren. Terwijl het bij de wiskunde juist gaat om inzicht, om de precisie van formuleren, om het kritisch kijken."

En Wessels staat bepaald niet alleen. Het rapport van de studietoetscommissie wiskunde B vwo (1994) vraagt ook om meer inzicht in het onderwijs: Doe minder wiskunde, maar laat die wel begrepen zijn [5].

In elk geval was vroeger alles anders, dat laten examenopgaven van vroeger en nu duidelijk zien. De opgaven in de tweede fase ademen een andere sfeer: ze zijn speelser, er zit een toepassingsaspect in en ze vragen minder algebraïsche techniek. In de opgaven vóór de tweede fase moest meer worden gerekend. De vragen waren standaard. De studietoetscommissie wiskunde B vwo schrijft in haar rapport [5]: "Standaardvragen zijn door een goed getrainde kandidaat op routine te maken, de volgorde van de stappen naar de oplossing is gesneden koek. Niet-standaardvragen daarentegen vereisen naast toepassing van de no-

**Een beweging door (0, 0)**

De beweging van een punt in het  $Oxy$ -vlak wordt voor  $0 \leq t \leq 2\pi$  gegeven door:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(15t) + \cos(2t) \\ y(t) = \sin(15t) + \sin(2t) \end{cases}$$

In figuur 3 is de baan van het punt getekend.

**8 □** Bereken de exacte snelheid van het punt op tijdstip  $t = 0$ .

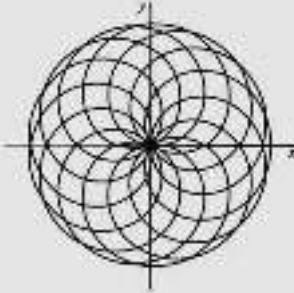
De bewegingsvergelijkingen kunnen herleid worden tot:

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cdot \cos(8\frac{1}{2}t) \\ y(t) = r(t) \cdot \sin(8\frac{1}{2}t) \end{cases} \text{ met } r(t) = 2\cos(6\frac{1}{2}t)$$

**9 □** Toon dit aan.

Bij het doorlopen van de baan van figuur 3 voor  $0 \leq t \leq 2\pi$  passeert het punt een aantal keren  $(0, 0)$ .

**10 □** Bereken dit aantal langs algebraïsche weg.



Figuur 2 Examen 2002 eerste tijdvak

dige technieken ook wiskundige activiteit op een hoger niveau. De kandidaat moet zich in deze situaties een weg banen naar de oplossing...”

Met de huidige (2004) bril op kan over de examens van vroeger het volgende gezegd worden.

- Het eindexamen was vroeger voorspelbaar: drie opgaven analyse (functieonderzoek, parameterkromme, differentiaalvergelijking) en één opgave ruimtemeetkunde.
- Het eindexamen kon je vroeger goed trainen. Sommige scholen begonnen daar dan ook in september in vwo 5 mee. De vraag “Onderzoek de functie en teken de grafiek” kwam in elk examen voor. Die werd dus uitentreuren op school gesteld. En dat ging ten koste van de creativiteit.

Het risico van deze wiskundecultuur ligt voor de hand: als een examenopgave ook maar een beetje afweek van de standaard, werden de resultaten een fiasco. Het niveau van de examens uit de periode voor de vernieuwde tweede fase was dus gedeeltelijk schijn. Het leek heel wat, maar stelde in creatieve zin weinig voor.

### Tegenwoordig

Tegenwoordig krijgen de leerlingen vaak nieuwe situaties voorgeschoteld. Dan moeten ze min of meer creatief zijn. Als je zulke examens voorlegt, moet je uiterst voorzichtig zijn. Het is heel moeilijk om in drie uur tijd nieuwe dingen te verzinnen. Als je een situatie voor de eerste keer ziet, kom je vaak niet meteen op het goede idee. Misschien pas een dag later, of pas als je er met iemand over hebt gepraat! Maar dat kan niet op een examen.

De tweedefase-examenopgaven gaan er anders over. Ze behandelen een onderwerp. Dat kan op het gebied van een natuurkundige toepassing zijn, maar ook binnen de meetkunde of zelfs in een analysecontext. Dit brengt met zich mee dat de opgaven vaak een langere introductie behoeven.

In het programma B12 heeft het bewijzen een belangrijke plaats gekregen, namelijk in het domein Voortgezette meetkunde. Terwijl vóór de tweede fase een bewijs inhield dat de leerling door een berekening het beweerde moest aantonen, gaat het in de vlakke meetkunde om het zuivere wiskundig redeneren.

### Conclusie

Het type examenopgave is thans heel anders dan vroeger. Achteraf is die verandering van jaar tot jaar aanwijsbaar. Er zijn drie hoofdmotieven voor de veranderingen.

- Door de verder gevorderde techniek heeft het bijvoorbeeld geen zin het tekenen van de grafiek als einddoel te stellen, terwijl je de grafiek op de GR onmiddellijk kunt tekenen. Eerder dient de grafiek thans als uitgangspunt voor onderzoek van de functie.
- Opvattingen zijn veranderd. De studietoetscommissie wiskunde B vraagt om meer inzichtsvol onderwijs: doe meer aan begripvorming. In de enquête die de commissie afnam onder vwo-scholen vindt de meerderheid van de respondenten dat er meer aandacht moet zijn in het B-programma voor redeneren en bewijzen en dat meer ingespeeld moet worden op creativiteit en inventiviteit.
- Er is in het wiskundeonderwijs meer aandacht voor algemene vaardigheden (domein A uit het examenprogramma). Het onderwijs is meer onderzoekend geworden; denk aan de praktische opdrachten en het profielwerkstuk. Vaak werken leerlingen zelfstandig en is de docent meer begeleider van het leerproces geworden. Deze andere werkhouding komt ook in de examens tot uitdrukking.

### Recente ontwikkelingen

De Tweede Kamer heeft dit voorjaar de nieuwe plannen voor de herziening van de tweede fase aangenomen. Daarin is voor wiskunde B vwo minder studielast voorzien (van 760 naar 520 studiebelastinguren). De NVvW heeft daar krachtig tegen geprotesteerd; de HBO-raad en de VSNU ook. Dat heeft echter niet geholpen. De minister luisterde niet naar wat ze lobby noemde. Integendeel: met minder wiskunde worden de natuurprofielen makkelijker en dus aantrekkelijker, aldus de minister. Het programma dat in 2007 van start gaat, zal zijn weerslag vinden in nieuwe examens. En die zullen weer veel mensen uit de universitaire wereld aan het schrijven zetten. Misschien schrijven wij dan wel weer een reactie.

### Noten

- 1 Profi-team, Trajectenboek Wiskunde N&G en N&T vwo, Freudenthal Instituut, januari 1998.
- 2 Het examenprogramma is te vinden op de website [www.nvww.nl/Eindtermen2.html](http://www.nvww.nl/Eindtermen2.html).

- 3 De website van de CEVO is [www.cevo.nl](http://www.cevo.nl).
- 4 Lagerwaard, K. en G. van Lent, Syllabus wiskunde B vwo, CEVO en Cito, januari 1999.

- 5 Wiskunde B vwo, rapport studietoetscommissie ISBN 90-74684-02-5.
- 6 Zie voor recente vwo wiskunde B-examens de website [www.havovwo.nl/vwo/vwb](http://www.havovwo.nl/vwo/vwb).

Wim Kleijne

Zwette 130

8446 ML Heerenveen

w.kleijne@owinsp.nl

## Onderwijs

# NOCW 50 jaar

Eind 1953 heeft het Wiskundig Genootschap de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde ingesteld. Het eerste werkjaar van de commissie was 1954, zodat het jaar 2004 als het vijftigjarig bestaan van de commissie kan worden aangemerkt. In dit artikel wordt een overzicht gegeven van belangrijke activiteiten van de commissie gedurende de afgelopen jaren en inzicht gegeven in de plaats en de werkwijze van de commissie in het geheel van het wiskunde onderwijs in ons land. De auteur, Wim Kleijne heeft een ruim veertigjarige loopbaan in het onderwijs achter de rug. Hij was docent wiskunde in diverse schoolsoorten, docent bij de toenmalige opleidingen wiskunde mo-a en mo-b, rector van een lyceum en (coördinerend) inspecteur van het (voortgezet) onderwijs. In deze laatste functie was hij tevens verantwoordelijk voor alle inspectie aangelegenheden met betrekking tot het vak wiskunde. Momenteel is hij plv. (tevens inkomend algemeen) voorzitter van de staatsexamencommissie voor vwo-havo-vmbbo.

In 1954 is de *Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde* (NOCW) als commissie van het *Wiskundig Genootschap* met haar werkzaamheden gestart. Dat betekent dat de commissie momenteel vijftig jaar bestaat, reden om eens terug te kijken op de afgelopen jaren.

### Wederopbouw

Het begin van de vijftiger jaren van de vorige eeuw stond nog sterk onder de invloed van naweeën van de tweede wereldoorlog; de wederopbouw was nog in volle gang. Een wederopbouw niet alleen in fysieke, bouwtechnische, zin, maar ook in de zin van weder-

opbouw van het maatschappelijke, culturele en wetenschappelijke leven. Zo waren onder andere ook de werkzaamheden van de in de eerste helft van de twintigste eeuw door Felix Klein opgerichte *Internationale Mathematik Unterrichts Kommission* (IMUK) (*International Mathematical Union*) door de oorlog stopgezet. De in 1950 opgerichte *International Mathematical Union* (IMU) besloot in haar *General Assembly* van maart 1952 te Rome het werk van de IMUK, in vernieuwde vorm, weer te gaan voortzetten. Sinds de oprichting van de IMU was in ieder van de aangesloten landen (Nederland was via het Wiskundig Genootschap vanaf het begin lid van de IMU) een zogenaamde *Nationale Commissie voor Wiskunde* ingesteld.<sup>1</sup> Op initiatief van de 'nieuwe IMUK' richtte het bestuur van de IMU zich in 1953 tot de aangesloten landen met het dringende verzoek tot instelling van nationale commissies die zich speciaal met 'onderrichtsvragen' zouden gaan bezighouden. Deze in te stellen commissies zouden dan als subcommissies van de Nationale Commissies voor Wiskunde moeten gaan functioneren. Prof. dr. J.F. Koksma, de toenmalige voorzitter van het Wiskundig Genootschap heeft zich zeer beijverd om aan dit verzoek gestalte te geven. Een frequente briefwisseling van Koksma met zijn collega bestuursleden van het WG en met andere wiskundigen van naam en faam gedurende het jaar 1953 is hiervan getuige.<sup>2</sup> Aan zijn niet aflatende bemoeienissen en ijver is het te danken dat op 28 december 1953 de instellingsbijeenkomst kon plaatsvinden van deze 'onderrichts-commissie voor wiskunde', die als Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde door het leven zou gaan. De eerste werkvergadering van de NOCW vond plaats in

januari 1954, zodat het jaar 2004 terecht als het jaar aangemerkt kan worden van het vijftigjarig jubileum van de commissie.

Vanaf het begin heeft deze commissie de bevordering van de wiskundige belangstelling, met name onder jongeren, voor ogen gehad, waarbij meer de nadruk lag (en ligt) op de culturele betekenis van de wiskunde dan op specialistische wiskundige kennis. Daarmee zijn de werkzaamheden van de commissie van meet af aan specifiek verbonden geweest met aspecten van het onderwijs in de wiskunde. Twee agendapunten van de instellingsvergadering van december 1953 illustreren dit:

- Enquête Le rôle du mathématicien dans la vie moderne
- Rapport Organisation de l'enseignement des mathématiques pour les élèves et étudiants de 16 à 21 ans.

Ook in het Genootschap zelf stonden sinds de vroegste historie onderwijskundige activiteiten in de belangstelling. De ledenlijst vermeldt al vanaf het begin vele wiskundeleraars. Eigenlijk is dit niet zo verwonderlijk daar het beroepsperspectief van wiskundigen in die tijden sterk verbonden was met het beroep van leraar. Dit is zo gebleven tot ongeveer de zeventiger jaren van de vorige eeuw. De invloed van leraren was dus vrij groot in het Genootschap. Ook diverse publikaties van het Genootschap getuigen van betrokkenheid bij het onderwijs. Desondanks stond het denken over puur onderwijskundige zaken nog in de kinderschoenen. Het ging in de vroegere jaren met name over wiskundige aangelegenheden, in en voor het onderwijs, waarvoor belangstelling bestond. Pas in de eerste helft van de twintigste eeuw kwam het denken over wiskundeonderwijs en wiskun-

dedidactiek langzaam op gang. Maar in kringen van het Genootschap was het toch vooral de ‘echte’ wiskunde die in het centrum van de belangstelling stond.

### Het Wiskundig Genootschap

De onderwijskundige aangelegenheden waren tot die tijd voornamelijk het terrein van WIMECOS, de toenmalige beroepsvereniging van de leraren (in de Wiskunde, de MEchanica en de COSmografie). Hoezeer de werelden van de vakwetenschappelijke onderzoeker in de wiskunde en die van de wiskundeleraar uit elkaar waren gegroeid, wordt mooi geïllustreerd door een passage uit de openingsrede van de jaarvergadering van WIMECOS op 5 januari 1953 van hun toenmalige voorzitter, drs. G.A. Janssen: “De scherpe scheidingslijn, die er zo lang in ons land tussen de zuiver wetenschappelijke belangstelling en de didactisch gerichte heeft bestaan, gaat hier en daar vervagen. Kringen, die het in het verleden beneden hun wetenschappelijke waardigheid zouden hebben gevoeld zich met problemen van didactiek in te laten, tonen tot een ander inzicht te komen. Het Wiskundig Genootschap, van onbesproken wetenschappelijke standing (zo zelfs dat het het Internationaal Mathematisch Congres in 1954 naar Nederland trekt), acht het wenselijk zich op een gebied te begeven, dat voor de leraren in de wiskunde van direct-practische betekenis is.”<sup>3</sup> Door de instelling van de NOCW als subcommissie van het Wiskundig Genootschap werd een platform gecreëerd waardoor de scheiding van de ‘wetenschap’ en de ‘leraar’ weer overbrugd zou kunnen worden.

De NOCW is dus in feite in 1954 gestart met haar werkzaamheden. Professor Koksma had het bestuur van het WG voorgesteld om als leden van de commissie te benoemen “didactici van professie”. Gedeeltelijk hieraan voldoende werden als eerste leden benoemd: prof. dr. E.W. Beth (voorzitter 1954–1955), dr. L.N.H. Bunt, prof. dr. D. van Dantzig, prof. dr. H. Freudenthal (voorzitter 1955–1975), prof. dr. J.C.H. Gerretsen, dr. D.N. van der Neut en dr. J.H. Wansink (secretaris/penningmeester 1954–1963).<sup>4</sup> Eind 1954 gaf professor Beth te kennen als lid van de commissie te willen terugtreden. Daarop werd professor Freudenthal voorzitter, hetgeen hij gebleven is tot 1975 (lid tot 1986). De namen van deze zwaar-gewichten in de toenmalige wereld van wiskunde en wiskundeonderwijs doen vermoeden dat aan de commissie een zwaarwichtige taak was toebedacht. Een blik op de opdracht die de commissie in 1954 meekreeg werpt hierop enig licht.

### De onderwijscommissie en haar taken

“De Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde (verder aan te duiden als ‘de Commissie’) is als subcommissie van de Nationale Commissie voor Wiskunde ingesteld door het Wiskundig Genootschap en heeft tot taak voor Nederland bij te dragen tot de werkzaamheden van de *Commission Internationale de l’Enseignement Mathématique* (CIEM)<sup>5</sup> en voorts zowel in nationaal als in internationaal verband het onderwijs in de wiskunde in al zijn vormen te bestuderen, inzonderheid met het oog op de toekomstige ontwikkeling daarvan in Nederland.” (art 1 van het reglement van de NOCW dd 25 november 1954)

Veel duidelijkheid geeft dit nog niet. Een latere versie van de opdracht geeft meer helderheid:

“De opdracht van de commissie is:

- In Nederland belangstelling voor de wiskunde te bevorderen onder jongeren, in het bijzonder leerlingen van het Algemeen Voortgezet en Voorbereidend Wetenschappelijk Onderwijs. Het gaat hierbij niet om de wiskunde als een specialisme, maar om de betekenis die het beoefenen van de wiskunde heeft voor mens en maatschappij.
  - In het buitenland contacten leggen en onderhouden met gelijksoortige organisaties die zich bezig houden met wiskundeonderwijs en die thans verenigd zijn in de *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), die onder meer eens in de vier jaar een *International Congress on Mathematical Education*<sup>6</sup> organiseert.”
- In het huidige reglement van de NOCW is de taak als volgt geformuleerd:

“De Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde (NOCW) is een commissie van het Wiskundig Genootschap (WG). Ze treedt als zodanig op als subcommissie van de *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). De commissie heeft verder ten doel de kwaliteit van het wiskundeonderwijs in Nederland te verbeteren en de bij dat onderwijs aansluitende beoefening van de wiskunde en haar toepassingen aan te moedigen.”<sup>7</sup>

### Verbreiding en groei

Alles bij elkaar vertoont het voorgaande een beeld van een langzame verbreiding van de doelstellingen van de commissie. Als we daarvan een samenvatting proberen te geven dan kunnen we zeggen dat de doelstellingen alle te maken hebben met de kwaliteit van het wiskundeonderwijs in Nederland en met de promotie van de bij dat onderwijs aansluiten-

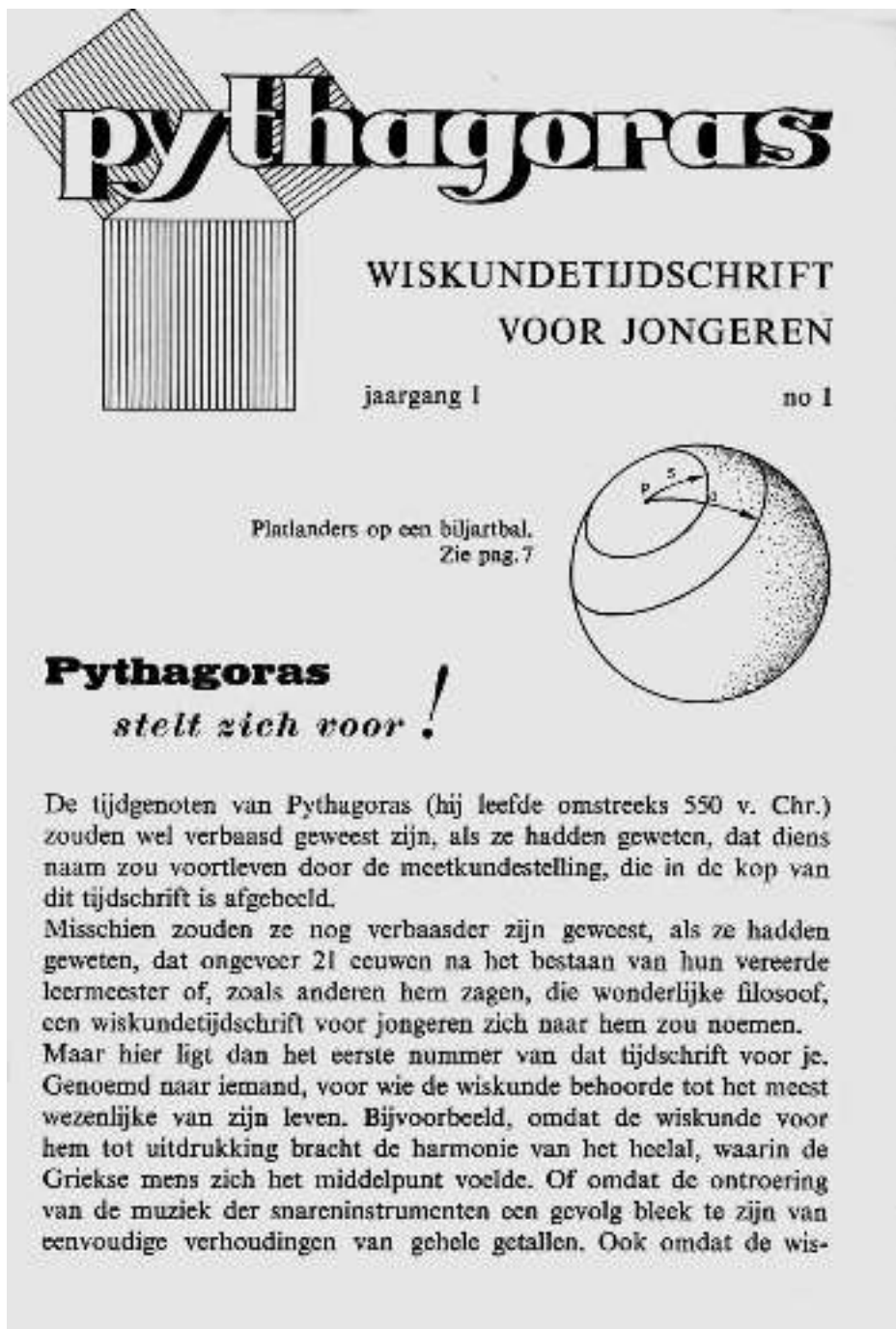


Eerste pagina van het Kasboek van de NOCW: op 24 juli ontving de NOCW 1450 gulden uit de rijksschatkist

de beoefening van de wiskunde en haar toepassingen.

Deze toenemende verbreding zou zich moeten weerspiegelen in de samenstelling van de commissie. En inderdaad is dat het geval. Waar het zwaartepunt in de beginfase duidelijk lag bij personen werkzaam aan universiteiten, komen er langzamerhand meer instanties en groeperingen bij die een vertegenwoordiging in de NOCW hebben. Momenteel bestaat de NOCW uit ten minste zeven leden, onder wie een bestuurslid van het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) en een vertegenwoordiger van de *Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars*. De commissie bestaat nu uit personen die werkzaam (geweest) zijn bij het wetenschappelijk onderwijs, het hoger beroepsonderwijs, het voortgezet onderwijs, het *Freudenthal Instituut*, de *SLO*, de lerarenopleidingen, de inspectie van het onderwijs, het *CITO* en de *Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs*.

Dat de commissie in brede kring ‘officieel’ erkend werd, moge blijken uit de financiering van de NOCW. Aanvankelijk was het ministerie van onderwijs de voornaamste geldbron: gestart werd met een overheidssubsidie van f1450,-, jaarlijks gevolgd door een qua grootte wisselende bijdrage.<sup>8</sup> Later kwamen daar jaarlijkse subsidies bij uit de universiteiten en het bedrijfsleven. Een aantal jaren geleden zijn deze subsidies behoorlijk teruggedraaid respectievelijk stopgezet. Zo bestonden de inkomsten van de NOCW in 2003 uitsluitend uit bijdragen van de universiteiten van Twente, Groningen, Nijmegen en Utrecht en van de VU en de UvA.<sup>9</sup>



Eerste pagina (tevens titelblad) van het eerste nummer van Pythagoras, 1961

### De wiskundige opinie weerspiegeld

De tweeledige doelstelling, kwaliteitsbevordering van het wiskundeonderwijs en promotie van de wiskundebeoefening, wordt weerspiegeld in de activiteiten die de NOCW tot dusver heeft ontwikkeld.

In overeenstemming met het algemene werkplan van de CIEM heeft de NOCW in de periode 1958–1962 gerapporteerd over de volgende onderwerpen:

- Quelles sont les questions de mathématiques modernes et quelles sont les applications des mathématiques modernes qui

peuvent trouver place dans les programmes de l'enseignement secondaire? (rapport door prof. Loonstra en dr. Vredenduin)

- La formation des maîtres pour l'enseignement des mathématiques aux divers niveaux (rapport door dr. Bunt)
- Relations entre l'arithmétique et l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques jusqu'à l'âge de quinze ans (rapport door prof. Freudenthal)

Onderwerpen die nog niets aan actualiteit hebben ingeboet, al zal ieder tijdsgewricht eigen antwoorden formuleren.

In 1965 verscheen een rapport verzorgd door prof. dr. B. van Rootselaar en dr. P.G.J. Vredenduin onder de titel *The use of the axiomatic method in secondary school teaching*<sup>10</sup>. Zoals op de omslag en op het titelblad vermeld staat was het een rapport van de "Subcommittee for the Netherlands of the International Commission on Mathematical Instruction", dat wil zeggen, van de NOCW. Bijdragen zijn van de hand van Van Rootselaar, Vredenduin en Molenaar over "the reasons which might justify its use" (namelijk van de axiomatic methode in het voortgezet onderwijs). Een onderwerp dat typerend is voor die tijd; de titels van de bijdragen geven dit duidelijk aan: *On the use of the axiomatic method in secondary-school teaching, Is an axiomatic foundation of plane geometry in secondary education desirable?, Formation of theories and axiomatics, Axiomatics in statistics teaching?*. Het rapport past volledig in de doelstellingen van de NOCW en het was in het wiskundeonderwijs van de zestiger jaren van de vorige eeuw zeer actueel.

### Over de grenzen

Medio zestiger jaren heeft Freudenthal het initiatief genomen in Nederland een internationaal colloquium te organiseren als activiteit van ICMI en daarmee tevens als activiteit van de NOCW. Van het ministerie werd hiervoor een substantiële subsidie ontvangen (van zo'n f18.000,-), waardoor het colloquium kon plaatsvinden in augustus 1967. Het colloquium droeg de titel: *How to teach mathematics so as to be useful*<sup>11</sup> en bouwde min of meer voort op de aanbevelingen en voorstellen van het UNESCO symposium dat een half jaar eerder gehouden werd in Lausanne. In feite ligt in deze bijeenkomsten de start van het nieuwe denken over het wiskundeonderwijs, waarvan Freudenthal de grote promotor is geweest. Het "as to be useful" heeft geleid tot het denken over en de realisering van wiskunde op school in contextrijke situaties.<sup>12</sup> Zoals bekend heeft Nederland in deze, uiteindelijk wereldwijde, ontwikkeling een centrale plaats ingenomen. De NOCW als subcommissie van ICMI heeft bij de start daarvan een belangrijke plaats mogen innemen.

Al verschillende keren is in het voorgaande de ICMI genoemd, waarvan de NOCW een subcommissie is. In ICMI zijn vele landen vertegenwoordigd, ieder door een zg National Representative. De Nederlandse vertegenwoordiger is (uiteraard) ook lid van de NOCW (zie de ledenlijst van de NOCW in de bijlage). De *Representatives* komen op gezette tijden bijeen en bespreken actuele zaken op het ter-

rein van het wiskundeonderwijs in de meest brede zin. De voorbereiding van het vierjaarlijkse congres onder de naam ICME vormt een belangrijk bestanddeel van dit overleg. Het is hier niet de plaats om de historie van ICMI te beschrijven, maar we noemen deze congressen met nadruk omdat ze een belangrijke rol hebben gespeeld (en spelen) in de ontwikkeling van het wereldwijde denken over wiskundeonderwijs. Het eerste congres vond plaats in augustus 1969 in Lyon, voorgezeten door Freudenthal. Het zal geen verbazing wekken dat datgene wat hiervoor is vermeld over het "as to be useful" in het congres een vervolg heeft gekregen. In zijn welkomstwoord sprak Freudenthal "Mathematics should be taught to be fully integrated by the learner, which means that he should enjoy it and know how to use it if need be. Mathematics should not be taught as an aim in itself but with a view to its educational consequences. Mathematics should not be taught to fit a minority, but to everybody, and they should learn, not only mathematics but also what to do with mathematics. This does not mean teaching applied mathematics, but rather creating an attitude, the attitude of discovering mathematics wherever it applies." En de strekking van deze woorden komt weer terug in de "Resolutions" die het congres als geheel aan het eind heeft aangenomen.<sup>13</sup> Een strekking die tot op de huidige dag aan actualiteit niet heeft ingeboet. Sinds 1969 zijn nu totaal tien congressen gehouden, de laatste, ICME-10, in juli 2004 in Denemarken.

