

Inhoud | Contents

90	Colofon
91	Redactioneel <i>Jaap Molenaar</i>
92	Agenda
94	Nieuws

Oratie | Inaugural lecture

98	Van piramides tot modulaire krommen <i>Bas Edixhoven</i>
----	--

Onderzoek | Research

106	Forensische statistiek <i>Marjan Sjerps</i>
112	Waardenvolle wiskunde <i>Hendrik Blauwendraat</i>
115	Reistijden voorspellen op snelwegen <i>Erik van Zwet</i>

Interview | Interview

119	Het Van der Blij-effect <i>Hans van Lint, Rob de Jong</i>
-----	---

Cultuur | Culture

126	Goochelen met getallen <i>Jantine Bloemhof</i>
129	Het monument van oprichting <i>Steven Engelsman</i>

Promotionele activiteiten | Promotional Activities

133	Waar komt de bliksem vandaan? <i>Mariska Enneking, Geertje Hek</i>
-----	--

Geschiedenis | History

136	Ambtenaar en wiskundige <i>Adriaan Monna, Marius van der Put</i>
-----	--

Onderwijs | Education

147	A significant amount of algebra <i>Zalman Usiskin</i>
153	Pedagogie of lineaire algebra? <i>Gerard Stout</i>
158	Een wiskunde-B examenjaar <i>Peter Kop</i>

Boeken | Books

160	Boekbesprekingen
-----	------------------

Rubrieken | Departments

97	Oud Archief <i>Danny Beckers</i>
125	Differentiëren en integreren <i>Rainer Kaenders</i>
131	Brieven <i>Letters to the editor</i>
152	From the old new world <i>Hugo Woerdeman</i>
174	Problemen/UWC

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
<http://www.nieuwarchief.nl>

Hoofredactie

Jaap Molenaar (j.molenaar1@tue.nl)
Jaap Top (top@math.rug.nl)

Eindredactie

Derk Pik (dpik@math.leidenuniv.nl)

Bladmanager/Advertenties

Reinie Ern   (erne@math.leidenuniv.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101

Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@wens.kun.nl)
Rainer Kaenders (r.kaenders@ils.kun.nl)
Hans Melissen (j.b.m.melissen@its.tudelft.nl)

Bureau redactie

Jos Brakenhoff (naw@math.leidenuniv.nl)
Annelies Hafkenscheid (naw@math.leidenuniv.nl)

Medewerkers

Danny Beckers (KUN), Jan van de Craats (KMA),
Hans Cuyper (TUE), Robbert Fokink (TUD), Geertje Hek (UVA), Joop Kolk (UU), Ger Koole (VU), Jan van Neerven (TUD), Hans Sterk (TUE), Chris Zaal (FI)

TeX-ondersteuning

Marko Boon (marko@win.tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink

Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden v  r het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079
NL-1090 GB Amsterdam

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEXT)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Giethoorn ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. Het genootschap werd in 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Het is 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap. De contributie voor leden van het KWG bedraagt    70 per jaar. Gepensioneerden betalen    35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor    25 per jaar. Pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG.

Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van    50.

Members of the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft f  r Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay    50 instead of the full membership fee of    70 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members.

A postage charge of    5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of    7,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor    90 respectievelijk    105. Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Jan van Mill (VU, voorzitter), Herman te Riele (CWI, secretaris), Fieke Dekkers (UU, penningmeester), Henk Broer (RUG), Klaas Pieter Hart (TUD), Metha Kamminga (NHL), Annette Kik (CWI), Vivi Rottschäfer (UL).

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
3	03-09-2004	11-05-2004
4	03-12-2004	10-08-2004
1	04-03-2005	11-11-2004
2	03-06-2005	10-02-2005

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen.



Centrum voor Wiskunde
en Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Katholieke Universiteit
Nijmegen

Op het omslag

Het zijn vaak kleinigheden waarmee een crimineel zichzelf verraadt. Een beschadiging aan een schoen kan al voldoende zijn. Lees verder op pagina 106.

Klein is fijn

We zijn er bij ons thuis aan verslaafd: het gezelschapsspel *Kolonisten van Catan*. Meestal jeuken mijn vingers om de regels van dit soort spellen te veranderen, maar in dit geval moet zelfs ik toegeven dat het fantastisch uitgebalanceerd is. Iedere keer weer verrassend, dankzij een goede mix van strategie en toeval. Het spel zet de speler aan tot een klein beetje kansrekening. Er wordt met twee dobbelstenen gegooid. Aan het begin moet je gokken op kansrijke uitkomsten van de worp en er wordt door middel van aparte kleuren gesuggereerd dat de uitkomsten 6, 7 en 8 het meest zullen voorkomen. Dat valt makkelijk uit te leggen, dacht ik, en dus liet ik wat wiskunde binnensluipen aan de speeltafel. De rauwe werkelijkheid echter haalde mijn verhaal onderuit. Door de reeks uitkomsten eens een paar keer te noteren en netjes in een staafdiagram uit te zetten, werd het de kinderen al gauw duidelijk dat die wiskundige overwegingen van mij in de praktijk niets waard waren. De diagrammen gaven de gekste verdelingen te zien, maar nooit leken ze op de voorspelde klokvorm. Het werd erg duidelijk: bij weinig trekkingen heb je niets aan overwegingen die uitgaan van grote aantallen. En dat is precies wat Kolonisten verrassend houdt. Het spel blijft leuk dankzij de kleine aantallen. En is dat niet precies wat we als wiskundige gemeenschap nodig hebben? De troost dat klein ook fijn kan zijn.

Al jaren worden we geconfronteerd met het spook van de kleine aantallen. Iedereen heeft zo z'n eigen verklaring voor die immer afnemende aantallen studenten. En al die argumenten zijn vast waar. Alleen, ze helpen zo weinig op de korte termijn. Door maatschappelijke ontwikkelingen die moeilijk te grijpen zijn is wiskundig Nederland ingekrompen tot het formaat van een Gideonbende. Maar, zoals bekend, deze bende bereikte heel veel. Het komt aan op saamhorigheid. We moeten ons niet uit elkaar laten spelen door opgedrongen clusterplannen of te vergaande vrijages met andere disciplines. Het eigen gezicht blijven vertonen is van het allergrootste belang. En een niet onbelangrijk facet van ons gezicht is: het *Nieuw Archief voor Wiskunde*. Een archaïsche naam voor een springlevend blad. Het is toch opmerkelijk dat deze kleine bende zo'n blad van formaat weet uit te geven. Velen twijfelden aanvankelijk of we deze omvang en dit niveau wel konden volhouden. De nummers in de afgelopen jaren hebben deze scepsis ontkracht. Een kleine redactie (ook hier kleine aantallen) heeft met medewerking van velen een prachtige serie voortgebracht.

Toch blijven er wensen en idealen. Het visitekaartje van wiskundig Nederland kan nog beter. Wat zou het de leesbaarheid verhogen als er meer discussies in het blad stonden, als het zou

fungeren als een levendig communicatiemiddel. Waar blijven de ingezonden brieven van vertoornde lezers, de cynische of onderkoelde reacties op ontwikkelingen die ons allen aangaan? Zoals de reactie van een trouwe lezer die gewoon even liet weten dat dat predikaat 'Koninklijk' van het Wiskundig Genootschap ridicuul en uit de tijd is. Dat soort reacties, daar kijken we als redactie naar uit. Verder moeten we nog steeds een goede mix van artikelen over en artikelen rond de wiskunde weten te vinden. Dolgraag willen we een serie hebben waarin de experts onder ons in begrijpelijke taal vertellen over wat er momenteel speelt op hun vakgebied. Wat een uitdaging. Mooie voorbeelden hiervan staan in het professionele blad *Natuurwetenschap & Techniek*. Laatst nog, over de instabiliteit van de toren van de Oude Kerk te Delft, geschreven door onze onvolprezen Studiegroep Wiskunde met de Industrie. Tamelijk diepgravende artikelen! Bij het lezen ervan verbaas ik me er vaak over hoeveel men ook zonder formules kan uitleggen. En die handicap hebben de auteurs in NAW niet eens.

Een andere persoonlijke, en daarom wellicht vrome wens is het verhogen van de verschijningsfrequentie van NAW. Daarmee zouden we met de agenda en de verslagen beter kunnen inspelen op de actualiteit. Het blad zou ook aantrekkelijker worden voor personeelsadvertenties. Maar vooral, de informatie zou in een wat dunnere spoeling opgediend worden. Nu valt er iedere keer zo'n dik pak op uw deurmat, dat er, naar ik vrees, mooie artikelen ongelezen blijven vanwege de algemene plaag van tijdgebrek.

Ook het dikke pak dat nu voor u ligt bevat weer veel moois. Ik noem slechts enkele krenten. In een interview met Van der Blij leest u alles over Het Effect. En dat hij toch maar geen theologie is gaan studeren, 'omdat je daardoor gemakkelijk het echte geloof verliest'. Ook kunt u meeleven met zijn emoties, toen hij heel integer probeerde de middelbare schoolwiskunde op niveau te houden en de zaak toch zag ontsporen. In een ander artikel treft u een hartstochtelijk pleidooi aan voor meer abstractie op de middelbare school. Helaas, een preek voor eigen parochie. De minister en de Tweede Kamer zijn vrij eenstemmig over een koers in de omgekeerde richting. Maar niet negatief eindigen nou. Klein blijft fijn. Wiskunde, een vak voor fijnproevers. Ach, een diamant behoeft niet groot te zijn om te schitteren.

Jaap Molenaar

hoofdredacteur Nieuw Archief voor Wiskunde

Faculteit Wiskunde en Informatica, Technische Universiteit Eindhoven

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica, Universiteit Twente

j.molenaar1@tue.nl

Agenda

| Upcoming Events

juli 2004

28 juni–2 juli

Wiskunde en werkelijkheid

Zomercursus over de geschiedenis van wiskunde, met de verhouding wiskunde en werkelijkheid als leidraad. Sprekers: Gerard Alberts, Paul Bakker, Danny Beckers, Robbert Dijkgraaf, Joop Doorman, Louk Fleischhacker, Frans de Haas, Teun Koetsier, Marjolein Kool, Klaas Landsman, Rienk Vermij, Albert Visser en Erik Heijerman.

plaats Instituut voor wijsbegeerte, Leusden

info www.isvw.nl

1–2 juli

12e Congres van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraren

Plenaire voordrachten over statistiek op de middelbare school, verkiezingen en cultuurgeschiedenis.

plaats Oostende, België

info www.vvwl.be

4–18 juli

45th International Mathematical Olympiad

Het grootste internationale wiskundetoernooi voor leerlingen van de middelbare school.

plaats Athene, Griekenland

info www.imo2004.gr

4–11 juli

ICME-10

The 10th International Congress on Mathematical Education

plaats Kopenhagen, Denemarken

info www.icme-10.dk

5–6 juli

Quantitative Models for Production and Communication Networks

EURANDOM workshop

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.eurandom.nl

augustus 2004

15–19 augustus

International Society for Clinical Biostatistics 2004

Internationale conferentie georganiseerd door de afdeling Medische Statistiek van het Leids Universitair Medisch Centrum.

plaats Leiden

info <http://iscb2004.clinicalresearch.nl>

16–20 augustus

Automorphisms of Curves

Organisatoren: Gunther Cornelissen en Frans Oort

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

23–26 augustus

Harmonic Analysis and Homogeneous Spaces

Workshop gewijd aan harmonische analyse en haar toepassingen in de mathematische fysica, niet-communicatieve meetkunde en getallentheorie.

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

27 augustus

Special day in honour of Gerrit van Dijk

Special day in honour of Gerrit van Dijk on the occasion of his 65th birthday.

plaats Universiteit Leiden

info harmonic@math.leidenuniv.nl

27–28 augustus

Vakantiecursus 2004

Structuur in schoonheid. Onderwerpen: Verbeelding van het projectieve vlak (Jan Aarts), De parels van Indra (Frits Beukers), Vlakke symmetriegroepen, met voorbeelden uit het Alhambra (Jan van de Craats), Cubische gipsmodellen (Jaap Top), Dimensie 5 in zicht (Hans Finkelberg), Ornamentale kunst in de Islam (Jan Hogendijk), Escher en het Droste-effect (Hendrik Lenstra).

plaats CWI, Amsterdam

info www.cwi.nl/events

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

30 augustus – 3 september

Algebraic Cycles and Motives

Workshop, tevens jaarvergadering van de European Algebraic Geometry Research Training Network (EAGER). Organisatoren: S.J. Edixhoven, J. Nagel, C. Peters.

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

september 2004

1–3 september

Congres OR 2004

Internationale conferentie van het Gesellschaft für Operations Research en het Nederlands Genootschap voor Besliskunde.

plaats Universiteit van Tilburg

info <http://center.uvt.nl/congres>

3 september

De rekenende rechter

Studiedag waarin het gebruik van deze kwantitatieve methoden in de rechtspraak centraal staat.

plaats Universiteit van Tilburg

info www.uvt.nl/faculteiten/frw/pao

3–4 september

Vakantie cursus 2004

Structuur in schoonheid. Onderwerpen: zie 27–28 augustus.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.cwi.nl/events

9–10 september

Let $\varepsilon \ll 1$

Symposium ter ere van Ferdinand Verhulst. Sprekers: Hans Duistermaat, Phil Holmes, Bob O'Malley en Floris Takens.

plaats Universiteit Utrecht

20–24 september

Nonlinear Dynamics, Ergodic Theory and Renormalization

Niet-lineaire dynamica op het snijvlak van wiskunde en natuurkunde.

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

oktober 2004

4–8 oktober

Probabilistic Graphical Models 2004

Deelname alleen mogelijk door middel van uitnodiging.

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

6–8 oktober

Woudschoten-conferentie

De 29-ste conferentie van de Nederlands-Vlaamse Numerieke Wiskunde Gemeenschappen. Thema's van deze conferentie zijn Computational electromagnetics en Geometrische integratie voor ODEs en PDEs.

plaats Conferentiecentrum Woudschoten, Zeist

info www.cwi.nl/events

18–29 oktober

Volatility of financial markets, theoretical models, forecasting and trading

Workshop met doel om wetenschappers uit verschillende richtingen (economie, wiskunde, natuurkunde) en financiële experts samen te brengen. Centraal staat statistische analyse van financiële tijdreeksen.

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

25–27 oktober

From individual to collective behaviour

Zesde internationale conferentie over cellulaire automaten voor onderzoek en industrie.

plaats Universiteit van Amsterdam

info www.science.uva.nl/research/scs

30 oktober 2004

Mental Calculation World Cup 2004

Wereldkampioenschap hoofdrekenen. Inschrijving mogelijk tot 31 augustus.

plaats Annaberg-Buchholz, Duitsland

info www.recordholders.org/en/events/worldcup04

november–december 2004

5 november

Coding, Crypto and Information Theory

EIDMA seminar

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.win.tue.nl/math/eidma

6 november

Jaarvergadering NVvW

Studiedag en jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

plaats nog onbekend

info www.nvww.nl

25–28 november

15. Novembertagung zur Geschichte der Mathematik

Centraal thema: reconstructie.

plaats Universiteit Utrecht

info www.math.uu.nl/novembertagung

26 november

Voorronde van de A-lympiade 2004/2005

Wiskundewedstrijd voor leerlingen uit 5-havo of 5/6-vwo met Wiskunde-A.

info www.fi.uu.nl/olympiade

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar naw@math.leidenuniv.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Hans Duistermaat KNAW-Akademiehoogleraar

De Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen heeft Hans Duistermaat — hoogleraar zuivere en toegepaste wiskunde aan de Universiteit Utrecht — benoemd tot Akademiehoogleraar. Het Akademiehoogleraarschap wordt hem voor vijf jaar toegekend. De KNAW kent Duistermaat jaarlijks 200.000 euro toe ten behoeve voor salaris- en onderzoekskosten. Duistermaat verwierf wereldfaam door zijn werk op het gebied van de partiële differentiaalvergelijkingen.

bron: persbericht Universiteit Utrecht

Leendert Kosten ontvangt internationale prijs

Op het achttiende International Teletraffic Congress (ITC) heeft de International Advisory Council (IAC) van het ITC besloten Prof.dr.ir. Leendert Kosten een Lifetime Achievement Award toe te kennen “for outstanding contributions to teletraffic science”.

Leendert Kosten was tot 1980 als hoogleraar aan de TU Delft (Onderafdeling Wiskunde) verbonden. Hij is 92 jaar oud. De ITC congressen gaan terug tot 1955, en Kosten stond mede aan de basis; hij was betrokken bij de organisatie van het tweede ITC, in 1958 in Den Haag. Onder de zeven personen die tot nu toe een ITC lifetime achievement award hebben ontvangen zijn twee Nederlanders; naast Kosten ook J.W. Cohen.

Onno Boxma



Leendert Kosten

Nieuwe ereleden Koninklijk Wiskundig Genootschap

Op het Nederlands-Belgisch Mathematisch Congres van 16 en 17 april in Tilburg werden prof.dr. P.C. Baayen, prof.dr. J.H. van Lint en J.A.F. de Rijk (beter bekend als Bruno Ernst) tot erelid van het Koninklijk Wiskundig Genootschap benoemd.

De nieuwe ereleden werden door de voorzitter, Eduard Looijenga, gehuldigd. In een korte toespraak tot elk van de drie nieuwe ereleden gaf hij een kort overzicht van hun vele verdiensten en hij bekrachtigde zijn woorden met het overhandigen van een fraai ingelijste oorkonde. Dit werd ondersteund door een warm applaus van de aanwezige leden.

Bron: wiskunde persdienst

Edward Lorenz krijgt Buys-Ballotprijs

De twaalfde gouden Buys Ballot medaille is door de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen toegekend aan de Amerikaanse meteoroloog Edward Lorenz. De medaille is op 12 mei in De Bilt uitgereikt, in het kader van de viering van het 150-jarig bestaan van het KNMI, dat in 1854 door C.H.D. Buys Ballot werd opgericht. Lorenz ontvangt de medaille voor zijn pionierswerk op het gebied van de chaostheorie.

Hij onderzocht omstreeks 1960 op het Massachusetts Institute of Technology de mogelijkheden om met behulp van eenvoudige atmosferemodellen statistische verwachtingsmethoden te ontwikkelen. Toen hij bij het herhalen van een berekening de invoergegevens afrondde tot drie cijfers achter de komma in plaats van tot zes cijfers, ontdekte hij dat het resultaat van de berekening nu sterk afweek van het oorspronkelijke resultaat. Kennelijk was er sprake van een bijzondere gevoeligheid van de rekenresultaten voor kleine verschillen in de begintoestand.

Tot de bekendheid van Lorenz buiten de meteorologische wereld heeft bijgedragen dat hij aantoonde dat de bijzondere gevoeligheid reeds kan voorkomen bij betrekkelijk eenvoudige systemen. Hij beschreef de eigenschappen van een vergelijkingstelsel met slechts drie veranderlijken. De grafiek van de oplossing van dit stelsel is wereldberoemd geworden.

bron: website KNMI

Abelprijs voor Atiya en Singer

De Noorse Academie voor Literatuur en Wetenschappen heeft de Abelprijs 2004 toegekend aan Sir Michael Francis Atiyah (University of Edinburgh) en Isadore M. Singer (Massachusetts Institute of Technology). Zij ontvangen de onderscheiding voor hun ontdekking van de indexstelling, en voor het tot stand brengen van nieuwe verbanden tussen wiskunde en de mathematische fysica. In het septembernummer van dit blad zal aandacht worden gegeven aan hun werk.

bron: website Abel Prize

Manjul Bhargava imponeert op het NMC 2004

Op 16 en 17 april vond in Tilburg het Nederlands-Belgisch Mathematisch Congres plaats. De veertigste editie in even zovele jaren, en toch een aantal noviteiten. Tilburg als lokatie was nieuw (met een wiskundige Rector Magnificus als gastheer!) en ook de zaterdag als tweede congresdag. De gecombineerde organisatie met de 'Belgian Mathematical Society' (handig het probleem van tweetaligheid vermijdend) was in 1996 al eens vertoond in Antwerpen, maar toen ingebed in het American Mathematical Society circus. Hier ligt het begin van een traditietje, want volgend jaar (van vrijdag 20 mei tot en met zondag 22 mei) is het Congres in Gent, samen met de Belgen, de Luxemburgers en de Fransen!

Absoluut hoogtepunt dit jaar vormde de Beeger lezing door Manjul Bhargava, die diepte combineerde met helderheid in een verhaal over zijn spectaculaire resultaten omtrent representeerbaarheid van gehele getallen door kwadratische vormen.

De vijf-minutenpresentaties door promovendi werden ook weer enthousiast ontvangen (vertelde men mij; ze waren wat weggestopt op de vrijdag-namiddag). Het lange verhaal over veilingen op zaterdag werd prettig onderbroken door de opwindende van het zelf meedingen naar wiskunstige objecten; naar verluud was er een soortgelijk aangename afwisseling met praktische voorbeelden bij een voordracht over gokken, ook een onderwerp dat goed paste bij de Tilburgse wiskunde.

Verder viel me de wisselende beheersing van elementaire presentatietechnieken en van de voertaal Engels door de sprekers op, deed het voorlezen van een voordracht (over geschiedenis van wiskunde) me beseffen hoe ongebruikelijk dat in onze cultuur is, leken de interessantste parallele sessies samen te vallen, en bleek dat een groot deel van Toonaangevend Wiskundig Nederland het programma weer niet de moeite waard vond om te komen. We zullen zien of verdere internationalisering daarin verandering brengt.

Het jaarlijkse dieptepunt — de rituele sneltreinjaarvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap — werd dit keer opgevolgd door de verkiezing van drie ereleden: Baayen, Van Lint, en De Rijk (= Bruno Ernst). Dit vond plaats in een wat troesteloze ambiance, waarvan scheidend voorzitter Looijenga nog het beste probeerde te maken. Hij mocht ook zijn opvolger, Jan van Mill (VU), voorstellen en laten benoemen.

De belofte van Neil Sloane als slotspreker hield een aanzienlijk deel van de deelnemers (ongeveer 175 aanmeldingen volgens de verspreide lijst), tot zaterdag 5 uur van de straat. Ook al werd de belofte door een wat anecdotische voordracht niet voor iedereen ingelost, men stapte toch overwegend zichtbaar voldaan van het congres de voorjaarszon in.

Wieb Bosma

Wiskunde en werkelijkheid — cultuurgeschiedenis van wiskunde

Van 28 juni tot en met 2 juli wordt op de Internationale School voor Wijsbegeerte te Leusden de zomercursus *Wiskunde en werkelijkheid* georganiseerd. De geschiedenis van de wiskunde zal vanuit een speciale invalshoek worden beschouwd. De vertrouwde gang van het oude Babylonië, via de Arabieren en de Grieken, naar het moderne en postmoderne Westen wordt afgelegd met een bijzondere en filosofische invalshoek, namelijk de verhouding tussen wiskunde en werkelijkheid. Hoe dacht men in verschillende tijden over deze verhouding en hoe gaf men de relatie concreet gestalte door toepassing of ander gebruik van het wiskundig denken? Om de grondslagenstrijd, het wiskundig modelleren en de *computational science* te begrijpen, helpt het om te bestuderen hoe de klassieke denkers de verhouding tussen wiskunde en werkelijkheid zagen. Een filosofische behandeling van begrippen als wiskundige abstractie, mathematisering, toepassen en modelleren verheldert de cultuurhistorische blik op de wiskunde.

De cursus biedt zowel zware als lichte kost. Hij voert volgens Bartjens langs de rekenmeesters, via de schilderkunst van de Renaissance, over het toneel van het gevluchte juffertje, langs het graf van Brouwer naar de karikatuur van Tinbergen. Sprekers zijn, naast de organisatoren Gerard Alberts en Erik Heijerman, in volgorde van opkomst, Frans de Haas, Louk Fleischhacker, Paul Bakker, Marjolein Kool, Joop Doorman, Klaas Landsman, Rienk Vermij, Danny Beckers, Teun Koetsier, Albert Visser en Robbert Dijkgraaf.

Voor het programma en aanmelding: www.isvw.nl

Gerard Alberts



Jan Tinbergen in het tijdschrift *Wij*, 1936

Stieltjesweek Geschiedenis van de Wiskunde

Van 6 tot 10 september wordt in het Lorentz Center in Leiden een cursus biografische geschiedschrijving gegeven. Deelnemers melden zich aan en kiezen een wiskundige om te beschrijven.

Gedurende de week zijn er excursies naar archieven. Iedere dag begint met een voorbeeld van een biografie, ter inspiratie. Jan Hogendijk, Fokko Jan Dijksterhuis, Danny Beckers, Stefan Röhle en David Rowe geven voorbeelden van Omar al-Khayyam tot Einstein. Jan van Maanen, Danny Beckers en Gerard Alberts schetsen de verschillende episodes van wiskundebeoefening. David Rowe en Henk Bos zorgen voor historiografische verdieping. Er zijn geen kosten aan verbonden. Aanmelden is verplicht, in verband met de zomervakantie graag zo snel mogelijk (www.lc.leidenuniv.nl/lc/web/program.php3?jaar=2004). Gerard Alberts



Samen rekenen op het International Congress of Mathematicians, 1954

Nieuw tijdschrift *Convergence*

De Mathematical Association of America (MAA) presenteert een nieuw historisch tijdschrift, het online magazine *Convergence* —“where mathematics, history and teaching interact”. Victor Katz en Frank Swetz zijn de redacteurs. Hun motief: “We willen allemaal ons wiskundeonderwijs zo brengen dat de leerlingen de zin ervan inzien. Toch lopen we telkens tegen de vragen op ‘Waarom moeten we dit leren?’ of ‘Wanneer zullen we dit ooit gebruiken?’. De vragen zijn terecht en dikwijls biedt de geschiedenis een antwoord, [...]”.

Convergence richt zich speciaal op leraren op de middelbare school en biedt primair overzichtsartikelen over de geschiedenis van een wiskundig begrip of een bepaalde historische ontwikkeling die didactisch aantrekkelijk zijn. Daarnaast biedt het uitwisseling van leservaringen en, zeer aantrekkelijk, plaatjes en filmpjes die je kunt downloaden om in de klas te gebruiken. bron: <http://convergence.mathdl.org/index.jsp>

Studiegroep Wiskunde met de Industrie te Delft

Van maandag 15 maart tot en met 19 maart vond in Delft de 48ste Studiegroep Wiskunde met de Industrie plaats. De organisatoren Cor Kraaikamp, Kees Oosterlee en Hai Xiang Lin zijn er uitstekend in geslaagd om zeven interessante problemen uit industrie en maatschappij te destilleren. Er kwamen ongeveer zestig deelnemers op af. De problemen waren zeer verschillend van aard, zodat het voor alle deelnemers gemakkelijk was een geschikt probleem te vinden.

Een probleem dat erg tot de verbeelding sprak, was het vinden van lekjes in een filter voor het zuiveren van water; het filter bestaat uit vele duizenden rietjes. Voor de oplossing werden allerlei ideeën aangedragen, van het gebruik van geluid tot het opzuigen van lijm. De rekenkamer zocht een methode om de ernst van boekhoudkundige fouten te kunnen inschatten. Het Centraal Bureau voor Statistiek zocht een methode voor het anonymiseren van databestanden: hoe kun je door

zogenaamde *post-randomisatie* elementen uit je populatie onherkenbaar maken op zo’n manier dat het informatieverlies zo klein mogelijk is? Verder waren er nog het probleem van het modelleren van een polymeervezelspinner, het modelleren van overlast van verkeerswegen en het vergelijken van binnenlandse en buitenlandse optieprijzen.

Een nieuwe ontwikkeling was het aandragen van een probleem door de organisatie zelf. Uitgerekend moest worden of de resonantie, veroorzaakt door de grote Bourdonklok van 8750 kg in de scheve toren van de Oude kerk in Delft gevaar op kon leveren voor het verder scheuren van de wand van de toren. In *De Volkskrant* werd een kritische kanttekening gemaakt bij het feit dat er niet door een instantie, zoals bijvoorbeeld de gemeente Delft, om dit onderzoek gevraagd was. Naar mijn idee was het juist een mooie aanleiding tot onafhankelijk onderzoek. Derk Pik

Bij toeval veroordeeld?

Op 2 april jongstleden organiseerde de Vereniging voor Statistiek en Operationele Research een bijeenkomst naar aanleiding van de rechtszaak tegen de verpleegster Lucy de B., die onlangs in hoger beroep is veroordeeld voor de moord op zeven patiënten en poging tot moord op nog eens drie patiënten van de ziekenhuizen waar zij werkte. Zowel de verdediging als het openbaar ministerie deden beroep op kansrekenaars en statistici om iets te zeggen over de mogelijkheid dat Lucy “toevallig” met zoveel sterfgevallen in aanraking kwam. Henk Elffers, getuige-deskundige voor het Openbaar Ministerie en Ronald Meester, getuige-deskundige voorgesteld door de verdediging, zetten hun standpunten uiteen op de bijeenkomst. Verder waren uitgenodigd Marjan Sjerps van het Forensisch instituut en Aart de Vos, die in de publiciteit trad met pleidooien voor het gebruik van Bayesiaanse statistiek in deze zaak.

De middag begon met een algemene inleiding van Sjerps over de rol van getuige-deskundigen en statistische argumenten in de rechtspraak. Vervolgens rekende Elffers voor dat als de (bijna-) sterfgevallen willekeurig over het dienstrooster van de verplegers in het betreffende ziekenhuis verdeeld zouden zijn, de kans dat een van de verplegers met alle gevallen in aanraking zou komen 1 op 300 miljoen is. Omdat hij dit een “kleine” kans vindt, concludeerde hij dat het geen toeval was dat Lucia in alle gevallen dienst had.

Meester zette een aantal kanttekingen bij dit betoog. Ten eerste is er de kwestie van modelkeuze. Waarom zou je in deze berekening bijvoorbeeld alleen naar het ziekenhuis in kwestie kijken? Je kan even makkelijk rechtvaardigen dat je regionaal, landelijk of zelfs wereldwijd moet kijken. Dit zou zeer waarschijnlijk tot een andere kans leiden, dus wat is de betekenis van die ‘1 op 300 miljoen’? Ten tweede is er de vraag hoe je de uitkomst van dit soort berekeningen aan de rechters presenteert. Meester vindt de manier waarop Elffers zijn resultaten uitlegt misleidend. Hij vindt dat je in dit soort gevallen uiterst terughoudend moet zijn, omdat het anders leidt tot onzinnige uitspraken van het type “de kans op toeval is 1 op 300 miljoen” en omdat de niet-kansrekenaars maar moeilijk kunnen inschatten wat de reikwijdte van de rekenpartij is. Om de verwarring compleet te maken, legde Aart de Vos ten slotte uit dat de voorgaande sprekers zowiezo onzin uitkraamden, omdat zij ‘klassieke’ statistiek bedrijven, terwijl hij als een van de weinigen begrijpt dat alleen een Bayesiaanse aanpak tot de Echte Waarheid kan leiden.

In de afsluitende discussie kwamen de sprekers (gelukkig?, helaas?) niet veel nader tot elkaar. Harry van Zanten

Danny Beekers

Universiteit Nijmegen, Mathematisch Instituut

Postbus 9010, 6500 GL Nijmegen

dbeckers@sci.kun.nl

Oud Archief

Wiskunde van nu is voor een groot deel het werk van mensen die al lang geleden zijn gestorven. Wat waren dat voor mensen en wat hield hen bezig? Hoe verdienden ze de kost en hoe keek de maatschappij tegen hen aan? Danny Beekers, onderzoeker in de geschiedenis van de wiskunde en werkzaam als docent wiskunde aan De Monnikskap in Nijmegen, neemt ons mee in de archieven van de wiskunde.

In 1815 werd wiskunde een verplicht vak op de Nederlandse scholen. In 1826 werd voor alle duidelijkheid nog expliciet bij wet vastgelegd welke onderdelen van de wiskunde behandeld dienden te worden. Van de rekenkunde moesten leerlingen de rekenkundige operaties in gehele getallen, decimale en gewone breuken beheersen, en daarnaast worteltrekking kunnen uitvoeren en logaritmes kunnen gebruiken. Uit de algebra werd bekend verondersteld het oplossen van (stelsels) lineaire vergelijkingen en vierkantsvergelijkingen. De meetkunde was verplicht tot en met de stelling van Pythagoras, gelijkvormigheid en het berekenen van oppervlaktes.

Die verplichting kwam niet uit de lucht vallen. In de periode voorafgaand aan 1815 verschenen er in diverse plaatsen initiatieven van genootschappen of docenten die een wiskundecursus aanboden. In Amsterdam bood bijvoorbeeld de Maatschappij *Felix Meritis* sinds 1777 wiskundelessen aan ten behoeve van de kinderen van de leden. Over deze lessen zijn we betrekkelijk goed geïnformeerd, omdat de koopmanszoon Jan Pijnappel de lessen bezocht en beschreef in zijn dagboek.

Jan Pijnappel bezocht de lessen in 1806 en 1807 op min of meer vrijwillige basis — zijn ouders hadden hier natuurlijk op aangedrongen. De vader van Jan was een koopman in goede doen. Hij was het aan zijn stand verplicht om Jan een goede opleiding te bezorgen en als lid van *Felix Meritis* was het mogelijk om zijn zoon in te schrijven voor de lessen. Overdag

ging Jan en naar school en 's avonds hielp hij vaak mee op het kantoor van zijn vader.

De docent van *Felix Meritis* was in die jaren Hendrik de Hartog (ca. 1750-1838). In de dagboeken van Jan kan men lezen dat de koopmanszoon op maandagavond (wanneer de werkzaamheden op kantoor dat toelieten) naar *Felix Meritis* ging om de wiskundelessen bij te wonen. Daar kreeg hij les in de rekenkunde, over decimaalbreuken en logaritmen, algebra en meetkunde. De Hartog dicteerde een stuk en werkte vervolgens een aantal opgaven uit. Eens per jaar moesten de leerlingen laten zien hoever ze gevorderd waren in de wiskunde. Dan werd er een examen afgenomen — een jaarlijks terugkerend spannend moment voor Jan, hoewel hij het er naar eigen zeggen iedere keer weer redelijk van af bracht.

Meetkunde behandelde De Hartog uit het toen veel gebruikte leerboek van Pybo Steenstra. Waarschijnlijk is het pas later aan het menu van de wiskundelessen toegevoegd: eind achttiende eeuw werden passer en lineaal aangeschaft om op een demonstratiebord figuren mee te kunnen tekenen. Jan vond in het bijzonder meetkunde leuk. Na afloop van een van de lessen noteert hij enthousiast in zijn dagboek dat De Hartog de stelling van Thales had behandeld en daar een paar leuke toepassingen aan had toegevoegd.

Over de algebra, die De Hartog naar eigen inzicht behandelde met het (vroeg achttiende-eeuwse) algebraboek van Pieter Venema als leidraad, was Jan minder enthousiast. Hij vond het een lastig onderwerp en bovendien waren de opgaven hem niet interessant genoeg. De rekenkunde vond hij veel leuker. Hoewel op kantoor niet toepasbaar zag hij in dat de logaritmen een enorme hoeveelheid rekenwerk konden besparen.

In de differentiaalrekening zag Jan geen heil. Hij vond het wel aardig, maar als echte koopmanszoon zag hij het doel van het rekenwerk niet. Op 24 november 1806 noteerde hij

in zijn dagboek: "Heden avond genoot ik met nog een half dozijn andere Jongelieden [...] de eer, om de lessen van de Hr. Hartog in de Hooge Mathesis bijtewoonen en dit beviel mij heel wel, schoon ik met dat al niet vind, dat de beoeffening van deze stukke, important veel Nut aanbrengt"

Uit de dagboeken valt te lezen dat De Hartog in zijn lessen net iets meer deed dan in 1815 bij wet van de scholen werd geëist.

In 1822 besloot Hendrik de Hartog met de lessen te stoppen. Hij voelde zich te zwak om nog wekelijks te doceren. De belangstelling voor de lessen was inmiddels teruggelopen: leerlingen konden aan de Latijnse of Franse school nu ook kennis maken met wiskunde. Toen na een jaar met een nieuwe docent de leerlingenaantallen niet aantrokken besloot het bestuur van *Felix Meritis* de wiskundelessen stop te zetten. Een aantal generaties leerlingen had op dat moment op plezierige wijze kennis gemaakt met wiskunde. ◀

Literatuur

Danny Beekers, "*Het despotisme der Mathesis*", Hilversum: Verloren (2003)



Bas Edixhoven

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
edix@math.leidenuniv.nl

Inaugurele rede

Van piramides tot mo

Volgens een bekend citaat van Hermann Weyl is het introduceren van getallen als ruimtelijke coördinaten een gewelddadige handeling. Echter, juist deze toevoeging van getallen aan ruimtelijke objecten, van algebra aan meetkunde is de laatste eeuw een zeer vruchtbaar gebied gebleken, dat culmineerde in het bewijs van de laatste stelling van Fermat. Het onderzoek van Bas Edixhoven bevindt zich ook op dit grensgebied. Sinds september 2002 is hij benoemd tot hoogleraar meetkunde aan de Universiteit Leiden; op 9 januari 2004 sprak hij onderstaande inaugurele rede uit. Hiervoor was hij tien jaar hoogleraar aan de Université de Rennes I.

Toen ik 16 jaar oud was, en in de vijfde klas van de middelbare school zat, ging mijn broer elektrotechniek studeren in Delft. Ik was meteen gegrepen door de boeken over natuurkunde en wiskunde die hij mee naar huis bracht: de hele opzet was totaal verschillend van wat ik op school gewend was. Van alle stellingen werden echte bewijzen gegeven. Ik had werkelijk het gevoel dat ik tot dat moment mijn hersens nooit echt had gebruikt. Mijn toekomstplannen veranderden: het idee

van een studie in de diergeneeskunde werd vervangen door het plan natuurkunde en wiskunde te gaan studeren.

Een paar maanden later al begon mijn onderzoekscarrière. Ik vroeg mij af of er een formule was, analoog aan de welbekende a-b-c-formule, voor de oplossingen van een derdegraadsvergelijking in één variabele. Nadat ik werkelijk van alles had geprobeerd, vond ik inderdaad zo'n formule. Later leerde ik dat del Ferro en ook Tartaglia die formule, bekend als de formule van Cardano, al rond 1500 hadden ontdekt. Daarna was de vierdegraadsvergelijking makkelijk. Maar vanaf graad vijf gaat het anders, las ik in een goede encyclopedie. Pas drie jaar later, in de zomer na het tweede jaar van mijn studie natuurkunde en wiskunde in Utrecht, leerde ik de details van deze zaak uit het inmiddels aangeschafte algebraboek.

In de zomer na het derde studiejaar was ik op fietsvakantie in Frankrijk. Daar, in een dorp van zo'n driehonderd inwoners, las ik in het blad *Science et Vie* een artikel over het toen zeer recente werk van Faltings in de algebraïsche meetkunde. Gefascineerd daardoor besloot ik mij in die richting te specialiseren, temeer daar er in Utrecht een expert op dit

gebied aanwezig was, Frans Oort, die het jaar daarop een college over dit onderwerp gaf.

Twee jaar later studeerde ik af in de wiskunde, met een doctoraalscriptie over zogenaamde 'modulaire krommen', onder leiding van Frans Oort en Bert van Geemen. Daarna ging ik door als promovendus. Na de promotie werkte ik twee jaar als Assistant Professor in Berkeley, en vervolgens één jaar in Utrecht, gefinancierd door een Huygensbeurs van N.W.O. Daarna ben ik tien jaar lang met veel genoegen in de Franse stad Rennes werkzaam geweest als hoogleraar. Inmiddels was ik getrouwd en waren er twee kinderen geboren. De wens weer dichterbij de familie te zijn bracht ons ertoe te proberen naar Nederland terug te keren. Dit resulteerde in mijn aanstelling hier in Leiden.

In de rest van deze rede zal ik proberen u uit te leggen wat ik zelf onder meetkunde versta, en wat voor problemen op dit moment belangrijk zijn in mijn eigen onderzoek, en in de meetkunde in het algemeen. De hedendaagse algebraïsche meetkunde, mijn eigen specialisme, heeft echter de reputatie zo technisch en abstract te zijn, dat het op een zinvolle wijze erover spreken, voor een breder publiek



Bas Edixhoven

dulaire krommen

zoals u, een moeilijke opgave is. De spreker kan dan kiezen uit verschillende strategieën om deze opgave op te lossen.

Één strategie is het publiek een gladde multimedia-presentatie, vol plaatjes, animaties en geluid, voor te schotelen. Hierbij kan het publiek rustig genieten, zonder zelf enige inspanning te leveren. Echter, de traditie wil dat in deze zaal de spreker spreekt zonder moderne hulpmiddelen.

Een andere strategie is alleen te spreken over elementaire zaken. Deze strategie kan makkelijk leiden tot het beeld dat wiskundigen wereldvreemden zijn, die zich bezig houden met eenvoudig te formuleren, maar toch kennelijk moeilijke problemen, irrelevant voor de echte wereld. Omdat dit beeld volkomen onjuist is, valt ook deze keuzemogelijkheid af.

De strategie die ik heb gekozen is te proberen in gewone, duidelijke taal, zonder formules, te praten over zaken die mij interesseren. Hierbij kan ik vanzelfsprekend niet ingaan op de meer technische aspecten van de wiskunde. Het einddoel van mijn verhaal van vandaag is u een beschrijving te geven van ten minste één actueel probleem in de meetkunde

de en van één aspect van de zogenaamde modulaire krommen die zo'n belangrijke rol in mijn eigen werk spelen. Onderweg daar naar toe wil ik ook samen met u wat wiskunde doen.

Thales en de piramide van Cheops

Hedendaagse onderzoeksvragen worden vaak duidelijker als we ze bekijken vanuit een historisch perspectief. Daarom zal ik met zeer oude meetkunde beginnen, en een paar belangrijke ontwikkelingen in de geschiedenis noemen, zodat de meetkunde van nu als een logisch vervolg kan worden gezien. Het lezen van het boek *Le théorème du perroquet* van Denis Guedj [2], waarin de geschiedenis van de wiskunde in de vorm van een detectiveroman is gegoten, was voor mij een bron van inspiratie bij het voorbereiden van deze rede.

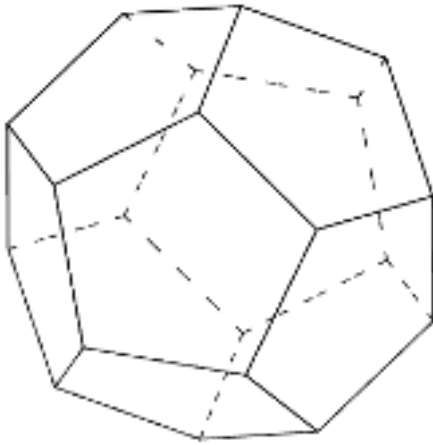
Mijn verhaal over meetkunde begint met Thales van Milete. Thales wordt algemeen beschouwd als de vader van de Griekse meetkunde, sterrenkunde en wijsbegeerte. Hij leefde van 624 tot 547 voor Christus (zie [3]), in een gebied dat nu tot de westkust van Turkije behoort. Op reis in Egypte ziet hij de toen al zo'n tweeduizend jaar oude piramide van

Cheops, en wil hij weten hoe hoog dit enorme bouwsel is.

Op *dit* moment wil ik een beroep doen op uw voorstellingsvermogen: stelt u zich deze piramide eens voor. Als u dat handig vindt, kunt u daarbij uw ogen sluiten. De piramide staat op een vlakke ondergrond. Het is een vierzijdige piramide, dus de onderkant is een vierkant. De top van de piramide ligt recht boven het middelpunt van dat vierkant. Wij kunnen ons dit goed voorstellen als een enorme tent. In het midden van het basisvierkant staat een tentstok, rechtop. Tussen de top van de tentstok en het vierkant is een strak gespannen tentdoek. De binnenkant van de tent is opgevuld met steen. Naast de piramide staat Thales, bijna verwaarloosbaar klein.

Hoe kan hij nu de hoogte meten, dat wil zeggen, de lengte van de tentstok? Deze tentstok zelf is ontoegankelijk, want de piramide is gevuld met steen.