Regelmatig hebben leden van de NOCW, mede in het kader van hun lidmaatschap van de NOCW, deelgenomen aan deze ICME-congressen en aan andere nationale en internationale bijeenkomsten en congressen. Hierbij valt onder andere ook te denken aan vergaderingen van buitenlandse verenigingen van wiskundeleraren (met name die van België), aan bijeenkomsten van de CIEM. Vanaf het begin van de commissie waren de leden op dit terrein behoorlijk actief. De stem van Nederland is dan ook, mede door de NOCW, in diverse verbanden naar voren gebracht.

Eind jaren vijftig onderzoekt de NOCW de mogelijkheid van de uitgave van een wiskundig tijdschrift voor jongeren, speciaal om de belangstelling voor de wiskunde bij jongeren te stimuleren. Het buitenland is ons hierin voorgegaan. Inderdaad is op initiatief van de NOCW het jongerentijdschrift *Pythagoras* opgericht in 1960. Met name dr. J. Wansink heeft zich voor de oprichting van *Pythagoras* enorm ingespannen. Aanvankelijk stond

kunde een uitdrukking was voor de hem omringende wetmatigheden. Zoals de wetmatigheid van de rechthoekige driehoek uitgedrukt in het simpele, maar veelzeggende  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Voor ons heeft de wiskunde een andere betekenis. Wij worden niet meer ontroerd door de harmonie in het heelal. Wij dringen de zonnestelsels binnen. En de wiskunde is ons daarbij een hulpmiddel, een stuk gereedschap. Gereedschap, dat we nodig hebben op allerlei andere terreinen van ons leven. Dat echter ook slechts gehanteerd kan worden door hen, die het door en door hebben leren kennen. De behoefte aan mannen en vrouwen, die de wiskunde hebben leren hanteren en kunnen gebruiken in allerlei takken van techniek, wetenschap en handel wordt steeds groter. Ook voor ons is de wiskunde geworden tot het meest wezenlijke van ons leven. Echter op een andere manier dan voor Pythagoras. Wij kunnen en moeten de wiskunde hanteren, terwijl we er misschien innerlijk koud bij blijven. Voor Pythagoras en zijn volgelingen was de wiskunde in de eerste plaats een zaak van het gemoed en de geest.

We hopen, dat het tijdschrift *Pythagoras* voor zijn lezers twee doeleinden mag bereiken: belangstelling te wekken voor de wiskunde als gereedschap, dat in ons leven van vandaag onmisbaar is, maar daarnaast ook en vooral de innerlijke vreugde te verschaffen, die verbonden kan zijn aan het denken over wiskundige problemen.

G. KROOSHOF | BRUNO ERNST

## WE BLADEREN DIT NUMMER EVEN DOOR

Even willen we vluchtig met elkaar kennis maken. Wat vinden we zoal in dit tijdschrift? Naast enkele grotere artikelen zien we in de eerste plaats een aantal kleine, gezellige probleempjes. Van sommige vind je de oplossing ergens vermeld. (Maar kijk er nu niet dadelijk naar.) Van andere kun je de oplossingen inzenden. Zie het adres op de achterpagina. Onder de goede oplossers wordt een boekenbon van f 2,50 verloot.

Sommige der artikelen zul je wel zonder moeite kunnen lezen, maar er zal er ook wel een enkele bij zijn, waar je niet dadelijk alles van begrijpt. Je zou ze kunnen gebruiken voor onderlinge discussie. Als bij de titel van een artikel het teken  $\circ\circ\circ$  staat, dan hoef je je niet te schamen, als je dat heel moeilijk vindt, want het is bedoeld voor hen, die bijv. de vierde of de vijfde klas van een hbs of gymnasium bereikt hebben. En als je een eerste- of tweedeklasser bent en je begrijpt de artikelen met  $\circ\circ$  bij de titel niet zo maar, wel dan is dat vanzelfsprekend, want die zijn ook wat moeilijker dan de artikelen met alleen maar  $\circ$ .

Verschillende der artikelen zullen in de volgende nummers voortgezet worden, zoals die over logica, wiskunde een spel, enkele interessante krommen en over de natuurlijke logaritmen.

We wensen je veel genoegen met de lectuur en met het puzzelen. Zend ook zelf eens wat in: problemen of artikelen. Je kunt er zelfs een klein honorarium mee verdienen, nl. f 1,— per gedrukte pagina.

2



Tweede pagina van het eerste nummer van *Pythagoras*

het tijdschrift rechtstreeks onder leiding van de NOCW, de redactie was direct verantwoordig schuldig aan de commissie. Later heeft de NOCW zich uit de directe leiding teruggetrokken en zijn andere bestuursvormen bedacht onder verschillende uitgevers. De historie van het tijdschrift is tamelijk bewogen. Na een groeiperiode, waarin zo'n dertigduizend abonnees werden geteld (1969), kwam een periode van neergang in de abonnementenaantallen. Het was soms moeilijk om te blijven voortbestaan, maar met vereende krachten is dit altijd weer gelukt. Eén naam moet in

dit verband genoemd worden: Bruno Ernst is van onschatbare betekenis geweest voor de continuïteit en het voortbestaan van *Pythagoras*. Het was ook aan zijn inspanning te danken dat in 1970 de uitgave *Pythagoras Festival* tot stand kwam, een bundeling van een selectie van verschenen artikelen uit de eerste tien jaargangen.<sup>14</sup> Momenteel maakt het tijdschrift een goede en stabiele periode door. In de 'formule' van *Pythagoras* weerspiegelt zich de doelstelling van de NOCW in optima forma: de bevordering van de wiskundebeoefening, niet vanuit een specialistische hou-



Vignet van de Nederlandse Wiskunde Olympiade

ding, maar vooral vanuit het perspectief van de maatschappelijke en culturele betekenis van de wiskunde. Waarschijnlijk is dat de uiteindelijk kracht geweest van het tijdschrift. In ieder geval heeft het op dit terrein een geweldige invloed uitgeoefend op zeer veel jongeren.

Een andere publicitaire activiteit van de NOCW was de uitgave van de zogenaamde *Torus-reeks*<sup>15</sup>: een serie boekjes waar meer specialistische wiskundige zaken voor jongeren aan de orde werden gesteld. Het waren zonder meer juweeltjes van kleine handzame boeken waarin op zeer deskundige wijze onderwerpen werden besproken die niet tot de directe schoolstof behoorden: *Verzamelingen* (door Vredenduin), *Inductie en Iteratie* (door Duparc), *Versnelling en Beweging* (door Van Tiel), *Rekenen met Kansen* (door Wessels), *Computers en Algoritmen* (door Van der Sluis). In 1969/1970 is de uitgave van de reeks stopgezet: de verkoop was in aantallen te gering om financieel verantwoord te blijven. Gezien de kwaliteit van het gebodene was dat teleurstellend. Momenteel bestaat er weer een serie wiskunde boeken voor jongeren, de *Zebra-reeks*<sup>16</sup>, op initiatief en onder auspiciën van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. De huidige onderwijskundige situatie maakt het voor deze reeks veel gemakkelijker dan die voor de *Torus-reeks*. De boeken behandelen namelijk onderwerpen die een plek kunnen krijgen in een deel van het curriculum voor havo en vwo.

### Wiskunde olympiaden

Een bekende activiteit van de NOCW bestaat uit de jaarlijkse wiskunde olympiaden. Ook hiervoor geldt dat deze wedstrijd ingesteld is door de NOCW<sup>17</sup> en jarenlang rechtstreeks door de NOCW is georganiseerd.<sup>18</sup> De bedoelingen die de NOCW bij de instelling met de wedstrijden had, waren de volgende:

- de leerlingen van het vmbo (voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs) tot

- wiskundestudie animeren;
- jeugdige talenten op wiskundig gebied tijdig ontdekken;
- topprestaties honoreren;
- onder jongeren met een goede aanleg de keuze van een wiskundig beroep propagieren.

In wezen zijn dit nog steeds de doelstellingen van de huidige olympiaden. Door de jaren heen is de werkwijze bij de olympiaden tamelijk constant gebleven. Op de scholen worden voorrondes gehouden om te bepalen wie in aanmerking komen om aan de ‘echte’ wedstrijd deel te nemen. Vervolgens worden de eerste ronden op de scholen georganiseerd. De landelijk gezien ongeveer honderd leerlingen die de hoogste scores behalen worden uitgenodigd om op een centrale plaats aan de tweede ronde deel te nemen. Deze ronde levert de landelijke prijswinnaars op die uit handen van de voorzitter van de NOCW een prijs ontvangen. De beste deelnemers van de olympiade worden uitgenodigd voor de voorbereiding voor deelname aan de internationale olympiade. Naast individuele prijzen is er tevens een systeem van een scholenprijs verbonden aan de olympiade. Uiteraard is persoonlijk en individueel succes in de (nationale en de internationale) olympiade van groot belang voor de deelnemer.

### Nederlandse successen

Tot het begin van de jaren tachtig van de vorige eeuw bereikten de Nederlandse teams dikwijls mooie resultaten op de Internationale Wiskunde Olympiades. Zo behaalde het Nederlandse team in 1977 in Joegoslavië de vijfde plaats (met 21 deelnemende landen), met een gouden medaille voor Hans Mulder, en in 1983 in Parijs de zevende plaats (met 32 deelnemende teams) in het landenklassement, met een gouden medaille voor Daan Krammer. Dergelijke successen komen nu helaas niet meer voor. (Ook dit jaar zijn wij in Griekenland volledig buiten de prijzen gevallen!) Over de oorzaken daarvan is het gissen, onderzoek daarnaar ontbreekt momenteel. Maar de veronderstelling lijkt niet vergezocht om de hoofdoorzaken te zoeken binnen ons huidige onderwijssysteem. De invloed van de olympiaden kan moeilijk overschat worden: aan de voorbereiding op en de deelname aan de olympiaden blijven geweldige stimulansen uitgaan, zowel op de individuele deelnemers als op de scholen.

Dat geldt natuurlijk ook voor andere wedstrijden, zoals de *Kangoeroewedstrijd* voor jongere leerlingen en voor de *A-olympiaden* waarbij groepsgewijs werken aan toepas-

singsgerichte wiskundeproblemen centraal staat. We gaan hierop niet verder in daar dit geen directe activiteiten van de NOCW zijn. Na de eerste tien Olympiaden is een onderzoek ingesteld (uitgevoerd door Van der Neut en Wansink) naar de studiekeuze, de studieresultaten en de maatschappelijke functies van de 100 prijswinnaars van de wiskunde olympiaden uit de jaren 1962–1971.<sup>19</sup> Uit het onderzoek bleek “dat tal van leerlingen door hun succes bij de wedstrijden tot voortgezette wiskundestudie en tot de keus van een wiskundig beroep zijn gestimuleerd. [...] dat tal van winnaars door hun succes meer zelfvertrouwen hebben gekregen, terwijl anderen bij aanvankelijke twijfel tussen twee studierichtingen er toe gekomen zijn de wiskundige richting te kiezen. [...] dat vele jeugdige talenten door de wedstrijden naar voren konden komen. [...] de ‘honorering’ is in het materiële vlak bescheiden geweest: de winnaars kregen enige boeken op wiskundig gebied ten geschenke aangeboden. [...] Belangrijker dan de materiële honorering was de officiële waardering waartoe de prijsuitreiking leidde: op ondubbelzinnige wijze kwam vast te staan dat men had uitgeblonken in een landelijke wedstrijd op wiskundig gebied door het oplossen van problemen van hoog niveau.”<sup>20</sup>

Deze resultaten mogen natuurlijk niet zonder meer van toepassing verklaard worden op de huidige situatie, daarvoor is er de afgelopen dertig jaar te veel veranderd. Maar het lijkt alleszins redelijk dat elementen van deze resultaten ook nu nog geldig zijn. Helaas beschikken we niet over nieuw representatief

De Nederlandse Wiskunde Olympiade. Het boek bevat de mooiste opgaven van de afgelopen twintig jaar.<sup>21</sup>

onderzoek. In 2003 verscheen de uitgave *De Nederlandse Wiskunde Olympiade, 100 opgaven met hints, oplossingen en achtergronden*, onder eindredactie van Jan van de Craats.<sup>21</sup> Een buitengewoon rijk boek waarin het niet alleen om losse opgaven, maar ook om de verbindende theorie gaat. Behalve voor hen die zich willen voorbereiden op de wedstrijden, maar ook voor allen die zich met een behoorlijk brok wiskunde willen bezighouden is dit boek van grote waarde.

### Gevraagd en ongevraagd advies

Evenals in de eerste jaren van het bestaan geeft de commissie ook nu gevraagd en ongevraagd adviezen ten aanzien van ontwikkelingen op het terrein van het wiskundeonderwijs onder andere aan bewindslieden en het departement. Zo heeft de NOCW gereageerd op het rapport van de verkenningscommissie voor Wiskunde "Wiskunde in Beweging", op voortgaande veranderingen in examenprogramma's, op de nota "De Tweede Fase Vernieuwt", op het rapport van de commissie vwo-wiskunde B en op voorstellen ten aanzien van ontwikkeling van wiskundeonderwijs in het hbo. Enige van de huidige aandachtspunten worden gevormd door de plaats van de wiskunde in de profielen van de tweede fase van het voortgezet onderwijs, het tekort aan leraren wiskunde, de problematiek van de zij-instroom, de vakbekwaamheid van leraren, de instroom van studenten in de wiskunde opleidingen, de financiële ondersteuning van wiskunde activiteiten, de plaats van de wiskunde educatie in het deltaplan beta

### Leden van de NOCW sinds 1954

prof. dr. E.W. Beth (1954–1955, voorzitter 1954–1955); dr. L.N.H. Bunt (1954–1968); prof. dr. D. van Dantzig (1954–1960); prof. dr. H. Freudenthal (1954–1986, voorzitter 1955–1975); prof. dr. J.C.H. Gerretsen (1954–1960); dr. D.N. van der Neut (1954–1972); dr. J.H. Wansink (1954–1968, secretaris/penningmeester 1954–1963); prof. dr. F. Loonstra (1955–1970); A.J.S. van Dam (1956–1960); dr. P.G.J. Vredenduin (1957–1990, national representative ICMI); prof. dr. J.J. Seidel (1960–1968); dr. H. Streefkerk (1960–1966); prof. dr. R. Timman (1960–1964); prof. dr. A.F. Monna (1963–1974, secretaris/penningmeester 1963–1970); prof. dr. A.W. Grootendorst (1964–1978); R. Troelstra (1966–1980); drs. J.W. Campfens (1968–1972); dr. J. van Dormolen (1969–1982, secretaris 1970–1980, penningmeester 1970–1982); prof. dr. W. van der Meiden (1969–1973); prof. dr. B. van Rootselaar (1970–1973); A.A. Hoogendoorn (1971–1972); drs. W.E. de Jong (1972–1978); N.J. Zimmerman (1972–1982); A.F. van Tooren (1973–1975); prof. dr. H.J.A. Duparc (1973–1994, voorzitter 1975–1994); G. Schoemaker (1973–1982); drs. J.M. Notenboom (vanaf 1978; penningmeester vanaf 1982); mw dr. N.C. Verhoef (1979–1982); drs. W. Kleijne (1980–1982 en vanaf 1985, secretaris 1980–1982); J. Boersma (1982–1985); drs. J.G.M. Donkers (vanaf 1982); R.H. Plugge (1982–1992); H.N. Schuring (1982–1998, secretaris 1982–1998); prof. dr. J. van de Craats (vanaf 1984); prof. dr. J.H. van Lint (1985–1994, national representative ICMI); drs. J.W. Maassen (1986–1998); prof. dr. J. de Lange (1986–1998); drs. S.H.P. Garst (1990–1994); dr. A.H. Hoekstra (1992–2000); prof. dr. F.H. Simons (1993–1997, national representative ICMI); prof. dr. R. Tijdeman (1993–1999, voorzitter 1994–1999); drs. R. Bosch (1994–2002); R. van Asselt (vanaf 1995); prof. dr. F. Goffree (1995–2004, national representative ICMI); dr. J. van Lint (1996–2001); F. Bosman (vanaf 1998, secretaris vanaf 1998); mw drs. H.B. Verhage (1998–2004); drs. C.P. Hoogland (vanaf 1998); T. Goris (vanaf 1998); prof. dr. D. Siersma (vanaf 1999, voorzitter vanaf 1999); drs. C.J. de Jonge (vanaf 2000); prof. dr. H.W. Broer (vanaf 2001); mw drs. M. Kollenveld (vanaf 2001); prof. dr. A. van Streun (vanaf 2001); mw M. Kamminga-van Hulsen (vanaf 2002)

en techniek. Gezien de samenstelling en de taakstelling van de commissie zal de NOCW in het algemeen niet zelf optreden als organisator van activiteiten. Dat behoort veeleer tot de competentie en de aandacht van be-

trokken instellingen, verenigingen, stichtingen en dergelijke. De NOCW heeft als platform een meer initiërende en opiniërende rol en tracht stimulerend te zijn naar betrokkenen en het wiskundeveld. 

### Noten

- 1 Toentertijd in Nederland bestaande uit de hoogleraren Bottema, Bremekamp, Van der Corput, Van Dantzig, Droste, Freudenthal, Gerretsen, Haantjes, Kloosterman, Koksma, Van Rooyen en Schouten
- 2 Opgenomen in het 'Archief van het Wiskundig Genootschap' dat berust in het Rijksarchief in Noord-Holland, onder andere te vinden in inv. nrs. 13 en 240
- 3 Euclides, 28e jaargang 1952/1953, III/IV, p. 116/117
- 4 Voor de ledenlijst van de NOCW sinds haar oprichting, zie het kader bij dit artikel
- 5 De Franse benaming voor IMUK, in het vervolg af te korten door C.I.E.M.; later werd deze 'nieuwe IMUK' omgezet in de huidige International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)
- 6 ICME. In juli 2004 is het 10e congres gehouden in Denemarken
- 7 Dit is de formulering waarin het predikaat 'Koninklijk' nog niet verwerkt is.
- 8 De notulen van de bestuursvergadering van het WG van 27 maart 1954 vermelden: "De commissie (de NOCW, WK) heeft zich om subsidie tot het departement van Financiën gewend

- en verzoekt thans om een adhesie betuiging vanwege het Genootschap. Aangezien tevoren genoegzaam overleg heeft ontbroken, zal de voorzitter zich alsnog met de commissie verstaan; hij wordt gemachtigd om met de secretaris zonnig de genoemde stap te doen". Het is allemaal goed gekomen!
- 9 De subsidiëring van de inmiddels zelfstandige stichtingen (zoals die voor de Ned. Wiskunde Olympiaden) is hierin niet meegenomen.
- 10 Verschenen bij J.B. Wolters, Groningen, 1965
- 11 Proceedings in 'Educational Studies in Mathematics', Volume 1, no 1/2, May 1968, Uitg. Reidel, Dordrecht
- 12 Het welkomstwoord van het colloquium beëindigde prof. Freudenthal met de volgende zinnen: "I am convinced that, if we do not succeed in teaching mathematics so as to be useful, users of mathematics will decide that mathematics is too important a teaching matter to be taught by the mathematics teacher. Of course this would be the end of all mathematical education". Een statement dat door velen verkeerd is begrepen en geïnterpreteerd, evenals latere uitspraken van dezelfde strekking.

- 13 Proceedings of the First International Congress on Mathematical Education, Lyon 24-30 August, 1969, Uitg. Reidel, Dordrecht
- 14 Uitg. Wolters-Noordhoff, Groningen, 1970
- 15 De Torus-reeks is onder auspiciën van de NOCW uitgegeven door Wolters-Noordhoff. De redactiecommissie bestond uit Prof. de Bruijn, Prof. Van Est, Prof. Monna, dr. Van der Neut, dr. Van Tooren en dr. Vredenduin
- 16 Uitg. Epsilon, Utrecht
- 17 De eerste Nederlandse Wiskunde Olympiade werd gehouden in 1962.
- 18 Momenteel zijn de Wiskunde Olympiaden ondergebracht in een Stichting waarin ook de NOCW participeert.
- 19 Het resultaat van het onderzoek is gepubliceerd in 1973, interne uitgave van de NOCW
- 20 Citaat uit § 5.1 van het onderzoeksrapport.
- 21 Uitgave van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade, ISBN 90 76976 12 0. Het boek is te bestellen via de NWO-website <http://olympiads.win.tue.nl/nwo>.

## Raimundas Vidunas

Faculty of Mathematics

Kyushu University 33

Hakozaki, Fukuoka 812-8581

Japan

vidunas@math.kyushu-u.ac.jp

### Column Wiskundigen in den vreemde

# Onder de rijzende zon

**Raimundas Vidunas kwam in 1994 vanuit Vilnius (Litouwen) als student voor een masterclass bij het Mathematical Research Institute naar Utrecht. Hij studeerde af bij Frits Beukers en kreeg vervolgens een aio-plaats in Groningen op een vrij uniek samenwerkingsproject bij Gert Vegter (Informatica) en Marius van der Put (Wiskunde). Raimundas promoveerde in 1999 en ging vervolgens als postdoc hypergeometrische functies bestuderen bij Tom Koornwinder en Nico Temme in Amsterdam. Dit onderwerp heeft hem via Antwerpen en Brussel in Japan gebracht.**

Vrijwel al mijn bagage was ik onderweg naar Fukuoka 'kwijtgeraakt': een grote koffer moest ik vanaf Schiphol als cargo via China opsturen, de rugzak die wel was ingecheckt was waarschijnlijk nog in Frankfurt gebleven. Professor Yoshida keek nogal verbaasd toen ik met alleen wat handbagage en een laptop arriveerde.

De eerste dag bestond voornamelijk uit een rondrit langs een huisvestingskantoor, een bank en diverse universiteitsgebouwen. Het Japanse verkeer rijdt links, en in een typisch Japanse stad als Fukuoka gaat dat ook nog eens over erg smalle wegen met veel kleine onoverzichtelijke kruispunten. Passeren of inhalen lijkt dus niet zo handig.

De campus bevindt zich dicht bij het stadscentrum, en helaas ook dichtbij het vliegveld. Je hoort veel lawaai van laagvliegende vliegtuigen. De universiteitsgebouwen zijn niet mooi, nogal oud en verwaarloosd. Later ontdekte ik dat hetzelfde geldt voor andere grote universiteiten hier. Toen op mijn eerste middag het papierwerk achter de rug was, werd ik naar het *International Center* gebracht waar ik binnen een half uur aan Japanse les nummer 1 zat: jezelf aan iemand voorstellen en een paar *hiragana*'s leren. Of ik nog een cultuurschok heb meegemaakt? Toen Yoshida me naar een restaurantje had meegenomen, het was schemerig en wat al te intiem bij de kleine keuken, keek ik naar de onbekende hapjes en vroeg me echt af: wat doe ik hier in vredesnaam? Van hun kant keken mijn gastheren verbijsterd op toen ik mijn nieuwe appartement binnentrad zonder eerst de schoenen uit te doen.

Op Kyushu universiteit heb ik een postdocplaats voor twee en een half jaar. Kyushu is de zuid-westelijke van de vier grote Japanse eilanden. In de grootste stad Fukuoka wonen zo'n 1,33 miljoen mensen. Mijn positie valt in het kader van het *21st century COE*, waarbij de afkorting staat voor *Center of Excellence*. Het vertrouwen dat hier uit spreekt voelt wel goed. Het COE is een nieuw onderzoeksprogramma voor Japanse universiteiten, en het strekt zich over vele disciplines uit. Kyushu universiteit haalde uit dit programma een wiskundig project genaamd *Development of Dynamic Mathematics with High Functionality* binnen. In het afgelopen jaar is hier het aantal COE postdocs gestegen van drie tot negen. Gelukkig is er in ons mooie en nieuwe gebouw voldoende ruimte hiervoor. Binnen het project wordt gewerkt aan mathematische biologie, statistische voorspellingen, niet-lineaire fenomenen, numerieke methoden voor niet-lineaire pdv's, mathematisch kennismanagement, algebraïsche combinatoriek, hypergeometrische functies en computeralgebra. We hebben een redelijk budget voor computers en congresbezoeken. Er wordt hier wel gezegd, dat COE het laatste snoepgoed is voordat grote bezuinigingen door de Japanse regering het wetenschappelijk onderzoek zullen treffen. Waarschijnlijk hebben zulke bezuinigingen te maken met het gegeven dat de algemene universiteiten steeds zelfstandiger en autonomer worden.

Ook buiten de wiskunde is het Japanse leven heel plezierig, zodra je niet meer afhankelijk bent van de *Kanji*-borden op straat en zodra je wat basisuitdrukkingen in de taal kent. Het is raadzaam om een paar keer bij Japanse gezinnen te gaan eten, namen van lekkere gerechten te onthouden en mensen te leren kennen die de echt mooie plekjes kunnen aanwijzen. Kyoto is de stad met de prachtigste oude architectuur en het best bewaard gebleven kasteel staat in Himeji. Kort na nieuwjaar was ik samen met professor Yoshida bij collega's in het heerlijke tropische klimaat van Okinawa. In Tokyo ben ik nog niet geweest; dat is voor een lui ingesteld persoon 1000 kilometer te ver. In het algemeen zijn Japanse steden weinig ordelijk of luxe, met uitzondering van wat commerciële centra voor kerst. Maar ik heb nog lang niet alles gezien.



Yun-Qiu Shen

Department of Mathematics  
Western Washington University  
Bellingham WA 98225  
Verenigde Staten  
yqshen@cc.wvu.edu

Tjalling Ypma

Department of Mathematics  
Western Washington University  
Bellingham WA 98225  
Verenigde Staten  
tjalling.ypma@wwwu.edu

## Onderwijs

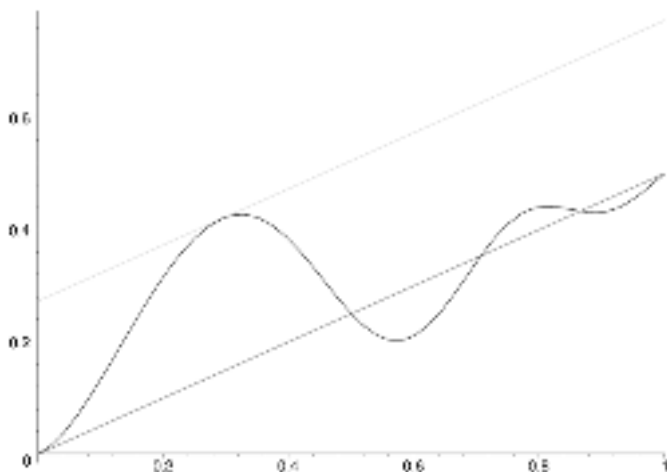
# Een constructief bewijs van de middelwaardestelling

Nog altijd behoort de middelwaardestelling tot de standaardonderwerpen van de reële analyse. Vrijwel alle eerste- en tweedejaars wiskundestudenten komen er mee in aanraking, en velen van ons zullen het resultaat met een overtuigend plaatje, met of zonder een bewijs, wel eens op een schoolbord hebben gezet. In onderstaand kort artikel gaan Yun-Qiu Shen en Tjalling Ypma er dieper op in en beschouwen ook de numerieke aspecten van de stelling.

De middelwaardestelling zegt het volgende: *Is  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  een continue functie die bovendien differentieerbaar is op het open interval  $(a, b)$ , dan bestaat  $c \in (a, b)$  zodat  $f'(c) = (f(b) - f(a)) / (b - a)$ .*

Het resultaat is afkomstig van J.-L. Lagrange (1736–1813). Figuur 1 maakt de stelling intuïtief duidelijk.

Er is zeker een punt in  $(a, b)$  te vinden waarboven de raaklijn aan de grafiek van  $f$  evenwijdig is aan de lijn door  $(a, f(a))$  en  $(b, f(b))$ . De standaardbewijzen van het resultaat zijn evenwel



Figuur 1

veel minder visueel intuïtief. De meeste teksten bewijzen eerst dat zo'n functie op een gesloten interval een maximum aanneemt. Vervolgens dat als dit niet op de rand van het interval gebeurt, hier de afgeleide een nulpunt heeft. Hieruit wordt Rolle's stelling afgeleid, oftewel het speciale geval van de middelwaardestelling waar  $f(a) = f(b)$ . Na een handige coördinatentransformatie volgt tenslotte de hele middelwaardestelling.

In onderstaande tekst willen we een meer intuïtief duidelijk bewijs voor dit klassieke resultaat geven. Daartoe zal zo'n gezocht punt  $c$ , wat we een middelwaardepunt zullen noemen, op een eenvoudige manier worden geconstrueerd.

### Een aangepaste bisectiemethode

Schrijf  $M$  voor de helling van de lijn  $L$  door  $(a, f(a))$  en  $(b, f(b))$ . We laten zien dat een  $c \in (a, b)$  geconstrueerd kan worden met de eigenschap  $f'(c) = M$ . Dit doen we met een variant van de bekende bisectiemethode voor het (numeriek) oplossen van niet-lineaire vergelijkingen  $g(x) = 0$ . Zoals bekend, benadert deze methode een nulpunt van  $g(x)$  in een interval  $[a, b]$  als geldt  $g(a)g(b) \leq 0$ , als volgt. Is dit product 0, dan is een nulpunt gevonden. Zo niet, neem het midden  $c = (a + b)/2$  van het interval. Dan is  $g(a)g(c)g(c)g(b) \leq 0$ , dus  $g(a)g(c) \leq 0$  of  $g(c)g(b) \leq 0$ . Zo kunnen we verdergaan met een tweemaal zo klein deelinterval van  $[a, b]$  waarvoor dezelfde conditie geldt. Na  $n$  stappen levert dit een deelinterval van lengte  $(b - a)/2^n$  dat een nulpunt van  $g$  bevat. De methode is daarom *lineair*: de precisie waarin we zo'n nulpunt kennen (oftewel, het aantal cijfers achter de komma) hangt lineair af van het aantal iteratiestappen.

De hier voorgestelde aangepaste bisectiemethode construeert onderling evenwijdige lijnen  $\{L_n\}_{n \geq 1}$  waarbij  $L_n$  door punten  $(a_n, f(a_n))$  en  $(b_n, f(b_n))$  op de grafiek van  $f$  gaat, en

$$a = a_1 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_1 = b,$$

en ook

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq (b_n - a_n)/2.$$

Dit gaat inductief als volgt.

Zijn voor  $n \geq 1$  de waarden  $a_n, b_n$  bepaald, schrijf dan  $p_n := (a_n + b_n)/2$  en laat  $L_{n+1}$  de lijn door  $(p_n, f(p_n))$  evenwijdig aan  $L_n$  zijn. Er zijn nu drie mogelijkheden.

(1) Raakt  $L_{n+1}$  in het punt  $(p_n, f(p_n))$  aan de grafiek van  $f$ , dan hebben we een middelwaardepunt gevonden en zijn we klaar.

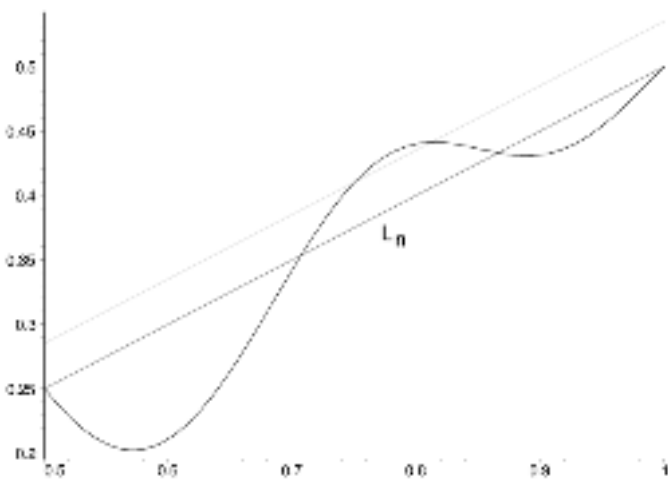
Zo niet, dan worden  $a_{n+1}$  en  $b_{n+1}$  als volgt bepaald.

(2) Stel dat geldt  $L_n = L_{n+1}$ . Kies

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) := \begin{cases} (a_n, p_n) & \text{als } n \text{ oneven;} \\ (p_n, b_n) & \text{als } n \text{ even.} \end{cases}$$

Met deze keuze geldt  $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$ , de punten  $(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$  en  $(b_{n+1}, f(b_{n+1}))$  liggen op de lijn  $L_{n+1}$  en de lengte van het interval  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  is precies de helft van de lengte van  $[a_n, b_n]$ .

(3) In het resterende geval geldt  $L_n \neq L_{n+1}$  en bovendien is dan  $L_{n+1}$  niet de raaklijn in het punt  $(p_n, f(p_n))$  aan de grafiek van  $f$ . Zoals in onderstaand lemma wordt aangetoond en uit figuur 2 intuïtief blijkt, snijdt  $L_{n+1}$  de grafiek van  $f$  in een punt  $(q_n, f(q_n)) \neq (p_n, f(p_n))$  met  $a_n < q_n < b_n$ .



Figuur 2

Kies dan

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) := \begin{cases} (q_n, p_n) & \text{als } q_n < p_n \\ (p_n, q_n) & \text{als } q_n > p_n. \end{cases}$$

Ook in dit geval geldt per constructie dat  $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$  en dat de punten  $(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$  en  $(b_{n+1}, f(b_{n+1}))$  op de lijn  $L_{n+1}$  liggen. De lengte van  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  is hier zelfs minder dan de helft van de lengte van  $[a_n, b_n]$ .

In het bijzondere geval dat ergens in dit proces precies een middelwaardepunt wordt gevonden zijn we uiteraard helemaal klaar; gebeurt dit niet, dan is  $(a_n)_{n \geq 1}$  een begrensde, monotoon stijgende rij en  $(b_n)_{n \geq 1}$  een begrensde, monotoon dalende. Voor de verschilrij  $(b_n - a_n)$  geldt

$$0 < b_{n+1} - a_{n+1} \leq 2^{-n},$$

en daarom hebben de rijen  $(a_n)$  en  $(b_n)$  dezelfde limiet  $p$ . Dat  $p \in [a, b]$  is per constructie duidelijk, en dat  $p \neq a, b$  volgt onder meer uit het feit dat in geval (2) niet uitsluitend het linker of rechter

| $n$ | $a_n$  | $b_n$  | $p_n$  | $f'(p_n)$ | $e_n$  |
|-----|--------|--------|--------|-----------|--------|
| 1   | 0      | 1      | 0,5000 | -1,2007   | 0,5000 |
| 2   | 0      | 0,5000 | 0,2500 | 1,0939    | 0,2500 |
| 3   | 0,2500 | 0,3325 | 0,2913 | 0,5122    | 0,0413 |
| 4   | 0,2913 | 0,2925 | 0,2919 | 0,5025    | 0,0006 |

Tabel 1

halve interval wordt gekozen. Een standaardargument (gebruik makend van het feit dat  $f$  differentieerbaar is in  $x = p$  en dat  $M = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(b_n) - f(a_n)) / (b_n - a_n) = f'(p)$  bewijst dat inderdaad  $p$  een middelwaardepunt is.

Het in geval (3) gebruikte resultaat is het volgende.

**Lemma.** Stel  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  is continu op  $[a, b]$  en differentieerbaar op  $(a, b)$ . Laat  $L$  de lijn door  $(a, f(a))$  en  $(b, f(b))$  zijn,  $p \in (a, b)$ , en  $L'$  de lijn door  $(p, f(p))$  evenwijdig aan  $L$ .

Als  $L'$  niet de raaklijn aan de grafiek van  $f$  in  $(p, f(p))$  is, en bovendien  $L \neq L'$ , dan snijdt  $L'$  de grafiek van  $f$  in een punt  $(q, f(q))$  met  $a < q < b$  en  $q \neq p$ .

**Bewijs.** Laat  $M$  de richting van de lijn  $L$  zijn. Door eventueel de functie  $x \mapsto f(x)$  te veranderen in  $x \mapsto \pm f(\pm x)$  mogen we aannemen  $f'(p) > M$  en  $f(p) > L(p)$ . Schrijf de vergelijking voor  $L'$  als  $y = Mx + k = M(x - p) + f(p)$  en definieer  $g(x) := f(x) - Mx - k$ . De functie  $g$  is continu, negatief voor  $x = a$  en voor  $x = b$ , en er is een nulpunt voor  $x = p$ . Omdat  $\lim_{h \rightarrow 0} (f(p+h) - f(p))/h = f'(p) > M$ , bestaat een  $h > 0$  zodat  $g(p+h) = f(p+h) - f(p) - Mh > 0$ . De continue functie  $g$  voldoet dus aan  $g(p+h)g(b) < 0$ , en dus heeft  $g$  een nulpunt  $q \in (p+h, b)$ . Het vinden van zo'n punt in een concreet geval kan (bijvoorbeeld) met de gewone bisectiemethode toegepast op een geschikt gekozen interval  $[p+h, b-h]$ . Dit levert het gezochte snijpunt  $(q, f(q))$ .  $\square$

Als voorbeeld nemen we de functie  $f$  op het interval  $[0, 1]$  gegeven door

$$f(x) := e^{-4x} \sin(4\pi x^2) + \frac{1}{2}x.$$

De lijn door de eindpunten  $(0, 0)$  en  $(1, \frac{1}{2})$  geeft richting  $1/2$ . Ook bij het midden  $x = \frac{1}{2}$  snijdt deze lijn de grafiek van  $f$ , dus de eerste iteratie van het algoritme gaat volgens geval (2). Het middelwaardepunt  $c$  voldoet aan de ongelijkheid  $|p_n - c| \leq e_n := |b_n - a_n|/2$ , dus voor de benadering  $p_n$  van dit punt is de fout hoogstens  $e_n$ . De (lineaire) convergentie is duidelijk te zien in tabel 1.  $\Leftarrow$

## Iris van Gulik-Gulikers

Instituut Wiskunde en Informatica

Rijksuniversiteit Groningen

Blauwborgje 3

9747 AC Groningen

iris@math.rug.nl

### Promotionele activiteiten

# Niet iedereen wordt leraar

De bètawetenschappen kampen al jaren met een te lage instroom van studenten. Overal in het land hebben universiteiten initiatieven ontwikkeld om het imago te verbeteren en leerlingen te enthousiasmeren voor exacte studies. In de serie 'Promotionele activiteiten' in dit blad wordt telkens zo'n initiatief gepresenteerd. Dit keer is de beurt aan het Wiskunde Promoteam van de Rijksuniversiteit Groningen.

De wiskundestudie promoten onder scholieren, dat is wat de voorlichtingscommissie van Wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen wil. Naast de gebruikelijke studievoorlichtingsactiviteiten zoals een *Open Dag op Locatie* en *1 Dag Student* is hiervoor het Wiskunde Promoteam in het leven geroepen.

De getrainde studenten van het Wiskunde Promoteam bezoeken scholen om enthousiasme te kweken voor de wiskundestudie onder leerlingen uit de klassen 4, 5 en 6 vwo met een Natuur-profiel. Het gaat hierbij natuurlijk om het werven van leerlingen voor de studie wiskunde. Maar ook probeert men voor de overige leerlingen het beeld van de wiskunde te verbeteren. Het Wiskunde Promoteam fungeert hierbij als schakel tussen de universiteit en het vwo.

Het Promoteam bestaat op dit moment uit tien hogerejaars studenten en vier promovenden.

In groepjes van twee geven deze studenten gastlessen op middelbare scholen.

#### Opzet promopraatjes

Het Wiskunde Promoteam verzorgt een lesuurvullend programma, dat hoofdzakelijk op het kweken van inhoudelijke belangstelling voor het vak wiskunde is gericht. Daarnaast is er bij een bezoek van het Promoteam ruimte voor voorlichting. Het uur begint met een korte inleiding over de inhoud van het vak en de studie wiskunde en een schets van de beroepsperspectieven voor afgestudeerde wiskundigen ('niet iedereen wordt leraar'). Om te laten zien dat het vak wiskunde breed en boeiend is worden kort een aantal wiskundige of aan wiskunde gerelateerde vragen aange-  
stipt:

- Hoe beveilig je een computersysteem?
- Wie berekent het weer van morgen?
- Hoeveel premie moet een verzekeraar heffen?
- Is er een abc-formule voor een vierdegraads vergelijking?
- Wat is chaos en wat is orde?
- Hoe toets je de werking van een medicijn?
- Bestaan er oneindig veel priemgetaltweelingen: (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), ...?
- Hoe bereken je de luchtstroming om vliegtuigvleugels?

Na deze inleiding presenteren de studenten een aansprekend onderwerp uit de wiskunde.

#### Wiskundige inhoud

Om leerlingen een beter beeld van de wiskunde te geven, zijn goed gekozen onderwerpen nodig, die leerlingen aanspreken en wellicht zelfs inspireren tot verder denken. Er is bij de promopraatjes gekozen voor niet-alledaagse onderwerpen uit de wiskunde die illustreren hoe leuk wiskunde kan zijn. Aan de hand van het behandelde onderwerp wordt ook duide-



De nieuwste presentatie behandelt het drie-deurenprobleem, dat ook wel bekend staat als het Monty Hall Problem of het Willem Ruisprobleem. De drie deuren zijn bekend uit verschillende spelshows. Gebruikmakend van onder andere een computersimulatie wordt het probleem in deze presentatie voorgelegd aan de leerlingen en vervolgens opgelost. Verder bevat de handout voor de geïnteresseerde leerlingen een wiskundig bewijs van de oplossing, gebaseerd op de formule van Bayes. Het tegen-intuïtieve aspect van de oplossing maakt het probleem zo leuk en boeiend.



Een student van het Wiskunde Promoteam laat zien hoe je een Pythagoreïsch drietal kunt vinden. Vaak kennen leerlingen alleen (3,4,5) als geheeltallige oplossing van de stelling van Pythagoras. In dit praatje wordt duidelijk gemaakt dat de Babyloniërs rond 1500 v.Chr. al enorm grote Pythagoreïsche drietallen konden vinden. Tijdens het praatje wordt een methode afgeleid waarmee alle Pythagoreïsche drietallen op een eenvoudige manier gevonden kunnen worden. Ook wordt ingegaan op de laatste stelling van Fermat en andere generalisaties van het probleem.

copyright: Leeuwarder Courant

lijkt gemaakt dat de wiskunde niet af is en dat er nog vele ontdekkingen gedaan worden en gedaan zullen blijven worden.

Docenten (of leerlingen) die hun klas aanmeldde, konden afgelopen schooljaar kiezen uit verschillende praatjes, waaronder *RSA en beveiliging op internet*, *Fibonacci getallen*, *Modelleren en chaos*, *Pythagoreïsche drietallen* en *Niet-Euclidische meetkunde*. Voor komend schooljaar zijn daarnaast nieuwe praatjes voorbereid over de derdegraads vergelijking, statistiek bij verzekeringsmaatschappijen, toepassingen uit de technische wiskunde en het drie-deurenprobleem. Er liggen nog plannen voor praatjes over fractals, het vierkleurenprobleem en grafen.

De diverse promopraatjes zijn geschikt voor verschillende klassen uit de bovenbouw van het vwo. De inhoud van de praatjes sluit aan bij de middelbare schoolwiskunde, maar gaat af en toe verder om de leerlingen uit te dagen. De leerlingen worden tijdens de presentaties zoveel mogelijk actief bij het verhaal te betrekken. Er is natuurlijk ook voldoende ruimte tussendoor zodat leerlingen vragen kunnen stellen. Ieder praatje eindigt met een opsomming van enkele mogelijkheden om het gepresenteerde onderwerp uit te breiden tot een praktische opdracht of een profielwerkstuk.

### Promopraatje klas 3

Naast promotionele activiteiten voor de bovenbouwklassen van het vwo verzorgt het Wiskunde Promoteam sinds het schooljaar 2003/2004 ook voorlichting voor klas 3 van het vwo. Er is besloten om ook al scholieren uit klas 3 te bezoeken, omdat deze leerlingen nog de belangrijke keuze moeten maken tussen een Maatschappij- en een Natuur-profiel. Goede voorlichting is daarbij belangrijk, en het Wiskunde Promoteam probeert dus juist al in klas 3 te laten zien hoe leuk wiskunde kan zijn.

Het eerste gedeelte van de les van het Promoteam staat in het teken van de profielkeuze. Er wordt aandacht besteed aan de verschillende soorten wiskunde in de vwo bovenbouw, de bijbehorende studielast, de verschillende onderwerpen en voorbeelden van opgaven die bij de verschillende wiskundevakken horen, en tot slot welke kwaliteiten nodig zijn voor welke wiskunde.

In het tweede gedeelte van de les wordt een kleine quiz onder de leerlingen gehouden over leuke probleempjes. Vragen die in de quiz aan de orde komen zijn bijvoorbeeld:

- Er zijn 4 kippen die gezamenlijk 4 eieren in 4 dagen leggen. Hoeveel eieren leggen 10 kippen gezamenlijk in 10 dagen?
- Stel, je zit op een eiland waar twee typen

bewoners zijn: ridders en schurken. Ridders spreken altijd de waarheid en schurken liegen altijd. Je komt iemand tegen en je vraagt: Ben je een ridder? Wat is zijn antwoord?

- Je hebt 8 munten die er hetzelfde uitzien, maar er zit 1 valse munt tussen die zwaarder is. Hoe kan je door twee keer een balans te gebruiken de valse munt vinden?

De winnaar van de quiz gaat met een mooi boek naar huis.

### Ervaringen

De ervaringen met het Wiskunde Promoteam zijn tot nu toe zeer positief. Er bestaat veel belangstelling van de scholen. In de loop der jaren is een uitgebreid bestand opgebouwd met scholen die belangstelling hebben voor de gastlessen van het Promoteam. Dit bestand wordt nog steeds uitgebreid. De contacten worden altijd rechtstreeks gelegd met een wiskundedocent van een school.

Afgelopen schooljaar heeft het Wiskunde Promoteam 51 scholen in hoofdzakelijk Noord-Nederland bezocht. In totaal hebben 107 bovenbouwklassen en 17 derde klassen een gastles gekregen van het Promoteam.

Uit enquêtes onder docenten blijkt dat zowel de leerlingen als de docenten een bezoek van het Wiskunde Promoteam als zeer zinvol ervaren. Veel leerlingen melden zich tijdens een bezoek ook aan voor andere voorlichtingsactiviteiten op de universiteit.

Het voordeel van het Wiskunde Promoteam voor scholieren is dat ze rechtstreeks in contact komen met studenten, die als 'leef-tijdsgenoten' dichterbij hun belevingswereld staan dan een wiskundeleraar of een studiecoördinator. De leerlingen zien enthousiaste jonge mensen bezig met concrete toepassingen uit de wiskunde, waardoor de wiskundestudie dichterbij hen komt te staan. Bovendien kunnen ze antwoord krijgen op vragen over Groningen, de Universiteit, de opleiding Wiskunde met zijn voor- en nadelen, het studentenleven en de nevenactiviteiten bij de studie, dit alles gezien door de ogen van een student. De wiskundestudie komt zo dichterbij de scholieren te staan.

### Meer informatie

Voor meer informatie over het Wiskunde Promoteam kunt u contact opnemen met Iris van Gulik-Gulikers, coördinator van het Promoteam. Ook op de website [www.wiskundestuderen.nl](http://www.wiskundestuderen.nl) (onder Wiskunde Promoteam) kunt u meer lezen over het Promoteam.

# Brieven

| Letters to the editor

## The Atiyah-Singer index formula

I read 'De indexstelling van Atiyah en Singer' by N.P. Landsman (NAW 5/5 no. 3, 207–211 (2004)). I liked it and enjoyed reading it. I was very happy to see there the photo of my teacher, myself, and the son of my teacher's teacher. Thank you for mentioning us. Unfortunately, there are some small omissions in the paper.

1. The 'indexstelling van Gohberg en Krein' on page 208 is in fact due to Fritz Noether ('Ueber eine Klasse Singulaerer...', *Math. Ann.* 82 (1921), 42–63). In Noether's paper the formulation is different, and the index is not defined, but the formula is there, and the proof is correct for analytic functions. We (M.G. Krein and myself) gave the formula for the matrix case. N.I. Mushelishvili and N.P. Vekua have to be mentioned as well. An early version of the index formula for elliptic systems was obtained by A. Vol'pert. The latter was a preliminary version of Atiyah-Singer index formula.

2. Fritz Noether was the son of Max Noether and the brother of the famous Emmy Noether. Note that it was the time that such great mathematicians as D. Hilbert, H. Poincaré, B. Riemann, J. Plemelj and others were involved in this area, but only F. Noether understood the importance of the index, gave the first explicit formula, and emphasized the difference with the work of Fredholm (whose work, considered operators, which have zero index).

3. I consider it very unfortunate that in the very interesting interview of Atiyah and Singer in the *European Math. Soc. Newsletter* (53, 2004) the names of the pioneers F. Noether and I. Fredholm are not mentioned.

4. More details about Fritz Noether and his work can be found in the journal *Integral Equations and Operator Theory* v.8 (1985) Birkhäuser, pp. 573–579. From the introduction of the editor to this Journal for this issue I quote: "This issue of Integral Equation and Operator Theory is dedicated to the memory of Fritz Noether. It contains a selection of update papers on the index theory. Included is a biography of Fritz Noether with its very tragic end. This biography has been written by his son for this issue. There is also a list of publications by F. Noether, compiled by A. Dick. J.A. Dieudonné has written for this issue a paper about the early history of the index theory."

5. See also *Integral Equations and Operator Theory* v.13 (1990) pp. 303–305, where the official document about the arrest and execution of Fritz Noether in the former USSR is presented.

6. For the abstract index theory also the names of F. Riesz, J. Dieudonné, F.V. Atkinson and B. Yood have to be mentioned.

Israel Gohberg, 16 October 2004, Tel Aviv

# Boekbesprekingen

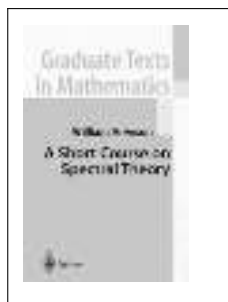
## Book Reviews

Alle in de vijfde serie van het NAW verschenen boekbesprekingen zijn te vinden op onze webpagina.

Tevens staat daar een lijst met ter recensie aangeboden congresverslagen en eventueel andere boeken.

Indien u er prijs op stelt een van deze verslagen te bespreken, meld dit dan binnen een maand na verschijnen van dit nummer (bij voorkeur per e-mail) op onderstaand adres.

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk  
Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.10  
Dept. of Math. and Computer Science  
Technische Universiteit Eindhoven  
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven  
Webpagina: [www.math.rug.nl/revwg/](http://www.math.rug.nl/revwg/)  
e-mail: [wgreview.win@tue.nl](mailto:wgreview.win@tue.nl)



W. Arveson

### **A short course on spectral theory**

(Graduate texts in mathematics 209)

New York: Springer-Verlag, 2002

135 p., prijs €58,80

ISBN 0-387-95300-0

Dit compacte boekje heeft als hoofdonderwerp het bepalen van spectra van operatoren op oneindig dimensionale (Hilbert)ruimten. Daarmee gaat het — om de woorden van de auteur te gebruiken — over ‘what might be called the fundamental problem of operator theory’. Speciale aandacht krijgen normale operatoren, integraaloperatoren en Toeplitzoperatoren. In het kader van de bestudering van deze belangrijke klassen van operatoren komen diverse onderdelen van de moderne (functionaal)analyse aan de orde. Om er enkele te noemen: spectraalstelling, Riesztheorie voor compacte operatoren, Gelfandtheorie, Wieneralgebra,  $C^*$ -algebra's, Borelfuncties van normale operatoren, Hilbert-Schmidtoperatoren, Fredholmoperatoren, Calkinalgebra en Toeplitzoperatoren inclusief de indexstelling voor het geval van een continu symbool.

Het gaat om een ‘graduate text’. Dienovereenkomstig is er een flinke dosis voorkennis vereist, wordt kennelijk uitgegaan van een grote bereidheid tot zelfwerkzaamheid en zijn de opgaven geen eenvoudige oefeningen, maar staan ze in het teken van een uitbouw van de behandelde theorie. De presentatie is in het algemeen helder en overzichtelijk, zij het dat er soms wat onverhoeds wordt overgeschakeld naar een hogere moeilijkheidsgraad. Verder zijn er enkele typografische tekortkomingen (zoals een inconsequent gebruik van cursivering bij het invoeren van nieuwe begrippen). Maar deze (en nog een paar andere) schoonheidsfoutjes staan een positief oordeel niet in de weg.

Er valt op basis van dit boekje veel te leren. Het is de neerslag van door William Arveson gegeven colleges voor graduate students. Het moeten mooie en inspirerende colleges geweest zijn.

H. Bart



A. Stubhaug

### **The mathematician Sophus Lie It was the audacity of my thinking**

Berlijn: Springer-Verlag, 2002

555 p., prijs €42,75

ISBN 3-540-42137-8

Het is maar goed dat Sophus Lie (1842–1899) zulke slechte ogen had; anders had hij wellicht gekozen voor een loopbaan in het leger — en was Noorwegen een van zijn twee belangrijkste wetenskundigen tot nu toe misgelopen.