De oplossing van Thales is erg mooi. Hij merkt op dat de zon schijnt, zodat ieder voorwerp zijn schaduw op de grond heeft. Vervolgens redeneert hij: de lengte van de schaduw van een rechtopstaand voorwerp is evenredig met de hoogte van dat voorwerp, ofwel, bij-



voorbeeld, een tweemaal zo hoge vlaggemast zal een twee maal zo lange schaduw hebben. In het bijzonder geldt dit voor de tentstok: als de lengte van de schaduw van de tentstok x maal groter is dan de lengte van de schaduw van Thales, dan is de tentstok x maal hoger dan Thales.

Hij gaat dus de lengte van de schaduw van de tentstok meten, dat wil zeggen, het lijnstuk tussen de schaduw van de top van de piramide en het middelpunt van het basis-vierkant. Een probleem is nu dat hij niet rechtstreeks het deel daarvan kan meten dat binnen de piramide ligt. Daarom wacht hij totdat, door het draaien van de zon, de schaduw van de tentstok loodrecht op een zijde van het basisvierkant staat. Dan blijkt namelijk dat het deel binnen de piramide gelijk is aan de halve lengte van een zijde van het basisvierkant, die hij kan meten. Op dat moment kan Thales de hoogte van de piramide berekenen. Die blijkt uiteindelijk ongeveer 147 meter te zijn, een flink stuk hoger dan de Domtoren in Utrecht.

Met behulp van een gelijksoortig principe bedacht Thales een manier om de afstand van een waarnemer tot een schip in zee te bepalen. Van groot belang is dat Thales het begrip *verhouding* heeft geïntroduceerd en erover heeft geredeneerd. Hij schijnt ook de eerste te zijn die het begrip *hoek tussen twee lijnen* als een wiskundige grootheid behandelde (zie pagina 40 van [2]).

Nu we toch bij Thales zijn, is het moeilijk de volgende twee anekdotes niet te vermelden. De eerste is dat hij een fortuin verdiende door, na een paar mislukte olijfoogsten, alle olijfpersen in de omgeving op te kopen, en die na de oogst van dat jaar, die uitzonderlijk goed was, voor veel geld te verhuren of te verkopen. Door goed de natuur te observeren had hij de oogst van dat jaar kunnen voorspellen. De tweede anekdote is dat Thales eens tijdens een wandeling in een kuil viel omdat hij al

zijn aandacht besteedde aan het kijken naar de sterren. Verhalen over verstrooide professoren deden kennelijk ook toen al de ronde.

Regelmatige veelvlakken

We maken nu een sprong, over Pythagoras heen, die behalve wiskundige ook sekteleider en olympisch kampioen in het boksen was, naar de tijd van Plato. Plato leefde van 428 tot 348 voor Christus. Zijn naam is verbonden aan de vijf regelmatige veelvlakken, ook wel platonische lichamen genoemd: het viervlak (ofwel tetraëder), het zesvlak (kubus), het achthek (octaëder), het twaalfvlak (dodecaëder) en het twintigvlak (icosaëder).

Van deze veelvlakken is de kubus ongetwijfeld het meest bekend. Denkt u maar aan een flatgebouw dat even breed als diep en hoog is, of aan een dobbelsteen. De kubus bestaat uit zes zijvlakken, allen even grote vierkanten. In ieder van de acht hoekpunten komen drie vierkanten bij elkaar. Het aantal ribben is twaalf: vier in elk van de drie richtingen.

Het viervlak is een piramide, met, in tegenstelling tot die van Cheops, een gelijkzijdige driehoek als basis. Op het middelpunt van deze driehoek zet u dan een tentstok, precies zo hoog dat de afstanden naar de hoekpunten van de basisdriehoek precies gelijk zijn aan de lengte van de zijden van de driehoek. De tent die u zo krijgt is een regelmatig viervlak. Dat heeft dus vier hoekpunten, vier zijvlakken en zes ribben. De zijvlakken zijn gelijkzijdige driehoeken, en in ieder hoekpunt komen er drie bij elkaar.

Het achthek kunt u zich als volgt voorstellen. U begint met een vierkant op de grond. Dan zet u een tentstok van de goede lengte in het midden van dit vierkant. Dat levert een piramide op. Dan plakt u twee van deze piramides langs hun vierkanten aan elkaar, en daar is dan het achthek. Het achthek heeft zes hoekpunten en acht gelijkzijdige driehoeken als zijvlakken, waarvan er in elk hoekpunt vier bij elkaar komen.

Deze eerste drie van de vijf platonische lichamen zijn zoals u ziet makkelijk te construeren. Hun ontdekking is dan ook geen verrassing, des te minder omdat ze ook in de natuur vanzelf voorkomen als kristallen. De overige twee, het twaalfvlak en het twintigvlak, lenen zich niet voor kristalvorming en komen dus ook niet als kristallen in de natuur voor. Hun bestaan is dan ook veel verrassender. Hermann Weyl schreef: *de ontdekking van de laatste twee regelmatige veelvlakken is één van de mooiste in de geschiedenis van de wiskunde. Het spoor van deze ontdek-*

king leidt met redelijke zekerheid naar Zuid-Italië. De suggestie is gedaan dat dit te maken heeft met de daar voorkomende pyrietkristallen. De zijvlakken van de pyrietkristallen waar het hier om gaat zijn weliswaar vijfhoeken, maar niet regelmatig.

Zoals gezegd, komen het twaalfvlak en het twintigvlak niet als kristallen in de natuur voor. Wel is het zo dat veel virussen, bijvoorbeeld HIV, de vorm van het twintigvlak hebben. [10] Helaas helpt dat mij nu niet om deze vormen voor u zichtbaar te maken, want virussen zijn met het blote oog zeker niet te zien.

Om nu niet het onmogelijke van uw voorstellingsvermogen te vragen is hier een plaatje van een twaalfvlak. Zoals u ziet, zijn de zijvlakken regelmatige vijfhoeken. Er zijn er twaalf van, namelijk één plus vijf plus vijf plus één, en per hoekpunt komen er drie van deze vijfhoeken samen.

Nu ik u het twaalfvlak heb laten zien, laat ik u ook maar meteen het twintigvlak zien. De twintig zijvlakken, vier maal vijf als u ze telt, zijn regelmatige driehoeken. Per hoekpunt komen er vijf bij elkaar.

Ieder nieuwsgierig persoon zal, na het zien van deze vijf regelmatige veelvlakken, zich ten eerste afvragen of de laatste twee *echt* bestaan (want misschien zijn de modellen die ik liet zien maar bij benadering kloppend), en ten tweede of er nog *meer* zijn. De wiskunde geeft, na een precieze definitie van het begrip regelmatig veelvlak, hierop een duidelijk antwoord: deze vijf bestaan, en er zijn geen andere.

Een essentieel onderdeel van het bewijs hiervan wil ik u niet onthouden. Uit het feit dat alle punten van een regelmatig veelvlak naar buiten gericht zijn, volgt, bijvoorbeeld door naar een uitklapmodel te kijken, dat in ieder hoekpunt de som van de hoeken in de zijvlakken kleiner is dan 360 graden. Laat ik dit nu voor u demonstreren door het twintigvlak rond één hoekpunt open te snijden en uit te vouwen. De hoek die na uitvouwen overblijft noemen we het hoekdefect. Zoals u ziet, is het hoekdefect in een hoekpunt van het twintigvlak gelijk aan 60 graden: $360 \text{ min } 5 \text{ keer } 60$. Laten we bijvoorbeeld ook het hoekdefect in een hoekpunt van een de kubus bepalen. Er komen daar drie vierkanten samen, dus is de som van de hoeken gelijk aan drie keer 90 graden, dat wil zeggen, aan 270 graden. Het hoekdefect is dan $360 \text{ min } 270$ is 90 graden.

Stel nu dat we een regelmatig veelvlak willen bouwen waarvan de zijvlakken regelmatige n -hoeken zijn, met n een geheel getal, minstens 3. In ieder hoekpunt moet een vast

aantal van deze n -hoeken bij elkaar komen. Dan moet gelden dat dat aantal keer de hoek van de regelmatige n -hoek kleiner is dan 360 graden. Nu moeten we die hoek van de n -hoek uitrekenen. Als we een rondje lopen over de zijden van de n -hoek, dan draaien we in totaal 360 graden rond, dus per hoek draaien we $360/n$ graden. De hoek van de n -hoek is dan $180 - 360/n$ graden, want twee snijden de lijnen, zoals hier twee doorgetrokken zijden van de n -hoek, geven twee hoeken waarvan de som 180 graden is.

Voor n gelijk aan 3 geeft dit $180 - 120$, dus inderdaad 60 graden per hoek voor de driehoek. Als we dus ons regelmatig veelvlak uit driehoeken willen opbouwen, dan kunnen er 3, 4 of 5 per hoekpunt samenkomen, want 5 keer 60 is nog wel kleiner dan 360, maar 6 keer 60 niet meer. Op deze manier ontstaan het viervlak, het achtvlak en het twintigvlak.

Voor $n = 4$ is de hoek gelijk aan $180 - 360/4 = 90$ graden. Als we dus vierkanten gebruiken, dan kunnen er alleen maar 3 in een hoekpunt samenkomen, want 4 keer 90 is al niet meer kleiner dan 360. Hier hebben we dus alleen het zesvlak, de kubus.

Voor $n = 5$ is de hoek gelijk aan $180 - 72 = 108$ graden. Nu is 3 keer 108 gelijk aan 324, dus kleiner dan 360, maar 4 keer 108 is groter dan 360. Als we vijfhoeken gebruiken, kunnen er dus alleen drie per hoekpunt bij elkaar komen, en krijgen we het twaalfvlak.

Voor $n = 6$ is de hoek gelijk aan $180 - 60 = 120$ graden. Aangezien 3 keer 120 gelijk is aan 360, en niet kleiner, kan een regelmatig veelvlak niet opgebouwd zijn uit zeshoeken. Voor nog grotere n is het duidelijk dat de hoek, $180 - 360/n$, steeds dichterbij 180 komt te liggen. Onze berekening laat dus zien dat een regelmatig veelvlak niet opgebouwd kan zijn uit regelmatige n -hoeken als n groter dan 5 is.

Het is interessant om voor elk van de vijf veelvlakken die er wel zijn de som van de hoekdefecten uit te rekenen. Men constateert dat dat iedere keer precies hetzelfde is, namelijk 720 graden. (Dit heeft natuurlijk te maken met de Eulerkarakteristiek, en de stelling van Gauss-Bonnet, waarvan dit fenomeen een discrete versie is.) Dit betekent dus dat het hoekdefect omgekeerd evenredig is met het aantal hoekpunten. Aangezien het hoekdefect de stomphoed van het hoekpunt uitdrukt, betekent dit dat van de regelmatige veelvlakken het twaalfvlak de stompste punten heeft, en niet het twintigvlak. Aan de andere kant is voor het twintigvlak de hoek tussen aangrenzende zijvlakken het stompste. Als men dus de vraag stelt welk van de 5 regelma-

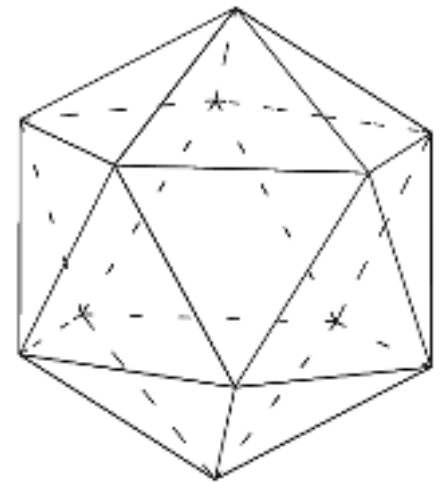
tige veelvlakken het meest op de bol lijkt, dan hangt het antwoord ervan af of men kijkt naar de stomphoed van punten of van de hoeken tussen zijvlakken. Hiermee hoop ik een eerste antwoord te hebben gegeven op een vraag die mijn collega Louis Kroes, recent benoemd tot hoogleraar in de virologie, mij stelde.

René Descartes, uitvinder van coördinaten

We gaan nu terug naar de geschiedenis van de meetkunde. De Griekse wiskunde ontwikkelde zich tot indrukwekkende hoogte. Ongeveer 300 jaar voor Christus gaf Euclides een groots overzicht van wat toen bekend was in zijn *Elementen*, een werk van dertien boeken. Van dit werk bestaan meer dan 800 uitgaven, zodat het op nummer twee staat in de lijst van meest uitgegeven boeken (pagina 187 van [2]). Mijn grootste held uit de Griekse wiskunde is Archimedes, niet zozeer om de oorlogsmachines die hij bouwde, maar omdat hij bewees dat het oppervlak van een bol met een straal van één meter gelijk is aan 4π vierkante meter, dat wil zeggen, vier maal de oppervlakte van een cirkelschijf met dezelfde straal. Archimedes leefde van ongeveer 287 tot 212 voor Christus. Pas na meer dan 1800 jaar later was er weer vooruitgang op dit gebied. (Archimedes kon echt integreren, en maakte geen fouten met het begrip *reëel getal*; zie [3].) De gebruikte techniek, integraalrekening, leert men tegenwoordig in de hoogste klassen van het Voorbereidend Wetenschappelijk Onderwijs.

De volgende grote sprong voorwaarts in de meetkunde was de uitvinding, door René Descartes, van coördinaten. René Descartes leefde van 1596 tot 1650. Zo'n 20 jaar woonde hij op verschillende plaatsen in Nederland. Daar schreef hij zijn belangrijke boek *Discours de la méthode*, dat in 1637 werd uitgegeven in Leiden. Het schijnt dat hij zijn eerder geschreven boek *Le Monde* niet durfde uit te laten geven uit angst voor de kerk. Na de veroordeling van Galileo in 1633 zat de schrik er kennelijk goed in, zelfs in Nederland.

Het idee van Descartes is, achteraf gezien, verrassend eenvoudig, vooral als men al bekend is met ruitjespapier. In een gegeven vlak kiest men een lengte-eenheid om afstanden in uit te drukken, een lijn, en vervolgens nog een tweede lijn die loodrecht op de eerste lijn staat. Het snijpunt van de twee lijnen heet de oorsprong, de lijnen zelf heten de coördinaatassen. Als deze coördinaatassen eenmaal gekozen zijn, dan kan ieder punt in het vlak beschreven worden door twee getallen, de zogenaamde coördinaten van het punt. Deze zijn de afstanden, uitgedrukt in de gekozen



lengte-eenheid, die vanuit de oorsprong gelopen moeten worden, in de richting van de coördinaatassen, om in dat punt te komen. Deze afstanden mogen ook negatief zijn.

Laten we dit bijvoorbeeld eens toepassen op de vloer van deze zaal, waarbij we als lengte-eenheid de meter kiezen. De oorsprong kies ik recht onder mij, de eerste coördinaat-as in de richting van de muur achter mij, dus van mij uit gezien van links naar rechts, en de tweede coördinaat-as in de richting van de zijmuur, van achter naar voren. Het punt recht onder mij heeft dan coördinaten 0 en 0. De coördinaten van het punt recht onder de rector magnificus, herkenbaar aan zijn fraaie ketting, zijn ongeveer 3 en -1 : dat wil zeggen, 3 naar rechts en 1 naar achteren.

Descartes laat dan zien dat, met dit soort coördinaten, meetkundige objecten algebraïsch, dat wil zeggen met behulp van vergelijkingen, beschreven kunnen worden. Bijvoorbeeld bestaat de eerste coördinaat-as uit de punten met coördinaten x en 0, waarbij x ieder willekeurig getal mag zijn. Deze lijn bestaat dus precies uit de punten waarvan de coördinaten x en y voldoen aan de vergelijking $y = 0$. Net zo wordt de tweede coördinaat-as beschreven door de vergelijking $x = 0$. De vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ beschrijft de cirkel om de oorsprong met straal één.

Deze algebraïsche beschrijving van meetkundige objecten levert op wat we tegenwoordig modieus een *win-win situatie* noemen: meetkunde en algebra profiteren van elkaar. In de meetkunde kan men ineens de te bestuderen objecten handig manipuleren, en de algebra kan profiteren van ons ruimtelijk inzicht. Zoals Descartes zelf meteen opmerkte, kan door het toevoegen van een derde coördinaat-as ook de drie-dimensionale ruim-



Pagina 26 uit *Le géométricon* van J.-P. Petit [6]. Deze Franse wetenschapper en tekenaar heeft over vele onderwerpen uit de wis- en natuurkunde stripverhalen getekend.

te worden beschreven met coördinaten.

Het leven van Descartes eindigde met een longontsteking. Één van zijn leefregels was om niet voor 11 uur 's morgens uit bed te komen, wat in Nederland kennelijk geen probleem was. Maar in 1649 haalde koningin Christina van Zweden hem over naar Stockholm te gaan. Het verhaal gaat dat hij zijn fatale longontsteking opliep tijdens wandelingen naar het paleis, omdat de koningin met hem raaklijnen wilde tekenen, om 5 uur in de ochtend. (Zie de biografie van Descartes in [4].)

Soorten meetkunde en soorten coördinaten

Nu we beschikken over coördinaten, is het

mogelijk te vertellen wat we binnen de hedendaagse wiskunde onder meetkunde verstaan. Buiten de universitaire wiskunde en natuurkunde wordt vaak gedacht dat meetkunde altijd Euclidische meetkunde is, waarin het gaat om punten, lijnen en vlakken, en misschien ook nog bollen en kegels en dergelijke, in onze drie-dimensionale ruimte. Hier volgt een citaat uit een email van twee scholieren: *Wij zijn twee 6-VWO leerlingen uit Leiden en we zijn bezig met een profielwerkstuk over meetkunde. Na veel zoeken op internet zijn we nog niet uit de hoofdlijnen van de soorten meetkunde. We gaan er nu van uit dat er twee verschillende soorten meetkunde bestaan, namelijk*

vlakke en ruimte meetkunde. [...] Er zijn nog veel meer soorten meetkunde (zoals Euclidische meetkunde, elliptische meetkunde e.d.), we weten alleen niet hoe we die in het plaatje moeten passen. Misschien kunt u ons helpen aan een volledig overzicht van hoe de meetkunde in elkaar steekt. En dan hier een citaat uit mijn antwoord: *Er is veel meer meetkunde dan alleen die van het vlak (twee dimensionaal) en van de ruimte (drie dimensionaal). Ten eerste zijn er nog veel meer mogelijke dimensies, maar nog belangrijker, de verschillende soorten meetkunde die er bestaan hebben meer te maken met de verschillende soorten vergelijkingen die men kan bestuderen. Bijvoorbeeld in het vlak kunnen we kijken naar rechte lijnen (gegeven door vergelijkingen van de vorm $ax+by=c$), of cirkels, ellipsen, parabolen, hyperbolen (die gegeven worden door vergelijkingen van graad 2). Maar niets houdt ons tegen te kijken naar vergelijkingen van willekeurige graad, of naar vergelijkingen met meer ingewikkelde functies (zoals de e-macht, sinus en cosinus en zo). Ook houdt niets ons tegen om dit soort dingen in een willekeurig aantal variabelen te doen, wat betekent: in willekeurige dimensie. Ook is er een grote variatie in de vragen die men zich kan stellen over de oplossingsverzamelingen van de vergelijkingen die men bekijkt. In mijn antwoord verwees ik de scholieren nog naar een webpagina ([7]) die een atlas van de hedendaagse wiskunde bevat. De conclusie van het antwoord is dat iedere soort meetkunde wordt bepaald door het soort vergelijkingen dat wordt bestudeerd, en door het soort vragen dat men stelt over de oplossingen van die vergelijkingen. Een belangrijke vraag is ook in hoeverre de oplossingsverzamelingen zelf ook weer gecoördinatiseerd kunnen worden. Bijvoorbeeld vormen lengte en breedtegraden een coördinaatsysteem op de wereldbol.*

Het kiezen van geschikte coördinaten

Het belangrijkste aspect van coördinaten in de meetkunde is de vrijheid die men heeft om ze te kiezen. In veel gevallen is het zo dat om problemen zo makkelijk mogelijk op te lossen het van het grootste belang is deze vrijheid tot het uiterste te benutten.

Bij Descartes hadden we de keuze van een lengte-eenheid, en twee loodrechte lijnen in het vlak, of drie loodrechte coördinaat-assen in de ruimte. Om bijvoorbeeld een cirkel in het vlak te bestuderen, is het verstandig als oorsprong het middelpunt te kiezen, en als lengte-eenheid de straal van de cirkel.

Als we echter een probleem over een aan-

tal lijnen en punten in een vlak moeten oplossen, waarbij afstanden en hoeken er niet toe doen, dan mogen we ook een willekeurig tweetal snijdende lijnen als coördinaat-assen nemen. In termen van ruitjespapier betekent dit dat de gebruikelijke vierkantjes ook wel scheefgetrokken mogen worden, tot parallellogrammen.

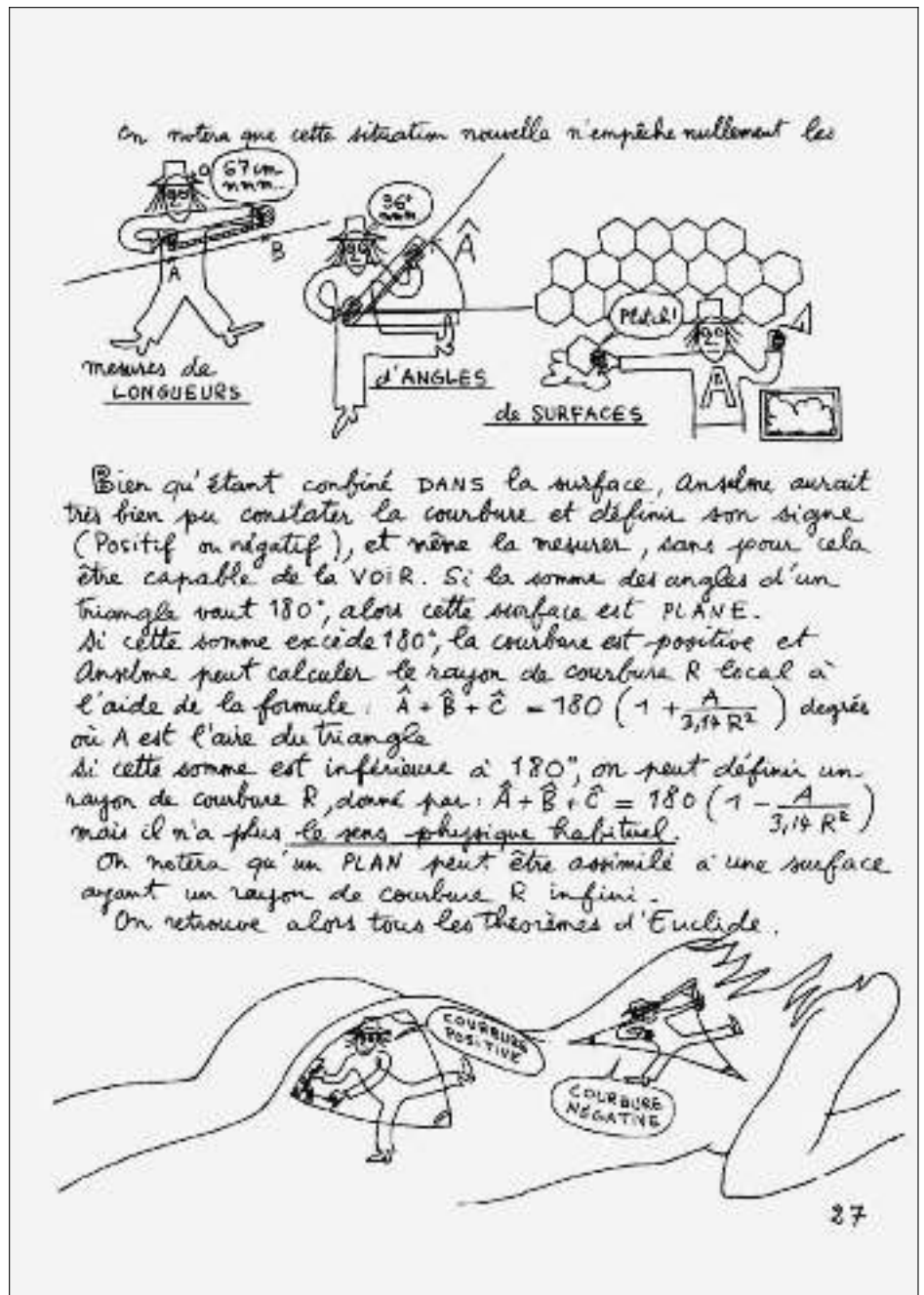
Algemener is het ook mogelijk om bijna willekeurige stelsels van krommen te gebruiken voor coördinaten. Stelt u zich voor dat we een ruitjespatroon hebben op een vlak dat gemaakt is van een rubberachtig materiaal dat we naar believen kunnen rekken of krimpen, op iedere plek en in iedere richting. Dan ontstaan er coördinaatsystemen met gekromde lijnen als coördinaat-assen. De algemene relativiteitstheorie van Albert Einstein is ontstaan, in het begin van de 20ste eeuw, uit de behoefte juist met dergelijke coördinaatsystemen te kunnen werken.

Het vermoeden van Poincaré

Een laatste sprong van een kleine 100 jaar beëindigt onze reis door de geschiedenis van de meetkunde. We zijn nu weer terug op 9 januari 2004, en we vragen ons af: wat zijn nu de belangrijke problemen en vragen in de meetkunde. Ik wil u er één noemen, het zogenaamde Poincarévermoeden in dimensie drie, nu honderd jaar oud, omdat het werk hieraan van Grisha Perelman uit Sint Petersburg al sinds april 2003 door experts wordt onderzocht, zonder dat er echte fouten in zijn gevonden (zie [5], of [9]). Als het uiteindelijk allemaal blijkt te kloppen, dan krijgt Perelman één miljoen dollar van de Clay Foundation, want het gaat hier om één van de zogenaamde zeven Millennium Problemen.

Het Poincarévermoeden is een uitspraak in de topologie, het deelgebied van de meetkunde dat alleen gaat over de vorm van objecten, zonder afstandsbebegrip. Grof gezegd: topologie is de meetkunde van rubberen objecten, ofwel, topologie is rubbermeetkunde. In deze meetkunde hebben bijvoorbeeld cirkels, ellipsen en vierkanten precies dezelfde eigenschappen, maar een cirkel en een rechte lijn niet, want als we uit een lijn een punt weglaten, dan krijgen we twee stukken, terwijl dat in het geval van de cirkel één stuk geeft.

Om u enig gevoel te geven voor het vermoeden van Poincaré in drie dimensies, is het een goed idee om eerst eens in twee dimensies te kijken. We stellen ons daartoe twee rubberen oppervlakken voor: een ballon en een zwemband. De ballon heeft de vorm van een boloppervlak. De vorm van de zwemband heet ook wel een torus. De vraag is nu: heb-



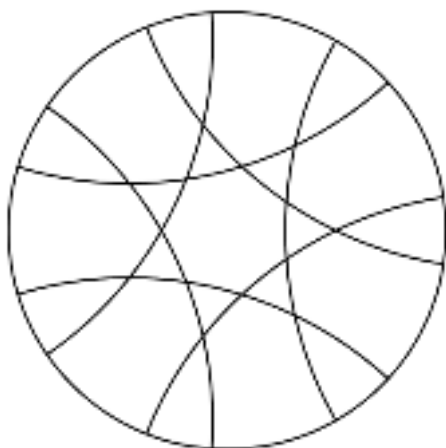
Pagina 27 uit *Le géométron* van J-P. Petit [6]

ben de ballon en de zwemband wel of niet precies dezelfde topologische eigenschappen? Let wel, het gaat hier om eigenschappen van deze oppervlakken alléén, en niet van hoe ze in onze drie-dimensionale ruimte liggen. Om een antwoord op deze vraag te vinden moeten we dus doen alsof we ons in één van deze oppervlakken bevinden, als twee-dimensionale wezens, zoals de platlanders in het beroemde boek *Flatland* van Abbott (zie [1]). Stel nu dat we in elk van deze twee oppervlakken het volgende experiment doen.

Twee platlanders pakken elk één van de twee uiteinden van een lang, elastisch stuk touw. De eerste blijft op zijn plaats, maar de

tweede maakt een lange wandeling en nadat hij weer terug is bij de eerste, knopen ze de twee eindjes touw aan elkaar. Daarna proberen ze of ze door trekken en sjoeren het touw weer binnen kunnen halen. Als u wilt, kunt u hierbij denken aan een techniek voor deze platlanders om een zee leeg te vissen. Aangezien alles zich binnen het oppervlak afspeelt, moet het touw in het oppervlak blijven.

Het zal u duidelijk zijn dat dit experiment op de ballon zal lukken, maar dat het op de zwemband niet altijd lukt: het hangt er dan vanaf hoe de tweede platlander is gelopen, want als hij bijvoorbeeld helemaal rond het gat is gelopen dan helpt er geen trekken of



Een regelmatige hyperbolische zevenhoek.

sjorren meer aan: het touw kan niet over het gat heen. Er zijn dus lussen op de zwemband die niet kunnen worden samengetrokken tot een punt.

De conclusie van ons gedachtenexperiment is dat de ballon en de zwemband niet dezelfde eigenschappen hebben in de rubbermeetkunde. In wiskundige termen heet de uitkomst van ons experiment: de ballon is enkelvoudig samenhangend, en de zwemband niet.

Twee eigenschappen die de ballon en de zwemband wel allebei hebben zijn samenhang en compactheid. Samenhang betekent dat een platlander van ieder punt naar ieder ander punt kan wandelen. Enkelvoudige samenhang, het begrip dat we net al hebben gezien, betekent dat voor twee gegeven punten dergelijke wandelingen uniek zijn, op trekken en sjorren na. Compactheid betekent dat als een platlander op een willekeurige manier met sprongen door zijn oppervlak gaat, er altijd een punt in dat oppervlak zal zijn waar hij met zijn sprongen oneindig vaak willekeurig dichtbij komt. Het zal u duidelijk zijn dat het gebruikelijke vlak niet compact is, want de platlander kan dan iedere keer één meter springen, steeds in dezelfde richting. Daarentegen zijn de ballon en de zwemband wel compact.

Het vermoeden van Poincaré in dimensie twee is nu als volgt. Stel dat een oppervlak de volgende drie eigenschappen van de ballon heeft: één, het is compact, twee, het is samenhangend, en drie, het is enkelvoudig samenhangend. Heeft dat oppervlak dan alle topologische eigenschappen van de ballon?

Het antwoord hierop was al bekend in de tijd van Poincaré: het luidt "ja". Zelfs was er toen al meer bekend: een volledige classificatie van compacte samenhangende oppervlakken. Het bewijs hiervan gebruikt vooral combinatorische argumenten. Tegenwoordig kan

men dit in een tweede- of derdejaars college wiskunde leren.

We gaan terug naar het Poincarévermoeden in dimensie drie. Nu spelen wij zelf de rol van de platlanders: wij zitten nu in onze drie-dimensionale ruimte. (We negeren hier het feit dat in onze 4-dimensionale ruimte-tijd geen natuurlijk begrip van gelijktijdigheid bestaat.) Enkelvoudige samenhang van onze ruimte betekent dat als we een ruimtewandeling maken, vastzittend met een touw aan een ruimteschip, we dit touw na terugkomst bij het ruimteschip altijd weer binnen kunnen halen zonder de twee uiteinden te bewegen. Als u denkt dat het duidelijk is dat onze ruimte enkelvoudig samenhangend is, stelt u zich dan de platlander op de zwemband voor, waarvan het zicht beperkt wordt door wat mist, zodat hij of zij nergens een globaal overzicht heeft (zie [6] voor een beschrijving van dit alles, en nog veel meer, in de vorm van een stripverhaal). Waarom zou onze situatie anders zijn?

Als we nu aannemen aan dat onze ruimte samenhangend en compact is, dan zegt het Poincarévermoeden dat *als* onze ruimte bovendien enkelvoudig samenhangend is, meteen *alle* topologische eigenschappen ervan vast liggen.

Zoals al gezegd: waarschijnlijk heeft Grisha Perelman het Poincaré vermoeden in drie dimensies opgelost. De methoden die hij gebruikt zijn niet alleen topologisch, maar maken gebruik van afstandsbegrippen, metriekeken genaamd. Deze metriekeken laat hij dan evolueren volgens een principe dat Ricci flow heet, in navolging van Richard Hamilton.

Net als in het geval van dimensie twee, is het Poincarévermoeden nauw verweven met de classificatie van alle compacte samenhangende drie-dimensionale ruimten. Het echte doel van het werk van Perelman is het zetten van de laatste stap in deze classificatie, zoals die was voorzien door William Thurston.

U zult zich nu misschien afvragen of dit soort werk wel ooit afkomt, want na het geval van drie dimensies komt dat van vier, enzovoorts. Maar hier is nu een aangename verrassing: in alle hogere dimensies is het probleem van Poincaré al opgelost. (De belangrijkste namen hierbij zijn Smale en Donaldson.) Een intuïtieve verklaring hiervoor is dat er in hogere dimensie meer ruimte is om te manoeuvreren.

Mijn eigen werk in de wiskunde

Het laatste onderwerp van mijn verhaal van vandaag is mijn eigen werk in de wiskunde. Een belangrijk deel daarvan gaat over modulaire krommen, en bepaalde hogerdimen-

sionale generalisaties daarvan, Shimura variëteiten geheten. Lang heb ik nagedacht over het probleem hoe in deze rede uit te leggen wat deze ingewikkelde wiskundige objecten zijn. Uiteindelijk kwam ik tot een geschikte stelling, de enige stelling van deze rede, dus u ziet het belang dat ik eraan hecht. De stelling zegt: modulaire krommen vormen een natuurlijke voortzetting van de vijf regelmatige veelvlakken die we eerder in dit verhaal hebben ontmoet. Om deze voortzetting te vinden, moeten we wel overstappen op een iets ander soort meetkunde: hyperbolische meetkunde.

Voordat we deze stap zetten keren we eerst nog even terug naar de vijf regelmatige veelvlakken. Laten we ons nu zo'n regelmatig veelvlak voorstellen als draadmodel. De ribben zijn dan gemaakt van zeg ijzerdraad, en ze zijn in de hoekpunten aan elkaar gesoldeerd. Om dit draadmodel plaats te geven, nemen we een bolvormige lampenkap, zó dat de middelpunten van het draadmodel en de bol samenvallen. In dat middelpunt zetten we een lampje. De schaduw van het draadmodel op de bol is dan een regelmatig veelvlak, in de zogenaamde *bol-meetkunde*. Deze meetkunde leeft, zoals de naam al zegt, op de bol, of iets preciezer, op het boloppervlak. Het analogon van rechte lijnen uit de gewone meetkunde zijn nu grote cirkels, dat wil zeggen, cirkels verkregen door de bol te doorsnijden met een vlak door het middelpunt, zoals bijvoorbeeld de evenaar of een meridiaan op de aardbol.

De bol-versie van bijvoorbeeld het achthoekige vlak krijgt men door de bol te verdelen in vier parten, zoals u een appel in vier stukken snijdt, en, zonder deze vier stukken uiteen te laten vallen, de appel vervolgens nog eens door te snijden langs de evenaar. Ik hoop dat u zich dit zo voor kunt stellen. Als dat u lukt, ziet u dat elk van de zo verkregen acht stukken boloppervlak een driehoek is, waarvan elke hoek 90 graden is. Dit feit moet u verbazen, want u hebt immers geleerd dat de som van de hoeken van een driehoek 180 graden is, en nu komen we uit op 270. De verklaring voor deze schijnbare tegenspraak is dat wat u leerde geldig is voor vlakke driehoeken, maar niet voor bol-driehoeken, zoals we nu zien. In de bol-meetkunde is het zo, dat de som van de drie hoeken van een driehoek altijd groter is dan 180 graden, en dat het verschil evenredig is met de oppervlakte van de bol-driehoek. Dit verschijnsel heeft als oorzaak de kromming van het bol-oppervlak. Het feit dat het verschil positief is, betekent dat de kromming positief is. Deze kromming heeft ook direct te maken met de hoekdefecten die we hebben geconstateerd bij de regelmatige

veelvlakken.

Als we nu een regelmatig veelvlak willen maken, in een geschikt soort meetkunde, zodat er per hoekpunt bijvoorbeeld drie regelmatige zevenhoeken samenkomen, dan blijkt dat we nodig hebben dat in die meetkunde de som van de hoeken van een driehoek *kleiner* is dan 180 graden, en dat we dus willen dat de kromming *negatief* is. (Tussen de bolmeetkunde en de hyperbolische meetkunde is natuurlijk ook de vlakke meetkunde. Dit wordt mooi geïllustreerd door de betegeling van het vlak door regelmatige zeshoeken.)

Dit alles kan gedaan worden in het zogenaamde hyperbolisch vlak, waarvan u een avontuurlijke beschrijving kunt vinden in het boek *Flatland*, van Ian Stewart ([8]). Kort gezegd komt het hierop neer. U neemt in het platte vlak alle punten met afstand kleiner dan zeg één kilometer tot de oorsprong. Op deze schijf, die geheel geasfalteerd is, is het rekeningrijden al ingevoerd. De tol per meter neemt toe naarmate we dichterbij de rand komen. Om precies te zijn is deze tol evenredig met één gedeeld door één min r^2 , waarbij r de afstand tot de oorsprong is. Het analoon van rechte lijnen in deze meetkunde zijn de paden waarlangs u zo weinig mogelijk tol betaalt. Deze paden blijken cirkelbogen te zijn die de rand van de schijf loodrecht snijden.

Om dit alles niet te abstract te laten, heb ik voor u een plaatje van een regelmatige hyperbolische zevenhoek gemaakt. U ziet de zevenhoek in het midden, de zijden ervan

zijn cirkelbogen die elkaar in de hoekpunten snijden onder een hoek van 120 graden, en die de rand loodrecht snijden. Van 24 van deze zevenhoeken kan men nu een regelmatig 24-vlak maken, de modulaire kromme $X(7)$, waarvan ik u de details zal besparen. Laat ik volstaan met de mededeling dat, gezien door de bril van een topoloog, $X(7)$ een boloppervlak met drie handvaten is, en dat, gezien door de bril van een algebraïsch meetkundige, $X(7)$ de bekende kromme van Klein is, gegeven door de vergelijking $x^3y + y^3z + z^3x = 0$.

Wat ik u net vertelde voor de zevenhoek kan gegeneraliseerd worden naar ieder geheel getal n groter dan 7. De modulaire krommen, waar een groot deel van mijn werk over gaat, zijn objecten die zo ontstaan. Deze krommen spelen een belangrijke rol in de getaltheorie. Bijvoorbeeld worden mijn resultaten over een vermoeden van Serre gebruikt door Andrew Wiles in zijn bewijs van de laatste stelling van Fermat. Modulaire krommen, en meer algemeen Shimura variëteiten, spelen een hoofdrol in de vermoedens van Langlands, een zeer centraal onderwerp in de hedendaagse wiskunde.

Mijn belangrijkste onderzoeksproject op dit moment betreft het probleem een efficiënte methode te ontwikkelen om bepaalde objecten in de getaltheorie, zoals getallenlichamen met gegeven Galoisgroep, discriminant en Frobenius-elementen, waarvan het bestaan door Langlands gegeven wordt, ex-

plicitet uit te rekenen. De hierbij toegepaste methode is het gebruik van niet-exacte berekeningen, met een voldoende grote precisie, om te lang durende exacte berekeningen te omzeilen. (De reden dat exacte berekeningen omzeild moeten worden is dat de rekentijd die nodig is om systemen veeltermvergelijkingen exact op te lossen exponentieel groeit in het aantal variabelen, zelfs voor systemen die precies één oplossing hebben.) De benodigde precisie, dat wil zeggen het aantal cijfers waarmee moet worden gerekend, wordt met behulp van de meest geavanceerde technieken in de meetkunde afgeschat, zoals Faltings-Grothendieck-Riemann-Roch en andere stellingen uit de Arakelov theorie.

Als mijn project slaagt, en alles wijst daarop, dan zal deze toepassing van de meetkunde een grote stap voorwaarts betekenen in de algoritmische getaltheorie.

Ik hoop dat u terecht de indruk hebt gekregen dat wiskunde een wetenschap is met een lange en interessante geschiedenis, een wetenschap, waarin alle deelgebieden belangrijk zijn voor elkaar, een wetenschap die ook op dit moment prachtige nieuwe resultaten oplevert, die bovendien op korte of lange termijn nuttig zullen zijn voor de maatschappij.

In de wiskunde bieden in het verleden behaalde resultaten *wel* een garantie voor de toekomst.

Referenties

- 1 E.A. Abbott. *Flatland, a romance of many dimensions* Project Gutenberg: <http://promo.net/pg>
- 2 D. Guedj. *Le théorème du perroquet*. Éditions du Seuil, september 1989. www.seuil.com
- 3 *Greek mathematical works*. Loeb Classical Library, No. 335 en No 362, Harvard University Press, and William Heinemann Ltd, 1980.
- 4 The Mac Tutor History of Mathematics archive. www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history
- 5 J. Milnor. *Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds*. Notices of the American Mathematical Society, Volume 50, Number 10, November 2003, p. 1226–1233. <http://www.ams.org/notices>
- 6 J-P. Petit. *Le géométricon*. <http://www.jp-petit.com>
- 7 The Mathematical atlas. <http://www.math.niu.edu/~rusin/known-math/welcome.html>
- 8 Ian Stewart. *Flatland*. www.panmacmillan.com
- 9 Wikipedia, the free encyclopedia. http://en.wikipedia.org/wiki/Poincare_conjecture
- 10 Hierbij dank aan mijn collega Louis Kroes, die mij hierop opmerkzaam maakte.

Marjan Sjerps

Nederlands Forensisch Instituut

Volmerlaan 17

2288 GD Rijswijk

m.sjerps@nfi.minjus.nl

Onderzoek

Forensische statistiek

Forensische wetenschappen krijgen de laatste tijd veel aandacht in de media. Populaire programma's als 'Crime scene investigation' laten de mogelijkheden zien van forensisch technisch onderzoek bij opsporing en bewijsvoering in het strafrecht. Dit onderzoek bestrijkt een heel breed gebied en kan variëren van DNA-onderzoek tot schoensporenonderzoek, en van toxicologie tot handschriftkunde. Ook allerlei andere wetenschappers laten regelmatig van zich horen in de rechtszaal. Statistiek en kansrekening liggen vaak ten grondslag aan de verklaringen van deskundigen en spelen daarom een belangrijke rol in het strafrecht, hoewel ze zelden in de schijnwerpers staan als vakgebieden op zich. De 'forensische statistiek' is een heel breed en dynamisch vakgebied, waarin nog erg veel werk te verzetten is. Voor de wiskundige is het een fascinerend toepassingsgebied met spannende voorbeelden. Marjan Sjerps is als statisticus werkzaam bij het Nederlands Forensisch Instituut.

Volgens kenners vervullen deskundigen een toenemende rol in het strafrecht (Nijboer, 2002). Omdat statistiek een belangrijk onderdeel vormt van veel deskundigheidsgebieden is ook hiervoor een toenemende aandacht te bespeuren. In het buitenland zijn er een aantal publicaties en websites gewijd aan de

toepassing van statistiek in het (straf)recht (onder andere Finkelstein en Levin 1990, Aitken en Stoney 1991, Gastwirth 2000, Good 2001, websites van het Federal Judicial Center en van Charles Brenner). In het Nederlands is er eigenlijk heel weinig beschikbaar (er wordt beperkt aandacht aan geschonken in van Koppen et al. 2002, Broeders 2003) en er wordt momenteel door verschillende auteurs gewerkt aan een dergelijk boek (Coster van Voorhout en Sjerps; in voorbereiding). Omdat het zeer uiteenlopende deskundigheidsgebieden betreft, zoals bijvoorbeeld pathologie, biologie, fysica, chemie en psychologie, zijn de statistische technieken waarop men zich baseert ook zeer divers.

Toch zijn er ook een aantal aspecten die deze gebieden bij toepassing in het strafrecht met elkaar gemeen hebben. Zo is er meestal een verdachte in beeld en wordt er een bepaald kenmerk dat geassocieerd is met deze verdachte vergeleken met een spoor dat geassocieerd is met het delict. Het DNA-profiel van de verdachte wordt bijvoorbeeld vergeleken met het DNA-profiel van een spoor in de onderkleding van het slachtoffer van een zedendelict (figuur 1), of een geweer dat de verdachte in huis heeft wordt vergeleken met een kogel die gevonden is op de plek van de gewapende overval. Het kan ook zijn dat een hond de geur van een verdachte vergelijkt

met het geurspoor dat vermoedelijk aanwezig is op een voorwerp dat de dader heeft aangeraakt, en waarbij de deskundige een uitspraak moet doen over de bewijskracht als de hond een geurovereenkomst aangeeft. In dit soort onderzoek gaat het om de bewijskracht van waargenomen overeenkomsten en verschillen.