Arild Stubhaug zet de jonge Lie neer als een uitzonderlijk goede leerling en als een energieke student, die in intellectueel Oslo vele vrienden maakt, die hem zijn leven lang zullen steunen. Na zijn opleiding in de natuurwetenschappen verzinkt hij in het som-

bere gevoel geen echte roeping te hebben: hij is ambitieus, maar weet niet goed waarin hij wil uitblinken.

Gaandeweg wordt het Lie echter duidelijk dat er een wiskundige in hem schuilt. Zijn eerste artikel is een succes en zijn sollicitatie naar een reisbeurs wordt diens gevolg gehonoreerd. In september 1869 reist hij naar Berlijn, waar hij kennismaakt met de twintigjarige Felix Klein. Lie en Klein worden goede vrienden en werken veel samen. Als Lie vervolgens doorreist naar Parijs, komt Klein hem daar opzoeken, en ze brengen veel tijd door met Darboux en Jordan. Dan breekt de Frans-Duitse oorlog uit, en moet Klein terug naar Duitsland. Lie besluit te voet(!) richting Milaan te vertrekken. Hij wordt echter voor een Duitse spion aangezien en zit een maand in de gevangenis in Fontainebleau tot dit misverstand is opgehelderd. Deze gebeurtenis haalt de Noorse kranten en als Lie daar terugkomt is hij beroemd. Hij promoveert en wordt de eerste door het parlement benoemde professor — op initiatief van zijn oude studievrienden.

Ik zou u veel meer kunnen vertellen: over Lie's hartstochtelijke brieven aan zijn verloofde, die niet onderdoen voor een goede Jane-Austenroman; over de jaren van het gezin Lie in Leipzig; over hoe Sophus daar overspannen raakt en er wiskundig wel, maar persoonlijk nooit helemaal bovenop komt; over zijn steeds fellere beschuldigingen aan collega-wiskundigen, dat ze zich zijn werk toeëigenen; en over de erkenning die hij in Frankrijk krijgt door toedoen van Picard. Maar dat alles kunt u zelf nalezen. Want, al staan er een hoop feiten in dit boek die mij niet interesseren (wanneer hij van wie geld leende en weer terugbetaalde), al is het Engels af en toe tenenkrommend, en moet men het niet lezen om iets over Lietheorie te leren: Stubhaug brengt Sophus Lie en diens plaats in de wiskundige wereld van die tijd prachtig tot leven. Zeker als u snel genoeg leest om oninteressante details op de koop toe te nemen, is dit boek een aanrader!

J. Draisma

D. Beckers, H.J. Smid

### **Grondbeginselen der Rekenkunde**

(Rekenmeesters)

Hilversum: Uitgeverij Verloren, 2003

184 p., prijs €16,-

ISBN 90-6550-744-2

Met dit boek is de Uitgeverij Verloren een nieuwe reeks Rekenmeesters begonnen die onder redactie staat van Danny Beckers, Marjolein Kool en Harm Jan Smid. In de reeks zullen facsimilereproducties van belangrijke oude Nederlandse schoolboeken verschijnen, worden ingeleid en in historische, maatschappelijke en wiskundige context geplaatst; aldus het voorwoord van de serie. Dit eerste boek, geredigeerd door Beckers en Smid, bevat de reproductie van één deel van een gelijknamig boek dat in vier (of vijf) delen tussen 1826 en 1840 is uitgegeven door het Leidse Genootschap Mathesis; dit deel is geschreven door P.E. Rijk en M.I.S. Bevel en verscheen in 1828. Van het boek is één, vermoedelijk het enige nog bestaande exemplaar in particulier bezit en belangeloos aan de redactie uitgeleend. In 1820 had Koning Willem I het metrieke stelsel en de eraan gekoppelde decimale schaal in het toenmalig Koninkrijk wettelijk verplicht gemaakt, zodat in het rekenonderwijs noodzakelijk meer dan voorheen aandacht moest worden geschonken aan decimale breuken, en de schoolboeken aan de aldus ontstane situatie moesten worden aangepast. Het

gereproduceerde tweede deel van *Grondbeginselen* behandelt de breuken en men ontmoet er dan ook allerlei neringdoenden bezig met de rekenkundige bewerkingen in het tientallig stelsel. Dit deeltje (van 114 bladzijden) geeft zo een aardige illustratie van wat er toen in de rekenles omging. De redacteurs hebben een toelichting van 67 bladzijden toegevoegd. Hierin geven ze eerst een schets van de toestand in de Republiek der Zeven Provinciën, maar nogal oppervlakkig en eenzijdig met uit hun verband gerukte, veelal half ware of zelfs apert onjuiste anekdotische bijzonderheden zoals over de afloop van de vierde Engelse oorlog en over de koning van Pruisen (bladzijde 14); de beschrijving van het (hoger) onderwijs heeft meer weg van een persiflage. De bedoeling lijkt te zijn om de lezer ervan te overtuigen dat met de vernieuwde rekenboekjes een 'nieuwe' wiskunde werd geïntroduceerd in drie 'nieuwe' didactische versies. Maar deze suggestie wordt door slechts enkele geparafraseerde citaten uit rekenboeken gestaafd zodat de lezer niet verder komt dan de conclusie van de schrijvers op bladzijde 60: de inhoud van dit zo representatieve deeltje is traditioneel; weliswaar deden de schrijvers (van toen) hun best de 'theorie' goed en helder uit te leggen, maar dit laatste was in ons vak tevoren ook al een gewoonte. Gaandeweg worden zijdelings toch enkele interessante onderwerpen aangestipt: de fysicotheologie, de opvattingen van Locke en Rousseau en de mogelijke invloed van Pestalozzi (bladzijden 17, 24, 25). Maar ook hier wordt de lezer onaangenaam verrast: Over Locke volgt na een misplaatst en verminkt citaat uit de Heidelberger Catechismus de op zich genomen al anachronistische mededeling dat hij een belangrijke leertheorie had. Maar de pedagogische invloed van Locke is volgens een recente commentaar beperkt gebleven tot de WC-gang van Engelse jongheren (J. Dunn, *Locke: A very short introduction*, Oxford (1984) 2003; bladzijde 19). Enzovoorts. Ook aan de werkzaamheid van genootschappen wordt enige aandacht besteed. Tenslotte geven de schrijvers een samenvatting van de gehele *Grondbeginselen* zodat de lezer ook van de niet gereproduceerde delen een indruk kan krijgen. Het boek is, zowel stilistisch als grammaticaal, weinig verzorgd geschreven; de terminologie is verward en daardoor verwarrend; de schrijvers lopen met hun vooroordelen de lezer voortdurend voor de voeten. Eén vraag blijft over: waarom is het zeldzame doch belangrijk geachte boek *Grondbeginselen* niet in zijn geheel, maar zonder commentaar, gereproduceerd? Dan zou de lezer zich gemakkelijker een oordeel over de merites hebben kunnen vormen.

W. van der Meiden

L.E. Sigler

### **Fibonacci's Liber Abaci**

#### **A translation into modern English of Leonardo Pisano's book of calculation**

(Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences)

Berlijn: Springer-Verlag, 2002

636 p., prijs €58,80

ISBN 0-387-40737-5

Het hier te bespreken boek is een wel zeer bijzondere uitgave. Het is namelijk de vertaling van een Latijns geschrift uit de 13e eeuw, dat nu pas voor het eerst vertaald werd in een moderne taal, het Engels. Het gaat om *Liber Abaci* van de hand van Leonardo van Pisa (ca.1170 – na 1240), de belangrijkste West-Europese wiskun-

dige uit de Middeleeuwen, ook bekend onder de naam Fibonacci. Van de tweede versie van dit werk, uit 1228, circuleerden eeuwenlang exemplaren, die als leerboek werden gebruikt, maar eerst in 1857 verscheen een volledige gedrukte Latijnse uitgave, verzorgd door Boncompagni. Deze vormt de basis van de hier te bespreken Engelse vertaling van de hand van L.E. Sigler, die eerder, in 1987, een voortreffelijke geannoteerde vertaling in het Engels verzorgde van *Fibonacci's Liber Quadratorum*. Allereerst zij opgemerkt dat het geen boek betreft dat handelt over de Abacus, het bekende rekenbord, maar het woord Abacus staat hier voor het rekenen met de door Leonardo geïntroduceerde Hindu-Arabische cijfers. In Italië noemde men de deskundigen op dit gebied dan ook maestri d'abbaco. Het geschrift geeft echter veel meer en kan gezien worden als een encyclopaedie waarin een groot deel van de toen bekende wiskunde is vervat. De Engelse editie begint met een beknopte, maar uitstekende inleiding (negen bladzijden). Daarna volgen de vertaling van Liber Abaci (601 bladzijden) en de aantekeningen daarbij van de hand van Sigler (zeventien bladzijden). Een bibliografie met 24 titels besluit het werk.

Deze recensie valt uiteen in twee delen: een overzicht van de inhoud van het werk van Leonardo en enkele opmerkingen over Siglers vertaling.

Fibonacci begint, na de opdracht aan de middeleeuwse geleerde Michael Scott en een korte autobiografische schets, in hoofdstuk 1 met de introductie van de Hindu-Arabische cijfers in de volgorde 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 die tezamen met 0 (zephir) de basis vormen voor het tientallige positionele stelsel. De keuze van deze volgorde is een gevolg van de Semitische gewoonte van rechts naar links te schrijven. Men moet dit voortdurend voor ogen houden: zo heet in 724 het cijfer 4 het eerste cijfer en 7 het laatste, hierin stelt 4 echter wel het aantal eenheden voor en 7 het aantal honderdtallen op de ook bij ons gebruikelijke wijze. In de hoofdstukken 1 tot en met 5 worden de Hindu-Arabische cijfers ingevoerd en de rekenregels aan de hand van talloze voorbeelden beschreven. Opvallend is dat deze behandeld worden in de volgorde: vermenigvuldigen, optellen, aftrekken en delen. Het lezen van de gebruikte getallen vereist enige gewenning.

Zo wordt bijvoorbeeld met  $\frac{1}{2}4\frac{1}{3}$  bedoeld:  $\frac{1}{3} \times 4\frac{1}{2}$ . In hoofdstuk 6 vindt men de zogenaamde samengestelde breuken. Dit zijn breuken die geschreven worden als bijvoorbeeld  $\frac{2}{9}\frac{5}{7}\frac{3}{4}$ , met als betekenis  $\frac{3}{4} + \frac{5}{7 \cdot 4} + \frac{2}{9 \cdot 7 \cdot 4}$ . Deze schrijfwijze is bruikbaar bij het rekenen met munten als ponden, die verdeeld zijn in 20 soldi, die elk weer verdeeld zijn in 12 denari. Het is duidelijk dat de tiendelige breuken hiervan een bijzonder geval zijn. Deze samengestelde breuken laten zich schrijven als 'opstijgende' kettingbreuken. Zo geldt

$$\frac{2}{5}\frac{3}{7}4 = 4 + \frac{3 + \frac{2}{5}}{7}.$$

Bij de berekeningen wordt veel aandacht geschonken aan het controleren van de uitkomst door de factoren en de termen te vergelijken met de uitkomst modulo 3, 9, 11 of een willekeurig priemgetal. Hoofdstuk 7 geeft veel voorbeelden van toepassingen van de eerder geïntroduceerde nieuwe methoden, terwijl de hoofdstukken 8 t/m 11 voorbeelden geven uit de handelspraktijk: onder andere ruilhandel, verdeling van winst in bepaalde situaties en het bepalen van de waarde van munten die uit verschillende metalen zijn samengesteld. Het overzicht van veel voorkomende maten en gewichten dat Sigler in de aantekeningen heeft opgenomen, bewijst daarbij goede diensten. In de hoofdstukken 12 en

13 komen lineaire vergelijkingen in een of meer onbekenden aan de orde. Door het ontbreken van de notaties waaraan wij gewend zijn, verlopen alle berekeningen verbaal en nemen daardoor veel ruimte in beslag. Zo vergt de oplossing van het vraagstuk '100 rotulae (gewichtseenheden) van zekere koopwaar kosten 13 pond, wat kost één rotula?' ruim 40 regels. Hierbij wordt de methode (elchataym genaamd) gebruikt, waarbij uit twee gissingen voor de oplossing (double false position) het probleem herleid wordt tot het bepalen van een vierde evenredige. Daarna wordt de oplossingsmethode in meetkundige taal toegelicht, waarbij de aantekening van Sigler zeer verhelderend werkt. Overigens worden problemen van dit type elders in het werk op de bekende eenvoudige wijze behandeld. In hoofdstuk 12 vinden we ook het beroemde probleem van de paren konijnen (paria caninorum) aan. Fibonacci formuleert dit probleem, dat teruggaat tot Beda (672–735), maar rekent slechts uit dat er na 12 maanden 377 paren zullen zijn, waarna hij het probleem laat rusten. Later pakte Lucas (1842–1891) dit weer op en hij introduceerde de naam rij van Fibonacci. In hoofdstuk 14 worden onderwerpen behandeld die overeenkomen met die uit boek X van de Elementa van Euclides, ruwweg gezegd de introductie en classificatie van sommen (binomiale) en verschillen (apotomè's) van verschillende soorten irrationaliteiten, alsook het rekenen daarmee. In tegenstelling tot Euclides behandelt Fibonacci hier ook het benaderen van derdemachtswortels en de relevante rekenregels. Het laatste hoofdstuk begint met de behandeling van evenredigheden met drie of vier variabelen. Hierbij wordt ook het harmonisch gemiddelde van twee grootheden behandeld (zonder dat deze naam genoemd wordt). Vervolgens enkele eenvoudige meetkundige problemen en methoden voor het schrijven van een natuurlijk getal als de som van twee rationale kwadraten, met behulp van de stelling dat het product van de sommen van twee kwadraten eveneens de som van twee kwadraten is. De kern van dit hoofdstuk is echter de oplossing van vergelijkingen van de graad 1 en 2 in de zes standaardvormen (modi) die vereist zijn indien men uitsluitend positieve coëfficiënten toelaat.

Hierbij gaat het om de vormen die wij zouden schrijven als

$$bx = c; ax^2 = bx; ax^2 = c$$

(enkelvoudige modi) en

$$ax^2 + bx = c; ax^2 = bx + c$$

en

$$ax^2 + c = bx$$

(samengestelde modi).

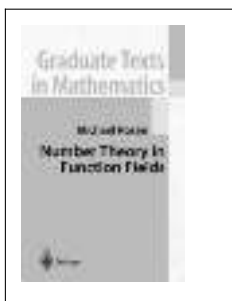
Deze worden behandeld door middel van het afsplitsen van een kwadraat, hetgeen meetkundig wordt toegelicht door de beide leden van de verbaal geformuleerde vergelijking voor te stellen door rechthoeken of vierkanten en daaruit conclusies te trekken. Bij de praktische toepassingen wordt dan gebruik gemaakt van de methoden Algebra en Almuchabala, dat wil zeggen, het bijvoegen links en rechts van gelijke termen respectievelijk het wegnemen daarvan. Hierin volgt Fibonacci de Arabische wiskundige Al-Kwarizmi op de voet.

Met deze vertaling heeft de auteur een niet geringe prestatie geleverd en het is des te meer te betreuren dat hij het verschijnen hiervan niet heeft mogen beleven. Hij heeft (nu citeer ik Horatius) een monumentum voltooid aere perennius, duurzamer dan brons. Het was zijn streven zich zo dicht mogelijk bij het Latijnse origineel aan te sluiten, maar hij is er toch in geslaagd een goed leesbare

Engelse tekst te produceren die, waar men hem ook opslaat, blijft boeien. Natuurlijk houdt men bij het bestuderen van deze fraaie uitgave nog wensen over, maar men moet daarbij nadrukkelijk bedenken dat het niet de pretentie van Sigler was, meer dan een vertaling te geven. Zo zou men uiteraard graag de zo zeldzame oorspronkelijke Latijnse tekst (in Nederland in slechts twee bibliotheken aanwezig) erbij willen zien, maar dit betekent een boek dat circa 1300 pagina's zou tellen, of het equivalent daarvan in twee dikke delen. Ook zou men bij enkele hoofdstukken de aantekeningen wat minder summier willen zien. Zo wordt het veertiende hoofdstuk, dat onder meer handelt over irrationaliteiten, zoals die voorkomen in het moeilijke tiende boek van de Elementen van Euclides (volgens Snellius *la croix des mathématiciens*) door slechts drie korte aantekeningen begeleid. Daartegenover staat een zeer doelgerichte, maar beknopte bibliografie waardoor degene die de weg weet, te weten kan komen wat hij niet wist. Overigens mist men in deze bibliografie het interessante werk van Ifra, *Universalgeschichte der Zahlen*. Toelichting op de tekst van de vertaling zelf, vindt de lezer niet behandeld. Vooral mist men echter een uitgebreide index. Dit werk werd encyclopedisch genoemd en dat is het ook door de veelheid van onderwerpen en door de gebruikte, eigentijdse oplossingsmethode; daaraan ontleent het ook zijn betekenis, maar er is weinig systeem in volgorde of samenhang van de behandelde onderwerpen. Zo wordt een verhandeling over het splitsen van een getal in de som van twee kwadraten op de voet gevolgd door de vraag hoeveel rechthoekige lappen van 12 bij 5 ellen men kan halen uit een rechthoekige lap van 100 bij 30 ellen; het konijntjesprobleem ligt ingeklemd tussen het berekenen van volmaakte getallen en een praktisch probleem dat leidt tot vier lineaire vergelijkingen met vier onbekenden. Het rekenen met positieve en negatieve getallen en de namen voor de onbekenden en hun machten alsook tal van oeroude, nu nog bekende raadsels en puzzels, het komt allemaal in het boek voor, maar waar? Een index zou ook een voortreffelijk hulpmiddel zijn bij tal van detailstudies waartoe dit boek uitnodigt en waarbij het als bron van inspiratie kan dienen, en die eerst recht mogelijk zijn nu dit werk door deze vertaling algemeen toegankelijk is geworden.

Deze kritische opmerkingen doen echter niets af aan mijn grote waardering voor dit werk. Het blijft een genoegen te lezen in dit boek van deze scherpzinnige, belezen en bereisde wiskundige, dat boeit waar men het openslaat.

A.W. Grootendorst



M. Rosen  
**Number theory in function fields**  
(*Graduate Texts in Mathematics* 210)  
Berlijn: Springer-Verlag, 2002  
258 p., prijs €58,80  
ISBN 0-387-95335-3

Er is weer een goed deel verschenen in de Springer-reeks *Graduate Texts in Mathematics*. In dit deel vult Michael Rosen, al veertig jaar hoogleraar aan Brown-universiteit in de VS, een tekort aan in de literatuur over getaltheorie. Vaak wordt de theorie van polynoomringen over eindige lichamen behandeld als opmerking bij de theorie van de ring van gehele getallen, die er veel op lijkt.

Evenzo wordt de theorie van functielichamen vaak verbannen naar de marge van het exposé van de algebraïsche theorie van getallenlichamen. Toch heeft de theorie van functielichamen tegenwoordig zoveel vertakkingen dat het een studie op zichzelf verdient. Rosen zelf wijst op het belang van de theorie als verkapt studie van algebraïsche krommen en in het verlengde hiervan het belang voor coderingstheorie. De ontwikkeling van de theorie van Drinfeldmodulen vanaf het midden van de jaren zeventig heeft van de studie van functielichamen een interessant en zelfstandig object gemaakt.

Nu is er dan ook eindelijk een tekstboek dat de getaltheorie van deze functielichamen rustig op een rijtje en bij elkaar zet. En dit is zeer illustratief. Uit de context van de getallenlichamen kent men bijvoorbeeld het ABC-vermoeden en de stelling van Fermat. Deze moeilijke problemen blijken een analogon te hebben in de theorie van functielichamen waarin de oplossing eenvoudig blijkt te zijn, zoals Rosen laat zien.

De meest opvallende kwaliteit van het boek is zijn volledigheid. Het is een goede en uitgebreide introductie in het onderwerp. In de eerste hoofdstukken wordt ingegaan op basale aspecten als  $L$ -reeksen, zeta-functies en reciprociteitswet. Al snel gaat het boek over op de algemene theorie van functielichamen. Lichaamsuitbreidingen, theorie van klassenlichamen, dichtheidsstellingen en zelfs de eerste beginselen van de theorie over Drinfeldmodulen kan men er in vinden.

Daarnaast is ook de bewijsvoering vrijwel altijd compleet. Slechts af en toe wordt gebruik gemaakt van een verwijzing naar literatuur elders en dan alleen als de bewijsvoering voert naar gebieden die te exotisch zijn om in het kader van een introductie in functielichamen te behandelen.

Mijn inschatting is, dat het niet alleen als leerboek, maar ook als referentie voor basale feiten plus bewijzen uit de theorie dienst kan gaan doen. De heldere structuur van het boek zorgt er in ieder geval voor dat hetgeen men zoekt snel te vinden is.

Kortom, Rosens boek is een aanrader voor een ieder die de theorie van functielichamen leren wil en een handige referentie voor wie op zoek is naar formuleringen en bewijzen van zaken die in standaardboeken over getaltheorie als opmerking terzijde worden gelaten.

G.-J. van der Heiden



T. Brzezinski, R. Wisbauer  
**Corings and comodules**  
(*London Mathematical Society Lecture Notes Series* 309)  
Cambridge: Cambridge University Press, 2003  
488 p., prijs £38,-  
ISBN 0-521-53931-5

Neem een algebra  $A$  over een lichaam  $k$ . De vermenigvuldiging kunnen we bekijken als een afbeelding van het tensorproduct  $A \otimes A$  naar  $A$ . Co-algebra's worden gedefinieerd op duale wijze: een co-algebra is een vectorruimte  $C$  met een co-vermenigvuldiging  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$  en een co-eenheid  $\varepsilon : C \rightarrow k$ , die aan een aantal axioma's (co-associativiteit en co-eenheid) moet voldoen. Coringen kunnen bekeken worden als de gepaste veralgemening van co-algebra's tot niet-commutatieve ringen. Een co-ring  $C$  over een

ring  $R$  is een  $R$ -bimoduul, met een co-vermenigvuldiging en een co-eenheid, die de bimoduul structuur bewaren, en ook voldoen aan analoge eigenschappen betreffende co-associativiteit en co-eenheid. Coringen werden ingevoerd door Sweedler in 1975. In tegenstelling tot co-algebra's, leek het aantal toepassingen ervan eerder beperkt. Een kwart eeuw lang leden ze een sluimerend bestaan en was er nauwelijks enige belangstelling. In de literatuur vinden we slechts een handvol bijdragen, onder meer door Guzman (1989) en Masuoka (1991).

Hopfmodulen en veralgemeningen ervan, onder meer Doi-Hopfmodulen en Yetter-Drinfeldmodulen werden uitgebreid bestudeerd tijdens de jaren negentig. In 1998 voerden Brzezinski en Majid modulen over verstrengelende structuren in; een tijdlang leek het erop dat die het meest efficiënte formalisme leverden. In een bespreking in Mathematical Reviews van een van Brzezinski's artikelen hierover vermeldt Masuoka (2000) dat de verstrengelde modulen kunnen beschouwd worden als co-modulen over een co-ring, en hij schrijft deze opmerking toe aan Takeuchi. Brzezinski zag de verstrekkende gevolgen hiervan, en sindsdien genieten co-ringen een groeiende belangstelling, en verscheen er een reeks publicaties, met toepassingen op diverse onderwerpen. Zo bleek onder meer dat 'descent'- en Galoistheorie elegant kunnen worden geherformuleerd in termen van co-ringen; de canoniciteit afbeelding in de definitie van een Galoisuitbreiding is in feite een morfisme van co-ringen. Verder kunnen co-ringen onder meer worden aangewend bij de studie van zwakke Hopf-algebra's, quasi-Hopf-algebra's, Hopfalgebroiden, differentiaal-gegradeerde algebra's en niet-commutatieve meetkunde.

Dit vlot geschreven boek vormt een inleiding tot co-ringen en co-modulen. Er wordt begonnen met twee inleidende hoofdstukken over co-algebra's en Hopf-algebra's; in de hoofdstukken 3 en 4 wordt de algemene theorie van co-ringen systematisch ontwikkeld. Hoofdstuk 5 gaat over de verstrengelende structuren en Hopfmodulen, waarover ik hierboven schreef, en hoofdstuk 6 over zwakke Hopf-algebra's. Er is een appendix voorzien van een inleiding tot categorietheorie, en tot moduultheorie. Ongetwijfeld zal dit boek tijdens de eerstvolgende jaren het standaard referentiewerk zijn voor verdere bijdragen tot de theorie der co-ringen en co-modulen. Het is geschreven voor wiskundigen met een achtergrond in ring- en moduultheorie, maar, mede dank zij de inleidende hoofdstukken en het appendix, zal het ook de interesse wekken van specialisten in aanverwante gebieden. Het kan gebruikt worden als handboek bij een cursus voor laatstejaarsstudenten.

S. Caenepeel

eerste facetten hiervan waren reeds opgemerkt in het begin van de vorige eeuw door de Italiaanse school, met name door Enriques en vooral door Fano. Pas nadat in de jaren 1930–1970 betrouwbare grondslagen gelegd waren voor de algebraïsche meetkunde als zodanig, kon aan het eind van de jaren zeventig een begin worden gemaakt met de studie van de classificatietheorie in dimensies drie en hoger. Na voorbereidend werk over de Kodairadimensie door Itaka, Ueno en Viehweg en na de moderne behandeling door Iskovskikh van het klassieke werk van Fano over Fanovariëteiten, kwam het baanbrekende werk van Mori, spoedig gevolgd door vele verhandelingen van Miyaoka, Reid, Kawamata, Kollar, Campana, Shokurov en vele, vele anderen. In de laatste twee decennia is op dit gebied een uitgebreide theorie ontstaan. Een gebied met een veelvoud aan begrippen, definities, methoden en resultaten, maar bijzonder moeilijk toegankelijk. Het is daarom bijzonder verheugend dat Debarre nu een boek heeft geschreven, ontstaan uit een college aan Harvard, dat zich richt tot de geïnteresseerde buitenstaander en dat een inleiding geeft tot dit boeiende terrein. Als basiskennis wordt alleen uitgegaan van de algemene theorie zoals die bijvoorbeeld te vinden is in het bekende boek van Hartshorne.