Tot ongeveer twintig jaar geleden was er geen algemene en bruikbare definitie van het begrip *bewijskracht* en had ieder deskundigheidsgebied zijn eigen methode om de bewijskracht van onderzoeksresultaten weer te geven. Met de opkomst van de zogenaamde Bayesiaanse stroming in de forensische statistiek (ook wel 'logische' of 'likelihood ratio' (LR) stroming genoemd), werd deze lacune gevuld. Er is een model ontwikkeld gebaseerd op de bekende regel van Bayes uit de kansrekening. Het geeft een numerieke uitdrukking voor de bewijskracht van allerlei bewijsmateriaal, maar kan ook als leidraad dienen voor deskundigen die hun conclusie verbaal weergeven. De standaardwerken op dit gebied zijn Aitken (1995) en Robertson en Vignaux (1995). Dit model wordt op steeds meer deelgebieden toegepast, waarbij soms interessante vragen worden gegenereerd (zie kaders). In dit artikel zal het Bayesiaanse model in het kort worden uitgelegd. Ook zullen er een drietal valkuilen aan bod komen waarin de gemiddelde jurist

Formuleren van hypothesen

Een nog onopgelost probleem dat de grondslagen van de statistiek betreft is het volgende. Stel, op de plek van een misdrijf gepleegd door twee daders worden twee bloedvlekken A en B aangetroffen, mogelijk afkomstig van de twee daders. De bloedvlekken zijn echter minuscuul en van bijzonder slechte kwaliteit, waardoor slechts een deel van het DNA-profiel zichtbaar gemaakt kan worden. Hieruit wordt geconcludeerd dat de twee bloedvlekken door verschillende personen zijn gemaakt. De 'match-kans' is één op de miljoen voor vlek A, en één op de honderd voor vlek B. De politie pakt één verdachte op, waarvan het DNA-profiel overeenkomt met dat van vlek A. De bewijswaarde, gemeten met de *likelihood ratio* (LR), hangt nu af van de manier waarop de hypothesen geformuleerd worden. Voor het hypothesenpaar

(1a) De verdachte is donor van één van de twee vlekken

(1b) De verdachte is niet donor van één van de twee vlekken

is de LR een half miljoen; voor het hypothesenpaar

(2a) De verdachte is donor van vlek A

(2b) De verdachte is niet donor van vlek A is de LR één miljoen.

Een verschil tussen de twee hypotheseparen is dat het eerste paar kan worden opgesteld zonder dat de DNA-profielen van de vlekken en de verdachte bekend zijn, terwijl de tweede juist is gebaseerd op deze informatie. De berekening van de LR is in beide gevallen gebaseerd op de aanname dat de vlekken A en B afkomstig zijn van verschillende personen, maar dit is pas bekend nadat de DNA-profielen bekend zijn. De discussie gaat nu over het volgende. Mag de deskundige zijn hypothesen formuleren gebruikmakend van het bewijs dat voorhanden is, om vervolgens de LR te rapporteren voor deze hypothesen? Of is het illegaal om gebruik te maken van het voorhandenliggende bewijs, omdat hypothesen onafhankelijk van het bewijs geformuleerd zouden moeten worden (zie ook Meester en Sjerps 2004 en de discussie met Dawid).

gemakkelijk valt bij het interpreteren van het bewijs, maar waarin ook menig wiskundige zal trappen. Voor een vrij compleet overzicht

van dit soort valkuilen kan de lezer terecht in Broeders (2003).

Een heel andere tak van de forensische statistiek concentreert zich op de manier waarop gegevens verzameld worden. Hierbij kan het gaan om milieu-onderzoek, waarbij de vraag bijvoorbeeld is op welke manier er uit een berg afvalstoffen monsters genomen moeten worden, maar ook om partijen verdovende middelen. Het opzetten van experimenten ten behoeve van onderzoek behoort ook tot deze tak van sport. Ik zal hier kort op ingaan.

Om aan te geven waarom forensische statistiek meer is dan alleen de toepassing van gewone statistiek op een ongewoon terrein zal ik verder kort ingaan op de specifieke forensische aspecten. Tenslotte zal ik over de muren van mijn eigen werkterrein, de statistische aspecten van het technisch forensisch onderzoek van het Nederlands Forensisch Instituut, heen kijken en enkele andere terreinen aanstippen waarin statistiek wordt gebruikt ten behoeve van het strafrecht.

Hoe sterk is bewijsmateriaal: Het Bayesiaanse model

Om de kracht van bewijsmateriaal uit te drukken gebruikt de Bayesiaanse stroming in de forensische statistiek een algemeen model dat is gebaseerd op de regel van Bayes:

$$P[A|B] = \frac{P[B|A] \cdot P[A]}{P[B]}.$$

Hierin is $P[A]$ de kans dat A waar is en $P[A|B]$ de voorwaardelijke kans dat A waar is gegeven dat B waar is. Als we deze regel toepassen op twee hypothesen H_p en H_d en bewijsmateriaal E (de E staat voor 'Evidence') kunnen we afleiden (als we een subjectieve definitie van kans hanteren) dat

$$\frac{P[H_p|E]}{P[H_d|E]} = \frac{P[H_p]}{P[H_d]} \cdot \frac{P[E|H_p]}{P[E|H_d]}$$

De interpretatie van deze formule is dat de kansverhouding van de twee hypothesen verandert door de introductie van het bewijsmateriaal. De nieuwe kansverhouding (het linker quotiënt) ontstaat daarbij uit de oude (het middelste quotiënt) door te vermenigvuldigen met de *likelihood ratio* (LR, het rechter quotiënt). In woorden luidt de formule:

De a posteriori kansverhouding is de a priori kansverhouding maal de likelihood ratio.

In het rechtssysteem kan deze regel als volgt worden toegepast: de aanklager heeft een bepaalde hypothese H_p (bijvoorbeeld:



Figuur 1 Het DNA-profiel van een verdachte wordt vergeleken met het DNA-profiel van een spoor in de onderkleding van het slachtoffer van een zedendelict.

de verdachte heeft deze dreigbrief geschreven), en de verdediging heeft een alternatieve hypothese H_d (bijvoorbeeld: iemand anders heeft die brief geschreven). De rechter zal de verdachte veroordelen als de hypothese van de aanklager, gezien al het bewijs, veel waarschijnlijker is dan die van de verdediging, dus als de a posteriori kansverhouding tussen deze twee hypothesen groot is. Als het proces begint heeft de rechter a priori een bepaalde inschatting van de kansverhouding. Tijdens het proces worden de bewijsmiddelen aangevoerd: sommige daarvan zijn in het voordeel van de verdachte, andere in het nadeel. Telkens wanneer een bepaald bewijsmiddel wordt aangevoerd zal de rechter zijn inschatting van de kansverhouding aanpassen volgens de regel van Bayes. Hij vermenigvuldigt dus met een LR groter dan één als het gaat om bewijs in het nadeel van de verdachte, en met een LR kleiner dan één als het gaat om bewijs in het voordeel van de verdachte. Als al het bewijs in beschouwing is genomen neemt de rechter vervolgens een beslissing op basis van de uiteindelijk geschatte kansverhouding tussen de hypothese van de aanklager en die van de verdediging.

Hoewel dit een simpele toepassing lijkt, heeft deze denkwijze grote consequenties voor de wijze waarop deskundigen moeten rapporteren. De deskundige kan geen uitspraak kan doen over de a posteriori kansverhouding van de hypothesen van de aanklager en die van de verdediging zonder iets aan te nemen over de a priori kansverhouding. De handschriftdeskundige bijvoorbeeld kan niets zeggen over de kans dat de verdachte de dreigbrief geschreven heeft zonder aannamen te doen over deze kans vóórdat hij de brief onderzocht heeft. Dergelijke aannamen vormen bij uitstek het terrein van de rechter

De waarde van een DNA-databank match

Een bank wordt overvallen door een gemaskerde persoon. Het masker wordt later aangetroffen in de in brand gestoken vluchtauto, en de speekselvlekken die in het half verbrande masker worden aangetroffen geven een DNA-profiel waarvan de kans dat een willekeurig persoon hetzelfde profiel bezit geschat wordt op één op tienduizend (door de slechte kwaliteit van de monsters is slechts een partieel DNA-profiel verkregen). Het profiel wordt vergeleken met de DNA-databank van 3000 verdachten, en één persoon blijkt hetzelfde DNA-profiel te hebben. Het spoor is nu dus vergeleken met 3000 personen, in plaats van met één. Vraag: is de bewijskracht van de DNA-match groter of kleiner door de vergelijking met de databank?

Antwoord 1: Door het maken van meerdere vergelijkingen neemt de kans op een toevalstreffer toe. Als er tienduizend mensen in de databank zouden zitten dan zou je alleen al op grond van toeval een 'match' verwachten. De bewijskracht neemt dus af.

Antwoord 2: De informatie dat de 2999 'niet-matchende' personen in de databank uitgesloten kunnen worden als dader maakt het bewijs alleen maar sterker. Als de hele wereldbevolking in de databank zou zitten en er was maar één 'match', dan zou je met zekerheid weten dat deze persoon de dader was. De bewijskracht neemt dus toe.

Zie voor het antwoord het kader aan het eind van dit artikel.

en niet van de deskundige. De deskundige kan op basis van zijn expertise daarom alleen een uitspraak doen over de LR van het bewijsmateriaal voor de hypothesen H_p versus H_d . Volgens het Bayesiaanse model is dit dan ook de taak van de deskundige: het rapporteren van deze LR, zodat de rechter vervolgens hiermee zijn geschatte kansverhouding van H_p versus H_d kan aanpassen.

Een voorbeeld uit de praktijk

Bij een inbraak snijdt de dader zich aan het glas van de ingeslagen ruit. Van het bloed op dit glas maakt de DNA-deskundige een DNA-profiel dat wordt vergeleken met dat van de verdachte. In de rechtszaal beweert de officier van justitie dat het bloed afkomstig is van de verdachte (H_p), terwijl de advocaat zegt dat zijn cliënt niets met de zaak te maken heeft

en dat het bloed van iemand anders is (H_d). Stel nu dat de twee profielen exact met elkaar overeenkomen, wat is dan de LR? De teller is de kans op deze overeenkomst, als het bloed van de verdachte is. Als er geen fouten worden gemaakt dan is deze kans één. De noemer is de kans op een overeenkomst als het bloed van een willekeurige onbekende afkomstig is. De deskundige weet op basis van referentiebestanden iets over deze 'match-kans': deze is minder dan één op de miljard. De LR is dus 1 miljard, en hiermee wordt de kansverhouding van H_p versus H_d dus met een factor miljard vergroot. Maar hoe groot deze verhouding uiteindelijk is kan de deskundige niet zeggen, immers, dat hangt af van de a priori kansverhouding.

De Bayesiaanse stroming levert zodoende een definitie voor de taak van de deskundige, maar ook een numerieke definitie voor het begrip 'bewijskracht'. Uit het model volgt namelijk dat de grootte van de LR precies weergeeft hoeveel waarschijnlijker de hypothese van de aanklager wordt ten opzichte van die van de verdediging door het toevoegen van het bewijsmiddel. De LR geeft dus precies de bewijskracht weer van het bewijsmiddel. In bovenstaand voorbeeld is de bewijskracht tenminste een miljard. Als het bloedmonster van slechte kwaliteit geweest was waardoor slechts een deel van het DNA-profiel zou zijn verkregen, zodat de 'match-kans' bijvoorbeeld slechts één op de miljoen was, dan zou de LR een miljoen geweest zijn.

Verder kan het Bayesiaanse model gebruikt worden bij het combineren van verschillende bewijsmiddelen. Als de hypothesen hetzelfde zijn, dan is het eenvoudig af te leiden dat de LR van twee onafhankelijke bewijsmiddelen gelijk is aan het product van de afzonderlijke bewijsmiddelen. Zo kan in principe bij haaronderzoek morfologisch onderzoek worden gecombineerd met DNA-onderzoek. In minder eenvoudige zaken wordt de analyse al gauw zeer complex. Momenteel wordt onderzoek gedaan naar het gebruik van 'Bayesian belief networks' om bewijsmiddelen met elkaar te combineren.

De LR benadering is met succes toegepast in gebieden waar getallen voorhanden zijn. Een voorbeeld is DNA-onderzoek (zie onder andere Evett en Weir 1998, Sjerps en Kloosterman 2003), waar de LR niet alleen gebruikt wordt voor simpele vergelijkingen van een spoor met een dader, maar ook in meer complexe zaken waarbij de teller van de LR niet één is. DNA-verwantschapsanalyse is zo'n gebied, waarbij bijvoorbeeld een onbekend slachtoffer vergeleken wordt met de

vermoedelijke ouders, of een foetus met de moeder en haar vermoedelijke verkrachter. Minder bekende voorbeelden zijn automatische sprekerherkenning, waarbij op basis van een geautomatiseerd systeem de stem van de persoon op een telefoontap wordt vergeleken met de stem van een verdachte (zie Broeders 2003 en referenties daarin), en vergelijking van glas (Curran et al. 2000). Ook voor geuridentificatieproeven met honden, het herkennen van gezichten door getuigen en voor leugendetectors kan er een LR worden berekend (zie van Koppen et al. 2002 en referenties hierin, in deze literatuur wordt de LR meestal aangeduid met 'diagnostische waarde'). Hoewel er in de gebieden waar de LR daadwerkelijk berekend kan worden discussie is over het formuleren van de hypothesen, en de manier waarop een LR gerapporteerd moet worden, zijn de meeste onderzoekers het er tegenwoordig wel over eens dat het hun taak is een LR te rapporteren.

In gebieden waar getallen in veel mindere mate voorhanden zijn heeft het Bayesiaanse model veel stof doen opwaaien, en wordt ook zeker niet algemeen geaccepteerd dat een deskundige een LR moet rapporteren. Van oudsher doen deze gebieden verbale uitspraken over de waarschijnlijkheid van de hypothese van de aanklager, en er zijn slechts weinig onderzoekers geneigd om dit te veranderen. De wapendeskundige kan bijvoorbeeld concluderen dat 'de kogel zeer waarschijnlijk werd afgeschoten met het geweer van de verdachte'. Volgens het Bayesiaanse model kan hij op basis van zijn expertise hierover helemaal geen uitspraak doen, omdat deze waarschijnlijkheid afhangt van de a priori kansverhouding. In Bayesiaanse termen zou de deskundige zijn conclusie op een andere manier moeten formuleren, zoals bijvoorbeeld: 'het onderzoek levert een zeer sterke aanwijzing dat de kogel uit het geweer van de verdachte kwam'. Weinig juristen zullen echter het verschil tussen deze twee formuleringen herkennen. De discussie over de rapportage is daarom in dit soort gebieden nog in volle gang.

Denkfouten bij het waarderen van bewijs

Behalve het definiëren van de rol van de deskundige en de kracht van bewijsmateriaal heeft de Bayesiaanse denkwijze ook een aantal denkfouten aan het licht gebracht. Deze berusten op algemeen menselijke denkfouten en waren binnen de psychologie al langer bekend (Kahneman et al. 1982), maar binnen de forensische literatuur is er pas de laatste tien jaar serieuze aandacht voor (Evett 1995, Broeders 2003). De bekendste is de *prose-*

curator's fallacy. Stel, in een moordzaak wordt bloed van de dader aangetroffen. Het (partiële) DNA-profiel wordt vergeleken met dat van verdachte J. Jansen en deze blijken overeen te komen. De kans dat een willekeurige persoon dit profiel zal hebben is, zeg, één op de miljoen. De aanklager kan dan de volgende redeneerstappen te berde brengen:

1. De kans dat het profiel overeenkomt terwijl het bloed toch niet van J. Jansen is bedraagt één op de miljoen.
2. Het profiel komt overeen, dus de kans dat het bloed niet van J. Jansen is bedraagt één op de miljoen.
3. De kans dat het bloed wel van J. Jansen is bedraagt dus 99,9999%.

Vanzelfsprekend gaat de aanklager hier de mist in als hij (2) concludeert uit (1). Immers, de kans op overeenkomst gegeven dat het bloed niet van J. Jansen is, is niet gelijk aan de kans dat het bloed niet van J. Jansen is gegeven de overeenkomst. Toch blijkt uit de literatuur dat deze fout op grote schaal in de praktijk gemaakt wordt. Ook uit mijn eigen zeer bescheiden ervaring en die van mijn collega's blijkt dat Nederlandse juristen deze denkfout wel eens maken. De consequenties kunnen groot zijn in gevallen waarin de 'match-kans' relatief groot is en er vrijwel geen overig bewijs is.

De verdediging kan in dezelfde zaak als volgt redeneren:

1. Er zijn in Nederland nog zo'n 16 miljoen andere personen dan J. Jansen.
2. Naar verwachting zijn er dus 17 personen, inclusief J. Jansen, met hetzelfde DNA-profiel.
3. De kans dat het bloed van J. Jansen is bedraagt dus circa 1 op 17, ofwel circa 6%.

Deze redenering is op zich correct, maar er liggen een aantal verzwegen aannames aan ten grondslag. Bijvoorbeeld dat de dader een Nederlander is, en dat alle Nederlanders (inclusief alle vrouwen, baby's, bejaarden, gehandicapten, ...) a priori met even grote waarschijnlijkheid de dader zijn. Ook deze redenering wordt wel eens in Nederlandse rechtszalen gebruikt. In de literatuur wordt dit de *defense fallacy* genoemd.

Tenslotte is er nog de *base rate fallacy*. Hierbij wordt de LR niet goed gewogen met de a priori kansverhouding. Stel dat er bijvoorbeeld een gemaskerde overval plaatsvindt waarbij speeksel van de dader wordt aangetroffen in een bivakmuts in de vluchtauto. Als er nog geen verdachten in beeld zijn kan de deskundige de frequentie van het DNA-profiel van het speeksel in verschillende bevolkingsgroepen met elkaar vergelijken. Stel dat in be-



Figuur 2 Milieu-onderzoek is een gebied waar de monsternamen van groot belang is voor de uiteindelijke conclusies. Tot op heden hebben laboratoria altijd veel tijd en geld besteed aan het optimaliseren van hun analysemethoden, terwijl er weinig aandacht bestond voor het nemen van de monsters. Tegenwoordig wordt onderkend dat de grootste foutenbron niet in het laboratorium, maar in het veld ligt.

volkingsgroep A de frequentie één op één miljoen is, en in bevolkingsgroep B de frequentie één op één miljard. De LR voor de hypothese dat de dader uit bevolkingsgroep A komt en niet uit B is dan duizend. De base rate fallacy is nu dat men geneigd is te denken dat dit betekent dat de kans dat de dader uit bevolkingsgroep A komt veel groter is dan dat hij uit B komt. Echter, de kans dat de dader uit bevolkingsgroep A komt hangt natuurlijk af van een groot aantal andere factoren, waarvan de grootte van de bevolkingsgroep de meest voor de hand liggende is.

Het bovenstaande maakt duidelijk dat het voor de forensisch deskundige niet alleen zaak is om te bedenken waarover hij precies een uitspraak moet doen, maar ook hoe hij bij de formulering van zijn conclusies denkfouten en misverstanden kan voorkomen. De ultieme oplossing voor het voorkomen van denkfouten en misverstanden is echter nog steeds niet gevonden, en psychologisch onderzoek is daarbij van toenemend belang.

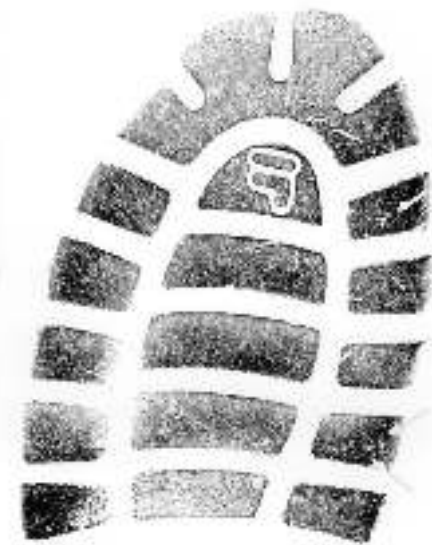
Verzamelen van gegevens

Het bovenstaande heeft betrekking op situaties waarin conclusies moeten worden getrokken uit de resultaten van uitgevoerd onderzoek. Een groot deel van de vragen die mijn collega's en ik in de afgelopen tijd hebben gekregen hebben echter betrekking op situaties waarin de waarnemingen nog gedaan moeten worden. Milieu-onderzoek, bijvoorbeeld, is een gebied waar de monsternamen van groot belang is voor de uiteindelijke conclusies. Vaak is de vraag of de concentratie van bepaalde stoffen de wettelijke limiet overschrijdt. Monsterneming en analyse van de monsters is echter erg duur, terwijl de partijen waar het om gaat bijzonder groot en hetero-

geen van aard kunnen zijn (zie figuur 2). In monsteringsprotocollen die op wettelijke basis zijn voorgeschreven wordt daarom op basis van slechts enkele analyseresultaten een grote partij goed- of afgekeurd. Bij het handhavingprotocol bouwstoffen (uitvoeringsregeling 1998) bijvoorbeeld wordt op basis van drie analyseresultaten, elk verkregen door vier monsters met elkaar te vermengen, een partij van 2000 ton goed- of afgekeurd. In de praktijk blijkt dat de partijen niet altijd aan de aannames voldoen, bijvoorbeeld omdat er illegaal stoffen worden gemengd door de partij, waardoor de partij veel heterogener is dan aangenomen. Verder kunnen 'hot-spots' in de partij en moeilijkheden bij de analyse uitschieters veroorzaken. Het effect daarvan en de juiste statistische behandeling zijn nog onduidelijk. Voor de statisticus vormt dit gebied een enorme uitdaging (zie onder andere Keith 1996, Gilbert 1987, Patil en Rao 1994, Stelling en Sjerps 1999).

De monsternamen is vaak nog een ondergeschoven kindje. Laboratoria besteden veel tijd en geld aan het optimaliseren van hun analysemethoden, maar hebben opvallend weinig aandacht voor de monsters die ze binnen krijgen. In de praktijk ligt de grootste foutenbron echter niet in het laboratorium, maar in het veld. De verschillen tussen de monsters zijn meestal veel groter dan de verschillen tussen herhaalde analyses van hetzelfde monster. Ook de wetgever heeft weinig oog voor dit gegeven: de verdachte heeft recht op een contra-analyse in een onafhankelijk laboratorium, maar hiervoor worden monsters gebruikt die genomen zijn direct naast de monsters die al eerder geanalyseerd waren.

In het opzetten van een forensisch onderzoek komt men steeds weer voor de vraag te



Figuur 3 In de rechtspraak is het dikwijls van belang om de kans te weten dat bijvoorbeeld een schoen van een verdachte een schoenspoor heeft veroorzaakt. Vele forensische statistici zijn van mening dat het Bayesiaanse of subjectieve kansbegrip beter op dit type vraagstukken van toepassing is dan het mathematische kansbegrip, gebaseerd op de axioma's van Kolmogorov.

staan hoe de waarnemingen verzameld moeten worden. Een voorbeeld hiervan is een zaak waarin de verdachte beweerde dat zijn pistool per ongeluk afging toen hij een bepaalde handeling verrichtte. De wapendeskundigen van het NFI hebben toen de waarschijnlijkheid van deze gebeurtenis bepaald door middel van een experiment waarin ze deze handeling met het betreffende wapen circa 400 keer hebben uitgevoerd. Vele dagen en blaren later concludeerden ze dat het wapen geen enkele keer was afgegaan. Meestal worden proefopzetten echter gemaakt in het kader van een onderzoek, bijvoorbeeld om een nieuwe methode te introduceren. Een derde situatie waarin het verzamelen van gegevens belangrijk is betreft de monsternamen uit een partij met discrete eenheden, zoals een partij met zakjes verdovende middelen of pillen, een partij vaten met onbekende inhoud die ergens gedumpt zijn in een verlaten gebied, of een groot aantal aangetroffen vezels op de kleding van een slachtoffer waarvan slechts een beperkt aantal nader geanalyseerd kan worden. Er zijn verschillende methoden om in zo'n situatie monsters te nemen. Momenteel wordt in Europees verband gewerkt aan een richtlijn voor het nemen van monsters uit partijen verdovende middelen, waarin de voor- en nadelen van deze methoden worden besproken (ENFSI drugs WG 2003).

Specifieke forensische aspecten

De forensische statistiek wordt gekenmerkt door een aantal bijzondere aspecten. Ten eerste natuurlijk het veelzijdige gebied waarop

het wordt toegepast, hetgeen de inzet van een breed scala aan statistische technieken vereist. Om u een indruk te geven noem ik: proefopzetten, classificatie, betrouwbaarheidsintervallen, Bayesiaanse methoden, simulatietechnieken, niet-parametrische methoden, controlekaarten, regressie en populatiegenetica. Verder zijn de onderzoeksobjecten van niet-alledaagse aard. Bij DNA-onderzoek kan het bijvoorbeeld gaan om bloed-, speeksel- en spermasporen, die soms in zeer kleine hoeveelheden aanwezig, half vergaan of met elkaar vermengd zijn. Bij fysisch onderzoek kan het bijvoorbeeld gaan om vuilniszakken, schroevendraaiers, schoenen (zie figuur 3), kogels, handschrift, stem of geluid; bij chemisch onderzoek om explosieven, schotresten, glasdeeltjes, tape, inkt en autolakken. Ook aan het vergelijken van oren wordt aardig wat statistiek verricht.

Het vergelijkend onderzoek, waarbij een spoor vergeleken wordt met een bepaald kenmerk of voorwerp dat met de verdachte geassocieerd wordt, heeft als specifiek aspect dat de interesse gericht is op de relatie van het spoor met één bepaald voorwerp of individu. De jurist wil bijvoorbeeld weten wat de kans is dat die ene schoen van de verdachte Pietersen het schoenspoor veroorzaakte. Als gevolg hiervan sluit het Bayesiaanse of subjectieve kansbegrip veel beter aan bij de vraag dan het frequentistische of mathematische kansbegrip gebaseerd op de axioma's van Kolmogorov. Het is erg gekunsteld om in de forensische context een kans te zien als de fractie van het aantal keren dat de schoen van Pieter-

sen het spoor maakte als er honderdduizend schoensporen worden gemaakt, of als één of andere abstracte kansmaat.

Vaak vindt de politie een aantal technische bewijsmiddelen in één zaak. Bij een inbraak kunnen bijvoorbeeld vingersporen, schoensporen, DNA-sporen, en werktuigsporen worden gevonden. Een specifieke forensische vraag is dan niet alleen wat de bewijskracht is van de afzonderlijke bewijsmiddelen, maar ook wat de bewijskracht is van de combinatie van deze middelen. Het Bayesiaanse denkraam biedt hier een richtlijn, zoals boven beschreven.

De juridische context waarin het onderzoek steeds wordt uitgevoerd zorgt ook voor een aantal kenmerkende eigenschappen. Zo is aan de deskundige meestal wel bekend wat de hypothese is die de aanklager zal aanvoeren tijdens het proces, maar meestal niet precies wat de hypothese is die de verdediging zal aanvoeren. De hypothesen kunnen verder ieder moment wijzigen als er nieuwe informatie ter beschikking komt, of als de verdediging onverwacht met een alternatief scenario op de proppen komt. De deskundige kan natuurlijk ook zelf alternatieve hypothesen genereren. Zijn de hypothesen eenmaal gesteld, dan is het inschatten van hun a priori kansverhouding voorbehouden aan de rechter. Waar de meeste wetenschappers uitspraken willen doen over de a posteriori kansverhoudingen van hun onderzoekshypothesen (bijvoorbeeld: dit is de kans dat de patiënt een bepaalde ziekte heeft, gegeven de symptomen), zal de forensische deskundige zich in zijn uitspraken volgens de boven beschreven Bayesiaanse theorie moeten beperken tot het rapporteren van de bewijskracht.

De juridische context veroorzaakt ook dat de forensisch deskundige bij het toetsen van hypothesen op de klassieke manier in een ander type fout geïnteresseerd is dan gebruikelijk. Bij het vergelijken van de brekingsindex van glasdeeltjes gevonden in de kleding van de verdachte met de brekingsindex van monsters van de ingeslagen ruit bij een inbraak is de gebruikelijke nulhypothese dat de twee populaties niet van elkaar verschillen (Rudin en Inman 2003). Normaliter is de statisticus dan geïnteresseerd in de type I fout, de kans om de nulhypothese te verwerpen terwijl deze waar is, en is de procedure erop gericht om deze fout onder controle te houden, bijvoorbeeld maximaal 5% of 1%. Deze fout is echter geassocieerd met de kans dat de verdachte ten onrechte wordt vrijgesproken. Immers, dit is de kans dat de deskundige concludeert dat de glasdeeltjes niet van de ruit afkomstig zijn

terwijl dat wel zo is. Voor de deskundige is dit echter niet de belangrijkste fout. Van groter belang is het om de type II fout te controleren, de conclusie dat de glasdeeltjes van de ruit afkomstig zijn terwijl dat niet zo is, wat tot een onterechte veroordeling kan leiden.

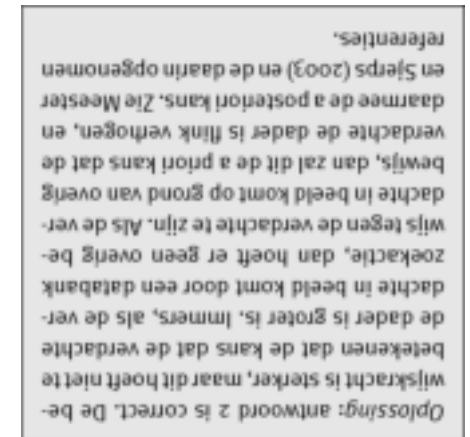
Overig onderzoek in de forensische statistiek

Statistiek wordt veel vaker gebruikt in juridische toepassingen dan veel mensen zich realiseren. Soms vormt ze de basis voor de uitspraak van een deskundige, bijvoorbeeld in de strafrechtspsychologie die zich onder andere richt op de bewijswaarde van herkenningen door getuigen, of voor de uitslag van een leugendetector (van Koppen et al. 2002). Ook de bewijswaarde van geuridentificatieproeven met speciaal getrainde honden is onder andere gebaseerd op statistische overwegingen (Schoon en van Koppen 2002). Een heel ander gebied waar statistiek een rol speelt is bij het inschatten van recidi-

ve kansen van personen die vallen onder de TBS maatregel (de Ruiter 2002, Brand en Diks 2001). Hierbij kan gebruik worden gemaakt van een groot scala aan testlijsten, die gecombineerd met de klinische blik van de psychiater of psycholoog leiden tot een schatting van deze kans. Dit wordt vervolgens door de jurist gebruikt voor zijn oordeel of de TBS al dan niet verlengd moet worden.

Ook de kansrekening draagt haar steentje bij aan het strafrecht, bijvoorbeeld bij het beoordelen of een spel gezien moet worden als een behendigheids spel of als een kansspel (Van der Genugten et al. 2001). Andere voorbeelden zijn de kansanalyses die zijn uitgevoerd in zaken als die van Bianca K., de kinderverzorgster die ervan werd beschuldigd een speciale vorm van benauwdheid te hebben veroorzaakt bij een aantal kinderen dat zij in het dagverblijf onder haar hoede had. Een soortgelijke bekende zaak is die van Lucia de B., de verpleegster die ervan werd verdacht de

hand te hebben gehad in een aantal raadselachtige overlijdensgevallen op haar afdeling. Bij dit type zaken speelt de vraag, hoe groot de kans op bepaalde waarnemingen is als er alleen toeval in het spel is, een grote rol. (Elffers 2003).



Referenties

- Aitken C.G.G., *Statistics and the evaluation of evidence for forensic scientists*, Wiley, Chichester, 1995.
- Aitken C.G.G. and Stoney D.A. (eds) *The use of statistics in forensic science*, Ellis Horwood Limited, Chichester, 1991.
- Brand E.J.F.M. en Diks G.J.M. 'Richtlijnen voor risicotaxatie in de forensische diagnostiek: theorie en praktijk'. *Tijdschrift voor psychiatrie* (43) 10 (2001), p. 693–704.
- Broeders, A.P.A. *Op zoek naar de bron — over de grondslagen van de criminalistiek en de waardering van het forensisch bewijs*, (proefschrift) Kluwer, Deventer, 2003.
- Coster van Voorhout J.A. en Sjerps M. (eds) *Werktitel: Statistiek voor de strafrechtjurist*, Kluwer, te verschijnen.
- Curran J.M., Hicks T.N., Buckleton J.S. *Forensic interpretation of glass evidence*, CRC Press, Boca Raton, 2000.
- Elffers H. 'Bij toeval veroordeeld? — statistische analyse van dienstroosterdata in het strafproces', *Nederlands Juristen Blad* (34), (2003), p. 1812–1814.
- ENFSI (European Network of Forensic Science Institutes) *Drugs Working Group, Guidelines on representative drug sampling*, 2003.
- Evetts I.W., 'Avoiding the transposed conditional', *Science & Justice* (35), (1995), p. 127–131.
- Evetts I.W. en Weir B.S., *Interpreting DNA-evidence*, Sinauer associates, Sunderland MA, 1998.
- Finkelstein M.O. and Levin B. *Statistics for lawyers*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- Gastwirth J.L.(ed.) *Statistical science in the courtroom*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- Genugten B.B. van der, Das M. en Borm P.E.M., *Behendig gokken in en rond het casino* (+cd-rom), Academic Service, 2001.
- Gilbert R.O. *Statistical methods for environmental pollution monitoring*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1987.
- Good P.I. *Applying Statistics in the Courtroom: A New Approach for Attorneys*, CRC Press, Boca Raton, 2001.
- Kahneman D., Slovic P. en Tversky A., *Judgment under uncertainty: heuristics and biases*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- Keith, L.H. (ed.) *Principles of environmental sampling*, 2nd ed., American Chemical Society, USA, 1996.
- Koppen P.J. van, Hessing D.J., Merkelbach H.L.G.J., Crombag H.F.M., *Het recht van binnen — psychologie van het recht*, Kluwer, Deventer, 2002.
- Meester R en Sjerps M. 'The evidential value in the DNA-database search controversy and the two-stain problem', *Biometrics* (59), (2003), p. 727–732.
- Meester R. en Sjerps M. 'Why the effect of prior odds should accompany the likelihood ratio when reporting DNA-evidence', *Law, Probability and Risk* (te verschijnen in 2004).
- Nijboer J.F. *Het gekooide denken — over de rol van discipline binnen feitenonderzoek en bewijs in het recht*, Inaugurale rede, Universiteit Leiden, 18–10–2002.
- Patil G.P. en Rao C.R. (eds.), *Handbook of statistics 12: Environmental statistics*, North Holland, Amsterdam, 1994.
- Robertson B. and Vignaux G.A. *Interpreting evidence*, Chichester, Wiley, 1995.
- Rudin N. en Inman K. 'Articulating Hypotheses-The Null Hypothesis and Beyond', *News of the California association of criminalists*, 1st Quarter, (2003), p. 7–8.
- Ruiter C. de, 'De terbeschikkingstelling', in: Koppen P.J. van, Hessing D.J., Merkelbach H.L.G.J., Crombag H.F.M., *Het recht van binnen — psychologie van het recht*, Kluwer, Deventer, 2002, p. 991–1001.
- Schoon A. en van Koppen P.J. 'Identificatie door honden', in: Koppen P.J. van, Hessing D.J., Merkelbach H.L.G.J., Crombag H.F.M., *Het recht van binnen — psychologie van het recht*, Kluwer, Deventer, 2002, p. 597–622.
- Sjerps M. en Kloosterman A.D. 'Statistical aspects of interpreting DNA-profiling in legal cases', *Statistica Neerlandica* (57) 3, (2003), p. 368–389.
- Stelling, M. en Sjerps M. 'A sampling and hypothesis testing method for the legal control of solid hazardous waste', *Environmetrics* (10), (1999), p. 247–259.
- Uitvoeringsregeling bouwstoffenbesluit bijlage F; Handhavingsprotocol schone grond, Staatscourant 30 januari 1998.
- Websites: Federal Judicial Center: www.fjc.gov Charles Brenner: www.DNA-view.com.

Hendrik Blauwendraat

Afdeling Wiskunde, Vrije Universiteit

De Boelelaan 1081a

1081 HV Amsterdam

hblauwe@few.vu.nl

Onderzoek

Waardenvolle wiskunde

Onlangs verscheen van de hand van Hendrik Blauwendraat het boek *'Worsteling naar waarheid. De opkomst van Wiskunde en Informatica aan de Vrije Universiteit'*. In deze geschiedenis speelt J.F. Koksma (1904–1964), getaltheoreticus en mede-oprichter van het Mathematisch Centrum (thans CWI), een grote rol. Koksma was betrokken bij de opkomst van de afdelingen Wiskunde en Informatica aan de VU en hij bezon zich op het verband tussen wiskunde en het christelijke karakter van zijn universiteit. Blauwendraat geeft hier een inleiding op het boek en gaat op dit verband in.

Wiskunde heeft de naam de meest abstracte wetenschap te zijn, onafhankelijk van levensbeschouwelijke invloeden. Maar is dat wel zo? Wordt de wiskunde anders als de wiskundige een andere levensovertuiging heeft? De meesten zijn geneigd deze vraag meteen ontkennend te beantwoorden: wiskunde en (natuur)wetenschap hebben met geloof niets van doen. Sommigen — zoals natuurkundige en Nobelprijswinnaar Simon van der Meer — gaan zelfs zover dat ze beweren dat je een gespleten persoonlijkheid moet hebben om als natuurwetenschapper (in zijn geval: natuurkunde) in God te geloven.¹ De wetenschap

zou dan aantonen dat geloof in een god onzinnig is.

De Vrije Universiteit

De Amsterdamse Vrije Universiteit werd in 1880 opgericht om tegen dergelijk gedachtegoed op te treden. Haar stichter, de orthodox-christelijke Abraham Kuyper (1837–1920), en de zijnen zagen geen heil meer in de wetenschap zoals die aan rijksuniversiteiten werd beoefend. In de natuurwetenschappen hadden theorieën opgeld gedaan die strijdig waren met een letterlijke interpretatie van de bijbel, en ook in de theologie was het vrijzinnigheid troef. De Hervormde Kerk kon wel kerkelijke hoogleraren aanstellen, maar dat vormde geen verbetering. Kuyper besloot 'voor zichzelf te beginnen'; hij wilde een eigen onderwijsinstelling waar wetenschap kon worden beoefend vanuit een orthodox-christelijk standpunt.

Het belangrijkste voor hem was het onderwijs in de theologie, een van de drie faculteiten waarmee de VU werd opgericht.² De VU ging uit van de in 1879 opgerichte *Vereeniging voor Hooger Onderwijs op Gereformeerden Grondslag*; de leden en begunstigers van die vereniging droegen de VU financieel. De grondslag van de Vereeniging was 'gerefor-

meerd', een theologische richting die met name in de zeventiende eeuw erg invloedrijk was geweest en in de negentiende eeuw (mede dankzij Kuyper) een *revival* beleefde.

Kuypers doel was dat de VU op basis van die grondslag wetenschappelijk onderzoek en onderwijs zou gaan uitvoeren. Hij liet het daarbij niet bij de theologie, maar van elke wetenschappelijke discipline moest een dergelijke, christelijke variant ontwikkeld worden. De VU werd met scepsis en wantrouwen begroet; lang niet iedereen deelde immers Kuypers overtuiging dat christelijke wetenschap mogelijk was.

Als particuliere, kleine universiteit sprak het ook allerminst vanzelf dat de VU eenzelfde erkenning van examens en promoties als rijksuniversiteiten zou krijgen. In 1905 wist Kuyper deze erkenning bij wet geregeld te krijgen; de VU kreeg het zogenaamde *civiel effect*. Voorwaarde was wel dat de universiteit door zou moeten groeien met minstens één nieuwe faculteit per 25 jaar. Voor een onderwijsinstelling die volledig met hele en halve centen van de gereformeerde 'kleine luyden' bekostigd werd, was dit geen geringe opgave.

Brouwers intuïtionisme

Tot zover heeft de geschiedenis van de VU

nog weinig met wiskunde uitstaan. Sommige hoogleraren dachten wel eens na over het belang van het geloof voor de natuurwetenschappen, maar een concrete visie op christelijke wiskunde was er niet. De Wis- en Natuurkundige Faculteit, waar over deze kwesties moest worden nagedacht, zou pas in 1930 worden opgericht. Studenten aan de VU die in deze vakken geïnteresseerd waren, weken dan ook uit naar de Gemeente Universiteit³. Daar was in 1912 de briljante wiskundige L.E.J. Brouwer (1881–1966) aangesteld als buitengewoon hoogleraar in de wiskunde. In 1907 had Brouwer zijn proefschrift verdedigd. Dat proefschrift zou men kunnen zien als een reactie op ontwikkelingen in de negentiende-eeuwse wiskunde.

In ruim honderd jaar had de wiskunde immers een metamorfose doorgemaakt. Niet alleen waren bestaande disciplines vertakt en uitgebreid, maar ook was het karakter van de wiskundebeoefening veranderd. Binnen de wetenschap van getal en ruimte was men zich in toenemende mate gaan afvragen wat getal en ruimte nu precies waren. De ontwikkeling van de niet-euclidische meetkunde toonde bijvoorbeeld aan dat de ‘ruimte’ niet per definitie de driedimensionale euclidische ruimte was. Op zoek naar een goede fundering van de analyse was men op de verzamelingenleer gestuit en de paradoxen die Cantors *Mengenlehre* met zich meebracht.

De crisis in de grondslagen van de wiskunde verdeelde de geesten zeer en leidde tot de opkomst van het formalisme en logicisme. Deze richtingen poogden de vraag te beantwoorden wat wiskunde is: een logisch spelletje of een formele taal — of is er toch een soort transcendent werkelijkheid waarin de wiskundige objecten zich bevinden? Brouwer had over deze overtuigingen zijn eigen mening: wiskunde was geen van die alle, maar een mentale constructie.

Die constructie was gebaseerd op de oerintuïtie van de wiskunde: een continuüm met daarop punten. Deze oerbegrippen waren voor hem het object van de *eerste orde wiskunde*. Het wiskundig nadenken over die intuïtief gegeven objecten was wiskunde van de *tweede orde*. Brouwer wilde deze visie ten grondslag leggen aan de bestaande wiskunde. Het zou echter nog een decennium duren voordat hij zou inzien dat een consequente toepassing van deze richting, het *intuitionisme*, een wezenlijk andere wiskunde zou opleveren.

Eén van de oorzaken hiervan is de ontkenning van het principe van de uitgesloten derde, waardoor bewijzen uit het ongerijmde niet

meer opgaan. Het bewijs van de tussenwaardestelling maakt bijvoorbeeld essentieel gebruik van dit principe. Je neemt immers aan dat een continue reëelwaardige functie f op het interval $[a, b]$ geen nulpunten heeft, terwijl toch $f(a) < 0$ en $f(b) > 0$. Nadat je de tegenspraak hebt afgeleid, stel je dat er maar twee mogelijkheden zijn: f heeft òf wel òf niet een nulpunt op $[a, b]$; de mogelijkheid ‘ f heeft geen nulpunt’ valt af.⁴ Je houdt dus de bewering over: ‘ f heeft een nulpunt op $[a, b]$ ’.

Een bewijs als dat van de tussenwaardestelling kan de toets der intuitionistische kritiek niet doorstaan. De reden hiervoor is dat het nulpunt niet wordt aangewezen: je weet niet waar het ligt. In het intuitionisme van Brouwer wordt dat niet als wiskunde geaccepteerd: alleen dat is wiskunde, wat geconstrueerd wordt.

Christelijk intuitionisme

Binnen de gevestigde wiskundige orde werden Brouwers standpunten als gevaarlijk ervaren. David Hilbert, op dat moment toch wel de meest toonaangevende wiskundige, deed er alles aan om Brouwers invloed zoveel mogelijk af te knotten. In Brouwers eigen stad liep echter een student rond die wel erg onder de indruk was van zijn ideeën: Dirk Hendrik Theodoor Vollenhoven (1892–1978).