De eerste twee hoofdstukken zijn voorbereidend en gaan over Cartier divisoren en afbeeldingen van een vaste kromme in een gegeven variëteit. De volgende drie hoofdstukken richten zich vooral op die variëteiten die veel rationale krommen bevatten, deze nemen een belangrijke plaats in in de classificatietheorie. In deze drie hoofdstukken speelt het beroemde 'buig- en breekprincipe' van Mori een hoofdrol. Dit principe zegt dat er onder zekere omstandigheden een rationale kromme moet optreden. Met dit principe kan worden aangetoond dat er door elk punt van een Fanovariëteit een geschikte rationale kromme gaat; het ingenieuze bewijs hiervan loopt, voor Fanovariëteiten gedefinieerd over de complexe getallen, via positieve karakteristiek! In hoofdstuk 5 vinden we de belangrijke stelling, onafhankelijk van elkaar bewezen door Campana en door Kollar-Miyaoka-Mori, dat Fano variëteiten *rationally connected* zijn, dat wil zeggen dat ieder tweetal punten te verbinden is door een keten van rationale krommen. De laatste twee hoofdstukken geven een inleiding tot het zogenaamde Moriprogramma; dit is gebaseerd op het idee van Mori om in een gegeven klasse van birationaal equivalente variëteiten een zo 'eenvoudig-mogelijk' model te vinden, een zogenaamd minimaal model. Dit 'programma' is op dit moment alleen bevredigend opgelost in dimensie drie (en natuurlijk in dimensies één en twee). In hoofdstuk 6 vinden we, voor een gladde variëteit, de beroemde stelling van Mori die de beschrijving geeft van de structuur van de convexe kegel voortgebracht door de rationale krommen. Voor het verkrijgen van een minimaal model moet men echter, zoals ontdekt door Miles Reid, zekere 'eenvoudige' singulariteiten toelaten. Dit is een van de belangrijke verschillen met de theorie voor oppervlakken en een feit dat de zaak zo moeilijk maakt. Het laatste hoofdstuk geeft hiertoe een inleiding en behandelt drie fundamentele stellingen, waaronder de beroemde 'samentrekkingsstelling' van Mori.

Bovenstaande is slechts een greep uit de rijke inhoud van het boek. De schrijver heeft niet getracht uitputtend te zijn, zo heeft hij terecht niet de uitvoering van het Moriprogramma in dimensie drie opgenomen. Hij heeft zich geconcentreerd op de behandeling van een aantal centrale technieken, methoden en resultaten. Hij geeft steeds uitgebreide motivatie, en bespreekt (respec-



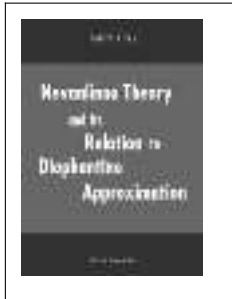
O. Debarre  
**Higher-dimensional algebraic geometry**

Universitext  
Berlijn: Springer-Verlag, 2001  
233 p., prijs €44,95  
ISBN 0-387-95227-6

Bij de classificatietheorie van algebraïsche variëteiten van dimensie hoger dan twee treden verschijnselen op die geheel verschillend zijn van die we bij dimensie één en twee gewend zijn. De

tievelijk formuleert) een aantal met zorg uitgekozen voorbeelden (respectievelijk oefeningen). Zijn doel is de lezer de smaak te geven van, en een goede inleiding tot, dit interessante gebied en naar de mening van uw recensent is hij hier in hoge mate in geslaagd.

J.P. Murre



M. Ru

**Nevanlinna theory and its relation to Diophantine approximation**

London: World Scientific Publishing, 2001

323 p., prijs £52,-

ISBN 981-02-4402-9

Nevanlinnatheorie is de tak van complexe analyse die zich ruwweg bezighoudt met problemen van het volgende type. Zij  $X$  een gegeven complexe projectieve variëteit; bestaat er een niet-constante holomorfe afbeelding  $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ ? Zo ja, hoe groot is de afstand tussen de waarden  $f(z)$  van  $f$  en een gegeven deelvariëteit  $Z$  van  $X$ ? Diophantische approximatie is de tak van de getaltheorie die gaat over de vraag of, wanneer  $X$  en  $Z$  gedefinieerd zijn over een getallenlichaam  $K$ , er oneindig veel  $K$ -rationale punten in  $X$  liggen en zo ja, hoe groot de afstanden zijn van die punten tot  $Z$ . Nevanlinnatheorie en Diophantische approximatie ontwikkelden zich onafhankelijk van elkaar totdat Vojta in 1983 in zijn proefschrift een 'woordenboek' gaf, waarmee beweringen uit de Nevanlinnatheorie kunnen worden vertaald in beweringen uit de Diophantische approximatie. Zo bleken allerlei fundamentele stellingen uit de Nevanlinnatheorie te corresponderen met fundamentele stellingen uit de Diophantische approximatie. In dit woordenboek correspondeert een niet-constante holomorfe afbeelding met een oneindige verzameling van rationale punten. Door zijn woordenboek toe te passen op een vermoeden van Griffiths uit de Nevanlinnatheorie kwam Vojta tot de formulering van een erg algemeen vermoeden over Diophantische approximatie, dat allerlei bestaande vermoedens in een breder kader zet, en allerlei bestaande grote stellingen als speciaal geval bevat. Vojta werkte dit verder uit in zijn Springer Lecture Notes 1239, *Diophantine approximations and value distribution theory* (1987).

Het hier besproken boek van Min Ru gaat ook over de relatie tussen Nevanlinnatheorie en Diophantische approximatie. In vergelijking met Vojta's Lecture Notes is het ingangsniveau van Ru's boek veel lager. Bovendien bevat Ru's boek allerlei resultaten die na Vojta's Lecture Notes zijn bewezen. Ru's boek heeft zeven hoofdstukken. Elk hoofdstuk is verdeeld in twee delen A en B. In deel A wordt steeds de Nevanlinnatheorie in een bepaalde situatie behandeld en in deel B wordt ingegaan op de corresponderende resultaten uit de Diophantische approximatie. Ru geeft van de resultaten uit de Nevanlinnatheorie steeds de volledige bewijzen. Voor de (veel moeilijker) bewijzen van de corresponderende resultaten uit de Diophantische approximatie verwijst hij in de meeste gevallen naar de literatuur. Er is weinig overlap tussen Vojta's Lecture Notes en Ru's boek.

Ru begint in het eerste hoofdstuk met de eenvoudigste situatie, namelijk in deel A met de twee hoofdstellingen van Nevanlinna voor meromorfe functies van  $\mathbb{C}$  naar  $\mathbb{C}$  (ofwel holomorfe

functies van  $\mathbb{C}$  naar  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ) en in deel B met de analoga daarvan voor Diophantische approximatie, dat zijn de Artin-Whaples productformule voor valuaties in algebraïsche getallenlichamen en de stelling van Roth over de benadering van algebraïsche getallen door getallen uit een gegeven getallenlichaam  $K$ . Hij generaliseert dit in de volgende hoofdstukken steeds verder, onder meer naar Nevanlinnatheorie voor holomorfe afbeeldingen van  $\mathbb{C}$  naar  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  en de daarmee corresponderende deelruimtestelling van Schmidt voor Diophantische approximatie. In hoofdstuk 5 komt hij tot de formulering van het vermoeden van Griffiths uit de Nevanlinnatheorie over holomorfe functies van  $\mathbb{C}$  naar een projectieve variëteit over  $\mathbb{C}$  en het daarmee corresponderende vermoeden van Vojta voor Diophantische approximatie. In hoofdstuk 6 bekijkt Ru deelvariëteiten van abelse variëteiten, met daarin stellingen van Bloch voor Nevanlinnatheorie en Faltings voor Diophantische approximatie, en in het laatste hoofdstuk 7 gaat hij in op hyperbolische variëteiten, met de stelling van Brody voor Nevanlinnatheorie en het vermoeden van Lang voor Diophantische approximatie.

Ru heeft in zijn boek materiaal over Nevanlinnatheorie bijeengebracht dat niet zo makkelijk ergens anders is te vinden. Een aantal van de resultaten over Diophantische approximatie die hij noemt kunnen in standaardwerken worden gevonden, maar hij geeft ook een aantal resultaten van hemzelf die niet ergens anders in boekvorm zijn verschenen. De presentatie is redelijk nauwkeurig; hier en daar zijn er foutjes in het Engels en op sommige plaatsen geeft Ru een definitie die later in het boek op een helderder manier wordt gegeven. Voor degenen die meer van Nevanlinnatheorie en het verband met Diophantische approximatie willen leren is dit boek zeker interessant.

J.H. Evertse



J.J. Duistermaat, J.A.C. Kolk

**Lie groups**

Universitext

Berlijn: Springer-Verlag, 2000

344 p., prijs €44,95

ISBN 3-540-15293-8

In dit boek wordt theorie van eindigdimensionale Lie-groepen en hun Lie-algebras uiteengezet. Het onderscheidt zich van veel andere boeken over dit onderwerp door een grote nadruk op meetkundige vragen, en het systematische gebruik van differentiaalmeetkundige methoden. Deze spelen al in het oorspronkelijke werk van Sophus Lie een fundamentele rol, en het boek heeft mede tot doel het heruitvoeren van diens project met moderne instrumenten.

Er zijn vier hoofdstukken, waarin achtereenvolgens worden behandeld: een algemene beschouwing van Lie-groepen en hun Lie-algebra's (inclusief een existentiebewijs van een groep bij elke eindig dimensionale Lie-algebra), propere acties, compacte Lie-groepen en hun representaties.

Het voorwoord waarschuwt ervoor dat de tekst af en toe verwijst naar hoofdstukken van een 'toekomstig boek', dat blijkbaar met het huidige een serie zal vormen. Wat bevreemding wekt is dat deze verwijzingen vaak juist basisfeiten betreffen; bijvoor-

beeld treft men in dit boek geen definitie van het Lie-haakje op vectorvelden aan (hoewel sectie 1.8 daarvan al gebruik maakt); blijkbaar wordt dat in hoofdstuk 11(!) behandeld. Ook door het stelselmatig prefereren van een analytische aanpak boven een, voor velen ongetwijfeld gemakkelijkere, algebraïsche benadering, is het boek als introductie in het onderwerp of als '(post)graduate textbook' minder geschikt, ondanks hetgeen de achterflap meldt. Een doelbewust toewerken naar 'grote' resultaten, met gedegen uitwerking van alle benodigde hulpmiddelen ongeacht een grote diversiteit in de moeilijkheidsgraad daarvan, verradt veeleer een ambitie tot het schrijven van een standaard referentiewerk.

Het boek getuigt echter ook van een groot enthousiasme voor het onderwerp, en een bereidheid tot het ingaan op voor de hand liggende maar lastige vragen, waarvan de antwoorden niet gladjes uit de standaardtheorie voortvloeien. Algemene formules worden in concrete voorbeelden uitgewerkt. Ook wordt waar mogelijk een concrete visualisatie nagestreefd, bijvoorbeeld die van de conjugatieklassen in  $SL(2, \mathbf{R})$ ; deze figureert zelfs op de omslag. Jammer is dat het interpreteren van de illustraties een grote zelfwerkzaamheid van de lezer vereist, door het ontbreken van indicaties.

Belangrijke resultaten worden zorgvuldig behandeld, maar helaas zijn er enkele storende fouten op elementaire punten. Zo klopt de beschrijving van het beeld van 'exp' voor  $SL(2, \mathbf{R})$  niet, en zijn lemma 1.11.2 en de definitie van 'proper' onjuist (bestudering van de omslagillustratie respectievelijk van Bourbaki zou hebben geholpen). Ik verwijs naar een toekomstige editie voor correcties. Desondanks kan ik dit boek, voor wie niet vies is van stevige differentiaalmeetkundige kost, zeer aanbevelen.

M.A.A. van Leeuwen



M. Rørdam, E. Størmer  
**Classification of nuclear  $C^*$ -algebras**  
**Entropy in operator algebras**  
*(Encyclopaedia of Mathematical Sciences 126)*  
 Berlin: Springer-Verlag, 2002  
 198 p., prijs €90,90  
 ISBN 3-540-42305-2

Deze band in de veelbelovende nieuwe serie *Operator Algebras and Non-Commutative Geometry*, onderdeel van Springer's EMS, bestaat uit twee bijdragen die niets met elkaar te maken hebben. Ik bespreek hier slechts het eerste en veruit langste stuk, waarin Mikael Rørdam een zeer gedetailleerd overzicht geeft van de classificatie van bepaalde klassen van  $C^*$ -algebra's. Een  $C^*$ -algebra is een algebra van begrensde operatoren op een complexe Hilbertruimte die gesloten is onder het nemen van geadjungeerden, en tevens onder limieten in de topologie gegeven door de operator-norm.  $C^*$ -algebra's zijn dus een bepaald soort associatieve algebra's over de complexe getallen die een natuurlijke realisatie hebben op een Hilbertruimte, en daarom van groot belang zijn voor de quantummechanica.  $C^*$ -algebra's vormen tevens de basis voor de niet-commutatieve meetkunde.

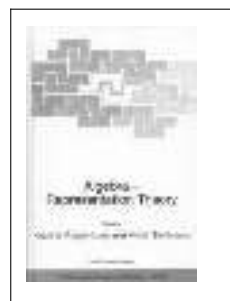
Eindig-dimensionale  $C^*$ -algebra's zijn isomorf met directe sommen van matrixalgebra's, en worden dus geïnclassificeerd door een oplopend rijtje natuurlijke getallen. Een commutatieve  $C^*$ -

algebra is isomorf met een algebra van continue functies op een lokaalcompacte Hausdorffruimte onder puntsgewijze vermenigvuldiging, zodat de classificatie van dergelijke algebra's reduceert tot de (hopeloze) classificatie van zulke ruimten. Een ander speciaal geval vormen de von Neumannalgebra's; dit zijn  $C^*$ -algebra's die de duale van een Banachruimte zijn. De classificatie van enkelvoudige von Neumannalgebra's werd begonnen door Murray en Von Neumann in de jaren dertig, en voltooid door Connes in de jaren zeventig van de vorige eeuw. Connes ontving mede hiervoor in 1982 een Fields Medal.

De vraag is of ook iets over andere speciale klassen van  $C^*$ -algebra's gezegd kan worden, en daarover gaat de bijdrage van Rørdam. De bovenstaande drie voorbeelden zijn niet als zodanig in dit boek te vinden, maar dienen wel ter inspiratie voor de gebruikte technieken. Het centrale idee, voor het eerst in 1989 geopperd door George Elliott, is dat  $C^*$ -algebra's zouden moeten worden geïnclassificeerd door hun  $K$ -theorie. De  $K$ -theorie van  $C^*$ -algebra's is een uitbreiding van de topologische  $K$ -theorie van Atiyah en Hirzebruch, die men terugvindt in het commutatieve geval. Deze suggestie blijkt juist te zijn voor een aantal zeer speciale klassen van  $C^*$ -algebra's. Aan de ene kant van het spectrum geldt dit voor de zogenaamde  $AF$ -algebra's, die limieten zijn van eindig-dimensionale  $C^*$ -algebra's. Aan de andere kant worden ook de Kirchberg-algebra's, die in zekere zin analoog zijn aan hyper-eindige type III factoren in de theorie van von Neumannalgebra's, volledig door hun  $K$ -groepen gekarakteriseerd. Tussen deze extremen liggen ook weer allerlei andere speciale klassen waarvoor het vermoeden van Elliott al dan niet met enige correcties waar is.

De gehele inhoud van Rørdams stuk is uitzonderlijk technisch, zelfs voor specialisten in de theorie van  $C^*$ -algebra's. Zo vormt zijn eigen *Introduction to  $K$ -theory for  $C^*$ -algebras* (met F. Larsen en N.J. Laursen, CUP 2000) nog lang geen afdoende voorbereiding. Slechts een kleine sekte werkt aan Elliotts classificatieprogramma, en ik verwacht niet dat dit boek het onderwerp populariseert. Ik vermoed dat ondergetekende de enige in Nederland is, die in dit boek is geïnteresseerd. Dit zou lof impliceren voor de boekenredacteur van het NAW, die feilloos de juiste recensent heeft gevonden, maar ook kritiek, omdat het boek überhaupt ter recensie is aangeboden. Laat ik hopen dat mijn vermoeden onjuist is!

K. Landsman



I.K.W. Roggenkamp, M. Stefanescu (eds.)  
**Algebra — Representation Theory**  
*(Proc. of the NATO Advanced Study Institute on Algebra — Representation Theory, Constanta, Romania, 2–12 August 2000)*  
 Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001  
 460 p., prijs €189,-  
 ISBN 0-7923-7113-5

In de afgelopen dertig jaar is de ontwikkeling van representatietheorie van groepen, Lie-algebra's en associatieve algebra's zeer zeker bevorderd door de theorie van zogeheten bijna-splijttrijen, Auslander-Reitenpijlkokers en cohomologie van groepen. Quantagroepen, Hopf-algebra's en niet-commutatieve meetkunde brengen de klassieke representatietheorie tegenwoordig eveneens

verder. Voor dit alles is een goed begrip van 'structuur van speciale ringen' onontbeerlijk. Daartoe werd in Constanza-Roemenië in 2000 een conferentie belegd. Over voornoemde onderwerpen werden inleidende en specialistische voordrachten gehouden door, zoals het congresboek zegt, 'internationally highly recognised specialists'. Er staan twintig uitgewerkte voordrachten in dit congresboek. Sommige bijdragen zijn nog redelijk informatief, andere vallen meteen met de deur in huis en geven alleen zeer recente ontwikkelingen. Als onderwerpen die aan bod komen, noem ik slechts: toepassingen van moduultheorie op invariantentheorie van klassieke groepen, vlechtgroepen, de zogeheten filosofie van Langlands en Koszuldualiteit, ontwikkelingen betreffende het abelse-defectvermoeden, Cohen-Macaulayrepresentaties, Gelfand-Kirillovdimensies, bloktheorie, enz. De inhoud van het boek is bestemd voor specialisten en zeer gevorderde studenten. Het boek hoort zeker in de bibliotheek van elke (?) niet-technische universiteit thuis. Wel aanbevolen om erin te kijken en eruit te studeren, maar zelf kopen? Dat laatste laat ik aan u zelf over.

R.W. van der Waall



A. Prestel, C.N. Delzell  
**Positive polynomials: from Hilbert's 17th problem to real algebra**  
*(Springer monographs in mathematics)*  
 Berlin: Springer-Verlag, 2001  
 267 p., prijs €72,95  
 ISBN 3-540-41215-8

Hilberts siebzehntes Problem besagt, dass jedes reelle Polynom (in mehreren Variablen), das keine negativen Werte annimmt, sich als Summe von Quadraten rationaler Funktionen schreiben lässt. Diese Tatsache, die 1926 von E. Artin bewiesen wurde, sowie die zur gleichen Zeit von ihm und O. Schreier begründete Theorie der reell abgeschlossenen Körper bildet den Ausgangspunkt des vorliegenden Buches, das sich in acht Kapitel und einen Anhang gliedert.

Die ersten vier Kapitel führen in das Themengebiet der Reellen Algebra ein. Es werden behandelt: (Vor-)Ordnungen auf Körpern, Sturm-Folgen, reeller Abschluss eines geordneten Körpers, Quantorenelimination, Tarski-Transfer, Witt-Ring der quadratischen Formen über einem Körper, Verallgemeinerung von Hilbert 17 auf semi-algebraische Mengen, reelles Spektrum eines kommutativen Ringes, abstrakter und konkreter Positivstellensatz.

Die Quantorenelimination, und damit das aus ihr abgeleitete Tarski'sche Transferprinzip für reell abgeschlossene Körper, auf das im weiteren Verlauf des Buches immer wieder zurückgegriffen wird, wird auf dem für mein Verständnis etwas undurchsichtigen Weg über die aleph-1-Saturiertheit nichtprinzipaler Ultrapotenzen reell abgeschlossener Körper gezeigt, anstatt, wie zum Beispiel in J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy, *Géométrie algébrique réelle* (Springer-Verlag, 1987), durch vollständige Induktion. Überwiegend ist die Darstellung jedoch recht klar und gut verständlich und eignet sich daher als Lektüre für einen graduierten Einführungskurs in Reeller Algebra.

Die letzten vier Kapitel widmen sich zunehmend den neue-

ren Entwicklungen, die das Gebiet seit Erscheinen der Lehrbücher *Géométrie algébrique réelle* und M. Knebusch, C. Scheiderer, *Einführung in die reelle Algebra* (Vieweg, 1989) verzeichnen durfte und die wohl auch den Hauptanlass zur Herausgabe des vorliegenden Werkes bilden. Zwar fanden grosse Teile dieser neuen Ergebnisse bereits eine elementare Behandlung im (übrigens gratis erhältlichen) Vorlesungsskript M. Marshall, *Positive Polynomials and Sums of Squares*, (Dipart. Mat. Univ. Pisa, Istituti Editoriali e Poligrafici Int., Pisa - Roma, 2000), doch erscheint eine breitere und mehr theoretisch unterbaute Darstellung, wie sie mit dem vorliegenden Text gegeben ist, als durchaus sinnvoll und wünschenswert.

Zur Orientierung für den Neuling sei gesagt, dass die meisten Sätze um das Problem der Darstellung positiver Polynome, ähnlich wie bei Hilbert 17, kreisen. So finden sich in der zweiten Hälfte des Buches: der Darstellungssatz von Kadison und Dubois, Schmüdgens Satz, (Prestels und) Jacobis Verallgemeinerungen auf quadratische Moduln und Halbordnungen, Anwendungen auf das Moment-Problem, Wörmanns Verallgemeinerungen auf Potenzen mit geradem Exponenten, quantitative Aspekte wie Pythagoras-Zahl und Gradschranken.

Das Buch verfügt über einen ausführlichen Anhang zur Bewertungstheorie, ein dreiseitiges Glossar für die verwendeten Notationen sowie über eine Literaturliste und einen Index von je acht Seiten. Jedes Kapitel hat einen Übungsteil (ohne Musterlösungen) und schliesst mit bibliographischen und historischen Anmerkungen zum jeweils behandelten Stoff. Der gesamte Text ist trotz einer teilweise etwas eigenwilligen Notation recht gut lesbar. Die typographischen Fehler bleiben im annehmbaren Rahmen. An ein paar Stellen geht die Nummerierung und Referenzierung der Sätze etwas durcheinander.

Insgesamt ist dies eine durchaus empfehlenswerte Monographie. Ihr Erscheinen ist aufgrund der vielen Neuerungen auf dem Gebiet sehr begrüssenswert, und es ist zu hoffen, dass sie auch die zukünftige Entwicklung in der Reellen Algebra förderlich beeinflusst.

R. Auer



M.R. Grossinho, S. Tersian  
**An introduction to minimax theorems and their applications to differential equations**  
*(Nonconvex optimization and its applications 52)*  
 Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001  
 288 p., prijs €135,36  
 ISBN 0-7923-6832-0

The book is an introduction to critical point theory and its applications to differential equations. The material has been organized in seven chapters.

Chapter I is an introductory chapter. It presents the variational principles of Ekeland and of Borwein-Preiss on the existence of  $\varepsilon$ -minimum points. It introduces a number of deformation lemmas, which are subsequently used to provide proofs of the mountain-pass theorem of Ambrosetti-Rabinowitz and some of its extensions. It also shows how mountain-pass theorems can be derived from the variational principle of Ekeland.

Chapter II starts with a discussion of the well-known minimax theorem of Von Neumann. It also presents the saddle-point the-

orems of Rabinowitz and their extensions due to Lazer-Solimini on the one hand and Schechter on the other and shows how these results are connected to critical point theory. It formulates the critical point theorems of Brézis-Nirenberg and Li-Willem, and a number of linking theorems due to Silva.

Chapter III studies applications of critical point theorems to elliptic problems in bounded domains. The Neumann problem is studied, as well as the Hammerstein equations on a bounded domain with smooth boundary. The existence of solutions to the Hammerstein integral equations is shown using the Ambrosetti-Rabinowitz mountain-pass theorem discussed in Chapter I and the Lazer-Solimini saddle point theorem treated in Chapter II.

Chapter IV applies variational methods to prove the existence of periodic solutions of some second-order non-linear differential equations. Existence results are established using the Ambrosetti-Rabinowitz mountain-pass theorem of Chapter I and the Silva saddle-point the Li-Willem linking theorems of Chapter II.

The dual variational method is presented in Chapter V, as well as its applications to some problems for fourth-order differential equations with continuous and discontinuous nonlinearities.

The goal of Chapter VI is the presentation of a number of minimization and mountain-pass theorems for non-differentiable functionals. It is assumed that the functionals are locally Lipschitz, which implies that it is possible to define their generalized gradients. The mountain-pass theorems of Chang, Ghoussoub-Preiss and Brezis-Nirenberg are obtained as special cases of a general mountain-pass theorem.

Chapter VII concludes the book with an application of variational methods to study the existence of homoclinic and heteroclinic solutions of second-order equations, fourth-order equations and Schrödinger type equations.

The book is designed for graduate and postgraduate students as well as for specialists in the fields of differential equations, variational methods and optimization. Although there is room for improvement of the book, in particular with regard to the use of English and the exposition of the general intuition behind the results obtained, I have enjoyed reading the book for its mathematical clarity and rigor. I am convinced that any specialist in the field will use the book as a valuable reference manual, and I would therefore like to highly recommend it.

P.J.J. Herings

tions by variation of constants; harmonic oscillators; basic theory of systems of linear differential equations; linearization of non-linear systems near equilibrium points; periodicity and stability of solutions of non-linear systems; two-dimensional gradient and Hamiltonian systems; chaos; solution of differential equations by Laplace transform; power series solutions at regular singular points. For the qualitative study of differential equations the author introduces vector fields, flows, phase space, and discusses the behavior of solutions of linear systems near the equilibrium.

The author prefers to rely on intuition rather than on rigor when the latter 'endangers clarity'. However, the text contains non-rigorous explanations which do not help in clarifying matters. For example, vector fields for first-order differential equations are defined in an example of a linear equation with constant coefficients, and later are used to introduce the notion of a singular solution of any kind of first-order differential equation. Examples of differential equations with discontinuous coefficients are introduced early without comments on how the main theory applies (or does not apply) to them. For instance, the non-uniqueness of solutions to initial value problems for these equations is only briefly mentioned in the chapter on the Laplace transform.

Another preference of the author concerns the 'difficult and time-consuming issue' of modelling. The textbook contains many modelling examples from various fields (including economy, culinary, psychology), aiming to be attractive. Nevertheless, more comments on the reliability of the very diverse models, or less arbitrary assumptions, would serve the same purpose. In the example of the Tacoma Narrows bridge disaster the author presents a simplification of a published model, but its solution is mathematically weak and plays a minor role in the qualitative discussion thereafter.

In conclusion, the textbook contains much interesting material and covers various aspects of the theory and applications of differential equations, including numerical methods and computer algebra. However, for a course on differential equations, it would have been better if some aspects of the theory and modelling were presented in a more open way.