Vollenhoven was in 1916 begonnen aan een promotieonderzoek aan de VU met als onderwerp ‘de invloed der wijsbegeerte op de nieuwste vertegenwoordigers der wiskunde en natuurwetenschappen’. Wegens omstandigheden moest hij zich beperken tot de wiskunde, maar dat leverde nog een proefschrift van 444 pagina’s op dat hij op 27 september 1918 verdedigde. De titel was *De wijsbegeerte der wiskunde van theïstisch standpunt*. Hij probeerde daarin de filosofie van de wiskunde in te passen in een christelijk wijsgerig systeem.

Zijn promotor aan de VU had hem inhoudelijk niet veel kunnen helpen, maar des te meer vond hij hulp bij anderen, onder wie Brouwer. Het is ongetwijfeld aan diens invloed en allure te danken dat Vollenhoven in zijn proefschrift duidelijk stelling kiest voor een bepaalde richting, het intuitionisme.

Vollenhoven kwam hiermee in het vaarwater van Brouwer terecht. Sterker nog, de constructie van de wiskunde zoals Brouwer die uitvoerde alsmede het onderscheid tussen eerste en tweede orde wiskunde, werd door Vollenhoven met instemming begroet. Dat ligt ook wel enigszins voor de hand: Vollenhoven had de axiomatic en wiskunde zelf niet voldoende in de vingers om in Brouwers con-



D.H.Th. Vollenhoven, christen-wijsgeer van de wiskunde.

structie verbeteringen aan te brengen. Maar Vollenhoven deinsde er niet voor terug om op andere terreinen zich scherp tegen Brouwer en een andere grote intuitionist van die tijd, Henri Poincaré, af te zetten.

De verschillen bevonden zich hier meer in de metafysische achtergronden die aan hun visies vooraf gingen. Vollenhoven stelde zich op een christelijk standpunt. Zijn welomschreven filosofie was het ‘theïsme’, door hem losjes omschreven als ‘de wijsbegeerte die God wil dat we hebben zullen’.⁵ Deze omschrijving is natuurlijk wat vaag, maar voor Vollenhoven hield dat een christelijke visie in op de wereld en natuurlijk op God zelf.

Een opvallende conclusie die hij hieraan verbond, was de verwerping van het actueel oneindige ‘met al z’n antinomieën’. Vollenhoven komt tot deze uitspraak doordat hij het niet gepast of mogelijk vindt dat de mens, per slot van rekening een schepsel, God ‘de Oneindige’ zou bevatten.⁶

Een andere opvatting die uit Vollenhovens wereldbeschouwing volgt, is dat de werkelijkheid bestaat uit een geestelijk en een materieel deel (deze visie noemt hij *dualisme*). Dit in tegenstelling tot anderen die de werkelijkheid tot hetzij geest, hetzij materie willen reduceren. In een lang en grondig betoog bespreekt hij de diverse filosofen van de wiskunde uit de geschiedenis en legt hun ideeën langs de dualistische meetlat. Op grond van deze toets worden het logicisme en formalisme als wijsbegeerte der wiskunde door hem verworpen. Alleen het intuitionisme van Brouwer en Poincaré komen door de toets heen.

De metafysische verschillen die Vollenhoven met deze intuïtionisten had, leidden ertoe dat hij op zoek ging naar een christelijke versie van het intuïtionisme. De ideeën van Brouwer werden daarbij als ‘pseudo-intuïtionisme’ betiteld. Wellicht is dit oordeel er de oorzaak van dat Brouwer nergens met een woord over Vollenhovens werk heeft gerept.⁷

Wiskunde aan de VU

In 1930, twaalf jaar na Vollenhovens proefschrift (hij was inmiddels hoogleraar wijsbegeerte aan de VU), werd ingevolge de wet van 1905 een vierde faculteit aan de VU toegevoegd: de Faculteit voor Wis- en Natuurkunde. Er werd een gewoon hoogleraar in de wiskunde aangesteld: Jurjen Ferdinand Koksma, op dat moment 26 jaar oud en net in Groningen gepromoveerd bij J.G. van der Corput op een proefschrift *Over stelsels diophantische ongelijkheden*. Naast hem werd een bijzonder hoogleraar Verzekeringswiskunde aangesteld, Marius van Haften (1880–1957).

Koksma zou tot 1938 in zijn eentje verantwoordelijk zijn voor al het reguliere onderwijs in de wiskunde. Daarnaast deed hij ook erg succesvol onderzoek in zijn specialisme, de analytische getaltheorie. Hij onderzocht met name benaderingsproblemen van irrationale getallen en publiceerde met J. Popken over transcendentie van e^{π} . In 1936 verscheen zijn belangrijkste werk, *Diophantische Approximationen* bij Springer: een samenvatting van de stand van zaken op zijn vakgebied. Ondanks het feit dat het vanaf zijn verschijnen verouderde, heeft het boek twee herdrukken beleefd.⁸ De literatuurlijst bevat meer dan 700 items.

De vraag die zich echter opdringt, is hoe Koksma stond in het christelijke wetenschaps-

ideaal van de VU. De natuurwetenschappelijke faculteit werd vanwege het schijnbaar ongelovige karakter ervan nogal gewantrouwd door de achterban van de VU en was er ook niet zonder slag of stoot gekomen. Van de hoogleraren werd dan ook verwacht dat zij ‘trouw zouden medestrijden voor het beginsel’. Dat betekende voor Koksma dat hij onder druk stond om iets te doen met het werk van Vollenhoven.

In diverse referaten en toespraken die hij voor de eigen kring hield, klinkt de echo van Vollenhoven dan ook inderdaad door. Koksma voelde wel iets voor het intuïtionisme, en dan met name omdat het voor hem ook duidelijk maakte wat de grenzen van de wiskunde (én van de wiskundige) waren. Hij volgde daarin in zekere zin Vollenhoven, maar voelde zich toch prettiger in het gezelschap van collega-wiskundige Hermann Weyl.

De ideeën van Vollenhoven waren ambitieus en Koksma moet zich gerealiseerd hebben dat een intuïtionistisch standpunt in de wiskunde, en meer in het bijzonder zijn eigen vak, toch wel grote offers vergde. In het referaat *Existentiebewijzen in de wiskunde* besprak hij existentiebewijzen zoals dat van de tussenwaardestelling. In de getaltheorie komen dergelijke stellingen regelmatig voor. Zou hij zich, zoals Vollenhoven eiste, op een strikt intuïtionistisch standpunt stellen, dan moest hij deze stellingen verwerpen. Dat deed hij niet. Met de existentiële stelling had je tenminste iets.⁹

Dergelijke ideeën vond Koksma terug bij Weyl. Een andere reden om zich niet zonder meer bij Vollenhoven aan te sluiten was Koksma's vaste overtuiging dat zo'n richting voor een christelijke wetenschapsbeoefening niet uniek was. Kortom: je kon het een ander niet opleggen om als christen ineens ook



Foto: Faculteit der Exacte Wetenschappen

J.F. Koksma, eerste gewoon hoogleraar Wiskunde aan de VU

intuïtionist te worden, wat wel Vollenhovens idee was. Een keuze voor het Platonisme was bij wijze van spreken even legitiem.

In mijn onderzoek naar de opkomst van de disciplines Wiskunde en Informatica is dit laatste standpunt diverse keren opgedoken. Maar een belangrijker invloed van het christelijk karakter van de VU op deze disciplines wordt door velen gezien in de sfeer die er heerst en heerste. Niet zozeer christelijke wetenschap dus, maar wel (zeker in vroeger dagen) christelijke wetenschappers — en dat kun je merken. Als alumnus van de VU kan ik daarvan meepraten. ◀

Dit onderzoek is mede mogelijk gemaakt door de Haak Bastiaanse-Kunemanstichting en de afdelingen Wiskunde en Informatica aan de Vrije Universiteit.

Noten en referenties

1 NRC-Handelsblad 18 april 1987.

2 De andere waren Letteren en Rechten.

3 Gemeente Universiteit: thans UvA.

4 Het principe van de uitgesloten derde houdt juist in dat een derde mogelijkheid er niet is.

5 Vollenhoven, Dirk Hendrik Theodoor, *De wijsbegeerte der wiskunde van theïstisch standpunt*

(diss. VU), Wed. G. van Soest, Amsterdam, 1918, pagina 2.

6 Let op het lidwoord!

7 Van Dalen, Dirk, L.E.J. Brouwer 1881–1966. *Een biografie. Het heldere licht van de wiskunde*, Bert Bakker, Amsterdam, 2002. In deze biografie is Vollenhoven niet terug te vinden.

8 Chelsea, 1950 en Springer, 1974.

9 Koksma, J.F., *Existentiebewijzen in de wiskunde*, Kleijwegt, Loosduinen, 1938.

Erik van Zwet

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Niels Bohrweg 1
2333 CA Leiden
evanzwet@math.leidenuniv.nl

Vakantiecursus 2003

Reistijden voorspellen op snelwegen

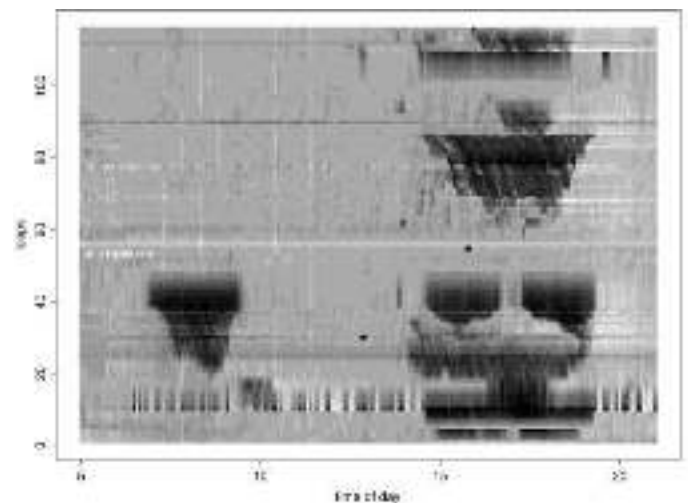
Het fileprobleem staat al jaren in de belangstelling van de media en politiek (zie ook het Nieuw Archief voor Wiskunde van juni 2003). De Nederlandse snelwegen kunnen het steeds maar groeiende aantal auto's niet verwerken en de individuele weggebruiker kan zijn bestemming vaak niet meer op tijd bereiken. Het probleem wordt door deskundigen dikwijls als onoplosbaar aangemerkt. In dit artikel betoogt Erik van Zwet dat het voorspellen van de reistijd de onzekerheid van het op tijd arriveren voor een groot deel kan wegnemen. Erik van Zwet is als statisticus verbonden aan de Universiteit Leiden. Hij verzorgde in de zomer van 2003 colleges over het voorspellen van reistijden op snelwegen in het kader van de door het CWI georganiseerde vakantiecursus voor wiskundeleraren.

Op bijna alle snelwegen in Nederland liggen zogeheten lusdetectoren. Deze detectoren tellen het aantal passerende voertuigen, en meten hun snelheid. Hetzelfde soort metingen wordt ook gedaan in Californië, waar ik de afgelopen drie jaar onderzoek heb gedaan.

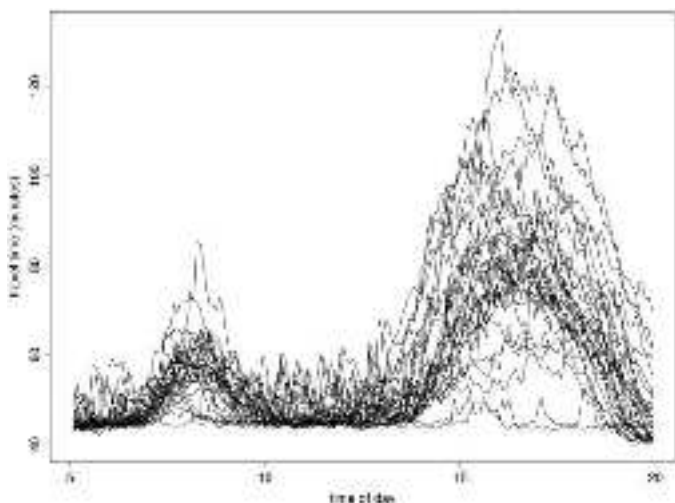
In figuur 1 zien we snelheidsmetingen uit Californië op 16 juni 2000 van 116 lussen langs ongeveer 80 km van Interstate 10 (East) door Los Angeles. Op de horizontale as staat de tijd van de dag, van 's ochtends 5 uur tot 's avonds 9 uur, en op de verticale as staat het lusnummer van 1 tot en met 116. De grijswaarde geeft de snelheid weer bij een bepaalde lus op een bepaalde tijd van de dag. Hoe donkerder de grijswaarde, hoe lager de snelheid. In de donkere, driehoekige vormen herkennen we files die ontstaan en

weer oplossen. Kennelijk is het op dit traject 's middags drukker dan 's ochtends.

Met de lusgegevens kunnen we ook een ruwe berekening maken van de reistijd tussen een tweetal punten A en B. In figuur 2 zien we een grafiek van de reistijden op ons traject langs I10 East op weekdays tussen 16 juni en 8 september 2002. De ochtend- en middagspits zijn duidelijk te herkennen. Op 3 en 4 juli, feestdagen



Figuur 1 Snelheidsveld v op 16 juni 2000 langs Interstate 10 East in Los Angeles. De donkere, driehoekige vormen zijn files die ontstaan en weer oplossen. De horizontale strepen zijn slecht werkende detectoren.



Figuur 2 Reistijden op 34 weekdagen op een traject van 80 km door Los Angeles. Opvallend zijn de grote verschillen in reistijd, vooral in de middagspits.

in Amerika, zijn de reistijden veel korter dan normaal.

Op basis van reistijden uit het verleden kunnen we voorspellen hoe lang het op een gegeven moment in de toekomst zal duren om van A naar B te komen.

Als u of ik ergens naar toe gaan, proberen we natuurlijk te voorspellen wanneer we aan zullen komen. We gebruiken daarbij onze ervaring uit het verleden en luisteren naar de verkeersinformatie op de radio. Onze voorspeller doet in zekere zin hetzelfde. De *ervaring* van de voorspeller is een databestand met de lusdetectormetingen langs de route op elke minuut van de dag in de afgelopen maanden. De voorspeller maakt een combinatie van deze historische gegevens en de meest recente lusmetingen van, zeg, een paar minuten geleden. Om de optimale combinatie te bepalen maken we gebruik van een statistische methode die (lineaire) regressie heet. Deze term komt van de uitdrukking *regressie naar het gemiddelde*. In de praktijk betekent het dat als de verkeerssituatie uitzonderlijk slecht is, we verwachten dat het beter zal worden en vice versa. Hoe snel de verbetering of verslechtering in de richting van het gemiddelde zal plaatsvinden hangt af van verschillende factoren, zoals de locatie en de tijd van de dag.

Bepaalde routes zijn nu eenmaal erg druk, en daardoor is de gemiddelde reistijd er langer dan gewenst. Dat is op zich vervelend en kostbaar genoeg, maar wellicht nog schadelijker is de grote variabiliteit van de reistijd op zulke routes. Als het soms een kwartier en soms een uur duurt om naar het werk te gaan, is men gedwongen om ruim op tijd te vertrekken en veelal te vroeg aan te komen. En als men in de file terecht komt, vinden de meeste mensen de onzekerheid over het wel of niet halen van een belangrijke afspraak erger dan het eigenlijke tijdverlies. Dat de reistijd van dag tot dag flink kan verschillen is duidelijk zichtbaar in figuur 2. Tijdens de middagspits variëren de reistijden van 40 minuten tot maar liefst twee uur.

Een reistijdvoorspeller vermindert niet de gemiddelde reistijd, maar kan wel een groot deel van de onzekerheid elimineren. Er blijft natuurlijk nog wel enige onzekerheid over, want het is niet mogelijk om tot op de minuut precies te voorspellen hoe lang het zal duren om van Amsterdam naar Breda te rijden. Hoeveel data, rekenkracht of slimme trucs we ook hebben, we kunnen niet daadwerkelijk in de toekomst kijken. Het blijkt echter, dat als de reistijd op een zekere route een spreiding (standaard deviatie)

van, zeg, 20 minuten heeft, onze voorspeller die kan terugbrengen tot 8 minuten. De winst van 12 minuten is zeker zo nuttig als een daadwerkelijke vermindering van de reistijd.

Het probleem

Zij $v(i, d, t)$ de snelheid gemeten bij lus i op dag d en tijd t . We willen de reistijd voorspellen van een reis langs lussen $i = 1, \dots, I$ als we vertrekken op een zeker tijdstip in de toekomst. In figuur 1 zien we een voorbeeld van het snelheidsveld v voor één dag. Het is zeker niet duidelijk hoe we alle informatie die we hebben verzameld tot op het huidige moment het beste kunnen gebruiken om een reistijdvoorspeller te definiëren. We hebben echter een compressie van deze informatie gevonden, die voor ons doeleinde bijzonder effectief is (zie [3] en [4]).

Merk op dat we met behulp van het snelheidsveld v de reistijd $T(d, t)$ kunnen berekenen bij vertrek op dag d , tijd t . Deze reistijd kunnen we ons voorstellen als behorend bij een pad door het veld v . We merken op dat we informatie van *na* het tijdstip t nodig hebben om de berekening uit te voeren. Met behulp van de informatie die we ter beschikking hebben *op* tijd t kunnen we wel de zogeheten instantane reistijd $T^*(d, t)$ uitrekenen.

$$T^*(d, t) = \sum_{i=1}^{I-1} \frac{2d_i}{v(i, d, t) + v(i+1, d, t)},$$

waarbij d_i de afstand tussen de lussen i en $i+1$ is. De instantane reistijd zou daadwerkelijk worden gerealiseerd als de snelheid na tijd t ongewijzigd zou blijven, totdat de reis voltooid is.

Als we de reistijd $T(d, t)$ hebben berekend voor een aantal dagen $d = 1, 2, \dots, n$ in het verleden, dan kunnen we ook het historisch gemiddelde berekenen

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{n} \sum_{d=1}^n T(d, t).$$

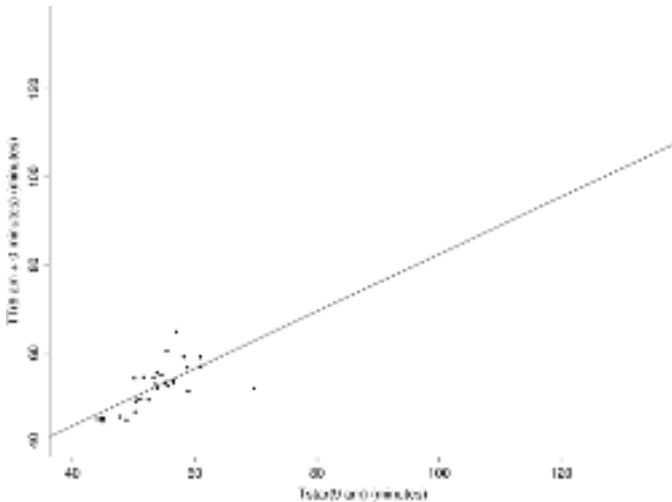
Ons doel is de reistijd $T(d, t + \delta)$, $\delta \geq 0$, te voorspellen met behulp van alle gegevens die we hebben op dag d en tijd t . Hier is δ de tijd tot vertrek, en zoals we al opmerkten is ons probleem ook voor $\delta = 0$ niet triviaal. Twee naïeve voorspellers liggen voor de hand, en worden ook in de praktijk vaak gebruikt. Het historisch gemiddelde $\bar{T}(t + \delta)$ en de instantane reistijd op tijd t , $T^*(d, t)$. We verwachten — en dat blijkt ook zo te zijn — dat $\bar{T}(t + \delta)$ het het beste zal doen voor grote δ , en $T^*(d, t)$ voor kleine δ . Onze nieuwe voorspeller is een gewogen gemiddelde van deze twee naïeve voorspellers, en doet het beter dan beide voor alle δ .

Lineaire regressie

Bij de bestudering van grote hoeveelheden snelwegdata, is ons een empirisch feit opgevallen, namelijk dat er een lineaire relatie bestaat tussen $T^*(d, t)$ en $T(d, t + \delta)$. In figuren 3 en 5 zetten we $T^*(d, t)$ uit tegen $T(d, t + \delta)$ voor onze data van Interstate 10 East. Merk op dat de expliciete relatie varieert met de keuze van t en δ , maar dat de lineariteit gehandhaafd blijft. Met deze observatie in gedachten, stellen we het volgende model op

$$T(d, t + \delta) = \alpha(t, \delta) + \beta(t, \delta)T^*(d, t) + \varepsilon. \quad (1)$$

waarbij ε een stochastische grootheid is met verwachting nul die toevallige veranderingen en meetfouten modelleert. Merk op dat



Figuur 3 $T^*(9 \text{ uur})$ versus $T(9 \text{ uur})$. De regressie lijn snijdt de y-as in het punt $\alpha=17,3$ en heeft helling $\beta=0,65$.

de parameters α en β mogen variëren met t en δ . Lineaire modellen met veranderende parameters worden besproken in [1].

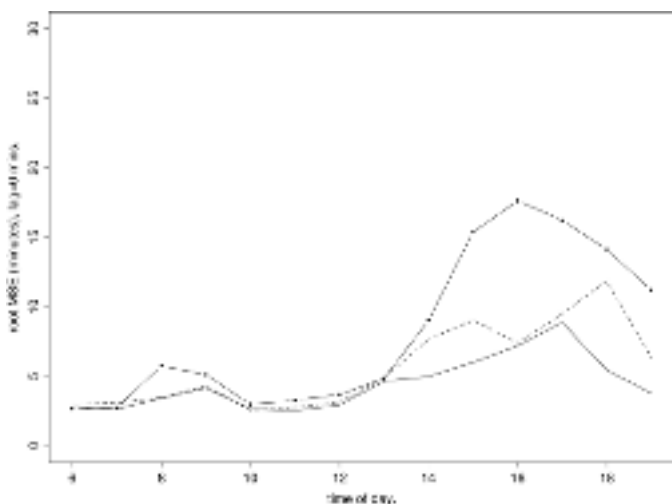
We kunnen $\alpha(t, \delta)$ en $\beta(t, \delta)$ bepalen door de methode van de kleinste kwadraten te gebruiken. Dat wil zeggen, we kiezen $\alpha(t, \delta)$ en $\beta(t, \delta)$ zó dat de kwadratische fout genomen over de historische data zo klein mogelijk is. Met andere woorden, we minimaliseren

$$\sum_{d=1}^n (T(d, t + \delta) - \alpha(t, \delta) - \beta(t, \delta)T^*(d, t))^2$$

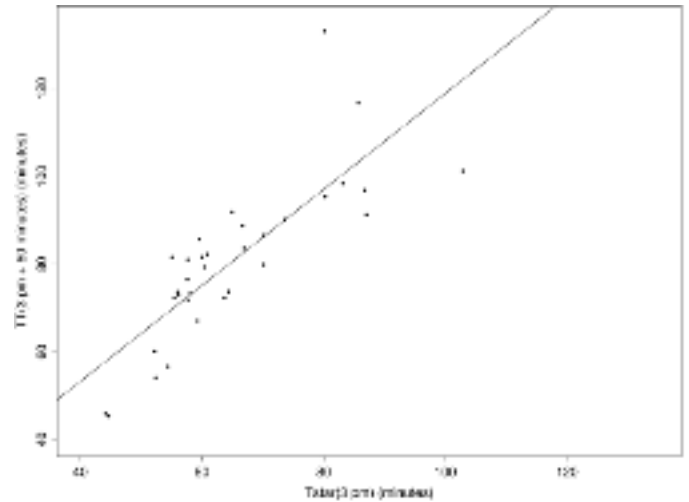
over α en β . We duiden de optimale parameter waarden aan met $\hat{\alpha}(t, \delta)$ en $\hat{\beta}(t, \delta)$ en definiëren onze voorspeller als

$$\hat{T}(d, t + \delta) = \hat{\alpha}(t, \delta) + \hat{\beta}(t, \delta)T^*(d, t). \quad (2)$$

Als we $\alpha(t, \delta)$ herschrijven als $\alpha'(t, \delta)\bar{T}(t + \delta)$, dan zien we dat (1) en (2) de toekomstige reistijd uitdrukken als een lineaire com-



Figuur 4 Geschatte wortel van de kwadratische fout voor $\delta=0$ minuten. Historisch gemiddelde $\bar{T}$ (---), instantane reistijd T^* (---) en onze voorspeller $\hat{T}$ (—).



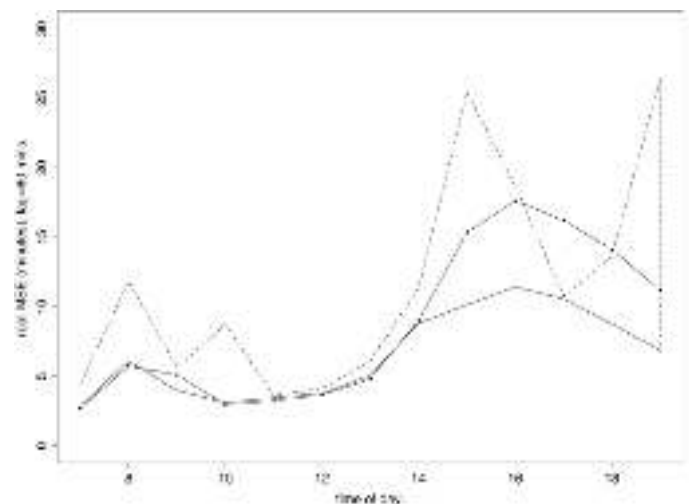
Figuur 5 $T^*(15 \text{ uur})$ versus $T(16 \text{ uur})$. De regressie lijn snijdt de y-as in het punt $\alpha=9,5$ en heeft helling $\beta=1,1$.

binatie van de twee naïeve voorspellers $\bar{T}(t + \delta)$ en $T^*(d, t)$. We kunnen onze nieuwe voorspeller dus interpreteren als de beste lineaire combinatie van de twee naïeve voorspellers. We mogen verwachten dat onze voorspeller het beter doet dan beide en dat blijkt in de praktijk ook zo te zijn.

Voorbeeld

We hebben onze voorspeller uitgeprobeerd op onze data van 116 lusdetectoren op een traject van 80 km in Los Angeles. Lusmetingen werden gedaan van 5 uur 's ochtends tot 9 uur 's avonds gedurende 34 weekdagen tussen 16 juni en 8 september 2000. De metingen werden geaggregeerd over intervallen van 5 minuten. Het snelheidsveld v voor 16 juni zien we in figuur 1. De opvallende horizontale lijnen zijn slecht werkende lussen. Het automatisch identificeren en corrigeren van slechte data is een belangrijk probleem, maar we laten dat hier voor wat het is. We hebben de slechte metingen 'met de hand' verwijderd en vervangen door middel van lineaire interpolatie. Vervolgens hebben we de reistijden $T(d, t)$ voor alle dagen berekend, en deze zien we in figuur 2.

We vergelijken de nauwkeurigheid van onze nieuwe voorspel-



Figuur 6 Geschatte wortel van de kwadratische fout voor $\delta=60$ minuten. Historisch gemiddelde $\bar{T}$ (---), instantane reistijd T^* (---) en onze voorspeller $\hat{T}$ (—).

ler $\hat{T}(d, t + \delta)$ met de twee naïeve voorspellers $\bar{T}(t + \delta)$ en $T^*(d, t)$ voor verschillende keuzes van t (5 uur, 6 uur, ..., 20 uur) en δ (0 minuten, 60 minuten). We hebben de wortel van de kwadratische fout geschat door steeds één dag weg te laten, de voorspeller voor die dag te bepalen op basis van de andere dagen, en de kwadratische fouten te middelen. De wortel van de kwadratische fout (root mean squared error, ofwel RMSE) is

$$RMSE(t, \delta) = \left(\frac{1}{34} \sum_{d=1}^{34} (T(d, t + \delta) - \hat{T}(d, t + \delta))^2 \right)^{1/2}$$

De resultaten voor $\delta = 0$ en $\delta = 60$ minuten zijn weergegeven in figuren 4 en 6. Allereerst merken we op dat de instantane reistijd T^* een redelijk goede voorspeller is voor kleine δ , maar zeer slecht voor grote δ . Het historisch gemiddelde is slechter dan T^* voor kleine δ , maar beter voor grote δ . Het belangrijkste resultaat is dat onze nieuwe voorspeller het beter doet dan beide. De RMSE van onze voorspeller blijft onder de 10 minuten, zelfs als we een uur van tevoren voorspellen ($\delta = 60$ minuten).

De RMSE van het historisch gemiddelde is een schatting voor de standaard deviatie van de reistijd. We zien in figuur 4 hoe onze voorspeller deze in de middagspits terugbrengt van 20 minuten naar 8.

Opmerkingen

Reistijdvoorspellen is een levendig onderzoeksgebied, en onze voorspeller is zeker niet de enige. Allerlei methoden, bijvoorbeeld gebaseerd op tijdreeks analyse, of op het principe van nabije buren (nearest neighbours), zijn eerder al geprobeerd. Een interessante aanpak die onlangs in Delft is ontwikkeld, maakt gebruik van een neuraal netwerk (zie [2]).

Hèt grote voordeel van onze methode — volgens ons — is zijn eenvoud. De berekening van de optimale parameter waarden $\hat{\alpha}(t, \delta)$ en $\hat{\beta}(t, \delta)$, voor alle t en δ , kost enig rekenen, maar dit kan 'off-line' gedaan worden. Om nu op dag d , tijd t een reistijd te voorspellen hoeven we alleen de instantane reistijd $T^*(d, t)$ te berekenen en uit te vermenigvuldigen met de parameters $\hat{\alpha}(t, \delta)$ en $\hat{\beta}(t, \delta)$ voor de gevraagde δ (de tijd tot vertrek).

We hebben onze voorspeller geïmplementeerd voor het netwerk van snelwegen dat Los Angeles doorkruist. We hebben zo'n veertig vertrekpunten en bestemmingen gekozen en voor elk paar de tien kortste routes berekend. Een gebruiker kan via het internet een reistijdvoorspelling en bijbehorende beste route opvragen voor iedere vertrektijd in de toekomst. Als δ groot wordt, convergeert onze voorspeller vanzelf naar het historisch gemiddelde, en telt de huidige verkeerssituatie dus niet meer mee. $\Leftarrow$

Referenties

- 1 T. Hastie and R. Tibshirani (1993), 'Varying coefficient models', *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, **55**(4) p. 757–796.
- 2 H. van Lint, S.P. Hoogendoorn, H.J. van Zuylen (2002), 'State space neural networks for freeway travel time prediction', *ICANN*, p. 1043–1048.
- 3 J. Rice and E.W. van Zwet (2001), 'A simple and effective method for predicting travel times on freeways', aangeboden aan: *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*.
- 4 X. Zhang and J. Rice (2001), 'Short-term travel time prediction using a time-varying coefficient linear model', te verschijnen in: *Transportation Research C*.

Hans van Lint

Spiekerbrink 25
8034 RA Zwolle
vanlint-breeman@hetnet.nl

Rob de Jong

Leusderweg 263
3818 AG Amersfoort
rob.metjedejong@planet.nl

Interview

Het Van der Blij-effect

Frederik van der Blij, erelid van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, is tachtig geworden. Hans van Lint en Rob de Jong interviewden hem in de studeerkamer van zijn appartement in Gorssel. Van der Blij is altijd door wiskunde gefascineerd geweest, door toepassingen van wiskunde op allerlei terreinen en door het overbrengen van wiskundige zaken op veel verschillende niveaus. Lesgeven is voor hem toneelspelen en hij beschouwt de leraar voor de groep dan ook als het belangrijkste element bij het overbrengen van kennis. Docenten die trouw het boekje volgen, kan hij niet begrijpen. Bij het vele bestuurswerk dat hij heeft verricht, heeft hij veel voordeel gehad van zijn aanleg goed om te kunnen gaan met mensen. Naast inhoudelijke overwegingen zit misschien daarin ook de verklaring voor zijn vroegere twijfel over de beslissing: wiskunde of theologie.

Van der Blij heeft niet een stelling of vermoeden op zijn naam staan, maar een 'effect'. In het college werd een wiskundige theorie tot leven gebracht. De laatste vijf minuten culmineerden in een doorschijnend heldere presentatie van de hoofdresultaten. In verheven stemming, je hebt deel gehad aan wiskunde, ga je naar huis... om te ontdekken dat het helemaal niet lukt om te reproduceren wat je daarnet nog helemaal begreep. Vat U dit Van der Blij-effect op als iets positiefs of als iets negatiefs? "In mijn opvatting is het positief, al is het in verschillende onderwijsopvattingen

negatief. Mijn opvatting over universitair onderwijs is dat een docent mijlenver boven de stof moet staan. Hij moet met enthousiasme de grote structuur laten zien. En de student moet in zelfwerkzaamheid de grote structuur tot finesses invullen en zich eigen maken. Dat proces voltrekt zich niet tijdens het college. Eén van de grootste complimenten die ik ooit van studenten bij de infinitesimaalrekening heb gekregen, was: "Het leek of u het gisteren verzonnen had". Het is natuurlijk gewoon toneelspel. Maar het prikkelt de goede student om het nou zélf ook te gaan uitzoeken. Op die manier zie ik het positief. Soms zijn er echter op het college verwachtingen gewekt over het begrijpen van de leerstof en valt het later tegen."

Verwondering

Van der Blij heeft altijd speeltjes bij de hand om de hersens aan het werk te zetten. Na een hele poos gesproken te hebben over zijn leven en min of meer zware wiskundige zaken pakt hij ineens zijn nieuwste object. Hij beweegt een pen over een stokje met inkepingen. Aan het einde van het stokje zit met een schroefje een propeller (gewoon een strip uit een meccano-doo) bevestigd. Deze gaat draaien, linksom danwel rechtsom, afhankelijk van de plaatsen waar de pen over het stokje strijkt. "Dit is nu iets waar mijn wiskunde geen kans ziet om een verklaring te vinden. Over die ribbeltjes breng ik duidelijk longitudinale trillingen aan en om een of andere reden wordt

een moment opgeroepen waardoor een rotatie ontstaat. Terwijl je zou verwachten dat longitudinale trillingen alleen maar een lineair effect geven. Een collega had er één meegebracht uit een Oostenrijkse speelgoedwinkel, één met een houten propeller. Die vlóóg. Schitterend! Hij vroeg om een verklaring. We zijn er nog niet uit."

Creatief rekenen

Van der Blij's vader was boekdrukker. Zodoende was er veel belangstelling voor boeken. Om sociaal hoger op te komen lieten zijn ouders zijn oudere zuster naar de MULO gaan en verder leren voor onderwijzeres. Voor hem hadden zij aanvankelijk een soortgelijk traject in gedachten, maar onder invloed van het hoofd van de school liet men hem naar de HBS gaan — dit zou een betere voorbereiding op de MTS bieden dan de ambachtsschool. Fred van der Blij had al jong belangstelling voor rekenen, 'creatief rekenen'. Tijdschriften en kranten brachten hem in aanraking met puzzels waarin vermenigvuldigingen of staartdelingen met letters aangegeven waren. Het was de kunst om de letters te vervangen door cijfers waardoor de vermenigvuldiging of de staartdeling waarachtig werd. Een voorbeeldje: als $p \times p = ..p$ dan kan p gelijk zijn aan 0, 1, 5 of 6. "Mijn leermeesters hebben altijd op de een of andere manier een bijzondere indruk op mij gemaakt. Op de HBS kregen we wiskunde van Overeynden, een ingenieur, die enerzijds wiskundig tegen-

viel, anderzijds een begripvol mens was. Toen ik in het boek ontdekte dat een stelling die ik eenvoudig bewijzen kon, niet voorkwam, antwoordde de docent dat men dat nu eenmaal niet deed! Bij een mislukt proefwerk — wat iedereen wel eens overkomt — was dezelfde docent bereid een herkansing te geven, mede omdat een renteloos voorschot bij de studie ervan afhankelijk zou kunnen zijn. Hoewel alleen God een 10 en de leraar een 9 kon krijgen, kreeg ik toch ook bij hem wel eens een 9. In de vierde en vijfde klas hadden we Wichers, een echte wiskundige. Wichers heeft drie belangrijke dingen gedaan. In de eerste plaats heeft hij de belangstelling voor meetkundige problemen opgeroepen, in de tweede plaats heeft hij me ervan weerhouden om, zoals bij veel goede leerlingen gebeurde, de akten K1 en K5 te gaan halen. Hij gaf me in plaats daarvan modernere boeken mee over differentiaal- en integraalrekening (Kowalewski) en complexe functietheorie (Bieberbach). Dit bleek later in de eerste moeilijke studie-jaren aan de universiteit de studie wiskunde te vereenvoudigen en te versnellen. Ten derde heeft hij me aangeraden bijlessen wiskunde te gaan geven aan zwakkere leerlingen uit lagere klassen. Die lessen, die uiteraard ook een zakcentje opleverden, leerden mij niet alleen de wiskundeleerstof van de middelbare school extra goed beheersen, maar gaven ook een flinke oefening in het lesgeven zelf. Dit kwam goed van pas in mijn eerste leraarsbanen.

Wichers wakte de *meetkundige belangstelling* op door mij bij hem thuis uit te nodigen en een meetkundig probleem uit te leggen waar hij zelf mee bezig was. Ik weet het nog precies. Het ging om het feit dat je bij een willekeurige driehoek op twee totaal verschillende manieren een drietallige symmetrie kunt oproepen en je je daarna dus af kunt vragen of die twee symmetrieën enig verband met elkaar hebben. Precieser gezegd, kun je in de eerste plaats via de trisectrices van de hoeken, de driehoek van Morley tekenen en bewijzen dat die driehoek gelijkzijdig is. In de tweede plaats kun je uit een willekeurig punt P van de omgeschreven cirkel van de gegeven driehoek loodlijnen neerlaten op de zijden van de driehoek, of hun verlengden, en de rechte van Wallace construeren door de voetpunten van die drie loodlijnen. Als je vervolgens het punt P langs de cirkel laat lopen en de omhullende epicycloïde van de lijnen van Wallace construeert, dan blijkt dat de raaklijnen in de drie keerpunten van die epicycloïde hoeken van 120 graden met elkaar maken. Welk verband is er nu tussen

de zijden van de driehoek van Morley en die drie raaklijnen? Wichers' stimulans gaf mij een voorsprong in de studie wiskunde. Zo kon ik in Leiden snel het kandidaatsexamen afleggen. Dat had nogal wat voeten in de aarde, met bijeenkomsten georganiseerd bij oudere studenten thuis waarbij collegedictaten werden uitgewisseld en vragen konden worden beantwoord. De universiteit in Leiden werd immers snel na het begin van de Tweede Wereldoorlog gesloten."

"De grote liefde voor de getaltheorie is ontstaan bij Nieland in Utrecht, waar ik na het kandidaatsexamen verder studeerde. Nieland was een marinedocent in Den Helder die door de sluiting van de marinebasis verhuisde naar Utrecht om de colleges van de ontslagen joodse hoogleraar Wolff waar te nemen. De complexe functietheorie die Nieland doceerde leverde indirect veel leuke getaltheoretische eigenschappen op. Als je bijvoorbeeld zoekt naar het aantal roosterpunten op een cirkel, ontstaan mooie formules waarin de sommen van delers van getallen voorkomen. De multiplicatieve structuur van de getallen en de toepassingen op de vierdimensionale bol fascineerden mij enorm. Om meer te weten te komen, verwees Nieland me naar Kloosterman. Het was Kloosterman die verantwoordelijk was voor mijn verdere ontwikkeling, met name in de getaltheorie. Ik kwam veel bij hem thuis en er ontstond een zo goede band dat ik zelfs onderzoeksresultaten van hem bij mij thuis bewaarde om te voorkomen dat ze verloren zouden gaan bij eventuele oorlogscalamiteiten.

Kloosterman had in verband met zijn eigen promotieonderzoek onder meer bij Hecke in Denemarken gestudeerd. Hij adviseerde me om artikelen van Hecke te bestuderen. Zo maakte ik kennis met de $T(n)$ operatoren van Hecke: operatoren in meerdimensionale ruimten, die tegenwoordig erg actueel zijn.

Artikelen van Siegel over sommen van kwadraten liet Kloosterman me ook lezen. Siegel combineerde eigenschappen van kwadratische vormen modulo alle priemgetallen met reële eigenschappen en leidde daaruit stellingen over kwadratische vormen over gehele getallen af.

Modernere opvattingen over de kwadratische vormen formuleerden de problemen daarover als problemen van de orthogonale groepen en openden de vraag naar analoge problemen voor andere Lie-groepen. Mijn proefschrift, *Theta functions of degree m*, ging eigenlijk over de symplectische groep. In Utrecht leerde ik van het meetkundig on-

derzoek van Freudenthal over de exceptionele Lie groepen G_2 , F_4 , E_6 , E_7 , en E_8 . Hierdoor gegrepen deed ik samen met Springer onderzoek naar de octaven, de laatste in de rij van reële getallen, complexe getallen, kwaternionen en octaven (later octonions genoemd). Deze acht-dimensionale delingsalgebra is niet commutatief en niet associatief. Vandaag aan de dag wordt deze theorie door fysici gebruikt in cosmologische theorieën."

Middelbaar Onderwijs

De eerste baan was docent wiskunde aan de HBS te Warffum. "Uit een van mijn klassen zijn wel vier leerlingen wiskunde gaan studeren. Ik had daar een bijzondere collega, een leraar natuurkunde E.A. Kleima, hij was namelijk lid van *De Ploeg*, een bekend gezelschap van Groningse kunstenaars. Hij heeft bij mij de interesse voor kunst wakker gemaakt.

Later kreeg ik een leraarsbaan in Breda aan het Stedelijk Gymnasium. Ik ben daar vier jaar gebleven, maar het was er heel anders dan in Warffum. In de vier jaren is slechts één leerling wiskunde gaan studeren.

Wat kon je veel aan in die tijd. Naast de baan aan het gymnasium gaf ik les in perspectief aan de Academie voor Beeldende Kunsten en werkte ik een halve dag in de week in Amsterdam op het Mathematisch Centrum mee aan een seminarium over analytische getaltheorie."

Theologie

Van der Blij heeft serieus overwogen om theologie te studeren. Zijn er verbanden tussen een studie theologie en een studie wiskunde? "Er zijn twee kanten aan: een emotionele en een intellectuele. Ten eerste: de belangstelling die je hebt, heeft veel te maken met waar en hoe je groot geworden bent, hoe je bent opgevoed. Mijn zeven jaar oudere zus werd, toen ik vijftien was, gevraagd om een nieuwe methode voor de Zondagsschool *de Westhill* op een andere school in Leiden te introduceren. Zij nam dit verzoek aan onder de voorwaarde dat haar broertje mee mocht komen om de kleinere kinderen verhalen te vertellen. Ik heb dat met veel plezier gedaan en — veel belangrijker natuurlijk — ik ontmoette er mijn toekomstige vrouw, Ingetje Zevenhuizen. Ik ben inmiddels meer dan vijfenvijftig jaren met haar getrouwd. Wij hebben vier kinderen, één zoon en drie dochters.

Vervolgens: intellectueel gezien is de theologische wetenschap bezig met iets wat haast even ongrijpbaar is als de wiskundige werkelijkheid. Bij het rationele denken ben je je

duidelijk bewust dat het spreken over God een spreken in beelden is. Het beeld gaat een eigen leven leiden, maar er blijft afstand tot 'een realiteit'. Bij de wat zwaardere wiskundige abstractie zie je hetzelfde, vergelijk maar met de bekende discussie of wiskunde geconstrueerd is of dat wiskunde ontdekt is. De theoloog Kuitert zegt in latere geschriften dat God een constructie is in woorden waarbij men iets wil verwoorden dat we niet kunnen verwoorden.

Om theologie te studeren had ik als HBS-er Grieks en Latijn moeten inhalen; gezien mijn niet al te beste geheugen ben ik daar maar niet aan begonnen. Je begrijpt wel dat dat niet de echte reden was: *bij de studie theologie zou ik misschien het echte geloof hebben kunnen verliezen*. Het blijft nu meer een liefde. Wiskunde is als vak mooier!