R. Vidunas



F. Diacu

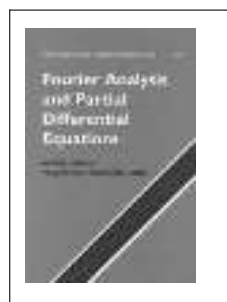
### **An introduction to differential equations**

#### **Order and chaos**

London: Macmillan, 2000

399 p., prijs £40,99

ISBN 0-7167-3296-3



R.J. Iorio, Jr., V. de Magalhães Iorio

### **Fourier analysis and partial differential equations**

(Cambridge Studies in Advanced Mathematics 70)

Cambridge: Cambridge University Press,

2001,

411 p., prijs £55,-

ISBN 0-521-6211-X

According to the author, this textbook aims to combine two approaches to teaching calculus (and differential equations in particular) at modern universities: the classical approach based on exact techniques, and the more intuitive 'reform' method. The classical topics include: exact solution of separable or linear first order equations, of second order linear equations with constant coefficients; solution of nonhomogeneous second order equa-

Het eerste deel van dit boek geeft een inleiding in de theorie van Fourierreeksen, periodieke distributies en Sobolevruimten op de cirkel. In het tweede deel wordt deze theorie toegepast op evolutievergelijkingen van de vorm  $\partial_t u = P(x, \partial_x)u$  op de cirkel, waarbij oplossingen beschouwd worden als functies van  $t$  met waarden in Sobolevruimten op de cirkel. Eerst wordt het lineaire geval besproken en daarna worden de resultaten toegepast in het niet-lineaire geval. Aan de orde komen onder meer het lokaal en globaal goed-gesteld zijn van het Cauchyprobleem en maximale

existentie-intervallen bij niet-lineaire Schrödinger vergelijkingen en Korteweg-De Vriesvergelijkingen. Bij eerstgenoemde vergelijkingen wordt onder andere een Hamiltonstructuur ingevoerd om globaal goed-gesteld zijn te onderzoeken en bij de laatstgenoemde vergelijkingen wordt de methode van de verdwijnende viscositeit gebruikt.

Het derde deel behandelt niet-periodieke gevallen. Daartoe wordt eerst een inleiding gegeven in de algemene theorie van distributies, Fouriertransformaties en Sobolevruimten op  $\mathbf{R}^n$ . Dan volgt een behandeling van Cauchyproblemen voor Korteweg-De Vriesvergelijkingen en Benjamin-Onovergelijkingen.

De theorie is helder gepresenteerd en voorzien van veel nuttige vraagstukken. Naar mijn mening is het een waardevol boek dat bijvoorbeeld op colleges goed gebruikt zou kunnen worden.

B.L.J. Braaksma

A.A. Martynyuk

### **Stability by Liapunov' matrix function method with applications**

(Pure and Applied Mathematics)

New York: Marcel Dekker, 1998

276 p., prijs \$ 150,-

ISBN 0-8247-0191-7

Dit boek gaat over het bestuderen van stabiliteitseigenschappen van stelsels differentiaalvergelijkingen, via de methode van *matrix Lyapunovfuncties*. Het eerste hoofdstuk is achtergrondinformatie: het beschrijft de bekende resultaten voor scalaire Lyapunovfuncties. Het tweede hoofdstuk behandelt dan de matrixwaardige Lyapunovfuncties, en geeft een aantal voorbeelden. Hoofdstuk 3 betreft singulier gestoorde problemen, terwijl hoofdstuk 4 gaat over stabiliteit voor stochastische differentiaalvergelijkingen. Hoofdstuk 5, tenslotte, behandelt een aantal 'real-life' voorbeelden. Het boek is duidelijk geschreven door een expert op het vakgebied, en bevat resultaten die nog niet eerder in boekvorm zijn verschenen.

Het boek kan ik helaas niet erg aanbevelen, ook niet voor diegenen die door de bovenstaande opsomming van de inhoud de gedachte zouden hebben dat het wellicht een erg interessant boek zou kunnen zijn. Het boek vertoont namelijk een aantal ernstige tekortkomingen: ten eerste is het in een taal geschreven waarvan de auteur denkt dat het Engels is, maar waarvan ik vermoed dat het ontstaan is door een Russische tekst met het woordenboek op schoot woord voor woord te vertalen. Ten tweede is niemand op het idee gekomen om de drukproeven eens te corrigeren. Het eerste fenomeen leidt er toe dat het lezen erg vermoeiend is: de lezer is regelmatig op zoek in de zin om te zien wat de correcte grammatica zou kunnen zijn, en moet hier en daar erg raden naar de bedoeling van de auteur. Het tweede fenomeen is vooral erg hinderlijk als in essentiële formules tikfouten staan die het volstrekt onduidelijk maken wat de auteur nu weer in vredesnaam bedoelt. Om maar eens een voorbeeld te geven: zelfs nadat ik elders mijn geheugen had opgefrist betreffende Dini-afgeleiden, duurde het nog een flink tijdje voor ik begreep wat de auteur bedoelt in de definitie van deze afgeleiden op pagina 47. Erg hinderlijk ook al omdat deze definitie van belang is voor de rest van hoofdstuk 2. Overigens staat in dezelfde definitie nog een verwijzing naar een niet bestaande formule, die in de daaropvolgende pagina's ook

consequent herhaald wordt. Ook komt het regelmatig voor dat zinnen, die kennelijk weg hadden moeten, zijn blijven staan, en omgekeerd (zie bijvoorbeeld pagina 44 na definitie 2.2.2). Voorts heeft de auteur er een handje van om één en hetzelfde ding nu eens met een kleine letter aan te duiden, en het dan enkele regels verderop met een grote letter aan te duiden. En dan duiken er soms ook nog dingen op die helemaal niet gedefinieerd zijn.

Dergelijke zaken mag men natuurlijk de uitgever ook aanrekenen, alsmede de editors van de serie waarin het boek verschenen is. En voorts de reviewers van het manuscript, die er, getuige het voorwoord, ook nog zijn geweest. Zij allen hadden de auteur hier dienen te ondersteunen. Was dat allemaal gebeurd, dan zou deze recensie waarschijnlijk veel positiever zijn, want inhoudelijk is het materiaal zeker de moeite waard.

Keren we even terug naar de inhoud. Alhoewel het hier gaat om matrixwaardige Lyapunovfuncties wordt in de meeste toepassingen toch weer gereduceerd tot een scalaire Lyapunovfunctie door het nemen van het inproduct van een vector met de vector die ontstaat door die matrixwaardige functie te vermenigvuldigen met die vector. De motivatie om naar matrixwaardige Lyapunovfuncties te kijken is dat daarmee die componenten van het systeem, die de zwaarste eisen nodig maken, kunnen worden uitgelicht, terwijl de condities op de andere componenten wellicht veel lichter kunnen zijn.

Ondanks alle kritiek heeft het boek zo zijn leuke kanten. De gekozen toepassingen, en het hoofdstuk over 'real life' problemen zijn interessant, en verhelderen de bedoelingen van de auteur wel. Al moet me van het hart dat de ellenlange lijst van voorwaarden die soms nodig zijn om de hoofdresultaten toe te passen geen erg overtuigende indruk maakt.

Concluderend heb ik maar één aanbeveling: besteed uw euro's anders.

A.C.M. Ran



I. Nikolaev

### **Foliations on surfaces**

(Ergebnisse der Mathematik, 3. Folge, 41)

Berlijn: Springer-Verlag, 2001

450 p., prijs € 129,95

ISBN 3-540-67524-8

Onder *foliatie* van dimensie  $p$  van een gladde variëteit verstaat men een opdeling van die variëteit in *bladen*, die er lokaal uitziet als de opdeling van de euclidische ruimte  $\mathbf{R}^n$  in  $p$ -dimensionale bladen  $\mathbf{R}^p \times \{x\}$ . De theorie van foliaties is een belangrijk onderdeel van de differentiaaltopologie en meetkunde, een onderdeel waarbinnen verschillende Fields Medals zijn toegekend en waarvan al diverse leerboeken zijn gewijd.

Het is eenvoudig om in te zien dat op een compact oppervlak alleen een niet-triviale (dat wil zeggen 1-dimensionale) foliatie kan bestaan als het oppervlak geslacht nul heeft. De reden dat ik toch een dik boek voor me heb dat gaat over foliaties van oppervlakken is, dat de auteur een ruimer begrip van foliatie behandelt, waarin ook singulariteiten mogen voorkomen. (Denkt u bijvoorbeeld aan de foliatie van het Euclidische vlak door concentrische cirkels.) Ook in de klassieke theorie van *reguliere* foliaties spelen

zulke *singuliere* foliaties van oppervlakken een rol, bijvoorbeeld in Haefliger's befaamde bewijs voor het niet bestaan van een analytische 2-dimensionale foliatie op de 3-sfeer. Later werden ook bepaalde klassen singuliere foliaties geïsoleerd, zogenaamde Sussmann of Stefan foliaties.

Dit boek slaat een wat andere richting in, en de namen van Haefliger, Stefan en Sussmann komen dan ook niet voor in de bibliografie.

Het boek bestaat uit een inleidend hoofdstuk met Nikolaev's definitie van foliaties met singulariteiten, enkele voorbeelden en enkele constructiemethoden, gevolgd door zes hoofdstukken waarin de algemene theorie wordt ontwikkeld. Hierin komen onderwerpen als Morse-Smale foliaties, holonomie, Cherry cells, minimale invariante verzamelingen, en de stellingen van Anosov aan de orde. Er is ook een hoofdstuk over foliaties van niet-compacte oppervlakken. Vervolgens worden tien hoofdstukken gewijd aan toepassingen op, en verbanden met andere gebieden van de wiskunde. Hier komen bijvoorbeeld aan bod de ergodentheorie, de classificatie van homeomorfismen van de cirkel, en verbanden met  $C^*$ -algebras. Het laatste van deze tien hoofdstukken is gewijd aan verbanden met control theory, en geschreven door B. Piccoli. Tot slot is er een appendix van ongeveer 30 bladzijden waarin de belangrijkste begrippen en stellingen uit de theorie van Riemann oppervlakken worden samengevat.

Uw recensent heeft weinig plezier aan dit boek beleefd. Het Engels is matig (en dat van Piccoli's hoofdstuk rondt slecht), en er zijn veel drukfouten. Reeds de eerste definities uit dit boek zijn slecht geformuleerd en uitsluitend met veel inspanning en goede wil te begrijpen. (Om een indruk te krijgen van waar ik op doel vergelijk men de definitie van een  $r$  keer differentieerbaar lijnenveld op pagina 5 met de veel zorgvuldiger definitie op pagina 18 van Springer Lecture Notes 468.) Sommige van de hoofdstukken over verbanden met andere gebieden zijn beter geschreven, maar zijn vaak zeer oppervlakkig. Zo gaat een groot deel van het hoofdstuk over  $C^*$ -algebras over de inmiddels voldoende in de literatuur uitgekauwde  $C^*$ -algebra geassocieerd met de Kronecker foliatie van de torus, en wordt het 'Baum-Connes vermoeden' slechts aangestipt. De appendix over Riemann oppervlakken is beter geschreven, maar hier gaat het om een samenvatting van een klasieke en veel geëxposeerde theorie. Al met al past dit boek niet bij het prestige van de *Ergebnisse*-serie van de uitgever. I. Moerdijk

ruimte  $X$  voortbrengt, en  $f$  een Lipschitz continue afbeelding van  $X^\alpha = D((-A)^\alpha)$  in  $X$  is voor zekere  $\alpha \in [0, 1)$ .

Deze theorie is geïnspireerd door het speciale geval waarin  $A$  de Laplacian op een begrensde gebied  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  met gladde rand is, en waar  $f$  van  $u$  en  $\nabla u$  afhangt, dat wil zeggen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x, u, \nabla u).$$

De algemenere opzet laat natuurlijk veel meer vergelijkingen toe, waaronder de Navier-Stokes vergelijkingen,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \nabla_u(u) + \nabla p, \quad \nabla \cdot u = 0,$$

en de hogere orde Cahn-Hilliard vergelijkingen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta(\Delta u - f(u)).$$

Deze aanpak van semilineaire parabolische vergelijkingen is al minstens 20 à 30 jaar oud en werd eerder door Dan Henry (*Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer, 1981) op voortreffelijke wijze samengevat. Veel van de theorie in het hier besproken boek kan dan ook al bij Henry gevonden worden.

Cholewa en Dlotko beginnen hun boek met een samenvatting van de nodige feiten betreffende Sobolevruimtes, elliptische operatoren en de analytische halfgroepen die ze voortbrengen, en de zogenaamde 'fractional power spaces.' Vervolgens wordt lokale existentie en eenduidigheid van oplossingen van  $u_t + Au = f(u)$  voor een algemene klasse van niet-lineairiteiten  $f: X^\alpha \rightarrow X$  door middel van de variatie van constante formule vastgelegd. Wie lokale oplossingen heeft wil natuurlijk ook weten of er globale oplossingen bij zitten. Hiertoe voeren de auteurs 'de conditie  $(A_2)$ ' in. Deze redelijk eenvoudige conditie blijkt voldoende, en met wat extra aannamen zelfs ook noodzakelijk te zijn voor globale existentie van oplossingen. Dezelfde conditie  $(A_2)$  is ook voldoende om een globale attractor te construeren.

De abstracte theorie van de eerste vier hoofdstukken wordt in het vijfde hoofdstuk op algemene parabolische differentiaalvergelijkingen (dit in tegenstelling tot abstracte, in een Banachruimte geformuleerde beginwaarde problemen) toegepast. Concrete voorbeelden, waaronder de Navier-Stokes vergelijkingen in  $\mathbf{R}^2$  worden in hoofdstuk 6 behandeld.

In hoofdstukken 7 en 8 hebben Cholewa en Dlotko diverse ongerelateerde resultaten samengevoegd. Achtereenvolgens komen hier 'backward uniqueness', 'hogere regulariteit', 'niet-Lipschitz continue nietlineairiteiten  $f$ ', 'lokale stabiliteit van kleine oplossingen van de  $n$ -dimensionale Navier-Stokes vergelijkingen,' en 'oplossingen in ruimtes van Hölder continue functies' aan de orde. Vreemd genoeg zijn er ook nog een paar pagina's over monotone operatoren en ontaarde parabolische vergelijkingen (in het bijzonder de  $p$ -Laplacian).

Het ligt voor de hand dit boek met het boek van Dan Henry te vergelijken. Bij zo'n vergelijking valt meteen op dat Cholewa en Dlotko vrijwel alle kwalitatieve (meetkundige of topologische) theorie vermijden. Geen van de in dit boek geconstrueerde attractors wordt in detail beschouwd zoals Henry dat in zijn boek deed. Men krijgt onterecht de indruk dat er sinds 1980 geen vooruitgang in deze richting is geboekt.

Het boek lijkt me desondanks een goede inleiding in de theorie van door parabolische vergelijkingen gedefinieerde dynamische systemen.

S. Angenent



J. W. Cholewa, T. Dlotko  
**Global attractors in abstract parabolic problems**

(London Mathematical Society Lecture Notes Series 278)

Cambridge: Cambridge University Press, 2000

250 p., prijs £30,-

ISBN 0-521-79424-2

In dit boek wordt het begin/randwaardeprobleem voor vergelijkingen van de vorm

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(u) + f(u)$$

beschouwd, waar  $A$  een analytische halfgroep op een Banach-



C.M. Dafermos  
**Hyperbolic conservation laws in continuum physics**

(*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 325)

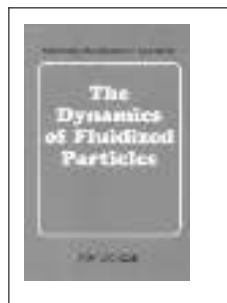
Berlijn: Springer-Verlag, 2000

443 p., prijs €99,95

ISBN 3-540-64914-X

This extensive monograph gives a comprehensive treatment of continuum physics and of the theory of hyperbolic conservation laws. An intimate connection between these two subjects distinguishes the book from others. After each chapter there are notes, including historical comments. The book is divided into fifteen chapters. Chapters 1–5 are devoted to conceptual foundations of the theory of hyperbolic conservation laws in relation to continuum physics. In Chapter 6, *The  $L^1$  theory of the scalar conservation law*, the author first establishes exactly the maximal interval of the existence of a classical solution, then he investigates admissible weak solutions and their stability properties. The method of vanishing viscosity is effectively used to obtain admissible weak solutions. Next, solutions are considered as trajectories of a suitable contraction semigroup and the layering method is presented. Finally, a kinetic approach and the method of relaxation to obtain a weak solution are treated. Beginning with Chapter 7, *Hyperbolic systems of balance laws in one-dimension*, the rest of the book is devoted to one-dimensional theory. In this chapter, such important notions and themes are introduced as hyperbolicity, strict hyperbolicity, Riemann invariants, simple waves, breakdown of classical solutions and others as well. Chapter 8, *Admissible shocks*, offers notions and properties of strong and weak shocks. Then the concept of the Hugoniot locus is discussed. Various shock criterions are examined. Chapter 9, *Admissible wave fans and the Riemann problem*, covers self-similar solutions to the Riemann problem. Interaction of wave fans is also considered. The brief Chapter 10, *Generalized characteristics* (a concept introduced into the literature by the author), treats various properties of generalized characteristics. In Chapter 11, *Genuinely nonlinear scalar conservation laws*, the generalized characteristics are used to obtain precise information on regularity and large time behavior of solutions. In Chapter 12, *Genuinely nonlinear systems of two conservation laws*, using generalized characteristics and entropy estimates, the author obtains results similar to the ones in the preceding chapter. Chapter 13, *The random choice method*, is devoted to the celebrated method of Glimm. The construction of the scheme, wave interactions, approximate conservation laws, approximate characteristics, the Glimm functional and other themes are investigated in detail. Another constructive method to solve both scalar and system of conservation laws is a subject of Chapter 14 entitled *The front tracking method and standard Riemann semigroups*. Also the structural stability of the wave pattern under perturbations of the initial data is discussed here. The last chapter, *Compensated compactness*, deals with the problem whether solutions may be obtained as limits of sequences of approximate solutions. The author introduces the concept of the Young measure, a very effective tool to describe the behavior of weakly convergent sequences under superpositions of nonlinearities. It is a pity that the huge bibliography does not list the book of M. Feistauer, *Mathematical methods in fluid dy-*

*namics* (Longman, 1993), where the theory of measure-valued solutions to conservation laws is briefly, but very clearly presented. There is no numerics in the monograph under review, however the author quotes many books devoted to this aspect of the theory of hyperbolic conservation laws. I am sure that the monograph of Professor Dafermos will play a fundamental role during many years for all interested in hyperbolic conservation laws. S. Burys



R. Jackson

**The dynamics of fluidized particles**

Cambridge: Cambridge University Press, 2000

368 p., prijs £55,-

ISBN 0-521-78122-1

This book addresses the motion of systems of solid particles immersed in a fluid that may be a liquid or a gas. The motion of the fluidized suspensions are described by differential equations of motion at the level of locally averaged and their associated boundary value problems. For these two-phase systems this is the closest analogue of the familiar methods of single-phase fluid mechanics. The formalism of local spatial averaging is developed and it is used to derive averaged forms of the point equations of motion for the fluid and the particles. The averaging procedure introduces terms that are not related explicitly to the locally averaged velocities and the particle concentration. Hence the averaged equations are not closed in terms of these variables. The book addresses the formal derivations of closures for these undetermined terms. The formally derivable closures are only applicable in certain limiting cases and therefore it may be necessary to use alternative, empirical, reasonable closure relations. These topics are discussed very clearly in Chapter 2.

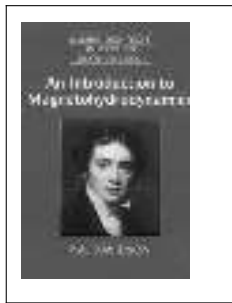
The basic problem in the field of fluidization is the description of the process of fluidizing and defluidizing a bed of particles by alternately increasing and decreasing an upward flow of fluid and is addressed in Chapter 3. The stability of a uniform fluidized bed against small perturbations is discussed in Chapter 4 using small-amplitude perturbation theory. Chapter 5 deals with the propagation of fully developed large-amplitude structures in fluidized beds. In dense beds these take the form of bubbles and in less dense beds they take the form of streamers. Insight is obtained into the nature of the distinction between bubbling and non-bubbling behaviour.

In Chapters 6 and 7 the behaviour of practical devices in which fluids and particles flow together through ducts is described. In Chapter 6 the duct is a vertical pipe, or riser, and the direction of flow is upward. The objective is to describe the velocity and concentration fields and hence to relate the flow rates of the two phases and the pressure gradient in the fluid. One of the challenges of the theory is to predict quantitatively the observed high particle concentration in a layer adjacent to the wall of the pipe. This kind of flow problem occurs for example in fluidized bed systems for catalytic cracking of heavier hydrocarbon stocks to yield gasoline. In Chapter 7 the flow of fluid and particles in the other half of the circulating fluidized bed loop, namely the standpipe that returns

the particles from the top of the riser, is discussed. An analysis is carried out that proves to be capable of giving a lot of insight in the flow behaviour of the system.

The book is a good introduction to the field of the flow of fluid-particle mixtures but, by drawing together widely scattered material, it also serves as a useful overview for experienced workers. The basic equations to describe the dynamics of fluidized particles are carefully formulated in the book. The fully described examples given in the book illustrate clearly the usefulness of the developed mathematical models. The book will be of much value for both novices and established researchers in the field of the flow of fluid-particle mixtures.

W. Potze



P.A. Davidson

**An introduction to magnetohydrodynamics**

(Cambridge texts in applied mathematics)

Cambridge: Cambridge University Press, 2001

431 p., prijs £28,-

ISBN 0-521-79487-0

Magnetohydrodynamica (MHD) is de studie van de wederzijdse interactie van stromingen van fluïda (vloeistoffen en gassen) en magnetische velden. Hierbij kan men denken aan de ingewikkelde plasmastromingen in de zon, maar ook aan stromingen van het geleidend materiaal in het inwendige van de aarde. Naast de astro- en geofysische toepassingen in de natuur, worden kunstmatig opgewekte magnetische velden onder andere toegepast in de moderne metallurgie en, minder succesvol, in de aandrijving van schepen en in de wapenindustrie. Het boek begint met een uitgebreide introductie, waarin elektrodynamica centraal staat. De vergelijkingen van Maxwell worden hierbij vereenvoudigd tot een vorm zoals die in MHD gebruikt wordt. Vervolgens komen de incompressibele Navier-Stokesvergelijkingen uit de vloeistofmechanica aan bod en worden de MHD vergelijkingen afgeleid. Aan de hand van de verhouding tussen convectie en diffusie van het magnetische veld, weergegeven in het magnetische Reynolds getal, worden MHD stromingen onderverdeeld in stromingen met een laag magnetisch Reynolds getal en stromingen met een hoog magnetisch Reynolds getal. De verschillende effecten die daarbij een belangrijke rol spelen worden vervolgens aan de hand van voorbeelden vrij uitgebreid behandeld. Bij de voorbeelden moet men denken aan de dynamo-werking van de aarde en de zon, turbulente MHD stromingen enzovoort. Na het algemene gedeelte behandelt het boek in de laatste hoofdstukken toepassingen van MHD in de metallurgie. Hierbij verliest het boek zijn inleidend karakter en evolueert tot een up-to-date naslagwerk voor de nieuwste wetenschappelijke ontwikkelingen op het specialisatiegebied van de auteur. De schrijfstijl in deze laatste hoofdstukken past overigens goed bij de rest van het boek. Er wordt een interessant beeld gegeven van de problemen en oplossingen wat betreft MHD-toepassingen zoals deze in de moderne metaalindustrie gangbaar zijn. De behandelde stof is interessant voor natuurkundigen, toegepast wiskundigen en ingenieurs. Een bepaalde kennis van de wiskunde is zeker nodig om de stof te kunnen begrijpen. Hierbij moet men denken aan onder andere reeksontwik-

kelingen, lineaire differentiaalvergelijkingen en asymptotiek. Wat betreft elektrodynamica, vloeistofdynamica en MHD bevat het boek referenties voor verdere studie. De nadruk op incompressibele stromingen is voor een introductie zeker niet storend. De opbouw van het boek maakt het boek redelijk prettig leesbaar. Veel begrippen worden door zinnige illustraties verduidelijkt. Aan het eind van ieder hoofdstuk is onder het kopje 'examples' een serie vragen over de stof toegevoegd. Tevens is er een appendix waarin diverse onderwerpen als vectoridentiteiten en theorema's, stabiliteitscriteria, fysische eigenschappen van vloeibare metalen en een speciale vorm van MHD turbulentie behandeld worden. Het is geen boek dat men in een adem uitleest, maar voor mensen die geïnteresseerd zijn in onderwerpen als vloeistofdynamica en metallurgie of meer willen weten over theorieën betreffende het magnetische veld van de aarde of de zon is het zeker een aanrader.

J. Wissink



S.G. Krantz, H.R. Parks

**The implicit function theorem: history, theory and applications**

Boston: Birkhäuser, 2002

163 p., prijs €78,-

ISBN 0-8176-4285-4

In veel onderdelen van de analyse en de meetkunde zijn de impliciete functie stelling en de nauw daarmee verwante inverse functie stelling van wezenlijk belang. Dit boek is helemaal gewijd aan deze stellingen. Achtereenvolgens bespreken de auteurs de geschiedenis, een aantal bewijzen die in de loop der tijd bedacht zijn, generalisaties en ook nog een aantal toepassingen van deze stellingen. De geschiedenis is snel verteld. Er zijn reeds wat primitieve versies bij Newton en bij Leibniz te vinden, maar de formulering die wij nu gebruiken is afkomstig van Cauchy. Bij Cauchy zijn het stellingen over functies die door machtreksen worden voorgesteld.

Vervolgens wordt aandacht besteed aan een aantal van de vele in omloop zijnde bewijzen. De auteurs hebben originele bronnen geraadpleegd. Zij zijn erin geslaagd een duidelijk beeld te schep- pen van de ontwikkeling van deze materie. Omdat er bewijzen zijn die op belangrijke punten verschillen, zijn er ook uiteenlopende generalisaties. Aan een aantal van die generalisaties wordt ruime aandacht geschonken.

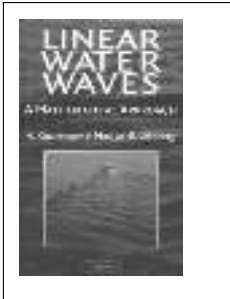
Enkele van de besproken toepassingen liggen op het gebied van het oplossen van (differentiaal)vergelijkingen en op het bestuderen van gladde oppervlakken in een Euclidische ruimte. In het laatste hoofdstuk 'Advanced Implicit Function Theorems' komen de globale inversie stelling van Hadamard voor propere afbeeldingen en de impliciete functie stelling van Nash en Moser, compleet met bewijs, aan bod. Aan toepassingen van de stelling van Nash en Moser komen de schrijvers niet toe.

In het voorwoord wordt opgemerkt dat ook lezers die nog nooit kennis met dit onderwerp hebben gemaakt, dit boek kunnen lezen. Hoofdstukken 1, 2 en 3 zijn inderdaad zonder voorkennis te lezen. Bij de hoofdstukken 4 en 5 is enige voorkennis wel prettig, en in het laatste hoofdstuk ligt het tempo zo hoog dat

vertrouwdheid met de stof onmisbaar lijkt om het betoog te kunnen volgen.

*The Implicit Function Theorem* is een goed geschreven en prettig leesbaar boek. Er is zorg besteed aan de tekst en aan de afwerking. Net als de twee eerdere boeken van Krantz en Parks (*A Primer of Real Analytic Functions*, en *The Geometry of Domains in Space*, eveneens uitgegeven door Birkhäuser) bevat *The Implicit Function Theorem* veel materiaal waar iedere analyticus mee vertrouwd zou moeten zijn.