De breedte van de wiskunde geeft veel voldoening. Voor het vak getaltheorie moet ik een stuk meetkunde weten, een stuk klassieke functietheorie, een stuk functionaalanalyse. Dat is wat mij binnen de wiskunde fascineert. Over veertien dagen moet ik een verhaal houden over wetenschap en abstracte kunst. Dan kun je vanuit de geschiedenis zien hoe de wiskunde abstract is geworden en hoe de kunst hier en daar abstract is geworden. Al dat soort dingen boeit me."

Waarom wiskunde?

Waarom doen we wiskunde en waarom heeft de regering geld over voor al die hoogleraren en leraren om dat vak te ontwikkelen en door te geven? "Persoonlijk vind ik dat wiskunde gewoon leuk is. De esthetische vorm is de eerste prikkel en het verlangen om ontdekkingen aan anderen te vertellen is een volgende.

Vroeger, voor de Tweede Wereldoorlog, waren er op een universiteit twee hoogleraren wiskunde. Iemand die op zuivere wiskunde afstudeerde moest leraar worden om aan zijn brood te komen. Na de Tweede Wereldoorlog is onder andere door de invloed van Van Dantzig statistiek als belangrijk extra aandachtsgebied ingevoerd. Verder kwam toen het onderwerp stochastische processen aan de orde en was er uitgebreide aandacht voor differentiaalvergelijkingen. Allemaal onderwerpen die noodzakelijk waren in de toepassingswereld van de wiskunde. Het aantal hoogleraren in de wiskunde aan een universiteit steeg toen enorm.

Van Dantzig en Van der Corput vonden dat de wiskunde meer moest worden uitgedragen. Dat was een belangrijk motief achter de oprichting van het Mathematisch Centrum. Korevaar en ik waren de eerste reguliere me-

dewerkers van het Mathematisch Centrum, in de zomer van 1947. Wij behoorden tot de eersten met het beroep van 'wiskundig onderzoeker'."

Bruikbare wiskunde

"Na de Tweede Wereldoorlog bleek de wiskunde door zijn modelkarakter niet alleen bruikbaar voor de natuurkunde en de scheikunde maar ook voor de sociale wetenschappen. Dat kwam mede door de statistiek die toen geweldig in opkomst was. De universiteiten richtten zich op dit soort toepassingen. Er was geld en merkwaardig genoeg kwamen er steeds meer studenten. De studentenaantallen namen enorm toe tussen 1939 en 1949. Nederland moest omschakelen van een agrarisch land naar een industrieel land. Vandaar dat er een tweede Technische Hogeschool kwam en er werd al gesproken over een derde. Tegelijkertijd kwam er meer werk voor wiskundigen bijvoorbeeld bij het Nationaal Luchtvaartlaboratorium en bij Philips.

In diezelfde tijd zag ik hoe wiskunde en natuurkunde uit elkaar begonnen te groeien. Aan de lange geleidelijke opbouw in de analyse hadden de fysici geen behoefte meer. Met Eckhaus heb ik toen een syllabus gemaakt over toepassingen van differentiaalvergelijkingen en met Van Tiel een wiskundig verantwoorde maar toch veel beknopter methode voor de infinitesimaalrekening – later uitgekomen als Prisma-Technica boekje.

Niet alleen de fysici, ook biologen, geologen en sociologen hadden wiskunde nodig. Ik maakte er een hobby van om ingewikkelde theorieën zoals de wetten van Maxwell en de thermodynamica ook voor jongere studenten duidelijk te maken. Als ze de structuur in konden zien, kon je gemakkelijk naar hogere dimensies toe. Voor de biologen maakten we een syllabus waarin bijvoorbeeld de werking van het oog van een vlieg veel te simpel werd behandeld, maar waarin hen duidelijk gemaakt werd dat ze nu met een wiskundig model werkten. *Zo zie je: je doet toch mee aan de toepassingen van de wiskunde, maar op een heel eigen manier.*"

Denkvermogen

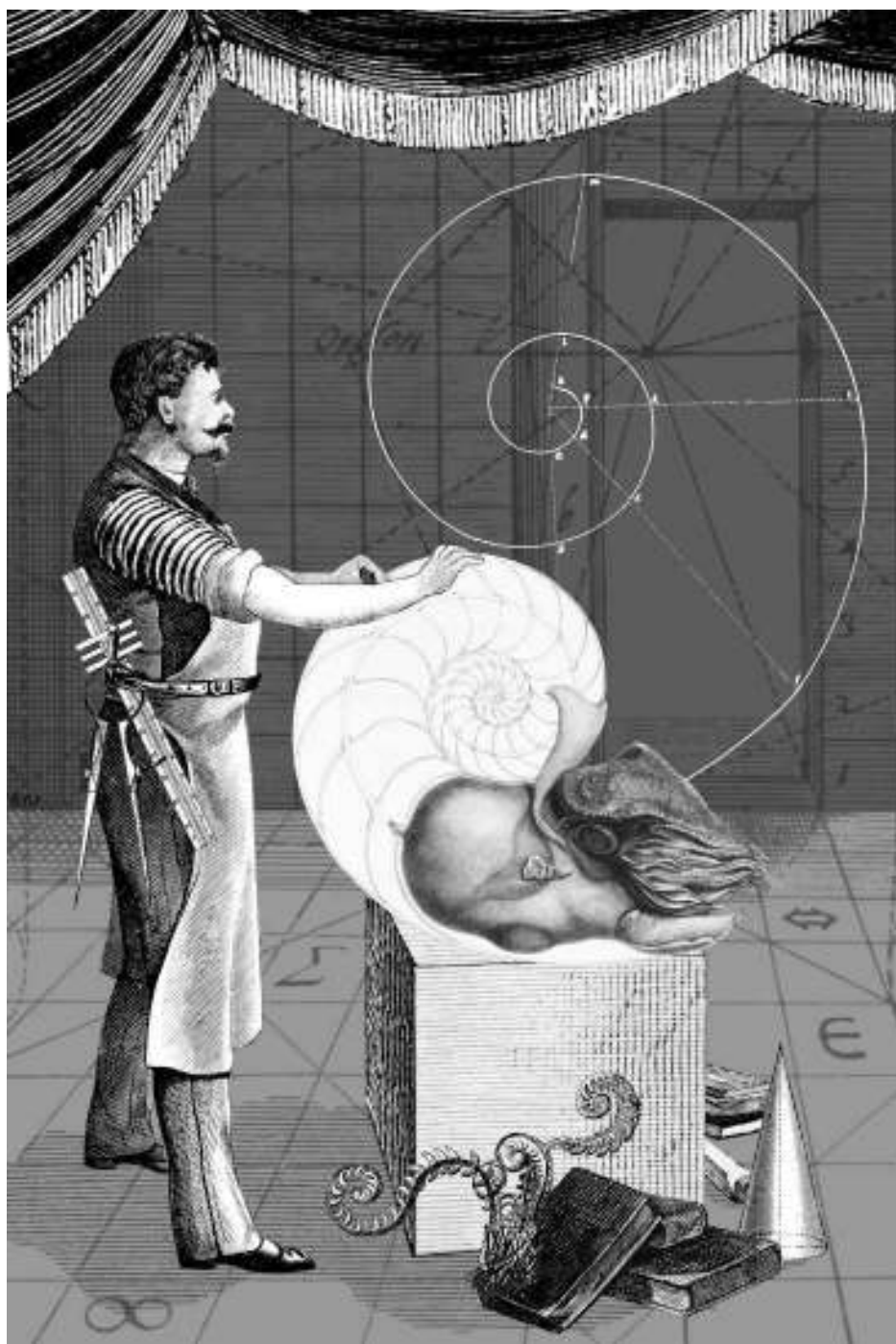
"De vraag die Freudenthal in zijn samenwerking met mevrouw Ehrenfest aan de orde stelde was: kan wiskunde bijdragen aan de vorming van het denkvermogen? Op de klassieke universiteiten was dat de veronderstelling. En in de hele samenleving ging men er ook min of meer van uit dat het denkvermogen gevormd wordt door de wiskunde. Waar je ook solliciteerde, als je wiskunde in je pakket had, dan

had je een streepje voor.

Destijds hadden de boeken voor de middelbare school een streng karakter. De ouderwetse meetkundeboeken begonnen op een gedegen manier. Je moest bewijzen dat een gelijkbenige driehoek gelijke basishoeken heeft. Je mocht niet zeggen: je ziet het zo als je spiegelt. Nee, daar moest je een heel bewijs voor leveren. Bij de infinitesimaalrekening was daarvan geen sprake. Dat ging helemaal niet met axioma's. Algebra kende in het middelbaar onderwijs geen axioma's. Dat dèd je gewoon: $a(b+c) = ab+ac$. Geloof je het niet? Nou, het is zo! Wil je het begrijpen? Neem maar een rechthoek en kijk naar de oppervlakte. Er is in het middelbaar onderwijs nooit een axiomatiek van de algebra geweest. En een axiomatiek van de differentiaal- en integraalrekening al helemaal niet. In de 5de en 6de klas was het limietbegrip een hoogstandje."

De grote onderwijsvernieuwingen

De schoolboeken waren aan vernieuwing toe. Didaktiek van de wiskunde werd in de jaren vijftig een serieus thema. Plotseling, eind jaren vijftig, nam deze ontwikkeling een nieuwe wending met de introductie van verzamelingenleer en bijvoorbeeld de lineaire algebra. New Math, ook wel spottend Spoetnikwiskunde genoemd, veroverde de wereld. De hele wereld? Hoe kon een klein landje aan de Noordzee zijn eigen weg gaan? "Royaumont is internationaal gezien een belangrijke conferentie geweest. In de VS kreeg je de New Math. Ineens was verzamelingenleer in de mode. Lineaire algebra was eveneens, en terecht, in de mode. Het initiatief lag toen in Nederland voor een groot deel bij Monna. Hij zat op het departement en initieerde een commissie voor de modernisering van het wiskundeonderwijs. Wiskunde had de eerste Commissie Modernisering. Monna had een zekere naam onder wiskundigen. Dat gaf hem gemakkelijk toegang tot de universitaire wereld. In die tijd was er in Eindhoven een nieuwe ploeg met Seidel. Seidel had ook veel belangstelling voor onderwijs. Freudenthal had altijd al belangstelling en zat al langer in de Werkgroep voor Vernieuwing van het Wiskundeonderwijs. Verder speelde het werk van mevrouw Ehrenfest ook een belangrijke rol. In het kielzog van Freudenthal ging ik ook mee. Freudenthal had zelf nooit voor een middelbare schoolklas gestaan; ik wel. De verhouding met Freudenthal is altijd bijzonder goed geweest en ik heb met hem fijn samengewerkt en ook veel van hem geleerd. We hadden dezelfde opvatting over de wiskunde en hadden



illustratie: Ryu Tajiri

ook allebei een brede belangstelling *buiten* de wiskunde. Ik kon over een heleboel dingen uit de literatuur, de dichtkunst en de religie met Freudenthal praten. Freudenthal schreef zelf gedichten en had nota bene als joodse gelovige colleges over het Nieuwe Testament gevolgd. Naast Wichers en Kloosterman beschouw ik Freudenthal als mijn leermeester, waarmee ik bovendien een goede menselijke verhouding had.”

De modernisering, met de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, was in eerste instantie gericht op het Voorbereidend We-

tenschappelijk Onderwijs (vwo). De hoogleraren gaven cursussen voor leraren in Utrecht, Eindhoven en Groningen. Men zag in dat er veel moest veranderen en dus was de deelname van alle universiteiten vanzelfsprekend. In 1971 werd het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO) opgericht. Freudenthal ging zich met het reken- en wiskundeonderwijs van de basisschool bezig houden (Wiskobas). Van der Blij ging samenwerken met de groep die de wiskunde in het voortgezet onderwijs (Wiskivon) ging hervormen. “Ik zat ook in de Commissie Onderbouw Wiskun-

de (COW). Daar is uitvoerig gesproken over de onderwerpen die uit het oude programma moesten verdwijnen en uiteraard de onderwerpen die nieuw aangereikt moesten worden. De vierkantsvergelijking leek alleenzalmakend. Waarom werd er geen derdegraads vergelijking behandeld. Waarom moest alles met een formule en waarom kon je de leerlingen niet leren schatten of een oplossing numeriek laten benaderen. De rekenmachine had de hele cultus van exponenten en logaritmen eigenlijk overbodig gemaakt en dus vond men in de COW dat er heel wat mocht veranderen.

Mijn verdriet is, dat het definiëren van de stroom van specifieke leerstof voor vwo-leerlingen nooit goed op gang is gekomen. Het wordt enigszins gecompenseerd in de Tweede Fase. Overigens beweer ik dat je er zelfs in het vwo rekening mee moet houden, dat er van de 30 leerlingen in de klas hooguit één zal zijn die wiskunde of natuurkunde gaat studeren.”

Bent u tevreden over wat de COW gedaan heeft? “Soms lig ik wakker en denk dan: ik had het nooit moeten doen, dan waren al die zorgen over de teloorgang van bepaalde onderdelen van het wiskundeonderwijs en eventuele gevolgen voor het aantal wiskunde studenten niet gekomen. Maar in hoeverre is het COW daar schuldig aan? In kringen van wiskundigen heerst verschrikkelijke onvrede. Ik trek het me een beetje aan. Ik zou het me meer aantrekken als in andere kringen geweldige onvrede was. Het wiskundeonderwijs in het vwo is immers niet bedoeld om aanstaande wiskundigen op te leiden. Daarvoor zijn het er te weinig. Ik ga niet zo ver als Freudenthal, die zei: in het jaar 2000 is er geen wiskundeonderwijs meer, dan is er alleen nog maar wiskunde in combinatie met andere vakken. Ik denk dat je nog steeds een goed stuk wiskundeonderwijs in de B-richting kunt geven, maar dan gecoördineerd met de natuurkunde.

In de onderbouw is echter, door het idee van de basisvorming, voor een groep leerlingen die intellectueel veel aan kunnen, een gebrek aan uitdaging. Ook in de COW hebben we ons daar zorgen over gemaakt, we stelden voor wiskunde in de basisvorming drie niveaus voor. Dit werd echter niet geaccepteerd. Ik hoopte nog dat de docenten de stof-opgave zo zouden interpreteren dat ze in de klas voor de nodige uitdaging zouden zorgen. Dat is één van de ernstige zorgen van deze tijd. En wat mij dan verdriet is, dat ik altijd de negatieve berichten hoor en aan de andere kant toch het vermoeden heb dat er ook veel positieve berichten zijn.”

In de eerste jaren werd het letterrekenen helemaal niet gedaan. Dat was voor docenten niet zo goed te begrijpen. U hebt reeds geschetst dat de hoogleraren heel goed wisten dat de wiskunde in vrijwel alle studies noodzakelijk was en dus beslist niet alleen nodig zou zijn voor de leerlingen die wiskunde gaan studeren. Had U niet, als vertegenwoordiger van de universiteit in de Commissie, moeten waarschuwen: de vernieuwing gaat te ver, althans voor de brede lagen goede leerlingen die later zouden gaan studeren aan HBO of universiteit. Deze leerlingen hadden er recht op om in de jaren dat ze nog gemakkelijk kennis opnemen — op de leeftijd van 12 of 13 — ander onderwijs te krijgen? “Ik denk toch dat het gekomen is door het feit dat Wiskivon zich in de eerste jaren sterk op het Lager Beroepsonderwijs heeft gericht. Daar lag aanvankelijk het knelpunt. En op de mavo werd natuurlijk ook niet zo leuk wiskundeonderwijs gegeven. Nog altijd overzie ik de zaak niet helemaal. Op de universiteiten is er veel zorg over de geringe studentenaantallen. De vraag naar het waarom kun je het beste onderzoeken — en dan zeg ik iets revolutionairs — door na te gaan: waarom waren er 30 jaar geleden zovél studenten? Ik heb de cijfers niet, maar het zou interessant zijn om dat eens na te gaan.

De leerlingen die hoge cijfers behaalden voor alle of bijna alle vakken gingen vaak wiskunde studeren en nog vielen er tijdens de studie veel af. In Utrecht waren er ook veel die afvloeiden via MO A en MO B. Daar konden dan toch diploma's uitgereikt worden, zodat ze het onderwijs in konden. Eigenlijk waren het dus geen afvallers.”

Nu is er een nieuw probleem in het vwo. Er is een mooi samenhangend stuk wiskunde opgezet voor de Tweede Fase en nu dreigt de nieuwe minister daar nogal rigoureuus in te gaan schrappen. “Ik weet niet precies wat er geschrapt wordt. Je vraagt je altijd af: wat is de waan van de dag? De moeilijkheid is dat deze maatregelen altijd ook weer verdedigd worden door wiskundigen. Als de minister signalen zou krijgen van Philips of Shell, dan wordt er veel beter geluisterd. Bij alle protesten van wiskundigen zit toch altijd de zorg om het geringe aantal studenten.

Ik vraag me af: hoe ziet de lerarenpopulatie in het vwo er qua vooropleiding uit? Ik denk dat het voor het wiskundeonderwijs in het vwo heel gevaarlijk is als er maar zo weinig academici wiskunde geven in de klassen 5 en 6. En eigenlijk geldt dat net zo goed voor de eerste klas. Want hoe nuttig de nieuwe lerarenopleidingen misschien ook zijn, ze zijn opgezet als tweedegraads opleidingen. Je zou

willen dat meer mensen, ná een universitaire studie, het onderwijs ingaan. We hadden het net over de universitaire opgeleide MO-docenten. Dat was een tussenvorm, die helaas volledig verdwenen is.

We zitten hier in een vicieuze cirkel: er komen weinig studenten dus er komen weinig docenten. Toch doet zich een merkwaardig feit voor. Kennelijk spreekt de wiskunde de jeugd niet voldoende aan om het te gaan studeren, maar er zijn tienduizenden leerlingen die meedoen aan de Kangoeroe-wedstrijden en een paar duizend leerlingen die meedoen aan de Olympiade. Als de helft van die laatste groep wiskunde of theoretische natuurkunde ging studeren, dan waren we uit de problemen.”

De wiskundeleraar

“Bij het onderwijs spelen drie elementen een rol: het leerplan, het leerboek en de leraar. Ik geloof nog altijd — en dat blijkt natuurlijk uit mijn verleden — dat de leraar het centrale element is. *Ik schrik ervan als ik hoor dat er wiskundeleraars zijn die zich afhankelijk van het boek opstellen.* Wiskunde is in wezen een vak dat je *mondeling* moet overdragen. Daar kan ik mijn hand voor in het vuur steken. In het onderwijs probeer je de leerlingen, de studenten, te laten zien dat wiskunde een *proces* is. En dat de neerslag in de boeken *achteraf* gemaakt is. Wiskunde zoek je en dan lukt het niet en dan zoek je weer eens wat anders. En pas daarna krijg je: stelling, bewijs, stelling, bewijs. Dat is de laatste fase. En boeken zijn zo geschreven dat je alleen kennis maakt met de laatste fase. De rol van de leraar is in deze tijd eerder groter dan kleiner geworden. Maar ik geloof dat de grootte van de scholengemeenschappen één van de grootste problemen is. Gezamenlijke proefwerken opstellen bijvoorbeeld. Bij gezamenlijke proefwerken dreigt de persoonlijke inbreng te verdwijnen en dat is een slechte zaak.

Het beroepsperspectief is tegenwoordig erg belangrijk bij de keuze van een studierichting. Toen er een afzonderlijke informatica opleiding kwam, waarbij je niet eerst wiskunde moest doen, ging dat ten koste van het aantal studenten wiskunde. Tegenwoordig studeren de betere leerlingen liever econometrie aangezien je dan zowel de wiskundige uitdaging hebt, als de grotere mogelijkheid om een goed betaalde baan in het bedrijfsleven te krijgen.”

Het besturen

“Het bestuurswerk komt op een bepaald moment onontkoombaar op je af. In Utrecht zat



ik in een commissie die voorlichting gaf aan aanstaande studenten. Op het departement vonden ze dat zo'n goed idee dat er een landelijke commissie kwam. De voorlichting deed ik samen met studenten die al enige tijd bezig waren. Gesprekken met studenten en ouders leverden een goed inzicht in de drijfveren van jonge studenten.

De hoeveelheid bestuurlijk werk was gigantisch, maar wel in een bijzondere periode. Het was min of meer in tijden van 'oorlog'. Thuis zat men wel eens met de angstige vraag: "komt hij wel thuis?" De studentenopstand. Het Maagdenhuis. Allemaal studenten die moord en brand riepen tijdens vergaderingen. Uiteindelijk was het gekke dat in de meest revolutionaire studentenblaadjes stond: "Ze hebben nu Van der Blij van stal gehaald om rector te worden. Hij begrijpt de studenten wel een beetje. Maar...hij zal gemangeld worden tussen de autoriteiten en de studenten. Hij is geen vakidoot."

Wel, als ze dat destijds van je zeiden, dan zeg je gauw, als er een beroep op je wordt gedaan: vooruit dan maar. Eerst was ik een jaar secretaris van de senaat en daarna rector. In het jaar van het rectoraat werd het rustiger dan het rumoerige jaar van mijn secretariaat. Een aantrekkelijke kant van het rectoraat was het sociale verkeer. Er waren vele gelegenheden waar mijn vrouw en ik samen naar toe gingen, zoals uitreikingen van prijzen, bijvoorbeeld die voor de Nederlandse Letterkunde in Brussel. Daar moest de rector van de universiteit naar toe en hij kon zijn vrouw meenemen. Terwijl je binnen het wiskundig gebeuren haast nooit iets sociaals had.

Rond die tijd had ik nog een tweede bestuur. Ik was voorzitter van het Fentener van Vlissingen fonds. De Steenkolen Handels Vereniging heeft een cultuurfonds. Je krijgt een hoeveelheid kapitaal tot je beschikking, dat door een bestuur van vier mensen verdeeld moet worden. Om dat goed te doen ging je tooneelvoorstellingen bijwonen, muziek beluisteren, ateliers bezoeken, enzovoorts."

Opheffing IOWO

"Het IOWO was een goed werkend instituut voor het wiskundeonderwijs. Het ministerie van onderwijs vond echter dat er binnen het onderwijs andere structuren aangebracht moesten worden en daar paste het IOWO niet in, dus moest het worden opgeheven. Men vond dat leerplanontwikkeling, toetsen en lerarenopleiding los van elkaar moesten worden ontwikkeld en georganiseerd. Hier waren de wiskundigen het geheel mee oneens, maar alleen maar kwaad worden had natuur-

lijk geen zin. Ik heb toen veel moeite gedaan om de ambtenaren op het departement ervan te overtuigen dat er echt een kleine kern over moest blijven voor de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs, desnoods met het onderwijs in de natuurwetenschappen samen. Vijf medewerkers mochten blijven werken op de manier die het IOWO gewend was.

Als directeur van het instituut kreeg ik wel de onaangename opdracht om 35 van de 40 mensen ontslag aan te bieden. Het IOWO is een nachtmerrie geweest in die tijd. De vijf overgebleven medewerkers hebben echter wel kans gezien om via internationalisering zoveel geld binnen te halen voor de universiteit van Utrecht, dat er later weer uitbreiding mogelijk was. J. de Lange heeft bij die internationalisering een zeer belangrijke rol gespeeld."

Ars et Mathesis

Naast een grote belangstelling voor wiskunde en religie, bent u ook geïnteresseerd in kunst. Er zijn in het algemeen sterke banden tussen wiskundigen en kunstenaars. Hoe komt dat? Er bestaat een stichting Ars et Mathesis, hoe werkt men daar samen? "Ik denk dat het komt omdat de kunstenaars die bij *Ars et Mathesis* betrokken zijn, zelf een grote inbreng hebben. Naast de paar tentoonstellingen is er één centrale dag in het jaar. Dat is gewoon een sociaal gebeuren met de bedoeling elkaar te laten zien waar men mee bezig is. Het wiskundig niveau is in het algemeen niet zo hoog.

Maar er zijn toch ook heel specifieke delen die door de één meer uitgewerkt worden dan door de ander. Ik weet niet of ik de naam moet noemen om hem niet te bevoorraden — ik doe het toch — : Traarbach. Hij is geïnteresseerd in magische vierkanten. Hij werkt met magische vierkanten van 16 x 16. Met behulp van het tweetalig stelsel maakt hij daar abstracte kleurenpatronen van. Een andere man met wie ik ook wel contact heb, is Gerard Caris. Deze is bezeten van de vijfhoek. Hij zegt: met vijfhoeken kun je twaalfvlakken behappen. Die komen ook in de natuur voor. Deze man is ineens gefascineerd. Anderen gaan zich vervolgens met hem bemoeien omdat quasi-kristallen een vijftallige symmetrie hebben. Gewone kristallen hebben nooit een vijftallige symmetrie. Dat kan niet! Ongeveer vijftien jaar geleden bleek ineens een aluminium-mangaan legering een vijftallige symmetrie te hebben. Toen heeft N.G. de Bruijn daarover hele mooie wiskundige theorieën ontwikkeld. Er zijn grote conferenties over quasi-kristallen gehouden. En

de vijftalligen van Caris resoneerden daarmee. Toen hielden we een dag in Utrecht met een kristallograaf en Gerard Caris. Boeiend. En met de kunstenaar Vastrick werk ik samen vanuit de regelmatige zevenhoek."

Universitair onderwijs

In de VS ontstaat de gewoonte om twee soorten hoogleraren aan te stellen: de hoogleraren die zich vooral bezighouden met onderzoek en de hoogleraren die voornamelijk lestakingen hebben. Is dat ook iets voor Nederland? "Bij het universitair personeel zijn er die zich eigenlijk alleen maar met research willen bezighouden. Noodgedwongen geven ze nog wat colleges. Er zijn ook mensen die gepassioneerd met onderzoek zijn begonnen maar op een gegeven moment toch kiezen voor onderwijs. Juist bij een vak als wiskunde gaat de ontwikkeling zo snel dat je op een gegeven moment tot de conclusie komt: ik kan met dit specialisme nog maar net meedoen, eigenlijk loop ik achter. Dat betekent dan dat je meer aan onderwijs moet gaan doen. En het geven van doctoraalcolleges over verschillende onderwerpen uit de analyse en de meetkunde was voor mij een bijzonder prettige taak.

Mij hebben beide terreinen steeds geboeid, al heb ik wel meer tijd besteed aan onderwijs dan aan onderzoek. Ik ben echt met onderzoek begonnen, maar langzamerhand is het steeds meer onderwijs geworden. Ik ben er echter heel trots op dat ik twee jaar geleden nog een stukje research gedaan heb over een gespecialiseerd onderwerp uit de getaltheorie waarmee ik de toehoorders van de stafcolloquia in Utrecht en Nijmegen kon boeien."

Grijze Wijzen

"Het was aardig en het streelde mijn eergevoel dat ik op een bepaald ogenblik werd opgebeld door het Studium Generale in Utrecht. Ze zouden een reeks lezingen starten onder de titel *Grijze Wijzen*. Daarvoor werd ook ik uitgenodigd, en hield een verhaal over 'Het weten van wetenschap'. In verschillende gesprekskringen heb ik het voorrecht gehad met de echt grote wetenschappelijke onderzoekers van de Utrechtse universiteit uit verschillende faculteiten, van theologie tot diergeneeskunde, van letteren tot sociologie, van gedachten te mogen wisselen. Ik vraag me wel eens af waar ik dat voorrecht aan te danken had. Misschien omdat ik behalve veel praten toch ook probeer goed te luisteren. Het was een rijke ervaring."



Rainer Kaenders

Instituut voor Leraar en School
Katholieke Universiteit Nijmegen
Postbus 38250, 6503 AG Nijmegen
r.kaenders@ils.kun.nl

Column Differentiëren en integreren

Herr von Dale wartet auf Antwort

Steeds vaker worden er buitenlanders op Nederlandse universiteiten en hogescholen aangesteld. Soms is het een beroemdheid die voor een hoogleraarspositie wordt gestrikt, maar vaker zijn het aio's. Hoe zit het eigenlijk met de *inburgering*? Hoe ervaart deze internationale instroom de Nederlandse *normen en waarden*?

Rainer Kaenders studeerde wiskunde in Bonn en promoveerde vervolgens in 1997 aan de Universiteit Nijmegen op een onderwerp uit de singulariteitentheorie. Hij is vakdidacticus wiskunde aan het Instituut voor Leraar en School van de Katholieke Universiteit en daarnaast leraar aan het Canisius College in Nijmegen.

Plato was geen Nederlander, dat staat vast. Een Duitser was hij echter ook niet. Wat zou hij ervan gevonden hebben als iemand een integraal of een homologiegroep *nul gaat praten*? Volgens mij is er maar één land ter wereld waar dat kan: Nederland. Er zijn bovendien slechts ± 100 mensen die zoiets zeggen.

Een hele natie daarentegen vindt het volstrekt normaal om ± 100 te zeggen; maar wat wordt daar eigenlijk mee bedoeld? Het verschil tussen $+100$ en -100 mensen is tweehonderd. Afgezien daarvan, wat zijn eigenlijk -100 mensen?

Een dood lichaam kan *ontbinden*, maar in wiskundig Nederland gebeurt dit ook met een veelterm over een lichaam. Er worden kwadraten *afgesplitst*, veelvlakken *afgeknut* en staarten *gedeeld*. En in wat meer geavanceerde wiskunde: “een spectraalrij *hakt* een gefilterd gegradueerd differentiaalcomplex *in stukken*.” Zijn we bij de slager? En wat te denken van rekenpartijen? Het bedrijven van wiskunde lijkt bijna een menselijke bezigheid.

Het Nederlandse wiskundige taalgebruik gaat soms nog verder. Is een *epsilon* nou echt kleiner dan een *epsilon*? En wat is de logische implicatie van een bewering die *voor geen meter klopt*? Kan het dan *kloppend* worden gemaakt? Allemaal vragen waar je als Duitser in de Nederlandse wiskunde niet omheen kunt.

Goed, in Duitsland worden punten, lijnen en oppervlakken wel eens voor *Stühle*, *Tische* en *Bierseidel* uitgemaakt. In Nederland *laat* men functies op getallen *los* of worden er matrices *geveegd*. De Nederlander is koning in eigen wiskundeland: zo'n beetje de hele wereld is overeengekomen dat je het *grondtal* bij een logaritme ergens bij de grond neer moet zetten, behalve de Hollanders, die schrijven $^a\log$ in plaats van $\log_a$; natuurlijk niet zonder er uitgebreid in nomenclatuurcommissies over te hebben vergaderd.

Als Duitser sta ik vaak met mijn mond vol tanden. Niemand minder dan Simon Stevin schijnt gezegd te hebben dat men zich in het Ne-

derlands het best kan uitdrukken. Hier ben ik het roerend mee eens als het gaat om menselijke belangen, maar bij de wiskunde zet ik er vraagtekens bij. Ik weet wel, Nederland en de rest van de wereld zitten al lang niet meer te wachten op een Duitse beschavingsmissie. Veel dingen waarvan ik op school dacht dat ze onomstotelijk vaststonden, bestaan in Nederland helemaal niet.

Hoeveel uren moest ik niet de *Dreisatz* oefenen? (Vijf liter melk kost € 2,50. Een liter melk kost € 0,50. Drie liter melk kost € 1,50.) En als het dan klopte was dat meestal, *nach Adam Riese*. Wat *Bartjens* ervan had gevonden is mij niet duidelijk. En dan het rekenen met breuken: *Bruchrechnung*. Mij is geen ander onderwerp bekend waar de zo rijke Nederlandse taal zo schromelijk tekortschiet. Hoe kun je *Bruchrechnung* bedrijven zonder *Kürzen* en *Erweitern*? Inmiddels gebruiken ook mijn leerlingen op school deze woorden puur omdat er geen Nederlandse woorden voor bestaan. En bovendien, de woorden *Fingerspitzengefühl* en *Angstgegner* snappen zij per slot van rekening ook. “Differenzen und Summen kürzen nur die D..., die es noch nicht ganz verstanden haben.” Of neem nou het *aufrunden* of letterlijk vertaald ‘opronde’: het getal 3,1415 wordt afgerond tot 3,142. Ik rond het liever *op* tot 3,142. Als ik hier in Nederland iemand *uitnodig* zou ik hem eigenlijk liever *innodigen* — taal blijft onlogisch.

De menselijke Nederlandse kant van wiskunde heeft ook positieve aspecten. Veel dingen zijn beter te onthouden, zoals *delen door nul is flauwekul* en *Meneer Van Dale wacht op antwoord* (in het Duits: *Punkt- vor Strichrechnung*). En hoeveel poëtischer is een ‘bewijs uit het ongerijmde’ dan een ‘indirekter Beweis’?

Hoe kan men dan überhaupt wiskunde in de Nederlandse taal bedrijven? Wat is het smeermiddel tussen kille wiskunde en de warme Nederlandse taal? Het antwoord is verrassend simpel: koffie. De Britse academische traditie om bij elk gesprek dat intelligent dreigt te worden thee tot je te nemen, wordt weliswaar ook in Nederland nageleefd, maar met minder bezieling dan bijvoorbeeld in Duitse academische kringen. Toen ik in Nederland kwam, hingen hier overal posters met daarop de vraag: “Is er koffie na de dood?” Veel interessanter vind ik de vraag: is er koffie in de wiskunde? Het wordt hoog tijd dat iemand hier onderzoek naar doet. Bijvoorbeeld met twee groepen die wiskunde doen: de één zonder koffie en de controlegroep mét. En dan nog gesneden koek erbij.

Plato was in elk geval geen koffieleut. Van geleuter had hij *sowieso* geen *kaas* gegeten.



Jantine Bloemhof

Stichting Vierkant voor Wiskunde

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Niels Bohrweg 1

2333 CA Leiden

jantineb@vierkantvoorwiskunde.nl

Cultuur Museum Boerhaave

Goochelen met getallen

Het idee van een tentoonstelling over wiskunde, aldus directeur Veeneman van Museum Boerhaave in Leiden, leverde zeer tegen- gestelde reacties op: “Wat een leuk onder- werp”, of “Dat is zelfmoord”. Toch ging het museum de uitdaging aan. Vergezeld door haar man en haar zonen van tien en twaalf, toog Jantine Bloemhof naar Leiden. Dit leid- de tot de overtuiging dat de zelfmoord- denkers snel hun ongelijk zullen inzien. Jan- tine Bloemhof schrijft voor Vierkant voor Wiskunde ‘wisschriften’, verbredingsmateri- aal voor getalenteerde kinderen in de boven- bouw van het basisonderwijs.

De expositie bestaat uit twee delen die el- kaar fraai aanvullen. Enerzijds worden er his- torische voorwerpen en boeken getoond, an- derzijds zijn er twintig experimentele opstel- lingen op vrolijk rood gekleurde tafeltjes. De onderwerpen en experimenten zijn onderge- bracht in vier duidelijke thema’s, te weten *Cij- fers en getallen*, *Maten en meten*, *Praktisch rekenen* en *Mechanisch rekenen*. De experi- menten maken op een speelse manier dui- delijk dat wiskunde overal om ons heen te vinden is. Ze zijn waarschijnlijk voor kinderen bedacht, maar jong en oud ging enthousiast achter de rode tafels aan de slag. Aardig is ook dat dit praktische deel uitnodigt tot het uitwisselen van ervaring en kennis tussen be- zoekers.

Cijfers en getallen

Een eenvoudige manier om de relatie tussen de diameter van een cirkel en zijn omtrek vast te stellen is te zien bij *Cirkels en Pi*. Op de tafel

liggen een grote en een kleine cirkel van hout. Op beide is de diameter getekend. Aan de bui- tenkant is een koord bevestigd waarop een maatverdeling is aangebracht, te weten een, twee en drie keer de diameter van de bijbeho- rende cirkel en zijn totale omtrek. De omtrek van een cirkel is π maal zijn diameter. In een oogopslag is hier te zien dat π iets meer dan drie is. Ook is er aandacht voor het beken- de verhaal van de Chinese boer die als be- loning voor de uitvinding van het schaakspel van zijn koning zoveel rijstkorrels wil hebben als er op een schaakbord gaan wanneer op het eerste veld één korrel, op het tweede veld twee korrels, op het volgende veld vier kor-

rels, enzovoort worden gelegd. Het leek de ko- ning een bescheiden beloning. Al snel bleek de gevraagde hoeveelheid rijstkorrels groter te zijn dan er op aarde kan groeien. De tafel *Exponentieel schaak* laat op een aantrekkelij- ke manier zien, door damschijven te stapelen op de velden, dat bij verdubbeling het aantal inderdaad heel snel oploopt.

Maten en meten

Op verschillende manieren wordt in de ten- toonstelling aandacht besteed aan het be- grip gemiddelde. Wel heel bijzonder is dat een schoen van de reus Cajanus, een Fin die de laatste jaren van zijn leven in Nederland woonde, bewaard is gebleven en op de ten- toonstelling te zien is. De schoenmaat is niet vermeld, maar de schoen van deze 260 cm metende man heeft zeker geen gemiddelde grootte. Verder tonen oude prenten waarop heel erg kleine en zeer grote mensen staan af- gebeeld dat de sterke afwijking van de gewo- ne, lees gemiddelde, lengte als zo bijzonder ervaren werd, dat zij in hun levensonderhoud konden voorzien door zich tentoon te stellen.

Bij *Een neuslengte verschil* zien we dat de lengtemaat voet in het verleden geen eenduidige lengtemaat was. Een Rijnlandse voet meet 0,314m, een Amsterdamse 0,284m. Hadden Rijnlanders gemiddeld grotere voe- ten dan Amsterdammers? *Maten en meten* heeft een aantal aansprekende proeven. De stelling van Pythagoras kun je proefondervin- delijk bewijzen door de houten vierkanten a^2 , b^2 en c^2 te wegen op twee weegschalen. Op de ene weegschaal weeg je a^2 en b^2 , op de andere c^2 . De vierkanten zijn heel nauwkeurig





Van links naar rechts, van boven naar beneden: 1a. Door op een slang te blazen kunnen kinderen en volwassenen hun longinhoud meten. Naast het apparaat is de gemiddelde longinhoud per leeftijdsgroep en geslacht te lezen. 1b. De pomp van Archimedes. 1c. Wat is de relatie tussen de diameter en de omtrek van een cirkel en wat bepaalt de slingerijd van een kogel aan een koord? 2a. Schrijf je geboortjaar in Romeinse cijfers. 2b. De dubbele kegel rolt ogenschijnlijk naar het hoogste punt. 2c. De brachistochroon van Bernoulli. Langs welke baan is een kogel het eerst bij het eindpunt? 3a. De Chinese parabel van de rijstkorrels. 3b. De stelling van Pythagoras wordt gedemonstreerd door de driehoeken en vierkanten te wegen. 3c. Bouw een brug van losse planken.

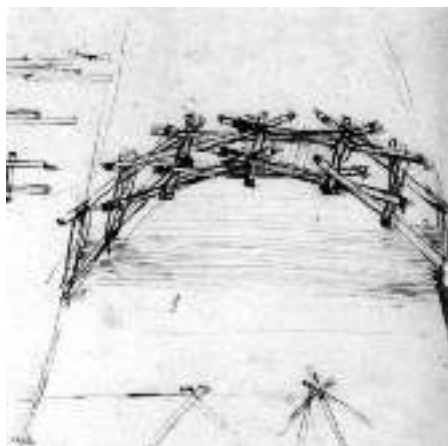
gezaagd en de weegschalen doen hun werk goed, zodat beide weegschalen (vrijwel) hetzelfde gewicht aangeven. Er valt veel meer te meten. Bij een van de opstellingen kun je je longvolume in milliliters meten. Dit volume kun je dan vergelijken met het gemiddelde ademvolume van personen van dezelfde leeftijd en hetzelfde geslacht. Ik bleek slechts 20 milliliter onder het gemiddelde van mijn club te presteren. Wat bepaalt de slingerijd van een slinger? Deze vraag kun je beantwoorden nadat je de slingerexperimenten van *Aan de slinger* hebt gedaan.

Praktisch rekenen

Een intrigerende opstelling is die van de *Oplopende kegel*. In een wigvormige bak, die smal en laag is bij de punt en breder en hoger aan de andere zijde, ligt een dubbele kegel, die wanneer je hem aan de smalle lage kant legt naar de bredere hoge kant van de bak rolt. Iedereen meent te zien én te begrijpen wat er gebeurt. De kegel rolt omhoog, de verklaringen zijn divers. Bijna niemand heeft in de gaten dat hier sprake is van gezichtsbedrog. Een liniaal zou op deze tafel een waardevolle aanvulling zijn. In een vitrine vlak bij dit expe-

riment staan een mooie oplopende kegel en een dubbele kegel uit de tweede helft van de achttiende eeuw.

De rechte en de kromme zijn twee banen waarover je een kogel kunt laten rollen. De ene baan is een schuine helling, de andere een cycloïde. Vraag is in welke baan een kogel het snelst van links naar rechts rolt. Deze vraag lijkt op de klassieke vraag die Johann Bernoulli stelde in 1696: "Hoe ziet de kromme eruit waarlangs een wrijvingsloos object zo snel mogelijk van het ene naar het andere punt glijdt?" Bernoulli noemde de gevraagde



Deze schets van Leonardo da Vinci is een voorbeeld van een brug die gemaakt is van losse palen. Op de tentoonstelling kun je een soortgelijke brug bouwen. (Illustratie: Codex Atlanticus, Milaan, Biblioteca Ambrosiana, ca. 1487–1488; detail)

kromme een brachistochroon. De kogel in de cycloïde baan (Bernoulli's brachistochroon) blijkt de snelste. Het is niet voor niets dat de helling van een halfpipen deze vorm heeft. Wanneer kinderen zien dat de kogel in de cycloïde baan sneller is en eerder aan de rechter kant arriveert, zijn ze verrast. Ze merken zelf op dat de kogel in de cycloïde baan een langere weg aflegt, bovendien moet hij ook nog eens een helling op. Wist u dat het ventieldopje van een binnenband een cycloïde baan aflegt tijdens het fietsen? De Chinese duikelaars (1700–1800) en de parabolische valbaan van van Musschenbroek (1725–1740) zijn twee andere tot de verbeelding sprekende oude objecten.

Mechanisch rekenen

Een slim bouwwerk is de brug van Leonardo Da Vinci. In 1483 schrijft hij dat hij een opzet heeft bedacht voor een lichte en makkelijk te transporteren brug. Het bijzondere van deze brug is dat hij bestaat uit louter losse planken van twee verschillende lengten en een bepaalde breedte. Touw, spijkers of lijm komen er niet aan te pas. Je kunt de brug zelf bouwen op een van de tafels. Maar hoe krijg je de brug met de ene zijde op de ene oever en de andere zijde op de andere oever? Vermoedelijk heeft Da Vinci de constructie voor zijn brug niet berekend, maar is deze al doende ontstaan. Tegenwoordig worden bij het ontwerpen van een brug de plaats en de grootte van de druk- en trekkrachten nauwkeurig berekend.

Mijn oudste zoon werd gegrepen door de laatste opdracht *Rekenen met raderen*. Een wel heel simpele rekenmachine telt twee getallen onder de tien bij elkaar op wanneer je

aan een hendel draait. Hierbij is de werking van de machine met behulp van tandwielen duidelijk te zien. Wouter probeerde of het apparaat ook een getal van een ander getal af trekt, wanneer je de hendel in tegengestelde richting draait. En ja hoor, dat doet hij prima. Daarop bedacht hij dat de machine in principe eenvoudig verder uit te bouwen is, zodat deze ook kan vermenigvuldigen. Delen lijkt niet tot de mogelijkheden te behoren, maar daar wordt nog over nagedacht. Dat hij niet de eerste is die over de mogelijkheden van mechanische rekenmachines nadenkt, blijkt wel uit de tentoongestelde rekenmachines uit de periode 1800 tot 1910.

In het boekje van de tentoonstelling staat een foto waarop een bol, een kegel en een cilinder van hout te zien zijn. Ze zijn afkomstig uit het meetkundig kastje met mathematische modellen van Jan Paauw uit de tweede helft van de achttiende eeuw. Het bijschrift vermeldt dat het wegen van deze drie het proefondervindelijk bewijs leverde voor de stelling van Archimedes. Deze stelling luidt: bij gelijke hoogte en diameter is de inhoud van de bol en kegel samen gelijk aan de inhoud van de cilinder. Dat had ik graag zelf gewogen!

Dit is nog maar een greep uit het aanbod van de tentoonstelling. Die heeft ook interessante voorwerpen, boeken en experimenten over de onderwerpen reeksen, inhoudsmaten, lengtematen, oppervlak, schaal, landmeetkunde, astronomie, loterij en tellen.

Bij de tentoonstelling is het boekje *Mededeling 304, Goochelen met getallen. Een geschiedenis* verschenen. Het is de catalogus van de tentoonstelling. Daarnaast geeft het een beknopt overzicht van de ontwikkelingen in de Westerse wiskunde, waarbij de nadruk ligt op de bijdrage die Nederlanders aan de ontwikkeling van de wiskunde hebben geleverd. Een aantal grote wiskundigen ontbreekt op de tentoonstelling en in het boekje, omdat hun werk te ingewikkeld is om begrijpelijk te maken voor niet-wiskundigen.

De tentoonstelling is te zien tot en met 26 september. Informatie over het museum, de expositie en voor scholen is te vinden op www.museumboerhaave.nl.

De exposities van Museum Boerhaave zijn altijd zeer de moeite waard. Ik pleit voor een 'Museum Boerhaave Op Reis'. Tentoonstellingen zoals deze zouden op nog andere plaatsen in het land te zien moeten zijn. ←



Het construeren van een brug door enkel gebruik te maken van houtjes, dus zonder touw, spijkers of lijm.

Steven Engelsman

Rijksmuseum voor Volkenkunde

Postbus 212

2300 AE Leiden

steven@rmv.nl

Cultuur Museum Boerhaave

Het monument van oprichting

Een van de voorwerpen die tijdens de tentoonstelling 'Goochelen met getallen' in museum Boerhaave in Leiden is te zien, is het monument van oprichting van ons Koninklijk Wiskundig Genootschap. Rond 1979 schreef Steven Engelsman het onderstaande, niet eerder verschenen artikel over dit monument. Steven Engelsman promoveerde in 1982 bij Henk Bos en Bert Ditters op een onderwerp uit de geschiedenis van de wiskunde. Hij is algemeen directeur van het Rijksmuseum van Volkenkunde in Leiden. Op de tentoonstelling, die plaatsvindt van 26 maart tot en met 26 september, worden historische voorwerpen tentoongesteld die het rekenen en de wiskundebeoefening in het verleden illustreren. Onder deze voorwerpen bevindt zich een drieduizend jaar oude papyrusrol. Ook zijn er diverse negentiende-eeuwse rekenmachines te bezichtigen.

Kort nadat het feestgeroos van *WG200* was verstomd en de tentoonstelling *de Geheele Wiskonst* definitief was afgebroken, kocht het Rijksmuseum Boerhaave te Leiden op een veiling van *Sotheby/Mak van Waay* een uit 1779 daterende zinnebeeldige voorstelling met het opschrift "Representatio Mathematica". Deze zinnebeeldige voorstelling staat in een glazen kastje op een gemarmerd houten voetstuk, dat de volgende tekst draagt: "Arn. Bastiaan Strabbe, Jan Bolten, Harmanus Rakers, Pieter Heynis, Oprichters van 't Wiskundig Genootschap".

We hebben hier kennelijk te maken met

een van de vroegste stukken uit de geschiedenis van het genootschap, waarvoor — aldus een mededeling in de *Algemene Konst- en Letterbode* van 24 april 1789 — "op het einde des jaars 1778 door vier Beminnaren der Wiskunde den eersten grond werd gelegd". De *representatio* moet kort daarna door de vier oprichters als Monument van de Oprichting in opdracht gegeven zijn. De voorstelling is vrijwel identiek aan die op de titelprent van het eerste deel van de eerste uitgave van het Wiskundig Genootschap, de *Kunstoefeningen* van 1782, die blijkens de signatuur eveneens in 1779 is vervaardigd door een zekere Philips Jacobz. In de documenten van het Wiskundig Genootschap — het eerste notulenboek is nog steeds zoek — wordt dit Monument van Oprichting pas in de notulen van de 26e algemene vergadering van 1805 genoemd; een jaar na het ontslag van eerste secretaris Strabbe deelde de medeoprichter Jan Bolten de vergadering mee dat "er nog een Monument van de Oprichting des Genootschaps ten huize van Strabbe is achtergebleeven en stelt voor zich wel te willen belasten om geadsisteerd door eene Commissie uit het bestuur een en ander van meergemelde weduwe te reclameeren".

Aldus werd besloten en een commissie werd geformeerd. Enige tijd later (13/7/1805) echter rapporteerden de heren Boelhouwer en Bangma, "dat zij hunne Commissie in gemeenschap met den heer Bolten hebben volvoerd, dog zonder eenig gewenscht gevolg, alzo gemelde weduwe voorgaf van de opgevraagde stukken niets te weten. Waar op,

in aanmerking genomen zijnde de weinige waarde der meergemelde boeken etcetera besloten wierd ter herkrijging van dezelve geene verdere moeite te doen".

In 1826 moet het Monument van Oprichting weer zijn opgedoken en door toedoen van A.F. de Pauw weer aan het genootschap zijn teruggegeven, aldus de notulen van de algemene vergadering van 1826. Ergens tussen 1879 — toen Matthes in zijn feestrede bij het honderdjarig bestaan de lotgevallen van het Monument van Oprichting verhaalde — en 1923 — toen van Haaften in zijn *Het Wiskundig Genootschap* weer het verlies van het Monument van Oprichting meldde — moet het monument weer verloren zijn gegaan. Pas in 1978 duikt het weer op na (of, door?) het feestgeroos van de tweehonderd-jaar viering.

De *representatio* en de titelprent geven een fraaie illustratie van wat de oprichters van het genootschap allemaal onder wiskunde verstonden. We vinden peilstokken, quadrant,



Allegorie van de wiskunde, detail: een figuur trekt een steen met behulp van een lier naar boven.

sextant, jacobsstaf, telescoop, globe, hemelbol, vestingswal, et cetera naast proportio-naalpasser, napierstaafjes, gradenboog, driehoek en cilinder en de boeken van Archimedes en Euclides. Landmeetkunde, Fortificatie, sterrenkunde en navigatie horen evengoed bij die wiskunde als *rabdologia*, de meetkunde van Euclides en de cirkelmeting van Archimedes. Dat is dezelfde wiskunde die Abraham de Graaf in zijn *Geheele Mathesis of Wiskonst* beschrijft en die te zien was op de jubileumtentoonstelling van 1978. Uit de *representatio* en de titelprent kunnen we ook achterhalen wat de oprichters van het genootschap zich voorstelden bij de zinspreuk “Een onvermoeide arbeid komt alles te boven”. Het voor de hand liggende beeld — dat je in die tijd en ook in deze voorstellingen vaker tegenkomt — is een piramide die door mannetjes onvermoeibaar wordt beklommen. Maar wat “Een onvermoeibare arbeid . . .” met wiskunde te maken heeft vinden we niet in dat beeld van piramide-beklimmende mannetjes maar in het reliëf tussen de twee regels van de zinspreuk. Daar zien we een mannetje dat een steen de berg op takelt. Me dunkt dat dit geen onvermoeide, maar eerder onvermoeiende arbeid in actie is; de lier kan met een pink worden bewogen. De takel zelf, en de lier, zijn vrucht van onvermoeide geestesarbeid van wiskundigen, die de mensheid hebben verlost van vermoeiende Sisyfusarbeid.

Het nut van wiskunde voor het vaderland stond hoog in het vaandel van de oprichters, zoals anderszins blijkt uit de voorrede van de *Kunstoeffeningen*: “ons doelwit is niet zo zeer de Wiskunde door nieuwe vindingen uit te breiden, [...] als wel den lust tot die voortreffelijke Weetenschap in onze Landgenooten te ontsteeken, en hen gelegenheid te geeven, om hunnen geest met verhevene kundigheden te verrijken, en nuttige burgers van het vaderland te worden”, en zoals blijkt uit de titel van de feestvoordracht op de algemene vergadering van 1792: “dat een Land, waar Kunsten en Weetenschappen, en wel bijzonder de Wiskunde, als moeder aller Weetenschappen, niet aangekweekt en beoefend worden, nimmer gelukkig kan zijn”.



Allegorie van de wiskunde. J. Delo naar ontwerp van C. Philips Jacobszoon, 1783. Vervaardigd bij het eerste lustrum van het wiskundig genootschap *Een onvermoeide arbeid komt alles te boven*. Op de sokkel de namen van de vier oprichters: Strabbe, Rakers, Bolten en Heynis.

Brieven

| Letters to the editor

De Akademieraad voor Wiskunde en het Voorzittersoverleg

Op bladzijde 3 van het maartnummer van het Nieuw Archief voor Wiskunde van dit jaar schrijft Eduard Looijenga als voorzitter van het Koninklijk Wiskundig Genootschap: "Dit [= het wiskundeonderwijs op de middelbare school] verdient mijns inziens veel meer aandacht van de Nederlandse (academische) wiskundige gemeenschap dan tot nu toe het geval is. Het ligt daarbij voor de hand dat de Nederlandse Commissie voor Onderwijs in de Wiskunde (waarin zowel het KWG als de NVvW vertegenwoordigd zijn en die dit jaar vijftig jaar bestaat) zich actief met deze materie gaat bezig houden en zich daarbij verstaat met andere organisaties voor wie dat ook een punt van zorg is, zoals de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Temeer omdat de voorzitter van de aan de KNAW ondergeschikte Akademieraad voor de Wiskunde van oordeel is dat dit buiten het werkkterrein van deze raad valt." Deze laatste uitspraak heeft correctie. Als voorzitter van de Akademieraad voor Wiskunde (ARW) wil ik deze gelegenheid benutten om de lezers van het Nieuw Archief inzicht te geven in het functioneren van de ARW, de aandacht van Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (KNAW) en ARW voor het Voortgezet Onderwijs (VO), en van het Voorzittersoverleg, het overleg van de voorzitters van de verschillende instanties die zich met het wiskundebeleid bezig houden.

De Akademieraad voor Wiskunde

De KNAW heeft voor haar taak als adviesorgaan van de regering voor het wetenschappelijk onderzoek verschillende adviesraden ingesteld. Er zijn akademieraden voor de wiskunde, voor de natuur- en sterrenkunde, voor de scheikunde, voor de biologie, voor de biofysica en biochemie, voor de medische wetenschappen, enzovoort. De ARW bestaat uit een bestuur van zeven personen en een raad van ruim twintig leden. Adviezen van de raad worden na goedkeuring door het bestuur van de KNAW door de KNAW naar buiten gebracht; er is dus geen tegenstelling tussen de KNAW en de ARW.

Op dit moment is de ARW bezig met een voorverkenning op het gebied van de mathematische biologie en een rapport over vrouwen in de wiskunde. Eerder is bijvoorbeeld het verkenningsrapport *De Toekomst van het Wiskunde-Onderzoek in Nederland* (het TWON-rapport) uitgebracht waarin ook aandacht aan het voortgezet onderwijs wordt geschonken. Namens de wiskunde reageert de ARW op ontwerpen van verkenningen op andere wetenschapsgebieden. Een mogelijk nieuw aandachtspunt zou kunnen zijn dat door het nieuwe Veni-Vidi-Vici-systeem van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO) en het tegelijk wegvallen van de KNAW-fellowships de kansen voor jonge wiskundigen om na hun promotie en verblijf in het buitenland zicht te krijgen op een vaste aanstelling in Nederland erg klein geworden zijn. Graag zou ik van de lezers van dit blad vernemen hoe hun visie op de situatie is. Verder functioneert de voorzitter van de ARW als coördinator en de ambtelijk secretaris van de ARW als secretaris van het hierna toe te lichten Voorzittersoverleg Wiskunde.

Wat de aandacht van de ARW voor het VO en het Wetenschappelijk Onderwijs (WO) betreft citeer ik het jaarverslag 2003 van de KNAW: "De ontwikkelingen in het onderwijs, zowel in het voortgezet als het hoger onderwijs, blijven de aandacht van de Raad vragen. Het gaat hierbij om kwesties zoals de herziening van de 'tweede fase' in het voortgezet onderwijs, het voor de wiskunde (veelal te lage) aantal contacturen tussen docent en leerling in het 'studiehuis' en de invoering van de bachelor-masterstructuur in het hoger onderwijs."

In deze rubriek reageren lezers op recent in dit blad verschenen artikelen. De redactie behoudt zich het recht voor ingezonden brieven in te korten of niet te plaatsen.

De Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen en het Voortgezet Onderwijs

In de achterliggende twee jaar is een tijdelijke adviescommissie van de KNAW bestaande uit vertegenwoordigers van de akademieraden en aangeduid als de Klankbordgroep actief geweest om een rapport over het voortgezet onderwijs uit te brengen. Ik heb daarin de ARW vertegenwoordigd, terwijl een ander bestuurslid van de ARW, Anne van Streun, als deskundige een grote inbreng heeft gehad.

De werkzaamheden van de commissie hebben geleid tot twee KNAW-rapporten: *Ontwikkeling van talent in de tweede fase* en *Robuuste profielen in het voortgezet onderwijs*. De belangrijkste aspecten van de visie van de KNAW zijn dat de centrale eindexamentoetsing zich dient te beperken tot de kernbegrippen en kernteorie van het vak en dat de zo te examineren stof ten opzichte van de huidige situatie beperkt moet worden; dat voor de bepaling van wat de kern is profielcommissies moeten worden samengesteld die de vakken in hun onderlinge samenhang bekijken en daardoor de samenhang vergroten; dat deze commissies ook voorstellen kunnen doen voor het aanpassen van de omvang van de vakken, en dat de uitwerking van de theorie in toepassingen wordt getoetst in het schoolexamen. De rapporten zijn gratis verkrijgbaar bij de KNAW op de internetpagina www.knaw.nl. Ik heb begrepen dat de minister van OCW, mede naar aanleiding van vragen van Tweede Kamerleden, het idee van profielcommissies zal overnemen. Nu de KNAW een gefundeerd en fundamenteel voorstel aan de Minister van OCW heeft gedaan, wacht de ARW de ontwikkelingen even af.

Het Voorzittersoverleg

Verschillende instanties behartigen de belangen van de wiskunde en de wiskundigen. Er zijn twee beroepsverenigingen, het Koninklijk Wis-

kundig Genootschap (KWG) en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW). Vanouds behartigde de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde (NOCW) van het toen nog niet koninklijke WG de wiskundeolympiade. Ongeveer tien jaar geleden is de NOCW omgevormd tot een overlegcommissie waarin niet alleen (K)WG, VO en WO, maar ook NVvW, hbo en mbo vertegenwoordigd zijn. Verder is er een Advies-Commissie voor de Wiskunde (ACW) van NWO, een Kamer Wiskunde van de Vereniging van Universiteiten (VSNU) en de reeds genoemde ARW van de KNAW. Tenslotte bestaat sinds enkele jaren het Overlegorgaan Onderzoekscholen Wiskunde (OOW) waarin de landelijke onderzoekscholen vertegenwoordigd zijn die (een deel van) de wiskunde tot hun taak rekenen. Hoewel deze instanties duidelijk verschillende taken hebben, zijn er regelmatig zaken die meer dan één instantie aangaan. Om tenminste op de hoogte te zijn van lopende zaken, acties op elkaar af te stemmen en waar mogelijk samen te werken komen de voorzitters elk jaar, en indien gewenst vaker, samen in het Voorzittersoverleg.

Tijdens de vergadering in januari jl. is onder andere gesproken over clustervorming op de universiteiten, over het voortgezet onderwijs, en over subsidiëring van acties om de beoefening en beeldvorming van de wiskunde te bevorderen. Namens het Voorzittersoverleg Wiskunde is nog vóór het debat in de Tweede Kamer aan de betreffende commissieleden een brief gestuurd waarin onder verwijzing naar eerdere brieven gepleit werd voor handhaving van de omvang van het wiskundeonderwijs in de profielen Natuur en Techniek en Natuur en Gezondheid. In een extra vergadering van het Voorzittersoverleg in april zal het Deltaplan bèta/techniek worden besproken. *Rob Tijdeman (voorzitter van de Akademieraad voor Wiskunde)*

Mariska Enneking

Afdeling communicatie FNWI
Universiteit van Amsterdam
Nieuwe Achtergracht 166
1018 WV Amsterdam
enneking@science.uva.nl

Geertje Hek

Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidersgracht 24
1018 TV Amsterdam
ghek@science.uva.nl

Promotionele activiteiten

Waar komt de bliksem vandaan?

De bètawetenschappen, waaronder wiskunde, kampen al jaren met een imago probleem en een te lage instroom van studenten. Overal in het land zijn er initiatieven ontwikkeld om het imago te verbeteren en leerlingen te enthousiasmeren. In de serie 'Promotionele activiteiten' in dit blad zal telkens zo'n initiatief worden gepresenteerd. De Universiteit van Amsterdam bijt het spits af met haar Kinderuniversiteit. Hier kunnen leerlingen van de basisschool alles over exacte wetenschappen te weten komen.

Universiteiten, en dus ook de Universiteit van Amsterdam, richten hun voorlichtingsactiviteiten vooral op leerlingen in de bovenbouw van het vwo. Af en toe zijn er uitstapjes naar de onderbouw, omdat leerlingen daar immers al hun keuze voor een profiel moeten maken. Als een natuurprofiel ze dan niet aantrekt, is de kans klein dat ze ooit zullen instromen bij een bètaopleiding.

Sinds kort heeft de Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica (FNWI) van de UvA een nieuwe aanpak. Naast de voorlichting die is gericht op het direct werven van studenten is een project opgestart om de bètavijver te vergroten, de *Kinderuniversiteit*.

Kinderen in de leeftijdsgroep van 4 tot 12 jaar zijn zeer geïnteresseerd in natuurwetenschappelijke fenomenen. Aan welke ouder is niet ooit een vraag als 'waar komt de bliksem vandaan?' of 'waarom is de lucht blauw?' gesteld? Onderzoek wijst uit dat deze leeftijdsgroep positief beïnvloedbaar is met betrekking tot natuur en techniek. Stimulansen op jeugdige leeftijd blijken nodig te zijn om de mogelijkheden open te houden voor een bètageoriënteerde studiekeuze op latere leeftijd. Als het lukt om in het basisonderwijs de kinderlijke verwondering en nieuwsgierigheid aan te wakkeren, is dat een eerste stap naar een volwassen keuze voor een bètaprofiel in het middelbaar onderwijs.

Onder de noemer Kinderuniversiteit is een aantal projecten opgestart om — samen met scholen, wetenschapsmuseum *NEMO* en de Gemeente Amsterdam — basisschoolleerlingen in aanraking te brengen met natuur- en

exacte wetenschappen. Een voorbeeld is het plan om een Scienceclub op te richten voor kinderen vanaf groep 7 van de basisschool tot vwo 3. Samen met de basisscholen zullen kinderen worden geworven voor deze naschoolse activiteit die zich kenmerkt door gemotiveerde coaches, uitstekende faciliteiten en zelfstandig onderzoeken en experimenteren.

De Kinderuniversiteit is opgezet om de kinderen zowel direct te stimuleren door het aanreiken van materiaal als indirect door de in de regel wat meer alfageoriënteerde onderwijzers en onderwijzeressen bij te scholen en te voorzien van lesmateriaal. De Kinderuniversiteit is nog volop in ontwikkeling en biedt kinderen zowel binnen- als buitenschoolse activiteiten. Een aantal van deze activiteiten laten we hieronder de revue passeren.

Kinderlezingen

Samen met *NEMO* en *Het Parool* is de FNWI in 2003 gestart met een reeks kinderlezingen over bètavraagstukken. Deze lezingen worden door ouders, leerlingen maar ook docenten zeer enthousiast ontvangen. Tijdens iedere lezing staat een typische kindervraag centraal. Een wetenschapper van de UvA begeleidt de kinderen op hun zoektocht om een



kinder universiteit



Actieve deelname van de kinderen bij het wetenschapstheater Eureka!

antwoord te vinden op deze vraag. De vragen hebben betrekking op alledaagse dingen zoals water, lucht, je lichaam of het heelal. De lezingen hebben een interactief karakter, kinderen worden gestimuleerd om mee te denken. Ze kunnen kleine proefjes uitvoeren en krijgen volop ruimte om vragen te stellen. De lezingen zijn voor kinderen vanaf 8 jaar. De lezingen vinden plaats in *NEMO* op elke derde zondag van de maand. De maandag erna verschijnt in *Het Parool* een inhoudelijk verslag van de lezing van de hand van wetenschapsjournaliste Margriet van der Heijden. Op de website www.kinderuniversiteit.nl staan de verslagen van alle lezingen gepubliceerd.

In eerste instantie is het maar moeilijk voor te stellen hoe je kinderen enthousiast kunt krijgen voor wiskunde. Maar dat dat met eenvoudige middelen op een heel creatieve manier mogelijk is, hebben bijvoorbeeld Robbert Dijkgraaf en Arnold Smeulders ervaren bij hun behandeling van de vragen 'tot hoeveel kun je tellen?' en 'waarom weet de computer alles?'.

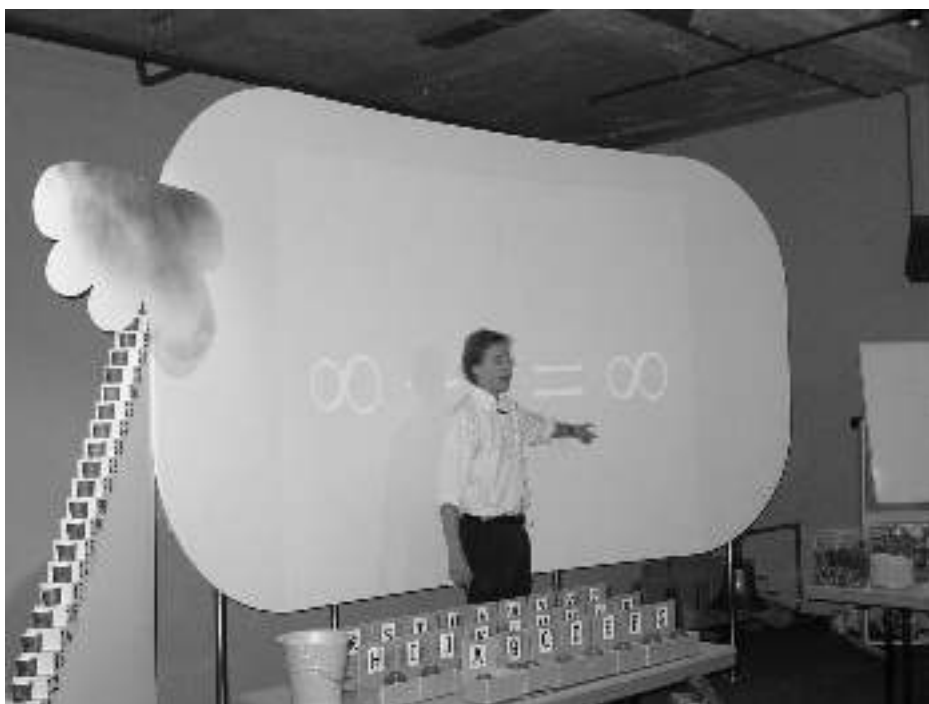
Dijkgraaf prikkelde de kinderen meteen met de bewering dat in de zaal twee kinderen zaten met een naam die met dezelfde letter begint. Eén van de aanwezigen zag dat direct in: "Het alfabet heeft 26 letters en er zijn meer kinderen in de zaal." Aan de hand van veertig balletjes en een groot uitgevoerd alfabet begrepen de anderen het ook al snel. Met behulp van emmers met appels (tien), spekjes (zo'n honderd), hagelslagjes (honderdduizend) en korrels zand (een miljard) kregen

de kinderen gevoel voor grote getallen. Ze leerden zelfs dat je met een quadriljoen hagelslagjes een berg kunt bouwen die hoger is dan de hoogste berg op aarde. En dat je nog verder kunt tellen, bijvoorbeeld tot het getal googol (een één met honderd nullen) en nog verder, tot in het oneindige.

Dijkgraaf liet ze ook spelen met sommen, een moeilijke en een wat makkelijkere: tel alle

getallen van 1 tot en met 100 bij elkaar op, of alle getallen van 1 tot en met 10. Meerdere kinderen rekenden de makkelijke som in korte tijd uit. Eén kind van zes bleek tot grote verbazing van zijn eigen vader in te zien hoe je uit het hoofd op een simpele manier de moeilijke som kon maken: "Dat is gewoon $100 + (99 + 1) + (98 + 2) + \dots + (51 + 49) + 50 = 5050$ ". Een nieuwe Gauss?!

Smeulders vertelde de kinderen dat computers alles kunnen uitrekenen zolang ze maar een recept hebben. Hoe computers kunnen schrijven vonden ze zelf uit. Ieder kind was een letter of cijfer van het toetsenbord en de volgorde van acht witte en zwarte bolletjes in een buisje in de hand bepaalde welk teken iemand was. Twee kinderen vormden de kabel van het toetsenbord naar de computer en mochten het toetsenbord bedienen. Om 'aap' te schrijven moest als eerste het buisje, ofwel de code, van de letter A naar de computer gebracht worden. De computer zocht vervolgens in een lange lijst nieuwe codes bij dit buisje, en de zwarte bolletjes in deze codes bleken precies aan te geven waar druppeltjes inkt moesten worden geprint op papier om een letter A te maken. Samengevat concludeerden de kinderen met Smeulders aan de hand van dit en andere voorbeelden dat computers met codes werken, heel goed voorbeelden kunnen leren, heel snel kunnen zoeken in lange lijsten met codes en foutloos recepten kunnen uitvoeren. Maar ook dat een computer zeker niet alles weet!

In de kinderlezing *Tot hoeveel kun je tellen?* licht Robbert Dijkgraaf het begrip oneindig toe.

Open Dag Sciencepark Amsterdam

In de landelijke Wetenschapsweek organiseert het Sciencepark Amsterdam jaarlijks een Open Dag. Alle onderzoeksinstellingen op het terrein zetten dan hun deuren open en presenteren zich aan een breed publiek. Ook de FNWI van de UvA doet hier aan mee. Dit jaar is onder de noemer Kinderuniversiteit voor het eerst een programma speciaal voor kinderen van 8 tot 12 jaar samengesteld. Ze konden bij aankomst een certificaat ophalen waarmee ze studiepunten moesten verzamelen. Actieve deelname aan een aantal speciaal geselecteerde programmaonderdelen leverde een studiepunt op. Zo konden de kinderen bijvoorbeeld deelnemen aan het Kinderkeukenlab, waar ze aan de slag gingen met chemie in de keuken. Ze maakten zelf frisdrank van ranja en cakejes met behulp van natriumbicarbonaat. Ook een bezoek aan het wetenschapstheater *Eureka!* behoorde tot het programma. Speciaal voor deze dag hebben studenten van de bètafaculteit en de toneelgroep Particolarte de koppen bij elkaar gestoken om een theaterstuk voor kinderen te schrijven en op te voeren. Het resultaat was een meeleeftheater vol experimenten en rekentrucs. Op vertoon van hun behaalde studiepunten kregen de kinderen aan het einde van de Open Dag een diploma uitgereikt uit handen van een echte professor in toga, de decaan.

Lesmateriaal voor basisscholen

Op dit moment ontwikkelt Robbert Dijkgraaf samen met studenten van de FNWI lesmateriaal voor basisscholen. Als winnaar van de Spinozapremie 2003 zal hij een deel van de



Twee jonge wetenschappers in spe experimenteren bij de kinderlezing *Waarom is poep bruin?*

premie inzetten voor natuur en techniek in het basisonderwijs. Dijkgraaf: "Juist in de ontvankelijkste leeftijd, namelijk op de basisschool, komen kinderen nauwelijks in aanraking met natuur en wetenschap. Terwijl ze wel mogen knutselen en kleien, is er geen gelegenheid om met eigen handen uit te vinden hoe de natuurlijke wereld in elkaar zit. Wat is er eenvoudiger dan zelf een prisma in een lichtstraal te houden en het wonder van de regenboog met eigen ogen te zien? Of een schaalmodel van het zonnestelsel na te bouwen?" Kernbegrippen bij het ontwikkelen van het materiaal zijn creativiteit, verwondering en verbeelding. Bovendien wordt veel belang gehecht aan het ontwikkelen van lesmateriaal dat kin-

deren uitnodigt tot zelf experimenteren.

Aan de UvA groeit het besef dat het belangrijk is om aan een breed publiek in het algemeen, en kinderen in het bijzonder, uit te kunnen leggen waarmee onder andere wetenskapigen bezig zijn en waarom dat zo leuk is. We zijn ervan overtuigd dat onze inspanningen bijdragen aan een positieve beeldvorming van de bètawetenschappen en hopen dat ze op langere termijn ook een positieve invloed zullen hebben op de studenteninstroom bij de bètaopleidingen aan de UvA en andere universiteiten. <-----

Voor meer informatie zie:
<http://www.kinderuniversiteit.nl>

Adriaan Monna

Zeemanlaan 3
3572 ZC Utrecht
amonna@xs4all.nl

Marius van der Put

Vakgroep Wiskunde, Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 800, 9700 AV Groningen
m.van.der.put@math.rug.nl

Antonie Frans Monna

Ambtenaar en wiskundige

Jaarlijks organiseert het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht een 'Monnalezing'. A.F. Monna was van 1965 tot 1979 hoogleraar in Utrecht. Zijn opmerkelijke carrière wordt hier beschreven door een zoon en een van zijn Utrechtse promovendi.

In vergelijking met de Nederlandse wiskundigen van zijn generatie is de levensloop van A.F. Monna (1909–1995) wat ongewoon. Hij studeerde in Leiden en promoveerde daar in 1935. Na een kort leraarschap werkte hij enkele jaren als verzekeringswiskundige. Vervolgens was hij als ambtenaar op het ministerie van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen gedurende lange tijd beroepshalve niet als wiskundige werkzaam. Naast zijn werkzaamheden op het ministerie bleef hij de wiskunde echter voortdurend actief beoefenen. Ieder jaar verschenen publicaties van zijn hand. Pas in 1961, toen hij werd benoemd aan de Universiteit van Utrecht, werd wat men wel mag karakteriseren als een met grote gedrevenheid beoefende hobby zijn dagelijks werk. Vooral vanwege zijn inspirerend onderzoek over de p -adische analyse is Monna als wiskundige bekend geworden. Ook op andere gebieden, zoals abstracte potentiaaltheorie, wiskunde-onderwijs en geschiedenis van de wiskunde, heeft hij zijn sporen nagelaten.

Afkomst en jeugd jaren

Antonie Frans Monna werd in Den Haag geboren op 10 maart 1909 en was het tweede en laatste kind van Willem Cornelis Monna en Anna (officieel Antje) Maria van der Marel. Zijn zuster, Maria Cornelia, werd in 1904 geboren. Beide ouders waren afkomstig uit De Lier in het Westland en huwden daar in 1903. Hoe-

wel beiden hervormd waren opgevoed, huwden zij niet voor de kerk, hetgeen in de kleine dorpsgemeenschap tamelijk uitzonderlijk zal zijn geweest. Zij vestigden zich in Den Haag, waar zij vrijwel hun gehele leven bleven wonen. De binding met hun geboortedorp en het Westland bleef echter altijd bestaan en dat was bij hun kinderen eveneens het geval.

Monna's vader

De vader van Monna, afkomstig uit een eenvoudig aannemersgezin, werd onderwijzer en volgde daarmee een toen heel gebruikelijke route om te stijgen op de maatschappelijke ladder. Hij behaalde de akten van bekwaamheid van onderwijzer en hoofdonderwijzer, gevolgd door de lagere akte wiskunde. In 1904, op 26-jarige leeftijd, slaagde hij voor de examens K I (de latere akte MO-A wiskunde) en Q (een examen in de theorie van onderwijs en opvoeding), waarmee hij bevoegdheid verkreeg voor het geven van wiskundeles bij het middelbaar onderwijs.

Na eerst in het lager onderwijs werkzaam te zijn geweest was W.C. Monna vanaf 1909 verbonden aan de (Eerste) Ambachtsschool in Den Haag, waar hij 'herhalings- en voortgezet onderwijs' gaf. Daarbij zal ook wiskunde hebben behoord. Dit vak werd aan de ambachtsscholen, die overigens wettelijk werden gerekend tot het middelbaar onderwijs, veelal onderwezen door leraren (men sprak bij dit schooltype niet van onderwijzers) met een lagere akte wiskunde.

De benoeming, in 1919, tot leraar wiskunde aan de rijks-HBS met vijfjarige cursus te Zierikzee betekende een promotie, zeker financieel gezien. Hier gaf hij, in deeltijd, onderricht in de tweede klas, hoewel hij daarvoor for-

meel niet bevoegd was. Met de akte K I had men slechts bevoegdheid voor de driejarige HBS. Daarnaast werd hij ook hier leraar aan de ambachtsschool, waar hij behalve wiskunde ook Nederlands gaf.

Voor een definitieve benoeming aan de HBS in Zierikzee diende Monna de akte K V (de latere akte MO-B wiskunde) te behalen. Met dat doel had hij zich al in 1908 ingeschreven aan de Leidse universiteit. Hij zal daar als toevoorder colleges wiskunde hebben gevolgd. Dit was niet ongebruikelijk, vooral daar een MO-opleiding wiskunde destijds niet bestond. Of hij examen heeft gedaan is onbekend. Zeker is wel dat hij het gewenste resultaat niet heeft behaald, ook niet nadat hij zich in 1917 opnieuw had ingeschreven. Na de vestiging in Zierikzee werd het gezien de reisafstand natuurlijk ook onmogelijk om in Leiden nog colleges te volgen.

Het verblijf in Zierikzee duurde slechts ruim een jaar, daar Monna's aanstelling wegens een ernstige gehoorstoornis niet verlengd kon worden. In een tijd met veel minder goede sociale voorzieningen dan thans leidde dit tot grote problemen. Het gezin keerde in december 1920 terug naar Den Haag. Er volgde een periode van onzekerheid en financiële zorgen, waarvoor een oplossing kwam toen Monna op 1 januari 1922 in de (lage) rang van adjunct-commies werd benoemd op het in 1918 opgerichte ministerie van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen. Hier was hij werkzaam bij de afdeling Middelbaar Onderwijs (enkele jaren later werd de naam gewijzigd in VHMO, Voorbereidend Hoger en Middelbaar Onderwijs) tot aan zijn pensionering, in de rang van referendaris, in september 1943.



Antonie Frans Monna met zijn ouders en zuster, circa 1916

Monna's zuster

Toen het gezin naar Zierikzee vertrok, zat de dochter op het Haagse Gymnasium Haganum. Dit was tamelijk ongebruikelijk. Kinderen uit een onderwijzersmilieu gingen in het algemeen hooguit naar de HBS. Het gymnasium werd (maatschappelijk gezien) als een stap te hoog beschouwd. Mogelijk had het feit dat Monna's moeder, afkomstig uit een groot boerengezin, twee broers had, die in Delft naar de HBS gingen en daarna in Leiden werden opgeleid tot arts en apotheker, enige invloed op de schoolkeuze.

Aangezien er in Zierikzee geen gymnasium was, ging Monna's zuster daar naar de HBS en na terugkeer in Den Haag voltooide ze deze opleiding aan de Derde gemeentelijke HBS aan de Waldeck-Pyrmontkade. Gezien haar belangstelling zou een universitaire studie in een alfavak voor de hand hebben gelegen. Een HBS-diploma gaf daarvoor echter geen toegang en voor een aanvullende vooropleiding ontbraken vermoedelijk de midde-

len. Naast een werkkring behaalde ze achtereenvolgens de middelbare akten Engels, MO-A en MO-B, waarvoor ze lessen volgde aan de School voor Taal- en Letterkunde in Den Haag. Vervolgens ging zij in het onderwijs. Zo was zij gedurende ruim twintig jaar een zeer geziene lerares aan de rijks-HBS (later Professor Zeemanlyceum) te Zierikzee. Na haar (vervroegde) pensionering ging ze alsnog studeren en in 1978 promoveerde ze in Leiden in de Indo-Iraanse letteren. Zij heeft een actieve rol gespeeld in de Soefibeweging in Nederland.

Schooltijd

Voor de zoon waren de gevolgen van het verblijf in Zierikzee en de doofheid van de vader minder ingrijpend dan voor de dochter. Hij volgde de lagere school, verlengd met een zevende cursusjaar, deels in Den Haag, deels in Zierikzee. Daarna ging hij evenals zijn zuster naar de Derde gemeentelijke HBS, waar hij in 1927 het eindexamen behaalde.

Dat Monna vervolgens wiskunde ging stu-

deren stond niet van meet af aan vast. Ook biologie heeft hij overwogen. De hoogste schoolcijfers behaalde hij ook steeds voor dit vak en niet voor wiskunde.

De natuur heeft in zijn leven altijd een heel belangrijke rol gespeeld. Hij kende vele planten en vogels. Met een vriend uit zijn HBS-tijd maakte hij voor de tweede wereldoorlog regelmatig lange wandeltochten onder andere in de Alpen. Ook na de oorlog werden alle vakanties in de natuur doorgebracht, eerst in Nederland, vanaf de jaren zestig opnieuw in de Alpen en ook wel in noord-Denemarken en Noorwegen. In de weekends trok hij vaak de natuur in. Zijn liefde voor de natuur, en daarnaast voor oude dorpsgezichten, komt ook tot uiting in de vele tekeningen die hij in verschillende periodes van zijn leven heeft gemaakt. Hij tekende vrijwel altijd buiten, zelden thuis.

Toch werd het wiskunde. Daarbij heeft zeker een rol gespeeld dat zijn vader inmiddels was begonnen aan een universitaire wiskundestudie. Daarnaast was, zoals Monna

Bij de voltooiing van dit proefschrift is het mij een behoefte een woord van dank te richten tot U, Hooggeleerden en Lectoren in de faculteit der Wis- en Natuurkunde.

In de eerste plaats dank ik U, Hooggeleerden Droste, Hooggeachten Promotor, voor den steun en de belangstelling, die ik van U mocht ondervinden bij de bewerking hiervan. De vele raadgevingen, die ik van U ontving, zijn mij van zeer veel nut geweest.

Als een groot voorrecht beschouw ik het, Hooggeleerde van der Woude, Uw leerzame colleges te hebben mogen volgen.

Met groote erkentelijkheid gedenk ik de lessen van wijlen Prof. Kluyver en Prof. Ehrenfest.

Zeergeleerde Kloosterman, ook U dank ik voor Uwe uiteenzettingen.

Eindelijk kan ik niet nalaten, mijn dank te betuigen aan allen, die mij van steun waren bij de bewerking van dit proefschrift.

Dankwoord bij Monna's proefschrift

zelf heeft uiteengezet, het boeiende onderwijs van de wiskundeleraar P. Visser van groot belang. In het laatste schooljaar gaf deze naast de reguliere lessen een inleiding in de differentiaal- en integraalrekening, die toen nog niet op het schoolprogramma stond. Dit was speciaal bedoeld voor degenen die wis- en natuurkunde wilden gaan studeren. Hij gebruikte hierbij een boekje van zijn collega dr. W.L. van de Vooren: *Grenswaarden. Eene inleiding tot de differentiaal- en integraalrekening* (Groningen, 1919; 2e druk: Groningen, 1934). Laatstgenoemde, in 1915 in Utrecht gepromoveerd bij W. Kapteyn, gaf zelf in het vijfde schooljaar onderricht in de mechanica, op volgens Monna onorthodoxe, theoretische, maar inspirerende wijze. Hij was de vader van de latere Groningse hoogleraar wiskunde A.I. van de Vooren. In het gedenkboekje dat in 1931 verscheen bij het 25-jarig bestaan van de Derde gemeentelijke HBS, worden bij de oud-leerlingen twee andere bekende wiskundigen genoemd: H.D. Kloosterman en J.B.D. Derksen, die in respectievelijk 1918 en 1926 eindexamen deden. Ook zij hebben onderricht genoten van Visser en Van de Vooren. Derksen, die carrière maakte in de statistiek, studeerde eerst enkele jaren in Delft en vervolgens in Leiden, waar hij promoveerde in dezelfde maand als Monna, eveneens bij J. Droste.

De Leidse jaren

De Leidse studietijd ving aan in 1927. Van nature zeker geen feestvierder heeft Monna in het studentenleven geen actieve rol gespeeld. Daarbij zal ook een rol hebben gespeeld dat hij, vermoedelijk mede vanwege de financiële omstandigheden, in het ouderlijk huis in Den Haag bleef wonen. Wel was hij lid van een studentenvereniging, eerst van 'Jungantur Gaudia Musis', daarna, sedert de oprichting, van Unitas.

In de tijd dat Monna in Leiden studeerde waren er twee hoogleraren in de wiskunde, W. van der Woude en J.C. Kluyver, en een lector, J. Droste. Van der Woudes leeropdracht was: analytische en beschrijvende meetkunde, theoretische werktuigkunde. Dit omvatte bevatte onder andere centrale projectie, axonometrie, reële algebraïsche krommen, Plücker formules, elliptische krommen, differentiaalmeetkunde in drie dimensies en mechanica. Kluyver had als leeropdracht: hogere stelkunde, differentiaal- en integraalrekening, theorie der functiën en waarschijnlijkheidsrekening. De omschrijving van Drostes functie luidde: wiskunde voor chemici en functieleer. Na het emeritaat van Kluyver werd Droste in 1930 diens opvolger, met leeropdracht kortweg wiskunde. Kloosterman werd toen tot lector benoemd, met leeropdracht wiskunde.

Terugblikkend in enkele publicaties over zijn studietijd kon Monna weinig waardering opbrengen voor zijn Leidse wiskundeopleiding, die hij archaisch en statisch noemde. Lineaire algebra was afwezig met uitzondering van opgaven over determinanten. (Volgens Monna liet Van der Woude zich veel later kritisch uit over het gebruik van vectoren). Er werd onderwijs gegeven in vergelijkingen van graad 3 en 4.

Kluyver stelde de Galois-theorie wel aan de orde, maar dit onderwerp bleef volstrekt onduidelijk. Een voordracht hierover door de jonge Kloosterman was slecht te volgen voor het Leidse gehoor. De aanwezige fysici spraken van de 'groepenpest'. Het gepeuter met (elliptische) reële krommen achtte Monna incidenteel, omdat er geen verbanden werden aangegeven met bijvoorbeeld Riemannoppervlakken. Hij had ook weinig goeds te zeggen over het 'ε en δ gedoe'. Alleen voor de klassieke differentiaalmeetkunde in drie dimensies had hij waardering. Monna's oordeel staat in contrast met het feit dat Kloosterman met collega's uit Göttingen een aantal promoties met thema klasselichamentheorie begeleidde, waarbij van der Woude als promotor optrad. Bovendien is er heden ten dage een herwaardering voor de wiskunde uit die periode.

In de tijd dat Monna in Leiden studeerde bestond er nog geen wiskunde-instituut. De colleges werden gegeven in het Academieggebouw. De hoogleraren hadden geen werkamer op de universiteit en werkten thuis. Daar namen zij ook tentamens af. Wel konden de wiskundestudenten gebruik maken van de Leeskamer Bosscha, waar de hoogleraar in de theoretische natuurkunde P. Ehrenfest zetelde. Hier was een wis- en natuurkundebibliotheek gehuisvest. In deze leeskamer, waar boeken en tijdschriften niet werden uitgeleend, heeft Monna veel gestudeerd. Het was een actief wetenschappelijk centrum. Ehrenfest gaf er zijn colleges en er werden veel voordrachten gehouden, onder anderen door Albert Einstein en (de wiskundige) Emil Artin.

In mei 1930 legde Monna het kandidaats-examen af; in februari 1933 volgde het doctoralexamen wiskunde met bijvak theoretische natuurkunde bij Ehrenfest, voor wie Monna grote bewondering had. Direct daarna begon hij aan een promotieonderzoek. Zoals toen gebruikelijk, verrichtte hij dit onderzoek in zijn vrije tijd. Assistenten waren er destijds in Leiden nog niet bij de wiskunde, laat staan promotieplaatsen. Toch beschikte hij in de periode na zijn afstuderen wel over enige inkomsten, al had hij geen reguliere functie. Hij was verbonden aan een opleidingscursus

voor onderwijzers en in 1935 gaf hij aan een middelbare school in Den Haag wis- en natuurkundelessen ter vervanging van een zieke leraar.