R. Kortram



N. Kuznetsov, V. Maz'ya, B. Vainberg  
**Linear water waves: a mathematical approach**

Cambridge: Cambridge University Press, 2002  
513 p., prijs £75,-  
ISBN 0-521-80853-7

This book is about the dynamics of water waves, generated by ships and underwater earthquakes. Studies on this topic are important: results find their application in ocean engineering (ship design, etc.) and geophysical fluid dynamics (e.g., prediction of tsunamis).

There are two remarkable facts about this book. Firstly, it focuses on the *linear* theory of water waves, whereas nowadays most research in this field is on nonlinear aspects. Secondly, the authors use a strongly mathematical approach: they discuss solvability and uniqueness of solutions for three specific problems. In Part 1 of the book (Chapters 1–5) time-harmonic waves, generated by oscillating bodies, are considered. In Part 2 (Chapters 6–8) ship waves are discussed and in Part 3 (Chapters 9–10) unsteady waves, generated by sudden disturbances, are studied. These chapters are preceded by a pre-introductory section, in which the basic equations of motion and boundary conditions for water waves are presented.

The methods used in the book involve the construction of Green's functions, which give keys for proving the solvability condition of the water wave problem by reducing it to an integral equation. Uniqueness proofs are based on auxiliary integral identities involving the velocity potential and its derivatives. Different cases are considered: submerged bodies, partially submerged bodies with or without isolated parts of the free surface. Also the dynamics of trapped modes is discussed.

The material presented in the book is valuable for experts: the authors give a broad and coherent overview of the major achievements in this field over the last decades, to which they substantially contributed. Besides, some new results are presented. At the end of each chapter extensive bibliographic notes are given. All chapters and most sections start with a clear introduction about the topic that is to be discussed and highlights are denoted by slanted text. A disadvantage is that some figures are difficult to understand, because there are no captions and also because not much explanation about them is given in the text.

Furthermore, the text lacks physical interpretation of the assumptions and results. For example, I could not find an explicit link in the book between the theory presented and the beautiful

photograph of ship waves at the front cover. Also, the introductory section contains a number of imperfections: it is not clearly stated that the density can be at most a function of pressure in order to apply irrotational theory, a clear interpretation of the kinematic and dynamic boundary conditions is missing and the analysis of the energy equation needs at least further explanation. Also, symbols are not always properly defined, e.g., what the difference is between the domains  $W$  and  $\bar{W}$  or what the meaning is of some of the brackets on page 22, is not clear to me.

Summarizing: the book is important for experts, but readers interested in more background information should consult other textbooks, for example, G.D. Crapper, *An introduction to water waves* (Ellis Horwood, 1984) or C.C. Mei, *The applied dynamics of ocean surface waves* (World Scientific, 1989).

H. de Swart



A.S. Matveev, A.V. Savkin  
**Qualitative theory of hybrid dynamical systems**

(Control Engineering)  
Berlin: Birkhäuser, 2000  
348 p., prijs €121,98  
ISBN 0-8176-4141-6

The book is a research monograph on dynamical system properties for a rather specific class of hybrid systems. Both authors are mathematicians from the Russian school of dynamic systems and optimal control. The book is addressed to graduate students and to researchers. An introductory text book on hybrid systems is A.J. van der Schaft and J.M. Schumacher, *An introduction to hybrid dynamical systems* (Springer, 1999), while recent results on the topic may be found in a workshop series on hybrid systems, see Rajeev Alur, George J. Pappas (editors), *Hybrid Systems: Computation and Control* (Springer, 2004) for the 2004 proceedings.

The topic of analysis and control of hybrid systems is investigated in the research area *control and system theory*. A hybrid system is, for example, a model for the operation of an engineering system which is controlled by a computer. A *hybrid system* is formally defined as a dynamic system with both a continuous and a discrete dynamics. The *state set* is the Cartesian product of a finite set and a family of continuous state spaces of possibly different dimensions.

Problems considered for hybrid systems concern dynamical system properties and the synthesis of control laws. Analytic problems lead to the concept of a *Filippov solution* formulated by the Russian mathematician A.F. Filippov. The *Zeno effect* of having an infinite number of mode transitions on a finite interval may occur. Control problems require the synthesis of a control law such that the closed-loop system, consisting of the control system in a loop with a control law, achieves prespecified control objectives.

Chapter 1 introduces the two main examples of the book: the switched arrival system and the switched server system. These examples are models for communication networks where the buffers refer to routes from origins to destinations or to computer servers available for job processing. Chapter 2 establishes a sufficient condition for global periodicity for cyclic linear differential automata. Chapter 3 is devoted to a decomposition in-

to a finite set of systems with simple cyclic symbolic dynamics and limit cycles. Chapter 4 presents the theorem that a trajectory in a bounded invariant planar domain is either periodic or converges to one of a countable number of limit cycles, an extension of the classical Poincaré-Bendixson theorem. Chapters 5 and 6 present corresponding results for different classes of hybrid systems. The Chapters 7 and 8 present results for switched server systems while Chapter 9 states open problems.

The strength of the book is in the theorems for the stability theory of dynamical hybrid systems. The topic of analysis and control synthesis of hybrid systems is widely expected to remain active for the next decades in control and system theory, in engineering, and in computer science.

*J.H. van Schuppen*



H.L. Trentelman, A.A. Stoorvogel, M. Hautus

**Control theory for linear systems**

(Communications and Control Engineering)

London: Springer-Verlag, 2001

389 p., prijs €112,30

ISBN 1-85233-316-2

Vanaf 1987 heeft eerst het AIO-netwerk Systems and Control, en later de onderzoeksschool DISC landelijke cursussen voor de AIO's in Nederland op het gebied van systeem en regeltheorie georganiseerd. Vanaf het begin hebben Trentelman en Hautus een cursus verzorgd over lineaire systemen. Een van de eerste cursisten was Anton Stoorvogel, die later zelf een aantal malen de cursus mede verzorgd heeft. Zoals met veel van de cursussen is gebeurd, is ook van deze cursus na verloop van jaren het materiaal in boekvorm verschenen.

Hautus is een van de pioniers van systeemtheorie in Nederland, hij heeft vanaf het eind van de jaren zestig met name over de zogenaamde geometrische benadering gepubliceerd. Trentelman is in de geometrische theorie groot geworden en heeft vooral in de jaren tachtig en begin jaren negentig daarover gepubliceerd. Stoorvogel is een promovendus van beide andere auteurs, en heeft natuurlijk de geometrische theorie van twee experts geleerd, maar heeft zich daarna vooral in de  $H$ -oneindig theorie gespecialiseerd, een populair onderwerp in de jaren negentig waarover ook beide andere auteurs uitvoerig gepubliceerd hebben.

Het boek begint met een uitleg van de geometrische benadering en behandelt een aantal standaard regelproblemen als storingsontkoppeling, stabilisering en poolplaatsing vanuit dat perspectief. Vervolgens passeren het klassieke  $LQ$  probleem en het  $H_2$  optimale regelprobleem de revue. Deze problemen worden opgelost met behulp van de in de eerste hoofdstukken ontwikkelde methoden. De laatste hoofdstukken zijn gewijd aan het modernere  $H$  oneindig regelprobleem en zijn varianten.

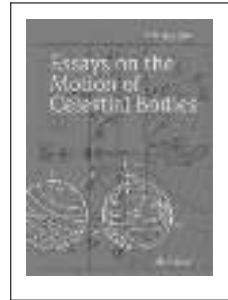
Op het eerste gezicht lijkt het boek weinig voorkennis te vereisen. De benodigde lineaire algebra wordt in een apart hoofdstuk behandeld, net als stabiliteit van oplossingen van differentiaalvergelijkingen. Enige distributietheorie is in een appendix opgenomen.

Toch is voor het doorgronden van de methoden bijvoorbeeld een goed inzicht in de eigenschappen van lineaire ruimtes ver-

eist, daarvoor is meer nodig dan een opsomming van de benodigde eigenschappen. Maar voor een lezer met enige wiskundige opleiding is dit boek een uitstekende inleiding in de regeltheorie voor eindigdimensionale lineaire systemen. Het is geschreven in een heldere en correcte stijl. Aan de wiskundige correctheid zijn nergens concessies gedaan, terwijl de leesbaarheid daaronder niet te lijden heeft.

Het boek bevat een groot aantal oefenopgaven. Gelukkig hebben de auteurs geen oplossingen opgenomen in het boek. Daardoor verliezen de opgaven hun nut niet.

*K. Praagman*



V.V. Beletsky

**Essays on the motion of celestial bodies**

Boston: Birkhäuser, 2001

372 p., prijs €167,-

ISBN 3-7643-6480-4

Mechanics has a great tradition in Russia, where the interest in celestial mechanics gets a formidable stimulus from the space flight program. This also holds for mechanics in general and for certain parts of engineering and mathematics. The book first appeared in 1973 and was reviewed enthusiastically by, among others, Arnold and Zeldovich.

The contents are formed by twelve essays about various subjects in the area. Let me describe a number of these, without attempting to be complete. The first essay is somewhat theoretical, dealing with perturbations of Keplerian motions. (Such perturbations already gave Newton headaches, cf. R.S. Westfall's biography of Newton, Cambr. Univ. Press 1980). References to some classical (Russian) textbooks on mechanics and averaging are included, among which the Russian original of V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (GTM 60 Springer-Verlag, 1978).

Essay number four, *Motion of the worlds*, concerns the fate (stability) of the solar system. Regarding 'stability forever' the Kolmogorov-Arnold-Moser theory is treated next, which no doubt forms the greatest contribution to classical mechanics of the 20th century. In additional comments the name of Moser is introduced and also a recent reference to Arnold diffusion. For background information compare with Arnold's book.

The sixth essay, *They are waltzing in orbits*, forms a long chapter of 60 pages. It deals with many subjects, among which the 1 : 1 resonance in the Earth-Moon motion and the 2:3 resonance in the motion of Mercury, with due reference to Schiaparelli and Cassini. Tidal effects are introduced to explain the capture of the motions in resonance.

Essay number eight, entitled *The full force of the Sun blows in the sails*, deals with the possible use of the Solar radiation pressure for manoeuvring in space. This essay is a scientific commentary on A.C. Clarke, *The Wind from the Sun; stories of the space age* (1972).

I am very enthusiastic about this book, which is written in a grand narrative (non-Bourbaki) style that reminds one of Minnaert's *De Natuurkunde van 't Vrije Veld*. With a minimum of mathematical background, a great number of interesting phenomena

are explained. This background involves series, asymptotics and (numerical) computations. (Some familiarity with classical mechanics is also recommended.)

The text is somewhat outdated, since it was not essentially revised since the first edition of 1973, which solely aimed at a Russian readership. Given the circumstances, this also accounts for the merely Russian bibliography. On the one hand this is not too bad, since the subject matter itself is almost timeless. On the other hand, however, the present excellent English translation (by Andrei Iacob) aims at a wider readership. It would have been wise to thoroughly revise the bibliography, including the great many western contributions to this area. Nevertheless, I think that many master and graduate students should be able to find their way in the book and the surrounding literature. Recommended!

H. Broer

implementation, and the typical optimality-robustness trade-off is again demonstrated by various examples. Proofs and mathematical background subjects are collected in appendices.

With this book the authors succeed in covering the rather wide range from abstract functional analytic optimization theory to a practical analysis of the example results, providing the reader with important insights and tools to develop tailored filtering algorithms. From a mathematician's point-of-view, the text compromises on refraining from a succinct rigorous integration of continuous and discrete time which creates some redundancy, whereas mathematically not well-trained engineers might easily get lost in the somewhat uninspiring collection of theoretical background material. Still, the authors nicely live up to their intention to inform mathematicians about a modern field of advanced applications and to equip engineers with the necessary mathematical techniques to master optimization based filter synthesis.

C. Scherer



Ba-Ngu Vo, A. Cantoni, K. Lay Teo  
**Filter design with time-domain mask constraints: theory and applications**

(Applied optimization 56)

Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001

329 p., prijs €163,-

ISBN 0-7923-7138-0

In classical filter design the desired characteristics are usually formulated in the frequency domain by imposing magnitude and phase behavior over various frequency bands that should be matched as closely as possible by the transfer function of the to-be-constructed filter. However, in various modern applications such as communication systems, in addition to maximal noise suppression the filter response to some input signal has to obey rather stringent constraints in the time-domain, often expressed through upper and lower envelope signals.

In Chapter 1 of the book under review the authors describe in quite some detail various concrete problems (pulse compression, waveform or channel equalization and deconvolution) in which the relevance of such time-domain mask constraints come forward, and they argue why standard least-squares techniques to match a prescribed output signal in the energy norm might fail to achieve hard time-domain specifications. In Chapter 2, the diversity of concrete optimal filter design problems with envelope constraints for continuous-time, discrete-time and hybrid filters are beneficially embedded into suitable infinite-dimensional convex optimization problems. Chapter 3 serves to highlight the advantage of dualization for removing constraints, to point out the benefit of reduction to finite-dimensional subspaces, and to analyze the particularities of the involved semi-infinite constraints. Active-set or descent-type algorithms for discrete-time filter synthesis are devised in Chapter 4, with a particular emphasis on the role of penalty functions and their performance on illustrative examples. In Chapter 5, these are extended to continuous-time and hybrid filter design algorithms by suitable discretization techniques with a priori estimation of the required coarseness to achieve a desired approximation accuracy. In Chapter 6 it is investigated how to employ these techniques to determine filters that need to be robust against variations in the input signal or in their

Han-Lin Chen

**Complex harmonic splines, periodic quasi-wavelets**  
**Theory and applications**

Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000

240 p., prijs €99,51

ISBN 0-7923-6137-7

Een eerste kennismaking met splines zal zich bij menigeen hebben voorgedaan in een context van numerieke interpolatie en approximatie of computer graphics. De splines bestonden dan uit aan elkaar geknoopte derdegraads polynomen of rationale functies. Bij splines denken we al lang niet meer uitsluitend aan algebraïsche polynomen of breuken daarvan. Er kunnen verschillende functies aan elkaar geknoopt worden. Zo hebben de periodieke splines met stuksgewijs trigonometrische polynomen nagenoeg dezelfde eigenschappen als de klassieke polynomiale splines. Wanneer deze trigonometrische splines worden gezien als polynomiale splines op de eenheidscirkel in het complexe vlak dan gaat er weer een wereld open met nieuwe complexe B-splines, complexe wavelets en vooral nieuwe toepassingen. Dit boek gaat hierover.

De auteur van dit boek, Han-lin Chen, heeft een leidende rol in de ontwikkeling van splines en wavelets in China gespeeld. Het voorwoord, geschreven door twee experts van wereldfaam, Charles Michelli en Yuesheng Xu, maakt dit onomstotelijk duidelijk en ook bij het lezen van dit boek geeft Han-lin Chen mij blijk van zijn gedegen ervaring in het veld. Wel zijn de formuleringen soms te bondig en enigszins cryptisch en missen de wiskundige begrippen een zorgvuldige introductie. Voor een goede verstaander is het geen probleem, echter als studiemateriaal voor studenten die het zelfstandig willen bestuderen, is het daardoor minder geschikt.

Het boek kent vier hoofdstukken. Het eerste hoofdstuk introduceert de complexe polynomiale splines (CSF) gedefinieerd op de eenheidscirkel. Net als bij de reële polynomiale splines worden de bijbehorende complexe B-splines ingevoerd en allerlei interpolatie-eigenschappen afgeleid met schattingen voor de approximatiefout. Ook de methode van quasi interpolatie op equidistante knooppunten (nu de complexe eenheidswortels) kent een volledig complex analogon. De complexe harmonic spline (CHSF)

wordt vervolgens ingevoerd als een complexe harmonische functie, waarvan de restrictie op de eenheidscirkel overeenkomt met een CSF. De CHSF wordt gedefinieerd door middel van een integraal over de eenheidscirkel zoals we die tegenkomen bij het oplossen van een Dirichlet probleem op de eenheidsschijf. Het eerste hoofdstuk behandelt verder, naast een imposant aantal analytische en geometrische eigenschappen van een CHFS, een interessante toepassing van CHFS bij het approximeren van conforme afbeeldingen.

Hoofdstuk 2 is het startpunt voor de behandeling van verschillende typen orthogonale periodieke quasi wavelets op de eenheidscirkel. De theorie volgt de lijnen van het construeren van wavelets uit B-splines, zoals we die kennen uit de boeken van Charles Chui. Zoals gebruikelijk is de multiresolutie analyse het bepalend kader bij het maken van wavelets. Decompositieformules en reconstructieformules met, wat voor de praktijk belangrijk is, een gering aantal filtercoëfficiënten worden gepresenteerd.

De periodieke quasi wavelets worden in hoofdstuk 3 gebruikt om randwaardenproblemen voor de twee dimensionale Helmholtz vergelijking op te lossen. Op de gebruikelijke wijze zet Hanlin Chen de vergelijking eerst om naar een Fredholm integraalvergelijking met een zwak singuliere kern. Door projectie op eindigdimensionale waveletruimten ontstaat er dan een lineair stelsel van zeg  $n \times n$  vergelijkingen. Voor het numeriek oplossen hiervan wordt, onder bepaalde voorwaarden, een efficiënt algoritme ontworpen met complexiteit  $O(n)$  in plaats van  $O(n^2)$ .

Het laatste hoofdstuk, hoofdstuk 4, geeft een uitgebreide behandeling van de theorie van de periodieke cardinale wavelets. Deze wavelets, die met analytische formules expliciet kunnen worden weergegeven, bezitten een groot aantal fraaie eigenschappen met betrekking tot interpolatie, symmetrie, regulariteit enzovoort. Dit zie je ook aan de hoge 'formuledichtheid' van dit hoofdstuk. Alleen motiverende opmerkingen en interessante toepassingen ontbreken nog in dit hoofdstuk.

Door de keuze van het onderwerp en een samenhangende behandeling van theorie en praktijk, neemt dit boek in de uitgebreide serie van boeken over splines en wavelets een aparte plaats in. Ik kan het dan ook iedere spline- en/of waveletexpert van harte aanbevelen.

H. ter Morsche

V.P. Tuzlukov

### Signal detection theory

Basel: Birkhäuser, 2001

725 p., prijs €136,96

ISBN 0-8176-4152-1

In de introductie weet de auteur zijn boek op een uitstekende wijze te karakteriseren: "This book is devoted to a new approach to signal detection theory that allows us to establish an absolutely new viewpoint on signal detection and noise immunity. This work summarizes the investigations carried out by the author over the last 20 years". Ik wist in eerste instantie niet dat ik de tweede zin letterlijk moest nemen.

Als doelgroep is gekozen voor onderzoekers met ervaring op het vakgebied. Als eerste leerboek is dit boek ongeschikt. Een introductie van basale concepten zoals het sampling theorema, thresholding, cost-functions, false alarm probability en signal-to-noise ratio zoekt men hier tevergeefs.

Het boek geeft een overzicht over methoden in de signaaldetectietheorie. De voortschrijdende digitalisering van het vakgebied komt onvoldoende aan bod. De auteur beperkt zich hoofdzakelijk tot tijdcontinue signalen; hierdoor mist het boek de aansluiting met de digitale signaalbewerking. Er worden nauwelijks concrete toepassingen in het boek uitgewerkt, terwijl militaire toepassingen en toepassingen uit de wereld van de communicatie ruimschoots beschikbaar zijn. Een prominente plaats is ingeruimd voor de door de auteur gepropageerde 'generalized approach to signal detection'. De auteur maakt de noodzaak van deze benadering onvoldoende duidelijk.

In vrijwel ieder hoofdstuk valt de auteur met de deur in huis. De eerste stukken theorie komen als het ware uit de lucht vallen. Vaak wordt dit ondersteund met een 'zoek maar uit' literatuurverwijzing zoals bijvoorbeeld [6-37,39-54]. Door de magere index, vijf pagina's, in relatie tot de omvang van het boek is het vrijwel onmogelijk iets in het boek terug te vinden. Zonder voldoende achtergrondkennis zijn de redeneringen en afleidingen nauwelijks te volgen. Zeker voor lezers met een niet-wiskundige achtergrond is het werk moeilijk toegankelijk. Tot mijn genoegen is aan ieder hoofdstuk een uitgebreide literatuurverwijzing toegevoegd, echter de auteur had het aantal referenties naar zichzelf mogen beperken. Buiten deze referenties wordt hoofdzakelijk naar oudere literatuur verwezen.

R. Moddemeijer



M. Demuth, J.A. van Casteren

### Stochastic spectral theory for selfadjoint Feller operators

#### A functional integration approach

(Probability and its Applications)

Basel: Birkhäuser, 2000

463 p., prijs €128,00

ISBN 3-7643-5887-4

The monograph under review is concerned with the spectral theory of selfadjoint Feller operators. The main theme is an interplay between probability theory and stochastic processes on the one hand and operator and spectral theory on the other. The main objective is to investigate spectral properties of Feller generators by means of tools from stochastic analysis. In particular, one of the aims is to compare the spectral properties of two Feller operators based on properties of the differences of the corresponding resolvents or semigroups.

The theory starts with the basic assumptions for the unperturbed Feller operator as the generator of the Feller semigroup  $\{\exp(-tK_0) : t \geq 0\}$  of integral operators acting on the space of continuous complex functions  $C_\infty(E)$  on  $E$  vanishing at infinity, where  $E$  is a second countable locally compact Hausdorff space equipped with a non-negative Radon measure. The assumptions on the integral kernels  $p_0(t, x, y)$  are rather weak, so a wide class of unperturbed Feller operators lies within the scope of the theory.

As the main tool for studying perturbations of Feller operators the authors use the Feynman-Kac formula which serves as an interface between operator theory and stochastic analysis. The book contains a careful justification of the Feynman-Kac formula for the so-called Kato-Feller potentials. By means of the Feynman-Kac formula the authors compare the spectral properties of two Feller

operators via the difference of the generated semigroups and the difference of the corresponding resolvents. The book consists of eight chapters, five appendices and the list of references. For the convenience of the reader it is supplied with an index of symbols and a subject index. Below we summarize the contents of the book.

In Chapter 1 the authors formulate the assumptions on the free Feller operator, the so-called Basic Assumptions of Stochastic Spectral Analysis (BASSA). The authors give a substantial number of examples of operators satisfying (BASSA). Next, the authors provide heat kernel upper bounds in the setting of Feller semigroups.

In Chapter 2 the authors introduce the main classes of perturbations: regular perturbations as potentials and singular perturbations corresponding to infinitely high potential barriers. The Kato-Feller class of regular perturbation is introduced as a straightforward generalization of the Kato class corresponding to the free Laplacian. The chapter contains a justification of the Feynman-Kac formula for the Kato-Feller potentials. The last section of the chapter is devoted to the extension of the Feynman-Kac formula to singular perturbations, with a careful treatment of the Dirichlet decoupling process.

Chapter 3 contains the proof of the main properties of the Feynman-Kac semigroups and their kernels, i.e., semigroups obtained via the Feynman-Kac formula. Chapters 4–6 deal with semigroup and resolvent differences for Feller operators which lead to the corresponding comparison properties. In Chapter 4 the authors establish some technical identities and weighted estimates.

Chapter 5 gives sufficient conditions on the perturbations guaranteeing that the difference of the Feller operators is a Hilbert-Schmidt operator, with well-known consequences for the comparison of spectra. Chapter 6 deals with the problem of semigroup differences being trace class operators. The connection between regular and singular perturbations is given in terms of large coupling limits. In Chapter 7 the authors investigate the resolvent convergence of Feller operators additively perturbed by potentials on certain subsets of the state space.

Finally, Chapter 8 contains an overview of qualitative and quantitative spectral results available as a consequence of the general theory and the estimates obtained in previous chapters, demonstrating the power of the methods described in the book. The results of this chapter also indicate directions for further research. The qualitative spectral results of Chapter 8 provide sufficient conditions for the existence of bound states, stability of the essential and absolutely continuous spectra, existence and completeness of the wave operators and scattering systems. Quantitative results are given in terms of the Kato-Feller norms and weighted Laplace transform of the occupation time.

The appendices aim to make the book relatively self-contained. They contain elements of spectral theory, an account of semigroup theory, Markov processes and martingales, Dirichlet kernels and probabilistic potential theory. The reader will find in the appendices the main definitions, theorems, and hints to the literature.

The reader is required to have a profound background in functional analysis and probability theory. The book will undoubtedly be interesting for graduate students and researchers with interests in mathematical physics, spectral theory, stochastic processes, partial differential equations and quantum physics. *V. Liskevich*



A. Schrijver

### **Combinatorial optimization Polyhedra and efficiency**

*Algorithmics and Combinatorics*, 24 (3 volumes)

Berlijn: Springer-Verlag, 2003

1881 p., prijs €89,95

ISBN 3-540-44389-4

During the more than one year of its existence the book under consideration has already been reviewed by some leading experts in the field of Combinatorial Optimization. It has become clear from their reviews that the author has enriched the community with an encyclopedical work that will be one of the main sources for researchers in mathematics, computer science and operational research, especially with a mathematical interest in discrete mathematics, in particular polyhedral combinatorics and algorithmic problems on graphs and networks. Only superlatives suffice to describe its size, its clarity, its depth, its completeness, coherence and conciseness, its preciseness, its numbers of pages (1881), chapters (83), references (about 5000 on more than 300 pages), etc.

The author has already (co-)authored some classical books in the field. The importance of his work has been recognized and has been rewarded at several occasions. After prestigious prizes such as the Fulkerson Prize of the American Mathematical Society and the Mathematical Programming Society (MPS) in 1982 and 2003, and the Lanchester Prize of INFORMS in 1986, the current book was the basis for the Dantzig prize of the MPS and the Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), in 2003. The citation of the Dantzig prize ends with the sentence 'Characterized by insights that are both broad and deep, and by a continual pursuit of simplification and unity, Schrijver's work is scholarship at its best.'

The 83 chapters in the book are divided into parts. The main parts are Paths and Flows (Chapters 6–15), Bipartite Matching and Covering (Chapters 16–23), Nonbipartite Matching and Covering (Chapters 24–38), Matroids and Submodular Functions (Chapters 39–49), Trees, Branchings and Connectors (Chapters 50–63), Cliques, Stable Sets and Colouring (Chapters 64–69), Multiflows and Disjoint Paths (Chapters 70–76), and Hypergraphs (Chapters 77–83).

The book concludes with a Survey of Problems, Questions, and Conjectures (p. 1453–1462), References (p. 1463–1767), Name Index (p. 1767–1806), Subject Index (p. 1807–1879), and a list of Greek graph and hypergraph functions (p. 1880–1881). Volume A contains Parts I–III, Volume B Parts IV–VI, and Volume C the rest.

Each part starts with an elementary exposition of the basic results in the area, and gradually evolves to the more elevated regions. A basic knowledge of graph theory, polyhedra, linear and integer programming, algorithms and complexity, is required. The author writes that he considers his former book (Alexander Schrijver. *Theory of linear and integer programming*, Wiley, 1986) to be a good introduction to some of these topics, since it was partly written as a preliminary to the current book. Algorithms are described in full detail. All main results come with short and elegant proofs, in many cases these proofs are original. The preface states: 'Some mathematical maturity is required, and the general level is that of graduate students and researchers. Yet, parts

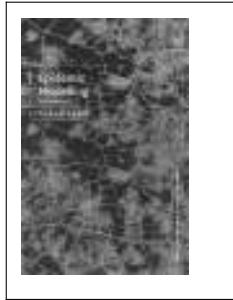
of the book may serve for undergraduate teaching.' There are no exercises, but in the course of the book a lot of open problems, questions and conjectures are mentioned, and these are listed at the end of the book. A list of typos is maintained at <http://homepages.cwi.nl/~lex/co/>.

The emphasis is on 'deterministic sequential polynomial-time' algorithms, as the author writes (page V). To keep the size of the book under control, the author did not attempt to cover recent important work on approximate, randomized, and parallel algorithms and complexity, and other 'areas that are recently in exciting motion', like semidefinite programming and graph decomposition.

In general, the book offers an extremely rich and well-written source for mathematicians and computer scientists interested in combinatorial optimization. A nice feature of the book is provided by the many historical notes.

The publisher gave the book a beautiful and handy form, and kept the price very reasonable. The book is also available on cd-rom (ISBN: 3-540-20456-3) for €69,69.

C. Roos



D.J. Daley, J. Gani  
**Epidemic Modelling**  
**An introduction**

(Studies in mathematical biology 15)

Cambridge: Cambridge University Press, 2001

226 p., prijs £21,99

ISBN 0-521-01467-0

This book is an introduction to simple epidemic models. Both stochastic and deterministic approaches are considered but the accent lies on stochastic models. The book is provided with a lot of epidemic data starting from those of the 17th century. In the introduction the reader finds a historical outline of epidemic modelling. And also current problems, such as AIDS, are not forgotten and discussed throughout the book.

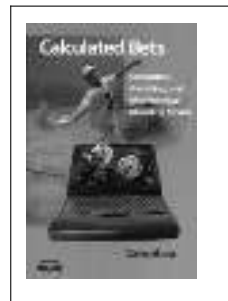
The nicest feature of the book is that many details of the mathematical analysis of models are given, so almost no special knowledge is needed. Therefore the book is accessible to (even) undergraduate students and also to those biologists who are interested in mathematical details of research done by their mathematical colleagues.

The authors do not forget about the real world and there is a whole chapter in the book and a few sections throughout the book in which the fitting of models to epidemic data is considered. There is also a chapter devoted to controls of epidemics and to optimization of control strategy. It is based on simple models and does not require special tools of control and optimization theory. Another chapter of the book deals with such a funny subject as spreading rumours.

Unfortunately, some interesting recent models (with, say, spatial or age or sex structure) are left out completely. They are neither mentioned nor references are provided, so this can give the wrong impression to an inexperienced reader that more complicated models do not exist. Also, slightly more advanced and extremely useful tools for deterministic systems are not presented (e.g., finding equilibria and stability analysis of equilibria). The

authors do not pay enough attention to constructing and motivating models; this even gives rise to conceptual mistakes. For example, discrete-time deterministic models are explained based on the Mass Action Law while it is hardly applicable in a general discrete-time setting; those models can be considered rather as nonlinear predictors than as models based on underlying mechanisms of epidemics. Actually, only one (though powerful) modelling tool is used, it is the Mass Action Law. But, for example, averaging techniques, which give constraints on the applicability of this law, are not mentioned. So, for those who are interested in the basic principles of modelling and in the underlying mechanisms and reasons behind the spread of diseases, the book is less recommended. However, students should find the book very readable and useful, all the more so because many of examples and exercises, which help in training calculating skills, are provided.

N. Davydova



S. Skiena

**Calculated bets**  
**Computers, gambling, and mathematical modeling to win**

Cambridge: Cambridge University Press, 2001

232 p., prijs £14,-

ISBN 0-521-00962-6

Dit boek is gepubliceerd in de *Outlooks*-reeks, die ten doel heeft de wisselwerking tussen wiskunde en andere disciplines te verkennen. De auteur introduceert zijn boek als het 'Verhaal van mijn 25-jarige obsessie de uitslagen van jai-alai-wedstrijden te voorspellen om er met succes op te kunnen bieden'.

Jai-alai is een sport van Baskische oorsprong waarbij twee spelers om beurten een bal tegen een muur gooien en opvangen totdat een van beiden een fout maakt (zoals bij squash maar dan toch weer heel anders). In de Verenigde Staten wordt het op professioneel niveau gespeeld. Acht spelers spelen volgens een bepaald plaatsingsschema tegen elkaar waarbij het om de eerste drie plaatsen gaat. Op de volgorde van deze drie plaatsen kan door de toeschouwers op allerlei manieren gewed worden.

Door het speciale plaatsingsschema hebben bij spelers van gelijke sterkte niet alle mogelijke volgorden dezelfde kans. Daarom spelen bij het wedden kansrekening en computersimulatie een belangrijke rol. Uitslagen van eerdere wedstrijden geven verdere informatie en op die manier wordt de statistiek erbij gehaald. Deze statistische informatie is op internet beschikbaar en daarom wordt in het boek ook hierop ingegaan. Het benodigde statistische rekenwerk is omvangrijk en daarom is er ook aandacht voor de speciale hiervoor ontwikkelde computerprogrammatuur. Al deze onderwerpen worden in dit boek behandeld. Ze worden niet alleen besproken in relatie tot jai-alai maar ook meer algemeen. De auteur hanteert hierbij een lichte en ludieke verteltrant en dat maakt het boek bijzonder leesbaar, zelfs als vakantielectuur.

De lezer die altijd al precies heeft willen weten hoe hij bij jai-alai moet wedden, komt in dit boek dus volledig aan zijn trekken. Mijn inschatting is dat dit een zeer beperkte groep is. Aangezien jai-alai weinig gelijkenis met meer bekende spelen vertoont, is de lering die uit de gedetailleerde analyses getrokken kan wor-

den voor andere wedsituaties beperkt. Dit in tegenstelling tot wat de tekst op de achterflap van het boek suggereert. De overgrote groep van lezers die het spel niet kennen, zal het met de meer algemene uiteenzettingen moeten doen. Deze zijn nogal oppervlakkig.

Blijft voor de algemene lezer die geïnteresseerd is in gokken en wars is van formules, de plezierige en ludieke stijl waarmee de auteur verhaalt van zijn obsessie en dat alleen al maakt het de moeite waard dit boek aan te schaffen. *B. van der Genugten*



M. Parlar  
**Interactive operations research with Maple  
methods and models**

Boston: Birkhäuser, 2000  
468 p., prijs €89,88  
ISBN 0-8176-4165-3

Het boek *Interactive operations research with Maple* illustreert hoe het computeralgebra systeem Maple (versies 5.1 en 6) gebruikt kan worden bij het oplossen van vraagstukken uit de operations research (OR). De voornaamste onderwerpen, die besproken worden, zijn lineair en niet-lineair programmeren, dynamische programmering, voorraadmodellen, wachtrijen en simulatie. De Maple worksheets die bij de voorbeelden in het boek horen, kunnen gratis worden gedownload van de website van de auteur op de URL [www.business.mcmaster.ca/msis/profs/parlar/](http://www.business.mcmaster.ca/msis/profs/parlar/). Volgens de auteur kan het boek in een semester behandeld worden. Dit lijkt me wat al te optimistisch, aangezien het voornamelijk studenten zal betreffen die nog onbekend zijn met de stof en met Maple.

Voor degenen die nog onbekend zijn met Maple vermeld ik even dat Maple zich onderscheidt van andere computerpakketten zoals Gauss en Matlab, omdat het niet alleen numerieke maar ook algebraïsche oplossingen kan genereren. Het boek gebruikt Maple om zowel numerieke (bijvoorbeeld lineair programmeren met de Simplexmethode) als algebraïsche oplossingen (bijvoorbeeld voor een continuous-review voorraadmodel) te genereren. Algebraïsche oplossingen zijn natuurlijk soms gewenst, maar als je geïnteresseerd bent in een numerieke oplossing is Maple minder handig. Het programma werkt dan vaak aanmerkelijk minder snel in vergelijking met zuiver numeriek georiënteerde programma's. Dit is ook de reden dat ik hoofdstuk 10 van het boek, over simulatie, vrij overbodig vind. Simulatie kan veel beter en vooral veel sneller met behulp van bijvoorbeeld Matlab gedaan worden. Langere rekentijd is natuurlijk alleen een probleem voor complexe, rekenintensieve problemen waar studenten wellicht niet mee geconfronteerd zullen worden. Daar staat bovendien nog eens tegenover dat Maple veel ingebouwde modellen en bibliotheken bevat, waardoor er weinig zelf geprogrammeerd hoeft te worden. Daarnaast kun je met behulp van Maple mooie plaatjes genereren. Voor onderzoekers bieden het boek en Maple naar mijn idee weinig toegevoegde waarde (het boek is ook niet voor hen bedoeld). Onderzoekers willen vaak toch zelf programmeren, omdat dit de ultieme flexibiliteit geeft en qua rekentijd optimaal is.

Een belangrijke vraag is natuurlijk of het gebruik van het boek in combinatie met Maple tot beter begrip bij OR-studenten leidt. Mijn eigen ervaring is dat het vaak erg nuttig is om de theorie te illustreren met voorbeelden waarmee je zelf aan de slag kan. Maple werkt in zulke gevallen aanmerkelijk gemakkelijker en inzichtelijker dan bekende programma's zoals bijvoorbeeld GAMS. Dynamische programmering (DP) is typisch iets wat prima met Maple kan: in plaats van jezelf te verrekenen in de recursie, laat je Maple het rekenwerk doen terwijl je tegelijkertijd wel voldoende inzicht in de werking van DP moet hebben om Maple te kunnen aansturen. Daarnaast is het niveau van de problemen die Maple aankan vrij hoog: zelfs voor continue Markov-ketens deinst dit programma niet terug (zo kun je de transient probabilities bijvoorbeeld algebraïsch met Maple uitrekenen). Wel denk ik dat dit boek niet op zichzelf als cursusmateriaal moet worden gebruikt, omdat de uitleg van de onderliggende theorie vrij beknopt is. Het moet dus in combinatie met een ander OR-boek gebruikt worden. De beknoptheid komt overigens ook tot uiting in de uitleg bij de worksheets die in het boek staan. Het boek geeft slechts wat voorbeelden met wat korte uitleg. Hierdoor zal het voor studenten niet altijd makkelijk zijn om gelijksoortige (maar net even iets andere) problemen zelfstandig aan te pakken.

Al met al ben ik van mening dat dit boek zeer geschikt is om studenten de mogelijkheid te geven praktische OR-problemen met behulp van Maple op te lossen. *L. Spierdijk*



K. Bichteler  
**Stochastic integration with jumps**

(Encyclopedia of mathematics and its applications 8)  
Cambridge: Cambridge University Press, 2002  
516 p., prijs £75,-  
ISBN 0-521-81129-5

In many branches of applied mathematics, stochastic differential equations (SDE's) are used to model systems in which a stochastic 'noise' contributes to the evolution of the system. To make the notion of an SDE mathematically precise and to study its solutions, a theory of stochastic integration is required. An important obstacle is that, typically, we want to be able to integrate with respect to stochastic processes which are not necessarily of bounded variation, hence the usual Lebesgue-Stieltjes approach can not be followed. The main task is to overcome this difficulty and to develop an alternative, 'stochastic' calculus. This program is carried out in the present book.

What makes this book interesting is that it takes a nonstandard approach. Usually, stochastic integration is developed with respect to so-called semimartingales. These can be decomposed into a bounded variation part and a part which is of bounded quadratic variation, and this structure allows for the construction of a stochastic integral and the development of the associated calculus. In this book the fundamental notion is that of an 'integrator'. An  $L^p$ -integrator is a process  $Z$  which is right-continuous in mean, and which has the property that for every uniformly bounded collection of elementary integrands  $X$ , the corresponding collection of integrals  $\int_0^t X_s dZ_s$  (which, for the elementary in-

tegrands  $X$ , are defined in the obvious way) are bounded in  $L^p$ . Thus, in some sense integrators are the natural stochastic analogues of right-continuous functions of bounded variation. Semimartingales turn out to be examples of integrators.

To extend the definition of the integral to integrands that are not necessarily elementary, a clever norm is constructed on the space of potential integrands: the Daniell mean. This norm has the property that the elementary integral  $X \mapsto \int_0^t X_s dZ_s$  becomes a contraction on the space of elementary integrands. The integral can then be extended by continuity to the closure of the space of elementary integrands under this norm. The resulting integral has the usual nice properties and we have convergence theorems, an Itôformula, the Doléans formula, the Girsanov theorem, etc.

The obvious question is: 'What is the relation between this theory and the semimartingale approach?'. This question is answered by a Doob-Méyer-type result for integrators, which implies that every integrator is in fact a semimartingale. So in the end, the whole stochastic calculus with respect to integrators turns out to coincide with the usual calculus relative to semimartingales.

Its nonstandard approach makes this book an interesting addition to the literature on stochastic calculus. Technically however, the route via the Daniell mean seems to be a little more demanding than the classical construction. This makes the book less useful as a textbook for students. It is probably most interesting for those who are already familiar with the usual theory, and who would appreciate an alternative view on the subject. *H. van Zanten*



G.J. Chaitin

### **Exploring Randomness**

(Discrete mathematics and theoretical computer science)

164 p., prijs €29,95

London: Springer-Verlag, 2001

ISBN 1-85233-417-7

Eerst een kort overzicht van de inhoud van het boek. Het boek begint met een historisch overzicht van de grondslagen van de wiskunde en de logica.

Zowel onvolledigheidsresultaten als het 'halting'-probleem krijgen een nieuwe interpretatie in het licht van de algoritmische informatietheorie. In het bijzonder wordt het 'maximaal onkenbare' getal  $\Omega$  ten tonele gevoerd. Dit is de waarschijnlijkheid dat een willekeurig programma termineert. 'Willekeurig' betekent dat het programma in binaire representatie is gegenereerd door toeval (0 of 1 in die representatie wordt bepaald door 'kruis' of 'munt'). Een ander relevant concept is de 'algoritmische informatie' van een rijtje ('string'). Dit is het kortste programma dat het rijtje kan reproduceren. Als deze van de orde van de lengte van het rijtje is, wordt het rijtje 'random' genoemd.

Na dit hoofdstuk komt een korte inleiding in de programmeertaal LISP. Enige speciale functies worden aan LISP toegevoegd om het mogelijk te maken een Turing-machine in LISP te programmeren. LISP is uiteraard een geschikte programmeeromgeving voor zo'n project, omdat het niet getypeerd is en, kort door de bocht: 'zichzelf kan interpreteren'. Met de Turing-machine kun-

nen we de werking van een willekeurig programma simuleren, en in de LISP-versie kunnen we dan onderzoeken of het binnen zekere grenzen termineert. Hiermee kan het getal  $\Omega$  dan 'benaderd' worden.

Tevens is het zo mogelijk om de algoritmische informatie van een programma concreet te berekenen. Dit deel van het boek bevat veel programmeeropdrachten in LISP. Hierna volgen nog enige hoofdstukken waarin andere definities van 'random' naast de eerder genoemde worden gezet, in het bijzonder die van Solovay en van Martin-Löf, en zowel voor eindige als voor oneindige rijtjes. Ook dit deel bevat LISP-programmeeropdrachten, maar hier ligt nu minder nadruk op. Het boek besluit met enige nog ambitieuzer generalisaties.

Ik was enigszins argeloos in deze materie gedoken: vaag bekend met informatietheorie, redelijk op de hoogte van maar geen ervaren programmeur in LISP, en, moet ik helaas inmiddels beschaamd bekennen: niet bekend met Chaitin. Hoewel ik deze achtergrond voldoende acht om een boek over zo'n nieuw onderwerp te doorgronden, was dat in dit geval niet genoeg. Ik werd gehinderd door onverklaarde afkortingen, zoals AIT, en strandde halverwege, in het technische deel waarin algoritmische informatietheorie (AIT dus) in LISP werd geïmplementeerd. Inmiddels was ik, geërgerd, voldoende gemotiveerd voor een kort literatuuronderzoek.

En wat blijkt: in verschillende publicaties uit voornamelijk de jaren zeventig (onder andere IBM Journal of Research and Development, Scientific American) weet Chaitin op zeer heldere en uitmuntend aansprekende wijze zijn ideeën te verkopen. De details van de nogal onaangenaam polemische discussie over de verschillen tussen zijn en Kolmogorov's benadering van 'random' heb ik niet uitgeplozen. Referenties hoeft ik niet te geven: de auteur is maximaal online en vrijwel al zijn publicaties zijn te vinden op zijn homepage [www.umcs.maine.edu/~chaitin/](http://www.umcs.maine.edu/~chaitin/), inclusief hele Springer-boeken. (Niet het hier besproken boek, vooralsnog.) Het trof mij dat de helderheid en zorgvuldigheid van die eerdere publicaties wel erg gunstig afsteekt bij dit boek.

Op deze manier geïnformeerd bracht een herlezing me nu verder in het boek. Het blijft echter onaangenaam, dat bijvoorbeeld in het eerste hoofdstuk één op de drie zinnen van een uitroepeteken wordt voorzien, dat op zoveel plaatsen de 'ik'-dichtheid in de tekst hinderlijk hoog is, en dat de meeste referenties naar eigen werk zijn. Los van de pagina-layout, die bedroevend is (hoofdstuktitels van tot zes vetgedrukte regels), is de tekst verder juist erg zorgvuldig en lijkt vrij van type- en (in de delen die ik in detail bekeken heb) formulefouten.

Ik heb niet de moeite opgebracht om de LISP-opdrachten uit te voeren, maar ik stel me voor dat de mogelijkheid om theoretisch wiskundige resultaten zo concreet en zichtbaar te maken zeker zal aanspreken. Als dat echter als thema het boek inhoud had moeten geven, zou de structuur er heel anders uit hebben moeten zien. Nu hebben de verschillende delen weinig onderlinge samenhang. Tot slot, waar wordt nu AIT als afkorting geïntroduceerd? In het voorwoord! Ik lees die nooit, maar begin altijd op pagina 1 van hoofdstuk 1.

*H. van Ditmarsch*

# Problemen/UWC

## Universitaire Wiskunde Competitie

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten. De uitslagen worden tevens gepubliceerd op de internetpagina <http://uwc.ewi.tudelft.nl/uitslag/uitslag.pdf>

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Er worden drie editieprijsen toegekend, van 100, 50, en 25 euro. De puntentotalen van winnaars tellen voor 0, 50, en 75 procent mee in de laddercompetitie. De aanvoerder van de ladder ontvangt een prijs van 100 euro en begint daarna weer onderaan. Daarnaast wordt twee maal per jaar een ster-opgave aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 euro toegekend.

Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in  $\text{\LaTeX}$  wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 februari 2005. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.



### Problem A

1. Show that there exist infinitely many  $n \in \mathbb{N}$ , such that  $S_n = 1 + 2 + \dots + n$  is a square.
2. Let  $a_1, a_2, a_3, \dots$  be those squares. Calculate  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ .

### Problem B

Let  $G$  be a finite set of elements and  $\cdot$  a binary associative operation on  $G$ . There is a neutral element in  $G$  and that is the only element in  $G$  with the property  $a \cdot a = a$ . Show that  $G$  with the operation  $\cdot$  is a group.

### Problem C

Let  $\{a_n\}_n$  be a sequence ( $n \geq 0$ ), with  $a_n \in \{\pm 1\}$  for all  $n$ . Define

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}.$$

Prove that  $\exists C > 0 : \forall m > 0 : \exists n > m : |S_n| > C\sqrt{n}$ .

### Edition 2004/1

Op de ronde 2004/1 van de Universitaire Wiskunde Competitie ontvingen we inzendingen van Syb Botma, Kenny De Commer, Filip Cools and Hendrik Hubrechts.

### Problem 2004/1-A

For every integer  $n > 2$  prove that  $\sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(n-j)} \sum_{k=j}^{n-1} \frac{1}{k} \right) < \pi^2/6$ .

**Solution** This problem has been solved by Syb Botma, Kenny De Commer, Filip Cools, Klaas Pieter Hart, Hendrik Hubrechts, Ruud Jeurissen and Jaap Spies. Ruud Jeurissen's solution is given here.

Let  $A_{n-1}$  denote the left hand side. Changing the order of summation we get

$$A_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{1}{n-j} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \sum_{s=n-k}^{n-1} \frac{1}{s}.$$

Then

$$\begin{aligned} A_n - A_{n-1} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{s=n+1-k}^n \frac{1}{s} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \sum_{s=n-k}^{n-1} \frac{1}{s} = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \frac{1}{s} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n-k} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \frac{1}{s} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} = \frac{1}{n} \left( \sum_{s=1}^n \frac{1}{s} - \sum_{t=1}^{n-1} \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Since  $A_1 = 1$ , we find  $A_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$  (and  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{n-1} = \frac{\pi^2}{6}$ ).

#### Problem 2004/1-B

Consider the first digits of the numbers  $2^n$ : 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, .... Does the digit 7 appear in this sequence? Which digit appears more often, 7 or 8? How many times more often?

**Solution** This problem has been solved by Filip Cools, Hendrik Hubrechts, Kenny De Commer, Syb Botma and Jaap Spies. The problem has been taken from V.I. Arnold's *Mathematical methods in classical mechanics* (it is the final problem of section 16 and its solution is given in section 51). By coincidence a solution of the problem appeared in the June 2004 issue of the Newsletter of the European Mathematical Society. The answers are: 7 does occur (though it takes some time before its first occurrence) and it occurs more often than 8. To specify the answer to the third question one has to use an averaging result (e.g. the ergodic theorem or Weyl's criterion).

Take logarithms to find that the first digit of  $2^n$  is equal to 7 if and only if

$$\log 7 \leq n \log 2 < \log 8, \text{ mod } 1$$

Represent the circle by the real numbers modulo 1. The map  $x \mapsto x + \log 2$  is an irrational rotation  $\rho$  of the circle. The equation above now says that 7 occurs as the first digit of  $2^n$  if and only if the unit element of the circle rotates into  $(\log 7, \log 8)$  under  $\rho^n$ . It is known that an irrational rotation is uniquely ergodic and by the ergodic theorem, for numbers  $a < b$  in  $(0, 1)$  the fraction

$$\frac{|\{n \leq N : \rho^n(x) \in (a, b) \text{ mod } 1\}|}{N}$$

converges to  $b - a$  as  $N$  goes to infinity, regardless of the choice of  $x$ . It follows that the fraction of iterates  $2^n$  with initial digit 7 is equal to  $\log 8 - \log 7$  as  $N$  goes to infinity. Similarly, the fraction of iterates with initial digit 8 is equal to  $\log 9 - \log 8$ .

#### Problem 2004/1-C

We have a circular key chain and we want to colour the keys, using as few colours as possible, so that each key can be identified by the color pattern — that is, by looking at the key's colour and neighboring colours as far away as needed. Let  $f(n)$  be the minimal number of colours required to uniquely disambiguate a circular key chain of  $n$  keys in this way. Determine  $f(n)$  for all positive integers  $n$ .

**Solution** This problem has been solved by Filip Cools, Hendrik Hubrechts, Kenny De Commer and Ruud Jeurissen. It is problem 729 in the Journal of Recreational Mathematics (vol 11, 1979), proposed by Frank Rubin. It has appeared in many puzzle corners ever after and it has sprouted the 'distinguishing number' in graph theory. The answer is that  $f(n) = 2$  if  $n \geq 6$  and  $f(n) = 3$  if  $n = 3, 4, 5$ .

Enumerate the keys  $1, 2, 3, \dots, n$  cyclically. To disambiguate the chain you have to be able to find keys 1 and 2, since then you can find the other keys by counting. So  $f(n) \leq 3$ , since you can colour 1 green, 2 red and colour the others yellow. Suppose  $n \geq 6$ . Colour  $1, 3, n$  red and colour all other keys green. Then 2 is the only green key that has two red neighbours since  $n \geq 6$ . So you can find key 2 and key 1 is its only neighbour that has a red neighbour.

We need to show that  $f(n) \neq 2$  if  $n = 3, 4, 5$ . Suppose we can use red and green to disambiguate the key chain. Clearly it does not suffice to colour one key differently from all the others. Since  $n = 3, 4, 5$  we may assume that two keys are green while the others are red. Turn the key ring around (reflect) in such a way that the green keys exchange their position. This action does not change the colour pattern, so the key ring cannot be disambiguated.

Kenny De Commer proposes and solves a related key chain problem: what is the minimal number of colours that you need in order to disambiguate the chain, regardless of how you apply the colours?

#### Problem 2003/1-B

Jos Brands has pointed out that the solution to UWC problem 2003/1-B as given in last year's September issue is not correct. We will come back to this problem in a later issue.

In the previous issue we remarked that Bert Jagers gave a general solution to problem 2003/4-B, which is presented here.

#### Problem 2003/4-B

Let  $m$  and  $n$  be coprime. Assume that  $G$  is a group such that  $m$ -th powers and  $n$ -th powers commute. Then  $G$  is abelian.

**Solution** Let  $M \subset G$  be generated by all  $m$ -th powers and let  $N \subset G$  be generated by all  $n$ -th powers. These subgroups are clearly invariant under automorphisms, hence they are normal. Since  $m$  and  $n$  are coprime  $G = MN$  and  $M \cap N$  is contained in the center of  $G$ . Let  $s \in M$  and  $t \in N$  be arbitrary elements. To settle that  $G$  is abelian it suffices to show that  $st = ts$ , in other words, the commutator  $[s, t]$  is equal to  $e$ . Observe that  $[s, t] = sts^{-1}t^{-1} \in M \cap N$  since, by normality,  $[s, t]$  is a product of two elements of  $M$  as well as a product of two elements of  $N$ . Hence  $[s, t]$  is an element of the center, say  $[s, t] = z$ . In other words  $sts^{-1} = zt$ , so  $st^ms^{-1} = z^mt^m$ . Since  $t^m \in N$  it commutes with  $s$ , so  $z^m = e$ . In exactly the same way  $z^n = e$ . So  $z = [s, t] = e$ .

#### Uitslag Editie 2004/1

| <i>Naam</i>          | A  | B | C  | <i>Totaal</i> |
|----------------------|----|---|----|---------------|
| 1. Hendrik Hubrechts | 11 | 9 | 10 | 119           |
| 2. Filip Cools       | 10 | 8 | 10 | 112           |
| 3. Kenny De Commer   | 10 | 3 | 11 | 97            |

#### Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie

We vermelden alleen de top 5. Voor de complete ladderstand verwijzen we naar de UWC-website.

| <i>Naam</i>             | <i>Punten</i> |
|-------------------------|---------------|
| 1. Kenny De Commer      | 142           |
| 2. Tom Claeys           | 138           |
| 3. Gerben Stavenga e.a. | 136           |
| 4. Filip Cools e.a.     | 107           |
| 5. Peter Bruin          | 99            |