Gezien zijn reeds toen aanwezige interesse in theoretische vragen in de analyse koos Monna Droste als zijn promotor. Maar, naar zijn eigen oordeel, heeft deze tamelijke strenge, ontoegankelijke hoogleraar, die een leerling was van Lorentz en van huis uit theoretisch natuurkundige, niet erg inspirerend gewerkt. De verhouding was ook wat stroef. Op Drostes advies las Monna het befaamde boek van J. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques* (1932; er is een eerdere Amerikaanse editie uit 1922). Dit leidde tot verder onderzoek en uiteindelijk tot het proefschrift *Het probleem van Dirichlet*, waarop hij op 31 oktober 1935 promoveerde. Het boekje werd gedrukt door een familielid, de Haagse drukker en graficus Joh.D. Scherft, die was gehuwd met een zuster van zijn moeder.

Het probleem van Dirichlet kan als volgt geformuleerd worden. Voor een open deelverzameling $U \subset \mathbb{R}^3$ en een continue functie f op de rand van U , vraagt men naar de existentie en uniciteit van een potentiaal functie F (ook wel harmonische functie genoemd, en gedefinieerd door $\Delta F = 0$ waarbij Δ de Laplace operator $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ is) op U met f als limiet op de rand van U . Dit probleem is duidelijk uit de natuurkunde afkomstig. Het fundamentele van de vraagstelling en het analytische aspect trokken Monna tot dit onderwerp aan. Zijn bijdrage aan het probleem van Dirichlet bestaat uit de toepassing van functionaalanalyse en de introductie van harmonische maten. Opmerkelijk is de uitvoerige bespreking in het proefschrift van de geschiedenis van de 'oplossingen' van het probleem. Monna's interesse voor het probleem van Dirichlet, evenals zijn interesse in de geschiedenis van de wiskunde, zijn blijvende factoren in zijn werk. We komen hier nog op terug.

De eerste jaren na de promotie

Ook na zijn promotie had Monna niet meteen een reguliere functie. Het was een moeilijke tijd om aan de slag te komen. In de eerste helft van 1936 gaf hij als privaat-leraar wat (niet klassikale) wiskundelessen aan het Nederlandsch Lyceum in Den Haag. In de herfst van dat jaar was hij als tijdelijk leraar aan de rijks-HBS te Middelburg verbonden. Het jaar daarop was hij tot in de zomer zonder emplooi. In deze tijd werkte hij in het Laboratorium voor Technische Physica te Delft onder leiding van professor C. Zwikker aan een publicatie over



Antonie Frans Monna in zijn studententijd

geluidsabsorptie, die in 1938 verscheen in *Physica*. Kort daarop volgde een Franse vertaling in de *Revue d'Acoustique*. Pas in augustus 1937 kreeg hij meer maatschappelijke zekerheid door een aanstelling als actuaire bij de Eerste Nederlandsche Verzekering-Maatschappij.

Lange tijd had men bij deze maatschappij gewerkt met wiskundig adviseurs zonder academische opleiding, maar in 1937 kwam men hiervan terug. Het hoofdkantoor van de Eerste Nederlandsche was gevestigd in Den Haag, maar het grootste gedeelte van de administratie, waaronder het wiskundebureau, be-

vond zich in Dordrecht. Monna verhuisde dus naar deze stad. Bijna vijf jaar is hij bij de Eerste Nederlandsche werkzaam geweest, maar het werk beviel hem uiteindelijk toch maar matig. Voor deze beoefenaar van de zuivere wiskunde was verzekeringswiskunde niet erg interessant.

Behalve de inhoud van het werk hebben vermoedelijk ook de onzekere oorlogsomstandigheden een rol gespeeld bij zijn vertrek uit Dordrecht. Hij wilde zich graag weer bij zijn familie in Den Haag voegen. Het gelukte hem met ingang van mei 1942 een aanstelling als commies te krijgen bij de afdeling VHMO van

het ministerie van Opvoeding, Wetenschap en Kultuurbescherming, zoals het ministerie van OK&W in de oorlogsjaren heette. Op deze afdeling, die toen achttien medewerkers telde, was ook zijn vader nog steeds werkzaam. Monna keerde terug naar het ouderlijk huis in het Haagse Bezuidenhout. Financieel gezien betekende de nieuwe functie geen verbetering. Zijn inkomen, dat al niet riant was, werd gehalveerd. Naar eigen zeggen was hij misschien niet vertrokken bij de Eerste Nederlandsche als hij toen had geweten dat hij niet lang daarna een gezin zou stichten.

Naast zijn dagelijks werk heeft Monna in de Dordtse periode veel gestudeerd. Elk jaar publiceerde hij enkele artikelen, veelal in het Frans, de taal die altijd zijn voorkeur heeft gehad. Evenals in later tijd verschenen de meeste artikelen in de *Proceedings of the section of sciences* van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (met ingang van 1939 verschenen de wiskundige artikelen ook afzonderlijk onder de titel *Indagationes Mathematicae*), na ter vergadering te zijn aangeboden door Van der Woude. Een van deze artikelen werd in 1978 herdrukt, met een commentaar van E.M.J. Bertin, in *Two decades of Mathematics in the Netherlands*. Al studeerde hij betrekkelijk geïsoleerd, er was toch ook wel contact met andere wiskundigen, zoals met de latere hoogleraren S.C. van Veen en C. Visser, die toen beiden in Dordrecht leeraar waren. Voor zover bekend maakte Monna geen deel uit van de 'Dordtse wiskundekring', die ten huize van mevrouw T. van Aardenne-Ehrenfest bijeenkwam. Visser, Van Veen en ook N.H. Kuiper behoorden in deze tijd tot de andere leden van de kring.

Vanaf 1938 correspondeerde Monna regelmatig met M. Brelot te Parijs over diens 'abstracte' potentiaaltheorie. Op diens aanraden schafte hij al in 1940 de eerste delen van de serie N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique*, aan. Deze boeken hebben een grote indruk op hem gemaakt. Voorts hield hij af en toe een voordracht, zoals in 1939 en 1941 voor het Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres, en in 1941 voor het Wiskundig Genootschap. In 1939 was hij daartoe uitgenodigd door Droste, met wie de contacten inmiddels wat soepeler verlopen.

Niet alle vrije tijd werd echter aan de wiskunde besteed. Monna was een groot muzik liefhebber en speelde, op bescheiden niveau, graag piano. In de avonduren maakte hij veel muziek met C. Grafdijk, die, hoewel vermoedelijk geen beroepsmusicus, in Dordrecht vioollessen gaf. Aan de door hem georganiseerde muziekuitoeringen werkte Monna wel

mee. Voordat hij zich in Dordrecht vestigde, woonde de veel oudere Grafdijk in Den Haag, waar Monna hem zal hebben leren kennen.



Antonie Frans Monna op 34-jarige leeftijd

De laatste oorlogsjaren

Monna's verblijf in Den Haag zou minder dan een jaar duren. In maart 1943 besloot de Duitse bezetter het ministerie naar Apeldoorn te verhuizen. Monna en ook zijn vader, die, nog maar een half jaar voor zijn pensionering en bovendien hartpatiënt, vergeefs heeft gepoogd in Den Haag te mogen blijven, kregen in Apeldoorn woonruimte toegewezen. De vrouw des huizes bleef achter in Den Haag.

Rond die tijd leerde Monna zijn vrouw kennen, Leuntje Groeneweg, die als wijkverpleegster werkzaam was in Rijswijk. In september 1943 traden zij in het huwelijk, beiden 34 jaar oud. Uit dit harmonieuze huwelijk, dat ruim 52 jaar heeft geduurd, werden drie kinderen geboren, de oudste in februari 1945 in Apeldoorn, de twee anderen na terugkeer naar Den Haag.

In de laatste oorlogsjaren, toen reizen steeds moeilijker werd en men voor zijn sociale contacten was aangewezen op de naaste omgeving, had Monna veel contact met de in Apeldoorn gevestigde keel-, neus- en oorarts C.G.G. van Herk. Deze promoveerde in 1951, op latere leeftijd, in de wiskunde bij B.L. van der Waerden in Amsterdam. Hij was daarna een aantal jaren werkzaam op het Mathematisch Centrum en na zijn pensionering enige tijd verbonden aan de universiteit van Aberdeen.

De studie van Monna's vader

W.C. Monna keerde in de herfst van 1943, na zijn pensionering, terug naar Den Haag. Hij heeft in de periode dat hij bij het ministerie werkzaam was, zijn belangstelling voor de wiskunde nooit verloren. In december 1921, twee weken voor hij bij het ministerie in dienst trad, diende hij bij de minister het verzoek in te worden toegelaten tot de examens in de faculteit der wis- en natuurkunde in Leiden. Een half jaar later werd deze toestemming door de minister verleend nadat de faculteit had verklaard dat Monna beschikte over de voor de studie vereiste capaciteiten. Aan de in geval van een colloquium doctum gebruikelijke formulering werd door de faculteit toegevoegd dat "ten gevolge van adressants levensomstandigheden een bijzonder geval [...] geacht kan worden aanwezig te zijn". Met deze zinsnede zal zijn gedoeld op zijn doofheid.

Erg vlot verliep de studie niet, vermoedelijk mede omdat W.C. Monna in de avonduren nogal wat privaattlessen gaf. In juli 1932 legde hij in Leiden het kandidaatsexamen af, in de tijd dus dat zijn zoon daar zijn studie afrondde. Het doctoraalexamen volgde in februari 1938, niet in Leiden, maar in Amsterdam bij J.F. Koksma aan de Vrije Universiteit. Voor iemand die op latere leeftijd studeert en toch niet veel ambities zal hebben gehad, lijkt de overstap naar een andere universiteit wat ongewoon. En dat geldt zeker voor de overstap naar de Vrije Universiteit met een nog jonge, heel kleine faculteit voor wis- en natuurkunde. Zou ook W.C. Monna niet erg enthousiast zijn geweest over de Leidse opleiding en is hij via zijn zoon, die Koksma ongetwijfeld al kende, met deze in contact gekomen?

In de jaren daarna begon ook hij aan het schrijven van een proefschrift. In de herfst van 1944 was de dissertatie vrijwel voltooid. De promotie zou, uiteraard na de oorlog, plaatsvinden bij G. Schaake in Groningen, dus opnieuw aan een andere universiteit. Schaake was in de loop van 1944 uit Groningen vertrokken om zich bij zijn familie in Amsterdam te voegen. W.C. Monna heeft hem daar ook rond 1 september bezocht om nog enkele kleinheden door te nemen. De bespreking van de laatste details — daarna moest hij alleen nog de stellingen bedenken — moest hij uitstellen. Reizen naar Amsterdam was niet meer goed mogelijk en hij durfde de tekst ook niet per post te zenden.

Tot een promotie is het niet meer gekomen. W.C. Monna overleed plotseling op 27 oktober 1944. Het manuscript is in maart 1945 verloren gegaan bij de verwoesting van het woonhuis van de familie tijdens het bombardement

van het Bezuidenhout. Of Schaake de tekst of een gedeelte ervan in bezit heeft gehad, is onbekend. Hij overleed op 5 april 1945 in Amsterdam. Over de inhoud bleek niets meer te achterhalen. Volgens A.F. Monna was het een tamelijk traditioneel proefschrift. Gezien het werk van Schaake ging het vermoedelijk om een onderwerp uit de meetkunde.

Belangstelling voor de p -adiek

In de oorlogsjaren is Monna, na jarenlang bezig te zijn geweest met potentiaaltheorie, begonnen met onderzoek op het terrein van de p -adiek. Inspiratie hiervoor vormde de indertijd in de Leeskamer Bosscha bestudeerde literatuur. Vooral werken over functionaalanalyse, speciaal in verband met theoretische natuurkunde, hadden zijn belangstelling. Daarbij nam het boek van S. Banach, *Théorie des opérateurs linéaires*, uit 1932 een belangrijke plaats in. Voorts moet hij zijn gestimuleerd door de belangstelling voor p -adische getallen bij een aantal 'Nederlandse' wiskundigen, onder anderen: Koksma, F. Loonstra, K. Mahler, J. Popken en H. Turkstra. De p -adische getallen zijn in 1908 ingevoerd door K. Hensel. Sindsdien zijn deze niet meer weg te denken uit de getaltheorie en vele andere gebieden van de wiskunde. De p -adische analyse vormde een nog betrekkelijk nieuw onderzoeksgebied, dit in tegenstelling tot de potentiaaltheorie, die zich snel ontwikkelde. Dit heeft meegepeeld bij Monna's keuze voor de p -adiek.

In 1943 publiceerde Monna zijn eerste artikel over p -adische Banachruimten. Ervolgden daarna verscheidene series artikelen over dit onderwerp, tot in 1971 toe. Al zegt hij dit nergens expliciet, men kan dit moeilijk anders zien dan als een systematisch uitgevoerd onderzoek waarin de theorie van Banach werd ontwikkeld voor andere lichamen dan $\mathbf{R}$ of $\mathbf{C}$. Het gaat hierbij om fundamenteel onderzoek, waarbij toepassingen binnen of buiten de wiskunde niet aan de orde zijn. Toch heeft hij wel enige verwachting gehad dat in de theoretische natuurkunde de p -adische ruimten een rol zouden kunnen spelen. Terloops merken we op dat in september 2003 een conferentie 'p-adic and adelic physics' in Moskou heeft plaatsgevonden. We schetsen een aantal essentiële zaken (zie kader op bladzijde 142).

De naoorlogse jaren op het ministerie

Tot 1961 is Monna werkzaam gebleven op de afdeling VHMO van het ministerie van OK&W, de laatste tien jaar als plaatsvervangend chef van de afdeling. Begonnen als commies klom hij er slechts langzaam, volgens sommige collega's te langzaam, op in de ambtelijke

De p -adische getallen

We kiezen een priemgetal p . Elk natuurlijk getal m kan p -tallig worden geschreven als $m = a_0 + a_1p + \dots + a_sp^s$ met $a_0, \dots, a_s \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Bijvoorbeeld $14 = 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3^2$. De p -adische gehele getallen (notatie $\mathbf{Z}_p$) zijn nu willekeurige uitdrukkingen

$$a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3 + \dots \text{ met elke } a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

Een kortere notatie voor dit getal is $\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$. De uitdrukkingen met maar eindig veel $a_i \neq 0$ zijn natuurlijke getallen. Derhalve geldt $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}_p$. De p -adische getallen kunnen opgeteld en vermenigvuldigd worden, ongeveer zoals we dat gewend zijn van machtreeksen of decimale getallen. Is bijvoorbeeld bij het optellen van $\sum_{i=1}^{\infty} a_i p^i$ en $\sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i$ de term $a_0 + b_0$ groter of gelijk aan p , dan vervangen we $a_0 + b_0$ door $a_0 + b_0 - p$ en bij de volgende som $a_1 + b_1$ voegen we 1 toe. Dit levert $1 + \sum_{i=0}^{\infty} (p-1)p^i = 0$ en dus $\sum_{i=0}^{\infty} (p-1)p^i = -1$. Deling door een element $\neq 0$ in $\mathbf{Z}_p$ lukt niet altijd. Om van $\mathbf{Z}_p$ een lichaam te maken moeten we ook negatieve machten van p toelaten. Het lichaam van de p -adische getallen, notatie $\mathbf{Q}_p$, bestaat uit de uitdrukkingen $\sum_{i=s}^{\infty} a_i p^i$ met $s \in \mathbf{Z}$ en alle $a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Op $\mathbf{Q}_p$ introduceert men een absolute waarde (valuatie) $|\cdot|_p$ (met waarden in $\mathbf{R}_{\geq 0}$), door af te spreken $|0|_p = 0$ en $|\sum_{i=s}^{\infty} a_i p^i|_p = p^{-s}$ als $a_s \neq 0$. Die valuatie heeft de eigenschappen

$$|ab|_p = |a|_p \cdot |b|_p \text{ en } |a+b|_p \leq \max(|a|_p, |b|_p).$$

De metriek op $\mathbf{Q}_p$ wordt gegeven door $d(a, b) = |a-b|_p$. Voor deze valuatie geldt dat p klein is, want $|p|_p = 1/p$. Bovendien convergeert de som $\sum_{i=s}^{\infty} a_i p^i$ in de zin van de metriek. Een niet-archimedisch gewaardeerd lichaam K is een lichaam voorzien van een valuatie $|\cdot| : K \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ die voldoet aan

$$|ab| = |a| \cdot |b|, \quad |a+b| \leq \max(|a|, |b|) \text{ en } |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

$\mathbf{Q}_p$ is het standaardvoorbeeld van zo'n lichaam. De completering van de algebraïsche afsluiting van $\mathbf{Q}_p$ is ook een voorbeeld. Dit lichaam wordt genoteerd met $\mathbf{C}_p$ omdat het in allerlei opzichten op het lichaam van de complexe getallen lijkt.

rangen. Enkele jaren voor zijn vertrek naar Utrecht bereikte hij de rang van administrateur A. Misschien was het wat sneller gegaan als hij wat meer voor zichzelf was opgekomen. Dat lag echter niet in zijn aard.

Monna heeft nooit een hekel gehad aan zijn werk op het ministerie. De sfeer op de afdeling was goed, vooral met degenen met wie hij in de oorlog in Apeldoorn had vertoefd. De samenwerking met J.B. Drewes, die in 1950 werd benoemd tot chef van de afdeling, verliep voortreffelijk, hoewel deze niet de naam had een gemakkelijk man te zijn. Drewes was een bekend Neerlandicus en lexicograaf. Monna was dus niet de enige van de afdeling met wetenschappelijke activiteiten in zijn vrije tijd.

Uit zijn lijst publicaties blijkt dat Monna ook in deze jaren veel heeft gestudeerd. Op een enkele uitzondering na verschenen elk jaar één of meer artikelen, veelal in *Indagationes mathematicae*. Klaarblijkelijk moet hij in staat zijn geweest efficiënt en geconcentreerd te werken. Het gezinsleven heeft er nooit onder geleden. Hij beschikte niet eens over een eigen studeerkamer. Wel waren zijn sociale contacten tamelijk beperkt, maar zijn

behoefte daaraan is nooit heel groot geweest.

Niettemin klaagde hij in brieven regelmatig over gebrek aan tijd en energie voor studie, vooral daar zijn dagelijks werk op het ministerie hem geleidelijk steeds meer in beslag begon te nemen. Ook zijn gezondheid liet wel eens wat te wensen over. Het lijkt er zelfs op dat hij rond 1952 van plan was geleidelijk te gaan stoppen met de wiskunde. Dat hij in een wetenschappelijk isolement verkeerde, zal daarbij mogelijk een rol hebben gespeeld. Studeren zonder respons in de dagelijkse omgeving is voor eenieder op den duur moeilijk vol te houden.

Toch heeft hij in deze jaren wel contact onderhouden met andere wiskundigen, ongetwijfeld het meest met H. Freudenthal. Zij voerden jarenlang een soms intensieve correspondentie, zoals men onder wiskundigen weinig aantreft. Het contact was in ieder geval al gaande in de laatste maanden van de bezettingstijd, toen Freudenthal in zijn eigen huis in Amsterdam was ondergedoken. Monna, die, naar hij Freudenthal eens schreef, enig gebrek aan zelfvertrouwen had, stuurde hem regelmatig allerlei vragen en prepublicaties over p -adiek toe. Het behulpzame en

***p*-adische Banachruimten**

Ongeveer zoals klassiek, is een Banachruimte over een compleet niet-archimedisches lichaam K , een lineaire ruimte M over K voorzien van een afbeelding $\| \cdot \| : M \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$, die de norm heet en voldoet aan

$$\|a + b\| \leq \max(\|a\|, \|b\|), \quad \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0, \quad \|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|,$$

waarbij $\lambda \in K, a, b \in M$. Verder moet M volledig zijn ten opzichte van de metriek $d(a, b) = \|a - b\|$. De fundamentele problemen zijn:

- De structuur van Banachruimten. Meer specifiek, de existentie van ‘orthogonale bases’.
- De stelling van Hahn-Banach.
- Het integraalbegrip voor ruimten van K -waardige functies.

In Monna's artikelen wordt de stelling van Hahn-Banach in vele gevallen bewezen. Wat spijtig voor Monna, werd een algemene vorm van de stelling in 1952 door W.A. Ingleton bewezen. Het curieuze resultaat willen we kort schetsen. De stelling luidt (in een veel sterkere versie van omstreeks 1969):

Laat K een compleet niet-archimedisches gewaardeerd lichaam zijn. De volgende uitspraken zijn equivalent:

- K is sferisch volledig.*
- Voor elke Banachruimte M over K , elke deelruimte $N \subset M$ en elke lineaire afbeelding $l : N \rightarrow K$ die voldoet aan: er is een constante $C \geq 0$ met $|l(n)| \leq C\|n\|$ voor alle $n \in N$, bestaat er een lineaire voortzetting $L : M \rightarrow K$ van l met $|L(m)| \leq C\|m\|$ voor alle $m \in M$.*

Sferisch volledig betekent dat elke dalende rij (gesloten) bollen $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$ in K een niet-lege doorsnijding heeft. Is het wel mogelijk dat $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \emptyset$? Gesloten bollen in K , dat wil zeggen verzamelingen van de vorm $B(x_0, r) = \{x \in K \mid |x - x_0| \leq r\}$, gedragen zich wat anders dan men verwacht. Om te beginnen is elk punt in een gesloten bol middelpunt. Verder hebben twee gesloten bollen of een lege doorsnijding of de ene bol is bevat in de andere. Het blijkt dat $\mathbf{C}_p$ niet sferisch volledig is en derhalve is de stelling van Hahn-Banach onjuist voor Banachruimten over $\mathbf{C}_p$. In feite bestaat er een Banachruimte $M \neq 0$ over $\mathbf{C}_p$ zo dat zijn topologische duale gelijk is aan 0. Achteraf blijkt het begrip ‘sferisch volledig lichaam’ al door W. Krull bestudeerd te zijn onder de naam ‘maximally complete field’.

Een collectie elementen $\{e_i\}_{i \in I}$ in een Banachruimte M heet een orthogonale basis als ieder element $m \in M$ geschreven kan worden als een convergente som $m = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ met alle $\lambda_i \in K$. Bovendien moet gelden $\|m\| = \max_{i \in I} (|\lambda_i| \cdot \|e_i\|)$. Een mooi voorbeeld van zo'n orthogonale basis is het volgende. Neem $K = \mathbf{Q}_p$, en laat M de Banachruimte van de continue functies $\mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Q}_p$, voorzien van de supremumnorm, zijn. Voor $n \geq 0$ en $x \in \mathbf{Z}_p$ is $\binom{x}{n} := \frac{x \cdots (x-n+1)}{n!}$ weer een p -adisch geheel getal. De collectie $\{\binom{x}{n}\}_{n \geq 0}$ is een orthogonale basis van M . Deze basis heet de *Mahler-basis*. Banachruimten die een orthogonale basis bezitten hebben een eenvoudige structuur en lijken nogal op complexe Hilbertruimten. Er zijn echter Banachruimten die geen orthogonale basis toelaten. Het onderzoek in deze richting is pas omstreeks 1970 afgerond.

Integratie van K -waardige functies op bijvoorbeeld topologische ruimten of topologische groepen is niet een vanzelfsprekende vertaling van de klassieke situatie. Haarmaten zijn er bijvoorbeeld in het algemeen niet. In de jaren zestig bouwde Monna in samenwerking met T.A. Springer een mooie theorie op. Dit thema werd ook door A.C.M. van Rooij en W.H. Schikhof bestudeerd.

uitvoerige commentaar van Freudenthal leidde tot menige verandering in de uiteindelijke publicaties. Freudenthal's interesse voor de p -adiek was gewekt door zijn begeleiding van Loonstra, in 1941 gepromoveerd bij L.E.J. Brouwer, op p -adische functietheorie. Evenals in de jaren daarvoor bood Van der Woude de artikelen vervolgens in de Akademie aan. Aan het eind van de jaren vijftig nam Freudenthal deze rol over.

Ook ontmoette Monna wel andere wiskundigen. Regelmatig bezocht hij de zaterdagmiddagbijeenkomsten van het Wiskundig Genootschap, waar hij ook wel eens een lezing hield. Voorts sprak hij voor de leden van het Wiskundig Dispuut Thomas J. Stieltjes te Rotterdam en trad hij enkele malen op tijdens een Leidse diesbijeenkomst. Enige tijd nam hij deel aan een informeel werkgroepje, verder bestaande uit J. de Groot, Loonstra, W. Ver-

denius, R.J. Wille, waarin een boek over topologie (N. Bourbaki?) werd bestudeerd.

Een andere functie na de oorlog?

In de eerste jaren na de oorlog is verschillende malen sprake geweest van vertrek bij het ministerie. De eerste keer nam Monna, met aarzeling, zelf het initiatief. In december 1946 informeerde hij bij J.G. van der Corput naar mogelijkheden voor een wetenschappelijke functie. Hij schreef natuurlijk niet toevallig aan Van der Corput, want deze was in de naoorlogse jaren een van de invloedrijkste wiskundigen. In eerste instantie wist deze hem weinig verder te helpen, maar kort daarop deed zich ineens een mogelijkheid voor bij het Mathematisch Centrum, waar Van der Corput voorzitter was van de Raad van Beheer.

Eind 1946 waren J. Popken en De Groot benoemd tot medewerker bij de afdeling zuivere wiskunde. Begin 1947 vertrokken ze alweer wegens hun benoeming tot hoogleraar, respectievelijk lector. Daarop werd Monna aangezocht medewerker te worden, evenals A.C. Zaanen. Monna weigerde echter. Hij achtte een functie bij het Centrum te onzeker, waarbij hij verwees naar de moeilijke situatie waar zijn vader in was terechtgekomen na het jaar in Zierikzee. Bovendien, zo schreef hij, kon hij op het ministerie slecht worden gemist, daar de sous-chef van de afdeling ernstig ziek was geworden. Hij voerde ook een argument van inhoudelijke aard aan. Gezien de vele opdrachten die het Centrum zou gaan krijgen, was er vermoedelijk weinig ruimte voor “vrij wetenschappelijk onderzoek”. Dat zou hij dus, net als reeds het geval was, in de avonduren moeten blijven doen. Hij schoot er dus voor zijn gevoel eigenlijk niet veel mee op. Overigens weigerde ook Zaanen. Hij werd benoemd tot hoogleraar aan de Technische faculteit in Bandung, voorheen de Technische Hogeschool, maar toen sinds kort onderdeel van de Universiteit van Indonesië. In september 1947 werden F. van der Blij en J. Korevaar aangesteld als medewerker bij het Mathematisch Centrum.

Eind 1947 werd ook Monna gepolst voor een eventuele benoeming tot hoogleraar aan diezelfde faculteit in Bandung. Het ging daarbij om een contract van drie jaar, eventueel via detachering. Ook hiervoor heeft hij bedankt. Niet lang daarna speelde een andere vacature. In Wageningen ging M.J. van Uven met emeritaat. Monna was een van de kandidaten voor de opvolging en behoorde met een aantal anderen ook tot degenen die werden aanbevolen door de faculteit wis- en natuurkunde van de Gemeentelijke Universiteit



Monna tijdens zijn afscheid in 1979

in Amsterdam. Hij is in februari 1949 in Wageningen gaan praten, maar heeft zich vervolgens teruggetrokken. Men wilde in Wageningen iemand benoemen die bereid zou zijn zich enigszins in te werken in landbouwkundige vraagstukken. Dat leek hem niet aantrekkelijk. In 1952 tenslotte werd hij gepolst voor een benoeming tot hoogleraar in Bogor (Buitenzorg) bij de faculteit van landbouwwetenschap van de Universiteit van Indonesië. Ook dit heeft hij geweigerd. Hierbij zou immers, zoals hij schreef, de toepassing van de wiskunde voorop staan. Hij zag geen kans zich in korte tijd in te werken tot expert op het terrein van de statistiek, “nog daargelaten de vraag of dit met mijn interesses op wetenschappelijk gebied zou stroken”. Voorts vormde het kort-verband contract een bezwaar en een verblijf in de tropen leek hem niet aantrekkelijk. Het bleef dus Den Haag.

Achteraf gezien was het misschien toch verstandig geweest de benoeming in Amsterdam te aanvaarden. Evenals vele andere medewerkers van het Mathematisch Centrum was hij mogelijk na korte tijd doorgestroomd naar een functie in het hoger onderwijs. Maar net als later in zijn Utrechtse tijd stond bij Monna de vrijheid van eigen onderzoek voorop. Van projectmatig werk moest hij niets hebben. Bovendien, zoals gezegd, het werk op het ministerie stond hem in die jaren niet tegen. Dat veranderde pas in de loop van 1960.

Moeilijkheden op het ministerie

Onder het bewind van J.M.L.Th. Cals vonden op het ministerie herhaaldelijk op sleutelpos-

ten benoemingen plaats met een politiek karakter. Dit gebeurde vooral bij verschillende reorganisaties van het ministerie. De verhouding tussen openbaar en bijzonder onderwijs speelde bij deze benoemingen een belangrijke rol. Bovendien gaf de minister, zelf van katholieke huize, bij benoemingen herhaaldelijk de voorkeur aan partijgenoten. Al in de jaren vijftig leidde dit tot kritiek in de Tweede Kamer.

Toen in 1960 opnieuw werd gereorganiseerd, ontstond grote onrust op de afdeling VHMO. Drewes, chef van de afdeling, lid van de PvdA, en evenals Monna voorstander van openbaar onderwijs, werd per 1 maart 1961 benoemd tot raadadviseur in algemene dienst. Naar de mening van velen, ook van hemzelf, werd hij hiermee weggepromoveerd. In zijn plaats werd de KVP-er J.A.A. Verlinden benoemd.

Artikelen hierover in het liberale dagblad *Het Vaderland* en in een schoolblad leidden in maart en april 1961 tot discussie in de Eerste en Tweede Kamer. Een echte rel werd het in juni, toen een reeks van vier artikelen verscheen in *Het Vaderland*. Hierin werden de verhouding tussen openbaar en bijzonder onderwijs, het benoemingsbeleid van de afgelopen jaren en de toenemende oververtegenwoordiging van katholieken op het ministerie uitvoerig aan de orde gesteld. Drie ambtenaren van de afdeling VHMO, onder wie Monna, hadden ontslag genomen als gevolg van de benoeming van de nieuwe afdelingschef. De schrijver van de artikelen ontleende zijn informatie aan een ambtenaar van de afdeling VHMO. Deze artikelen leidden tot een scherpe reactie in het katholieke dagblad *De Tijd*, die volgens een tegenreactie in *Het Vaderland* tot stand moest zijn gekomen in nauw contact met de politieke leiding van het ministerie.

De krantenartikelen vormden de aanleiding voor (nieuwe) vragen in de Tweede Kamer. De KVP-er L.A.H. Albering, behalve kamerlid ook algemeen secretaris van de partij, informeerde of de berichtgeving juist was. Al voordat de vragen waren beantwoord, werd in *Het Vaderland* gesuggereerd dat juist een partijgenoot van de minister de vragen had gesteld om te voorkomen dat een andere partij dit zou doen, met misschien veel meer schadelijke gevolgen. Cals gaf op 29 juni een uitvoerig antwoord, waarbij ook het ontslag van de betrokken ambtenaren, in navolging van *Het Vaderland* door hem met naam en toenaam genoemd, aan de orde kwam. Hun vertrek had niets te maken met de benoeming van een nieuwe chef. Monna (wij zullen ons hier tot hem beperken) “zag reeds lang

tevoren naar een wetenschappelijke functie uit. Degenen die hem kennen uit zijn publicaties of die hem hebben meegemaakt als geëngageerde bij wiskunde-examens b.v., zullen dat ook begrijpen. Hij zag uit naar een wetenschappelijke functie, die meer met zijn ambitie en zijn geaardheid overeenkwam dan zijn huidige administratieve werkkring. Hij had dit reeds met zijn vorige chef besproken en meende ook na de chefswisseling niet de kans te mogen laten voorbijgaan, die hem werd geboden om met ingang van het komende studiejaar — de vacature is er dus nog niet — aan de universiteit van Utrecht een wetenschappelijke functie te bezetten.”

De werkelijkheid steekt toch iets anders in elkaar. Monna had wel degelijk ontslag genomen vanwege de situatie op de afdeling. Drewes had daarbij in die zin enige invloed uitgeoefend, dat deze hem had geadviseerd pogingen in het werk te stellen om weg te komen gezien de nieuwe situatie op de afdeling. In een kort bericht in *Het Vaderland* van 1 juli 1961 staat een verklaring van Monna aan een journalist dat hij inderdaad wetenschappelijke aspiraties had, “maar het is bepaald niet waar dat ik om die reden naar een andere functie overga. Indien deze affaire zich niet had voorgedaan, zou ik zeker geen andere functie hebben gezocht. Ik ben van mening, dat er een dergelijke rechtsonzekerheid is geschapen, dat ik van de gelegenheid om een andere functie te verkrijgen, wat door een gunstige samenloop van omstandigheden mogelijk was, wel gebruik moest maken [...]. Men laat een werkkring, waarin men een twintig jaar heeft vertoefd niet zo gemakkelijk in de steek.”

Nam de Tweede Kamer in juni genoeg met de antwoorden van Cals, vermoedelijk mede omdat de berichtgeving in *Het Vaderland* inderdaad niet op alle punten correct was, op 18 en 19 december werd, bij de behandeling van de begroting van het ministerie, het benoemingsbeleid opnieuw aan de orde gesteld door H. van Someren-Downer, lid van de VVD-fractie. Ze sprak er haar bevreesdheid over uit dat de schriftelijke vragen van Albering door Cals op zeer korte termijn niet schriftelijk maar mondeling waren beantwoord, zonder dat de Kamer daarvan tevoren op de hoogte was gesteld. Dat zulks ongevoelen was, bleek alleen al uit het feit dat er geen aanvullende vragen waren gesteld. In haar beschouwing kwam de afdeling VHMO opnieuw ter sprake. Zij citeerde Monna's verklaring uit *Het Vaderland* van 1 juli en vroeg zich af hoe dit te rijmen viel met het “laconieke antwoord” van Cals op dit gedeelte van

CONTINENTUR	
Numeri unci inclusi Actorum paginas indicant	
	Pag.
BOTTEMA, O.: "Over de projectieve differentiaalmeetkunde der regeloppervlakken in R_4 ." (Veertiende mededeling). (p. 146)	54
BOTTEMA, O.: "Over de differentiaalmeetkunde der regelvlakken in R_4 ." (Vijftiende mededeling). (p. 201)	82
BRUIJN, N. G. DE: "Over de absolute convergentie van reeksen van DIRICHLET". (p. 23)	8
HAANTJES, J.: "Conforme differentiaalmeetkunde. V. Bijzondere oppervlakken". (p. 322)	118
KULK, W. VAN DER: "The $(1, \infty)$ -contact transformations of the E_n 's in X_n ". (p. 421)	132
KULK, W. VAN DER: "Les transformations de contact $(1, \infty)$ des E_n en X_n ". (p. 421)	132
KULK, W. VAN DER: "Contribution to the theory of the $\mathbb{S}_2^n$ -field, IV. Conditions for the complete integrability". (p. 575)	136
KULK, W. VAN DER: "Contribution à la théorie des champs de $\mathbb{S}_2^n$. IV. Conditions de l'intégrabilité complète". (p. 575)	136
KULK, W. VAN DER: "Contributions to the $\mathbb{S}_2^n$ -fields, V. Contact transformations of $\mathbb{S}_2^n$ -fields". (p. 662)	140
KULK, W. VAN DER: "Contribution à la théorie des champs $\mathbb{S}_2^n$. V. Transformations de contact des champs $\mathbb{S}_2^n$ ". (p. 662)	140
MONNA, A. F.: "Over een lineaire P -adische ruimte". (p. 74)	19
MONNA, A. F.: "Over zwakke en sterke convergentie in een P -adische BANACH-ruimte". (p. 207)	88
MONNA, A. F.: "Over niet-archimedische lineaire ruimten". (p. 308)	104
MONNA, A. F.: "Linear functional comparisons in non-archimedean BANACH-spaces". (p. 654)	139
MONNA, A. F.: "Equations fonctionnelles linéaires dans des espaces de BANACH non-archimédiens". (p. 654)	139
RUTGERS, J. G.: "Eenige identiteiten". (p. 163)	71
SCHOUTEN, J. A. en W. VAN DER KULK: "Bijdragen tot de theorie der systemen van PFAFFsche vergelijkingen". (p. 17)	2
SCHOUTEN, J. A. en W. VAN DER KULK: "Bijdragen tot de theorie der systemen van PFAFFsche vergelijkingen". (p. 138)	46
SCHOUTEN, J. A. en W. VAN DER KULK: "Bijdragen tot de theorie der systemen van PFAFFsche vergelijkingen." VIII. (p. 197)	78
SCHOUTEN, J. A. and W. VAN DER KULK: "Contributions to the theory of the systems of PFAFFian comparisons". (p. 415)	131
SCHOUTEN, J. A. et W. VAN DER KULK: "Contributions à la théorie des systèmes des équations de PFAFF". (p. 415)	131
SCHOUTEN, J. A. and W. VAN DER KULK: "Contributions to the theory of the systems of PFAFFian comparisons". X. (p. 571)	136
SCHOUTEN, J. A. et W. VAN DER KULK: "Contributions à la théorie des systèmes des équations de PFAFF". X. (p. 571)	136
SCHOUTEN, J. A. and W. VAN DER KULK: "Contributions to the theory of the systems of PFAFFian comparisons" XI. (p. 646)	139

Eerste bladzijde van de inhoudsopgave van het deel van *Indagationes Mathematicae* waarin in 1943 Monna's eerste artikel over p -adische Banachruimten verscheen

de vragen van Albering. Er volgde een tamelijk vinnige confrontatie, zonder een duidelijke winnaar, met minister M.A.M. Klompé, die de zieke Cals verving. Van Someren heeft daarbij nog contact opgenomen met Monna om te vragen of hij bij zijn uitspraken bleef. Hij verzocht haar in het openbaar te verklaren dat zulks het geval was, hetgeen zij tijdens de discussie in de Kamer heeft gedaan. Monna was toen, na een voor hem deprimerend laatste jaar op het ministerie, al weer enkele maanden werkzaam aan de Utrechtse universiteit.

Vertrek naar Utrecht

Kort voor de problemen op het ministerie begonnen, waren zijn contacten met andere Nederlandse wiskundigen juist wat intensiever geworden. Dit had te maken met de plannen voor de oprichting van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW). Samen met een aantal anderen behoorde Monna tot de initiatiefnemers. Bij de voorbereidende werkzaamheden, die vooral in de eerste helft van 1961 plaatsvonden, heeft hij een groot aandeel gehad. Dat lag natuurlijk ook wel voor de hand gezien zijn dagelijks

werk ten behoeve van het middelbaar onderwijs en zijn wiskundige achtergrond. Hoogleraren wiskunde van alle universiteiten en hogescholen, en vertegenwoordigers van het VHMO en de onderwijsinspectie werden lid van deze grote commissie.

Deze activiteiten baanden de weg voor Monna's vertrek bij het ministerie. Na een telefonisch contact met Van der Blij volgde in februari 1961 een gesprek in Utrecht, waarbij Monna de situatie op het ministerie uiteenzette en vroeg of er bij hem op het instituut geen plaats was als wetenschappelijk ambtenaar.

De keuze voor Utrecht werd ongetwijfeld ingegeven door de jarenlange contacten met Freudenthal. Een jaar tevoren nog had hij op diens uitnodiging een voordracht gehouden op het stafcolloquium. Daarnaast leek ook de samenwerking met Van der Blij en L.N.H. Bunt, docent didactiek van de wiskunde, hem aantrekkelijk. Beiden waren, evenals Freudenthal, beoogd lid van de CMLW.

De overstap naar Utrecht werd in hoog tempo gerealiseerd. Een vacature was er niet en een formele sollicitatieprocedure werd niet gevolgd. Op 23 februari 1961 legde Van der Blij een eventuele benoeming van Monna voor aan Freudenthal, die dat jaar gasthoogleraar was aan Yale University. Op dat moment leek het erop dat de CMLW een bezoldigd secretaris zou krijgen.

Volgens Van der Blij was Monna ("hij is behoorlijk revolutionair van opvattingen") hiervoor de aangewezen persoon. Men zou kunnen denken aan een halve aanstelling als betaald secretaris van de CMLW en een halve universitaire aanstelling, al had Monna liever een volledige functie aan de universiteit. Dat laatste gebeurde.

Een door het ministerie bezoldigde secretaris is er niet gekomen. Al in maart ging de voordracht als hoofdamtenaar A naar curatoren. De benoeming ging uiteindelijk in op 1 september 1961. Enkele weken tevoren, op 19 juli, was de CMLW, met H.Th.M. Leeman als voorzitter en Monna als secretaris, door staatssecretaris G.C. Stubenrouch op het ministerie geïnstalleerd. Kort voordien waren de spanningen over het benoemingsbeleid van Cals in alle duidelijkheid in de openbaarheid gekomen.

Ruim een jaar na zijn benoeming vestigde Monna zich met zijn gezin in De Bilt, waar hij tot aan zijn overlijden is blijven wonen. De nabijheid van de Utrechtse Heuvelrug en het Krommerijgebied — als kind al kwam hij veel in Doorn — vormde een bijkomende attractie van de verhuizing naar de provincie Utrecht.

De Utrechtse jaren

De Utrechtse jaren vormden zonder twijfel het hoogtepunt van Monna's professionele leven. Van een wetenschappelijk isolement was geen sprake meer. Met de Utrechtse collega's kon hij het van meet af aan uitstekend vinden. Met verschillende van hen raakte hij persoonlijk bevriend. Ook aan de universiteit voelde hij zich goed thuis.

In 1965 volgde de benoeming van Monna tot gewoon hoogleraar, vanwege zijn kwaliteiten als onderzoeker en docent. Deze benoeming heeft hem verheugd, maar mede gezien zijn leeftijd — hij was inmiddels 56 jaar — ook enigszins verrast. In zijn oratie op 22 november 1965 stipte hij aan dat men op deze leeftijd “in de groep Bourbaki reeds als verouderd terzijde zou zijn gezet”.

Het ligt voor de hand dat men in Utrecht gebruik ging maken van Monna's eerder opgedane bestuurlijke ervaring. Al gauw werd hij beheerder van het instituut, een functie die hij tot 1977 heeft bekleed. Hij deed dat op zakelijke en integere wijze, niet aarzeland bezwaar aan te tekenen tegen ontwikkelingen die hem niet bevielen. Zo weigerde hij gedurende lange tijd mee te werken aan de invoering van een systematische personeelsbeoordeling. Hij wilde mensen, als het moest, best beoordelen in een beredeneerde brief, maar niet via een ingewikkeld systeem van ‘zoveel-puntsschalen’.

Naast zijn universitaire werk bleef Monna tot 1972 secretaris van CMLW. Daarna was hij nog twee jaar lid van de commissie. Ook was hij intensief betrokken bij het postacademisch onderwijs aan leraren. Daarnaast trad hij jarenlang op als examinator bij de MO-examens. Van zijn hand verschenen regelmatig publicaties over wiskunde in het voortgezet, academisch en postacademisch onderwijs.

Op 1 september 1976 legde Monna zijn functie als gewoon hoogleraar neer. Met ingang van die datum werd hij benoemd tot persoonlijk extra-ordinarius met een aanstelling van één dag per week. In deze nieuwe functie heeft hij onder andere onderwijs gegeven over de achtergronden van de schoolwiskunde, in het bijzonder voor studenten die het voornemen hadden leraar te worden. Op 1 oktober 1979 ging hij met emeritaat. In december van dat jaar vond een afscheidssymposium plaats.

In Utrecht vond Monna's enthousiasme voor de p -adiek grote weerklank. Van der Blij, T.A. Springer, A.C.M. van Rooij en anderen raakten geïnteresseerd. Er werden proefschriften geschreven over p -adische functio-

naalanalyse door J. van Tiel, M. van der Put en W.H. Schikhof. Zonder overdrijving kan men spreken van een ‘Monna-school’ in de p -adiek, die zich over de landsgrenzen heeft uitgebreid. Onder invloed hiervan kon men bij de Utrechtse stafcolloquia vaak de vraag: ‘Kan dat ook p -adisch?’ horen.

De p -adische analyse ging in de jaren zestig verbindingen aan met deelgebieden van de algebraïsche meetkunde. J. Tate ontwikkelde een theorie van analytische functies in één of meer variabelen over een niet-archimedisches gewaardeerd lichaam K , die later de naam ‘rigide analytische meetkunde’ zou krijgen. Daarbij ontstond, onder meer, een object dat we nu als de Tatekromme kennen. Het werk van Tate bleef lange tijd ongepubliceerd. In Duitsland werden Tate's ideeën uitgewerkt door onder anderen H. Grauert, R. Remmert, R. Kiehl, L. Gerritzen. Een ander toepassingsgebied van p -adische lineaire analyse werd door B. Dwork ontsloten door zijn bewijs van de rationaliteit van de zeta-functie van een algebraïsche variëteit over een eindig lichaam. In verband hiermee bestudeerden J.-P. Serre en L. Gruson p -adische Banachruimten.

Twee hoogtepunten van Monna's p -adische activiteiten laten zich aanwijzen. Monna organiseerde in samenwerking met onder anderen T.A. Springer een bijzonder invloedrijke internationale conferentie ‘Local fields’ (Driebergen 1966). Hier ontmoetten de nieuwe p -adische theorieën, de ‘Franse school’ en de arithmetische getaltheorie elkaar. Een bekende naam ontbrak echter, die van A. Grothendieck. Deze was een tegenstander van alle wiskundige activiteiten die een militaire sponsor hebben. Zijn programma ‘survivre’, dat enkele jaren later tot stand kwam, benadrukte dit standpunt. ‘Local Fields’ werd indirect, via de NUFFIC, gesponsord door de NAVO.

Het tweede hoogtepunt is Monna's boek *Analyse non-archimédienne* (1970). Dit is een samenvattende bewerking van zijn p -adische artikelen en het is tevens de afsluiting van zijn p -adisch werk.

Hoe ging het verder met de p -adische analyse

Na 1970 waren vooral klassieke onderwerpen uit de analyse, zoals continue en differentieerbare functies, harmonische analyse op (commutatieve) groepen, operatorentheorie, lokaal convexe ruimten, convexiteit, metrische ruimten, maten en integratie, aanleiding voor veel onderzoek in de p -adiek. De interesse voor dit vakgebied nam toe. Er waren (en er zijn nog) groepjes onderzoekers in

Frankrijk, België, Duitsland, Nederland, Engeland, Spanje, Rusland, India (universiteit van Madras), Japan en Chili. Onder de vele publicaties vindt men interessante en mooie resultaten. Er is ook kaf onder het koren. Nu, zoveel jaren later, lijkt de stroom van publicaties op te drogen. Wellicht is *deze* p -adiek teveel een eigen leven gaan leiden en is het contact met de hoofdstromen van het wiskundeonderzoek verloren gegaan. Ook lijkt een centraal probleem te ontbreken. *Heeft de p -adische analyse een eindpunt bereikt?* In dit verband doet het onlangs gepubliceerde boek van P. Schneider, *Nonarchimedean Functional Analysis* (2002), merkwaardig aan. De theorie van de lokaal convexe ruimten over een niet-archimedisches gewaardeerd lichaam, zoals die bekend was omstreeks 1970, wordt daarin mooi en helder gepresenteerd. Er is echter geen sprake van toepassingen of van verbanden met andere delen van de wiskunde.

Vele takken aan de p -adische boom

Nieuwe p -adische theorieën, veelal gebaseerd op geavanceerde technieken uit de algebraïsche meetkunde, werden ontwikkeld. De p -adiek is uit elkaar gevallen in deelgebieden met ieder een eigen taal, problemen en doelstellingen. We noemen wat namen: rigide analytische meetkunde; étale cohomologie van rigide ruimten; p -adische Hodge theorie; p -adische differentiaalvergelijkingen; Monsky-Washnitzer cohomologie; cristallijne cohomologie; Drinfel'd-modulen; het Langlands vermoeden voor functielichamen; Bruhat-Tits gebouwen en algebraïsche groepen.

Recente ontwikkelingen lijken die gebieden weer tot elkaar te brengen. Toepassingen van de p -adische analyse uit de ‘Monna school’ zijn op veel plaatsen aan te wijzen.

Abstracte potentiaaltheorie

In zijn Utrechtse jaren heeft Monna zich ook veel beziggehouden met abstracte potentiaaltheorie. Deze theorie is omstreeks 1940 ontstaan door het werk van M. Brelot. Er vormde zich rond dit thema een groep van vooral Franse onderzoekers. Een naoorlogs Parijs Séminaire de Théorie du Potentiel, geleid door Brelot, G. Choquet en J. Deny, is wellicht het centrum van onderzoek geweest. Monna, die, zoals gezegd, al sedert 1938 regelmatig met Brelot correspondeerde over het probleem van Dirichlet en de potentiaaltheorie, heeft er verschillende colleges en seminaria aan gewijd, waarbij Brelot's researchboek als basis diende.

Zalman Usiskin

UCSMP, University of Chicago

5835 S. Kimbark Avenue

Chicago, Illinois 60637

Verenigde Staten

z-usiskin@uchicago.edu

Onderwijs

A significant amount of algebra

“Als wij het nog abstracter maken komen er nog minder wiskundestudenten.” Deze uitspraak over het wiskundeonderwijs komt van een hoge medewerker van het ministerie Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen. Diametraal hierop is het standpunt van Zalman Usiskin, professor voor didactiek en directeur van het University of Chicago School Mathematics Project (UCSMP). Volgens hem zijn mensen juist door het leren van algebra en andere geavanceerdere wiskunde beter in staat om de wereld te begrijpen en om hun werk te kunnen doen. Zalman Usiskin gaf in zijn slotlezing op de Nationale Wiskunde Dagen 2004 vele goede redenen voor onderwijs van algebra op de middelbare school. Usiskin levert hiermee een bijdrage aan de discussie over het algebraonderwijs in Nederland die momenteel in volle gang is.

It is a great pleasure to have been invited to speak in the Netherlands for the first time. Over the years, I have been influenced by the work of Dutch mathematics educators on a number of occasions. My doctoral dissertation involved the testing of a geometry course for average 10th grade students in which the geometry was developed through reflections and other geometric transformations. The de-

velopment in the geometry book that Art Coxford and I wrote was influenced quite a bit by a set of schoolbooks written in Dutch by Rudolf Troelstra and others in the 1960s. But even more relevant to this conference are the connections I had with Hans Freudenthal. I first met Freudenthal in the 1970s when he visited the University of Chicago. Beginning in 1979, I did some research on the theory of learning of Dina and Pierre Marie van Hiele, both students of his. Then in 1980 my wife and I had dinner with him, just the three of us, during the International Congress on Mathematical Education meeting. Freudenthal was such a major figure and this was quite a special event for me. A few years later I was asked to review his book *The Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, and I was pleased and surprised to see that the fundamental conceptualization Freudenthal presented in that book helped me in understanding many of the ideas and some of the work that I had been doing over the preceding decade. It is an honor to have been asked to speak under the auspices of the institute that bears his name.

I was asked to give a talk that would be of interest both to secondary school teachers and research mathematicians, that would

strike a balance between mathematical content and didactical and curricular issues, that would involve policy, that would inspire you, and that would cause you to leave this conference excited by what you have heard. That would be difficult enough, but my task is made more difficult by my ignorance of what you know, what examples you have seen and exactly what you teach. This is a talk about curriculum policy, and so I will try to give arguments that you could use with those who do not teach mathematics, with parents, and with others outside the mathematics community who question what we do and why we do it. I apologize in advance if what I say is obvious; I can only tell you that it would not be obvious to secondary school teachers in the United States.

Introduction

The algebra we teach to students can be traced back through the Greek mathematician Diophantus to the Babylonians over 3500 years ago, but the language we use in today's algebra is relatively new as mathematics goes, dating back only to the French mathematician Viète in 1591 and the systematization of the content by Euler in 1770. In the United States as recently as 1910, less than

15% of the age cohort entered high school and only they studied any algebra [1]. I estimate that 1 in 20 people studied a second year of algebra.

Through the 20th century the situation changed dramatically. By 1972, virtually all students entered high school and about 72% of them were taking one year of algebra. About half of these students took a second year of algebra. Algebra was still viewed as a high school subject and introduced before 9th grade only to perhaps 10% of students. Yet by 1998, algebra was being introduced to virtually all students before high school, over 90% of students were taking one year of algebra by the end of the 9th grade (25% by the end of 8th grade), and $2/3$ of students were studying a second year of algebra in 10th or 11th grade [2]. In the first year of algebra they are taught linear equations and inequalities, graphing of lines, operations with polynomial expressions (including factoring), laws of positive integer powers, linear systems, square roots, and simple quadratics and maybe rational expressions. In the second year, they are most likely to begin with a review of first-year algebra and then be taught rational powers and n th roots, operations with matrices, general notions of functions, linear and quadratic functions, logarithms and exponential functions, sequences, and perhaps some combinatorics and probability [3]. when I speak of “a significant amount of algebra”, I mean this amount.

Notice that I say that students are *taught* these subjects. I did not say that they *learn* them. Many colleges require these subjects but many students have to take remedial algebra courses in college. There is a movement in the U.S. for all students, including those not planning to go to college, including even those who might not finish high school, to take two years of algebra. And I understand you have a minister who wants to decrease the amount of mathematics for all students. Which is the wiser strategy? We may think the answer is obvious, but we are in mathematics! We are biased! Let us try to look in an unbiased manner at the current situation regarding algebra in our world.

Arithmetic is everywhere, algebra is hidden.

Most people realize that they need to know arithmetic. Whole numbers, fractions, decimals, and percents are everywhere. Just pick up a newspaper or magazine, open to any page at random, and count the numbers on it. I have examined the uses of numbers in

newspapers around the world and in almost every country, a daily newspaper has a *median* of about 125 numbers on its pages.

Algebra is different. Scan a daily newspaper in Dutch or English and you are not likely to see any algebraic formulas. Adults may be handicapped by a lack of knowledge of arithmetic, but lack of knowledge of algebra does not seem too debilitating. Items for sale in stores have lots of numbers on them... and no algebra. Even scientific publications meant for the educated public and with many numbers in them tend to have little if any algebra.

Yet algebra must be important, for if algebra were not important, why would we require all students to study it? To say “You need algebra for college”, or “You won’t do well on some exams without it” is true. But these reasons do not tell us why algebra is so important that it has become a required element in the mathematics curriculum of almost every secondary school student in the world.

When people are required to learn a subject that they feel they do not need, will not use, and that requires work to learn, there are predictable results. Many of them will dislike the subject and they will be proud of their dislike. No one makes fun of reading. No one makes fun of arithmetic. But people make fun of algebra. My favorite cartoon of this type (shown on the next page) was drawn by a high school student, Brad Haak, whose mother is a mathematics teacher.

This attitude towards algebra is passed on from generation to generation.

The reasons for algebra

There are practical reasons for learning algebra.

Algebra is a gatekeeper

In the United States, without a knowledge of algebra, a person cannot go to any college that has any selectivity. A person is kept from doing many jobs or even entering many job-training programs. Algebra is such a significant gatekeeper that at least one educator has called the study of algebra a *civil right*.

Again, however, knowing that algebra is a gatekeeper begs the question. Why is algebra considered so important that its study is required? I offer some reasons intrinsic to algebra.

Algebra is the language of generalization

Here is the rule for multiplication of fractions, in English: To multiply two fractions, multiply their numerators to get the numerator of

the product, and then multiply their denominators to get the denominator of the product. For example,

$$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{(2)(4)}{(3)(5)} = \frac{8}{15}$$

What is the rule in the language of algebra?

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{(a)(c)}{(b)(d)} = \frac{ac}{bd}$$

Not only is the language of algebra shorter than the English (or the Dutch), but it also looks like the arithmetic. For this reason, the language of algebra is *easier* than everyday language.

As we all know, there are formulas for area as simple as $A = LW$ (in a rectangle, area equals length times width) that come in handy if any person is looking for a place to live and wants to know how much floor space or wall space there is, or if a person is sewing clothes and wants to determine the amount of material that is needed. There are formulas for perimeter that tell how long a fence a person might need for a field or how much ribbon to tie a package. There are all sorts of formulas in sports, from the calculation of winning percentage to the probability that a team will win any number of games in a row. Income tax, sales taxes, discounts, and virtually every money matter involve applying some formula. People can get along without the formulas — most people do — but they are less likely to be fooled by someone misinterpreting them if they themselves can work with the algebra.

Algebra enables a person to answer all the questions of a particular type at one time

Suppose you have a date of some event in history (in the Gregorian calendar) and you want to know the day of the week that it occurred. You can figure the day out by working from today’s day and date back, accounting for leap years — trying to remember which leap years are the exceptions — and you will get your answer. But if you have many questions of this type, then you want a formula.

One such formula is

$$W = d + 2m + \left\lfloor \frac{3(m+1)}{5} \right\rfloor + \\ + y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor + 2,$$

where

d = the day of the month of the given date;
 m = the number of the month of the year,



with January and February regarded as the 13th and 14th months of the previous year. The other months are numbered 3 to 12 as usual; and y = the year.

This formula tells you on which day of the week a particular date in the Gregorian calendar will occur, even years into the future. Here the $\lfloor \rfloor$ symbol means to round the number inside it down to the nearest integer. For instance, today is 7 Feb 2004, so $d = 7$, $m = 14$, and $y = 2003$, and so

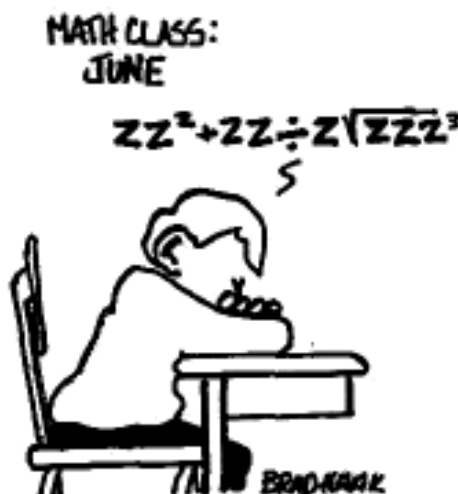
$$\begin{aligned}
 W &= 7 + 2(14) + \left\lfloor \frac{3(14+1)}{5} \right\rfloor + 2003 + \\
 &\quad + \left\lfloor \frac{2003}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2003}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2003}{400} \right\rfloor + 2, \\
 &= 7 + 28 + 9 + 2003 + 500 - 20 + 5 + 2 \\
 &= 2534
 \end{aligned}$$

Once W is computed, divide by W by 7 and the remainder is the day of the week with Saturday = 0, Sunday = 1, and so on, until Friday = 6. That is, determine the least nonnegative residue of W modulo 7. We find that $2534 = 7 \cdot 362$, so the remainder is 0 and today is Saturday.

Algebra is the language of relationships among quantities

Everyone should know the meanings of certain mathematical relationships that are more and more present in everyday language:

- growing exponentially
- growing logarithmically
- varying directly
- varying inversely
- inverse square law
- line of best fit (statistics, but also algebra)
- rate at which a rate is changing (calculus, but also algebra)



approaching asymptotically
extrapolation, interpolation

Algebra is a language for solving certain types of problems

It used to be that the only problems that involved translation from words into mathematics in algebra texts — the so-called ‘word problems’ or ‘story problems’ involved age, motion, coins, work, and mixtures. Now textbooks are just as likely to have problems that involve everyday situations. How much of a particular food can you eat and stay within a particular diet? If the population of a town is x and growing at some rate, what will the population be some years from now?

When there is a formula relating two quantities, if you know one quantity, you can find the other, and today’s technology has made it possible to work with far more complicated formulas than one could deal with even 25 years ago. The use of a graphing calculator makes it possible to find solutions to practical problems through graphing even when we do not have an algorithm to solve the equation algebraically. Graphs of functions and other relationships among variables are the geometry of algebra, and this geometry would not exist without the algebra that drives it.

Algebra is the study of structures with certain properties

An algebraic formula such as $A = LW$ would not have much advantage over its translation into words (area = length times width) were it not for the fact that operations on numbers have properties which enable formulas and other equations to be manipulated. As we all know, when $A = LW$, then (by dividing both sides both sides by L), $\frac{A}{L} = W$. What this means is that from one formula we can de-

duce others. So, because we know algebra, we do not have to memorize a separate formula to determine a side of a rectangle from its area. The power of deduction is not appreciated much by the uneducated public, but it is an extraordinarily powerful tool. The power of deduction is related to the next reason for algebra.

Algebra shows that our universe possesses order

We are all familiar with the use of algebra to explain ‘number tricks’, such as telling whether an integer is divisible by 9 by adding its digits. But algebra does more than just explain why number tricks work; its language explains many aspects of our universe. It is no coincidence that within 100 years after Viète’s work in algebra, Newton and Leibniz independently developed the calculus, Newton could use this calculus to explain Kepler’s laws, and so we learned why the orbits of the planets are essentially elliptical. Algebra helps to explain what to expect from the random flipping of coins, the odds of winning a lottery, whether a building can withstand the weights and other forces that will act on it, how to ship oil around the world with the least cost, how long it will take for the Earth’s population to double at various rates of growth, and myriads of other activities occurring every day.

All of the prior examples involve everyday real events. If we are asking about algebra for *all* students, our case is not strengthened by appealing to physics or other subjects that students who do not take algebra would also probably not take. Even so, the following reason for studying algebra is of fundamental importance.

Algebra is a prerequisite for virtually all other mathematics

In a book simply titled *Why Math?*, Rodney Driver [4] covers a wide range of areas of mathematics, including arithmetic, algebra, geometry, vectors, combinatorics, and probability. But common to all these areas is algebra. The soul of mathematics may lie in geometry, but algebra is its heart.

Thus, without a knowledge of algebra, a person

- loses control over parts of his or her life,
- must rely on other people to do these things for him or her,
- is more likely to make unwise decisions, and
- will not be able to understand many everyday ideas, and
- will not be able to comprehend ideas dis-

cussed in chemistry, physics, the earth sciences, economics, business, psychology, and many other areas.

Thus, if two of the purposes of schooling are to create informed citizens and to optimize the work opportunities for our students, then the study of algebra is a must.

Why can so many live without it?

If algebra is so important, why have so many adults — even educated adults — been able to live nicely without it?

It is common for adults today to speak of algebra and other mathematics beyond arithmetic as if they are important only to a few people. For instance, here is a quote from a Chicago daily newspaper a few years ago:

“When the regular season begins in three weeks, Friday night’s Bulls preseason opener will become about as significant as algebra formulas learned in high school.” [5]

What was John Jackson, the sportswriter who wrote the article, thinking when he wrote this? To himself he must have thought, “The preseason opener is meaningless. What is the most meaningless thing I can think of? Aha! It’s algebra formulas!”

Clearly Mr. Jackson knows that many of the sports statistics that are printed in his newspaper are calculated using algebraic formulas, for he is undoubtedly a college graduate. However, these writers and other adults avoid the formulas whenever they can. They are like people who go to a foreign country but do not know enough of the language to converse with native speakers in that country. Like me in the Netherlands! Even though I do not know Dutch, I can get along, but I will never appreciate the richness of the culture, and I will not be able to learn as much as I could if I knew Dutch. In my travel here, I am forced to depend on signs that have been translated into English. At this conference (de Nationale Wiskunde Dagen 2004), I found it easier to attend the sessions that were in English and missed a lot because of that.

So it is with most adults and algebra. People can live without algebra, but as a result they cannot appreciate as much of what is going on around them. They cannot participate fully. They are more likely to make unwise decisions and will find themselves with less control over their lives. They live in the same world, but they do not see or understand as much of its beauty, structure, and mystery.

The disjuncture between algebra and school algebra

Algebra in many classrooms does not at all

present the picture of the vibrant, widely applicable subject that I have described. Instead of being taught as a living language with a logical structure and many connections between its topics and other subjects, algebra is taught as a dead language with a myriad of rules that seem to come from nowhere, and with applications that are viewed as puzzles, like chess problems. That so many well-educated adults wonder why they studied algebra is testimony to the disjuncture between such an important subject and the way it is presented in schools.

In the past, when only a very small percent of the population needed to learn algebra, we could be content with the algebra course as a gatekeeper. But today we cannot afford to weed out so many students. Algebra needs to *turn on* students rather than turn them off.

To remove this disjuncture, there has been, in some places a paradigm shift in the teaching and learning of algebra. This paradigm shift in attitude towards school algebra is the reason that one sees such a different approach to the subject in some contemporary materials for secondary schools. Using graphs, technology, applications, and mathematical structure, the best contemporary materials more accurately picture the *what* and the *why* of algebra than many traditional materials did. Applications are used to motivate the subject. Transitions are carefully made from arithmetic to algebra, and connections are given to geometry, statistics, and other mathematics. Algebra is changed from a skill-dominated experience, in which problems exist to practice skills, to a problem-centered experience in which skills are developed in order to solve interesting problems.

Is algebra for all theoretically possible?

It is commonly thought that mathematics has levels of abstraction. Algebra is more abstract than arithmetic. Calculus is more abstract than algebra. Higher algebra is more abstract than calculus. In a theoretical sense, in the sense of generalization, this is true. Each subject generalizes some of what has come before it. But how abstract is algebra, really. All of my work with UCSMP has convinced me that algebra is inherently no more abstract than everyday written language, but it is made more abstract by us. Learning algebra should be no more difficult than learning a new language. Any student who can learn to read possesses the ability to learn algebra.

Why do I feel this way? Because we have learned many things about algebra. First, algebra starts earlier than its formal study,

whether we want it to or not. The equation $3 + \underline{\quad} = 7$ can be considered as algebra; the use of an underline is no different than the use of a letter. So 1st or 2nd grade students do algebra problems, we just don’t tell them — perhaps because we don’t want to scare the teachers.

We have found no age cut-off with respect to the learning of variable. Even very young students can evaluate formulas and can graph. We should not have been surprised. Variable is supposed to be an abstract concept, but variables are introduced quite early in some countries’ curricula and seem to be easier to learn early. Is the use of a letter such as A for area or x for an unknown any more abstract than the use of the letter symbol p for the sound “puh”? Surely there is an age cutoff; babies will not learn variables. But at the secondary level, from grade 6 or 7 up, it seems that the earlier the better.

Second, the use of applications concretizes algebra, motivates it, makes it easier. We know that algebra can be approached theoretically, such as through field properties, but this approach does not work with many students. On the other hand, we also know that we can approach algebra through formulas and through generalizations of patterns, and that this approach does work. It isn’t automatic; competence does not come in one day or even one week or one month. But situating algebra in contexts which give reasons for studying the subject at the same time that they illustrate the concepts changes a person’s view of algebra forever. I know that many of you here could not return to the way you used to teach algebra.

But let me raise a caution. I do not wish to be interpreted as suggesting that you can just go into a classroom of students and teach them algebra in some ‘correct way’ and they will learn. There are prerequisites to learning algebra. If a symbol is to stand for a number, as variables usually do, you have to know something about number. You have to know that a number can be represented in many ways, that 6 can be written as $\sqrt{36}$ and as $12/2$ and as 6.000, and that if $x = 6$, then x can be written in any of those ways, too. You need to know what it means for one number to be close to another in value. If you have the expression $x + y$, you need to know what the $+$ sign means independently of what the numbers x and y are. These and other arithmetic ideas are necessary for success in algebra. But they can be learned by virtually all students.

For these reasons, I believe that virtually all students can learn algebra. But is it realistically possible?

Achieving algebra for all

To achieve algebra for all students, I think that we have to change the attitudes toward algebra that most of the public have. To do this, it helps to look at how arithmetic became a subject that everyone felt they needed to learn.

Remember that arithmetic, too, is a relatively new subject. The algorithms that we use for multiplication and division were invented mostly in Italy in the 1400s. Expecting everyone to be competent in the four fundamental operations is a phenomenon of the past 300 years. It took great numbers of people participating in trade and using numbers everyday, the invention of numeration systems and algorithms — e.g., the use of decimals by Simon Stevin — that made it relatively easy for people to compute, and the widespread availability of paper and pencil (or pen and ink) that made it possible to record the work. Do we have that for algebra? Can we have that for algebra?

The answer is that we are closer than most people think. A large percentage of the people who use a computer today work with spreadsheets. They do not think they are doing algebra when they use *Excel* and other spreadsheets because this does not look like school algebra. To most people, algebra is supposed to be hard. Algebra is supposed to be something you do not understand.

But working with a spreadsheet *is* algebra. The names of the variables are $A1, A2, A3, \dots, B1, B2, \dots$. Each time we ask the spreadsheet to calculate something and put it in another cell we are writing an algebraic formula. For example, if in cell C1 we type

$= A1 + B1$, then we are naming the variable C1. The spreadsheet does the calculation for us, of course. Each time that we copy a formula to other cells, we are creating a function. The function may be explicitly defined or it may be an iterative sequence, but it is a function either way. Most spreadsheet programs allow us to graph the explicitly defined functions. With either the graph or by successive approximation, we can solve many equations. Also, almost all spreadsheet programs have a form of summation notation that makes for a very easy transition to traditional Σ -notation. $\text{Sum}(A1:A5)$ is so similar to $\sum_{i=1}^5 A_i$. Thus algebra capability is in most every computer, on virtually every business desk. People who think they do not know algebra are using this capability.

Spreadsheets do not do all that we view as algebra. But most that is left can be done by computer algebra systems (CAS). Want to factor a trinomial? Then put the trinomial into a TI-92 or Casio-cfx 9700g and give the instruction to factor. Want to solve a cubic exactly? Put the cubic into the CAS system and give the instruction to solve. Want to differentiate a function? Want to find a definite or indefinite integral? Want to solve a differential equation? For more complex mathematics, you may need *Mathematica* or *Maple*, but if there is an algorithm for the process, then there is a CAS system that performs that algorithm.

Paper-and-pen and, more recently, paper-and-pencil has been the technology that we have used for the past 400 years to do arithmetic. Paper-and-pen became dominant not because people understood why the algorithms work. They still don't! Paper-and-pencil won because its algorithms were more widely applicable. I believe we are now in the

same situation with computers and algebra. In time, the computer algorithms embodied in spreadsheets and automatic graphers and CAS systems will become the algebra that everyone uses and recognizes. Spreadsheets will be employed to help introduce the language of algebra to students, and CAS systems will be used to perform the complex manipulations.

This does not mean that paper-and-pencil algebra will become obsolete. They will not become obsolete any more than mental arithmetic has become obsolete. People will still need to know how to solve simple equations and do simple manipulations by hand. And, perhaps more important, they will need to be able to translate from real and fanciful situations to mathematics and vice-versa. Algebra is more important than ever. School algebra is not obsolete, but it needs to change to touch the everyday lives of students and their families in order to be relevant to all students, and it needs to recognize its relationships with technology in order for the public to be comfortable with the notion of algebra for all.

Many if not most mathematics teachers in the world do not have much experience with this paradigm change in algebra. Even some talented mathematicians and many of the best mathematics teachers in the United States and those most involved with technology do not view algebra in this light. I know that many, most, and perhaps all of you are very much into the use of applications and technology in the teaching of mathematics, and I hope that my remarks will be of use to you in your teaching and in talking to others who may not be as knowledgeable or as fond of mathematics as we are. 

References

- 1 Claudia Goldin, *The Human Capital Century*, www.educationnext.org/20031/73.html.
- 2 National Center for Education Statistics. *The Condition of Education 2002*. U.S. Government Printing Office, pp. 157, 215–6.
- 3 Chapter titles for several textbook series can be found in John Dossey and Zalman Usiskin, *Mathematics Education in the United States – 2000, A Capsule Summary*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.
- 4 Rodney Driver. *Why Math?* Springer Verlag, 1986.
- 5 John Jackson, 'Bulls Bow in OT', *Chicago Sun-Times*, October 15, 1994.

Hugo Woerdeman

The College of William and Mary

Department of Mathematics

P.O. Box 8795

Williamsburg, VA 23187-8795

Verenigde Staten

hugo@math.wm.edu

Column Wiskundigen in den vreemde

From the old new world

Hugo Woerdeman is al vijftien jaar verbonden aan het College of William and Mary in Virginia, de op-één-na-oudste universiteit van de Verenigde Staten. Hij studeerde en promoveerde aan de Vrije Universiteit te Amsterdam op het gebied van de operatorentheorie en is sinds 2001 full professor aan het College. Zijn sollicitatie in het land van de onbegrensde mogelijkheden was een heel avontuur. Over de meest uiteenlopende zaken wordt onderhandeld: een heel verschil met de situatie in Nederland waar de meest uiteenlopende zaken juist vastliggen. Wat is de invloed van de vrijemarkteconomie op het leven aan de universiteit?

Mijn ervaringen met het buitenland zijn inmiddels talrijk aangezien ik al sinds 1989 weg ben uit Nederland. Mijn eerste ervaring was dat ik kon onderhandelen over mijn salaris. Toen ik in februari 1989 aan het *College of William and Mary* in Virginia voor een interview kwam, werd ik al gauw door een van mijn huidige collega's ingelicht dat ik over mijn salaris moest onderhandelen. Ik waardeerde deze informatie zeer, want geen haar op mijn hoofd zou daar aan gedacht hebben. "Om hoeveel zal ik dan vragen?", vroeg ik hem. Hij gaf mij een bedrag dat \$1000 hoger lag dan het salaris van iemand die ze net hadden aangenomen. "Then in the end you'll probably get the same amount as him", voegde hij er aan toe. En zo is het inderdaad gelopen. Het was allemaal zeer nieuw, en ook wel eng toen ik een eerder aanbod afsloeg. Uiteindelijk kwamen ze mij tegemoet. Inmiddels weet ik dat er over veel meer onderhandeld wordt: de grootte van een 'start-up package' (= geld voor congressen, computer en wat je verder allemaal nodig hebt om je onderzoek een goede start te geven), verhuiskosten, welke colleges je wil geven. Het hangt er natuurlijk allemaal van af hoe graag ze je willen hebben en wat je eigen alternatieven zijn, hoe het uiteindelijk uitpakt.

Er zijn talloze andere voorbeelden die aangeven dat het Amerikaanse universiteitssysteem veel meer een zaak is van vraag en aanbod dan de meeste, of zelfs alle, Europese systemen. Studenten hebben bijvoorbeeld een veel grotere keuze aan docenten die bepaalde vakken geven. In ons departement zijn er elk semester tenminste acht verschillende professoren die Calculus doceren en studenten maken de keuze bij wie ze de cursus willen volgen. De eerste registratiedag is voor de studenten dus zeer belangrijk aangezien bepaalde cursussen natuurlijk snel vollopen.

De professoren worden ook elk jaar beoordeeld op hun onderwijskwaliteiten. De studenten vullen na elke cursus een formulier in waarmee ze vragen beantwoorden zoals "Was the instructor receptive to questions and approachable for help?". De belangrijkste vraag is "Rate the overall effectiveness of the instructor", aangezien de antwoorden op deze vraag de beoordeling van de professor het meest beïnvloeden. Elke professor krijgt elk jaar een cijfer voor zijn onderwijs (0-6), zijn onderzoek (0-6) en zijn werk in commissies (0-3). Het hoogste totaal aantal punten is 15, en deze getallen gaan vervolgens naar de decaan die met deze informatie de salarisverhogingen bepaalt. Deze scores zijn ook belangrijk als je promotie wil maken, van *assistant professor* naar *associate*, of van *associate professor* naar *full professor*. Op zich is het goed dat professoren die harder werken en beter hun best doen daarvoor ook beloond worden, maar er zitten natuurlijk ook gevaren aan. Zo zijn professoren die hoge cijfers geven populairder, maar niet noodzakelijk beter en u kunt zeker ook andere ongewenste effecten bedenken. In ons departement wordt ook gekeken naar andere dingen dan de studentenevaluaties, zoals de examens die je afneemt en hoe je les geeft. Er blijven altijd discussiepunten bestaan, maar ik ben redelijk tevreden over hoe het in ons departement verloopt.



Gerard Stout

Noordelijke Hogeschool Leeuwarden

Afdeling Exacte Vakken

Tesselschadestraat 12

8913 HB Leeuwarden

stout@nhl.nl

Onderwijs Tweedegraads wiskunde in bovenbouw

Pedagogie of lineaire algebra?

Wiskundeleraren hebben een eigen visie óp en eigen ervaringen mét hun vak die zij vervolgens proberen uit te dragen in het onderwijs. Voor tweedegraads wiskundeleraren gaat deze visie op het beroep niet meer altijd op en toch hebben zij grote invloed op de beeldvorming van ons vak bij leerlingen. Wat heeft een leraar wiskunde in het vmbo bij de basisberoepsgerichte leerweg eigenlijk nodig om wiskundeles te geven? Wat heeft dezelfde leraar nodig in de onder- en bovenbouw van het vwo?

Met behulp van een interview met Douwe Bergsma, opleider van wiskundeleraren op de Noordelijke Hogeschool in Leeuwarden, schetst zijn collega scheikunde, Gerard Stout, de rol van het vak wiskunde en andere bezigheden in de opleiding van tweedegraads wiskundeleraren.

Leraren met een eerstegraads bevoegdheid mogen les geven in het gehele voortgezet onderwijs, tweedegraders zijn bevoegd om lessen te verzorgen in de onderbouw, tot en met de derde klas van het havo/vwo. Ook het mbo (veelal ondergebracht in Regionale Onderwijscentra (ROC)) hoort tot het werkgebied van de tweedegraders.

Door tekort aan leraren komen tweedegraders ook in de bovenbouw terecht, onbevoegd. Is het verantwoord om leerlingen uit de Tweede Fase aan tweedegraders toe te vertrouwen? Douwe Bergsma (43) werkt vanaf 1985 aan de tweedegraads lerarenopleiding van de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden. In de eerste acht jaren van zijn leraarsbaan, toen de opleiding nog *Ubbo Emmius* heette

en deels in Groningen was gevestigd, gaf hij ook les aan het Zernike College. Hij kent de onderwijspraktijk van vmbo (destijds mavo) tot en met vwo/gymnasium uit eigen ervaring. Ook de lerarenopleiding kent hij van het prille begin. Bergsma startte zijn opleiding als student bij de lerarenopleiding Ubbo Emmius dat destijds in bijna vijf jaar opleidde voor bevoegdheid in twee vakken. Na zijn tweedegraads haalde Bergsma zijn eerstegraads aan de Rijksuniversiteit Groningen. Momenteel is hij met collega's verantwoordelijk voor wiskunde, didactiek, stagebegeleiding, naast leerplaninhoudelijke onderdelen.

De verschillen tussen de prille lerarenopleiding en de huidige lerarenopleiding liggen voor Bergsma voor een belangrijk deel op het terrein van de stage. Meer dan destijds ligt voor hem het accent van de lerarenopleiding op de beroepsvoorbereiding; een term die vooral betrekking heeft op didactiek en pedagogiek, in samenhang met wiskundekennis. Beroepsvoorbereiding als de kern van de huidige opleiding. De positie van wiskundige vakkennis verschuift.

Veranderingen in de aanpak van wiskunde in het voortgezet onderwijs, en daarmee ook aan de lerarenopleiding zijn een natuurlijk en logisch gevolg van veranderingen in de lesaanpak en structuurwijzigingen als gevolg van Tweede Fase en invoering van het vmbo. De nadruk op stage is slechts een onderdeel van een ingrijpend veranderingsproces dat luistert naar de naam: competentieleren. De competentie geeft aan over welke kennis en vaardigheden een leraar geacht wordt te beschikken. Hoe en waar deze competenties

zijn verworven is voor afronden van de studie van minder belang. De student toont, via dossiers of assessment, aan dat hij/zij over deze competenties beschikt.

Een taak van de opleiding is de student te leren de juiste vragen te stellen om zo te ontdekken waar kennis en vaardigheden ontbreken. De ene leraar zal meer willen weten van computerpractica, de ander heeft behoefte aan verdieping van kennis met betrekking tot analyse. Leraren in opleiding (LIO) komen regelmatig met de vraag: 'Waarvoor is het nodig dat ik meer van wiskunde leer. Ik functioneer goed, iedereen is tevreden. Ik zie niet in waarvoor ik dat tentamen nog zou moeten doen.' Een antwoord: "Omdat wij dat willen." is niet meer afdoende.

De invloed van *competentieleren* heeft op termijn verstrekende gevolgen voor het wiskundeonderwijs. Ook de invloed van Europese regelgeving — invoering vierperiodensysteem, van bachelor en master, en van European Credits (studiepunten) — beïnvloedt het opleidingsprogramma.

Beroepsoriëntatie

De lerarenopleiding in Leeuwarden kent een stageopbouw over vier jaar. In het eerste jaar is er een oriënterende stage van tien dagen verdeeld over zes weken. Deze stage maakt onderdeel uit van de propedeuse. De student kan in het eerste jaar onderzoeken of onderwijs echt zijn of haar doel is. De tweedejaars stage telt twintig dagen over een periode van vijf weken. In deze periode verzorgen de studenten veelal een deel van de (stage)lessen. De derdejaarsstage telt tien weken, waarin de

Waar zou de wereld zijn zonder wiskunde?

Voor een wiskundige is de plaats van het vak op het lesrooster vanzelfsprekend. Voor leerlingen is de verplichting wiskunde te leren niet altijd helder. Hoe is dat onbegrip mogelijk? Immers, wiskunde is een prachtig instrument om de wereld te begrijpen en te leren bewonderen. Verwondering en verbazing te leren ontdekken, kan een taak van een tweedegrader zijn; en van een eerstegrader. Alledaagse verschijnselen in de natuur(wetenschappen), toeval, symmetrie, patronen, chaos, bouwkundige zaken, financiële aangelegenheden nodigen uit tot mathematische bespiegelingen, overwegingen die gemakkelijk aan te vullen zijn met algebraïsche structuren en diverse meetkundes. *De schoonheid en de troost* van complexe getallen, de classificatie van topologische oppervlakken, Cantors theorie van kardinaalgetallen, reeksen die tot ontroering aanleiding geven. Een wiskundige vervalt gemakkelijk in lyrische ontboezemingen.

Isaac Newton ontwikkelde differentiaalrekening, hij en veel anderen hielden zich bezig met integraalrekening en wierpen meer licht op de beweging van planeten in ons zonnestelsel. Ze maakten de natuur inzichtelijker en mooier. Ook kinderen kunnen met enige hulp leren daar van te genieten.

Toepassing van wiskunde is overal te vinden: modellen, toegepaste analyse, statistiek, discrete wiskunde, ICT. Wiskunde leert de mens ook beperkingen van modellen kennen. Helderheid van axioma's en

van definities. Strakheid van bewijzen, notaties, aannames; het zijn evenzovele redenen om de positie van wiskunde in het onderwijs mee te bepalen. De wetmatigheden zijn ingrediënten voor een wiskundige houding van leraren, studenten en lerarenopleiders. Ze zijn ingrediënten om een visie te formuleren over de wiskundige kennis in het tweedegraads gebied van het voortgezet onderwijs.

Is wiskunde voor leerlingen in de eerste plaats instrumenteel, om de prijs van vijf broodjes te berekenen als een belegd broodje €2,25 kost? Of is wiskunde vooral een gereedschap voor berekeningen in wetenschappen, of gaat het om kritische aspecten rond statistiek, economie en onderzoeksresultaten? Wellicht is wiskunde voor kinderen belangrijk om de wiskundige schoonheid zelf, zonder maatschappelijke of didactische contexten.

Afhankelijk van de uitkomsten van deze overwegingen, afhankelijk van de keuzen die voor de leerlingen gemaakt worden, ontstaat een curriculum voor tweedegraads leraren. Het curriculum omvat dan uitgangspunten op het terrein van wiskunde als wetenschap van structuren, wiskunde als denk- en handelingsmethode, wiskunde als het vermogen tot redeneren en de kunst om tot de kern door te dringen vanuit een zekere afstandelijkheid. Maar misschien is het vooral zaak de schoonheid en de kracht van de wiskunde te benadrukken om aanstaande leraren tot bevlogenheid en nieuwsgierigheid te inspireren.

aanstaande leraar totaal veertig dagen in het voortgezet onderwijs doorbrengt. Hij verzorgt zelfstandig lessen, vrijwel steeds in de onderbouw. Enkele studenten volgen stages in een ROC dat zich bezighoudt met middelbaar beroepsonderwijs. Overigens vindt er in de komende jaren een aanpassing plaats in omvang en roostering van stages door de invoering van de bachelorstructuur.

In het vierde jaar komt de aanstaande leraar gemiddeld niet meer dan anderhalve dag op de hogeschool. De LIO functioneert als een volwaardige leraar die gemiddeld acht uur wiskunde per week verzorgt. De LIO-stage is voor studenten aan de NHL een betaalde LIO-stage. Elke LIO tekent een arbeidscontract met de school. De begeleiding en coaching vindt voor een belangrijk deel, en in toenemende mate, plaats door leraren en school-

opleiders van de school voor voortgezet onderwijs.

De NHL biedt naast de lerarenopleiding ook een opleiding bedrijfswiskunde en informatica (bwi). De propedeuses van beide opleidingen vallen samen. Studenten maken op deze manier kennis met beide afstudeermogelijkheden. De te verwerven competenties zijn voor beide groepen deels gelijk. Basis-kennis wiskunde en elementaire communicatieve vaardigheden zijn van belang voor zowel de aanstaande leraren als voor de toekomstige bedrijfswiskundigen. Daarnaast is het in het kader van beroepenvoorlichting voor leraren wiskunde nuttig om kennis te nemen van het werkkterrein van een bedrijfswiskundige. Uiteraard is gezamenlijk opleiden ook efficiënt. Bergsma: 'We tellen dit jaar vijftwintig voltijdstudenten wiskunde. De helft

opteert voor leraar, de andere helft gaat voor bwi. Sommige studenten vinden dit gemeenschappelijke jaar prettig, ze kunnen hun definitieve keuze uitstellen.'

De wiskunde in het eerste jaar is terug te vinden in de, in 1998 door de commissie Procesmanagement Lerarenopleiding(PML) geformuleerde PML-eindtermen. In het eerste jaar gaat het niveau naar het vwo-wiskunde-B niveau wat betreft analyse. Daarnaast zijn er de modulen logica, beschrijvende statistiek, kansrekening en matrixrekening in het eerste jaar. Ook is er aandacht voor Informatie- en Communicatie Technologie(ICT) via de informatiekunde en het zogenaamde digitaal rijbewijs. In de latere jaren komen lineair programmeren, grafentheorie, meetkunde, getalsystemen, algebra, voortgezette analyse en voortgezette statistiek aan de orde. De wiskundige aanpak is minder formeel, minder deductief dan in het verleden gebruikelijk was.

Bij het onderdeel *case study* krijgen studenten contextrijke relevante wiskundige problemen voorgelegd. De problemen stimuleren studenten tot samenwerking en ze zijn gericht op toepassing van wiskunde in de dagelijkse praktijk. Bergsma: "We gebruiken onder meer opdrachten van de *wiskunde-A olympiade*. Hoeveel zendmasten zijn in Nederland nodig voor mobiele telefonie om het hele land te kunnen bedienen? Dat is een typerend voorbeeld van de aanpak." Bergsma verwijst ook naar Euclides en relevante websites. Bergsma: "De instroom is divers. We krijgen studenten vooral uit het havo, en uit het mbo. Iedere mbo'er met niveau 4 is toelaatbaar. Af en toe komt een vwo-leerling. Deze diverse instroom vraagt om een brede aanpak. De voorkennis van de eerstejaars verschilt nogal, we blijven zoeken naar een effectieve aanpak."

Kenmerkende situaties

Na het eerste jaar is het programma sterk toegesneden op de lerarentaak. De verdeling van de tijd, en de studiepunten, is globaal 25% stage, 25% beroepsvoorbereidende onderwijswiskunde, didactiek en pedagogiek, 35% wiskunde. Resterend 15% voor profilering naar keuze. De aanpak van de beroepsvoorbereiding gaat via thema's. Elke week is er een nieuw thema: adolescentiepsychologie; les voorbereiden; leerdoelen; de schoolmethode; wiskunde in het basisonderwijs; zelfstandig leren. Bergsma: "Telkens kiezen we voor een geïntegreerde aanpak. We behandelen het onderwerp in de breedte en spitsen het vervolgens toe op wiskunde. Wat is de leer-



foto: Flip Franssen/Hollandse Hoogte

Leerlingen elektrotechniek aan een school voor het vmbo in Gennep volgen uitleg op het bord.

psychologie van verwerven van wiskundige kennis; hoe leert een leerling getallen, hoe gaat een leerling om met ruimte?" Deze aanpak mondt uit in een beknopt didactisch onderzoek tijdens de vierdejaars lio-stage. Een andere invalshoek is gebruik van kenmerkende situaties. Dat is een directe koppeling tussen wiskundepraktijk in de onderbouw en het leraarsvak. "We ontlelen de kenmerkende situaties aan de lespraktijk van leraren uit het voortgezet onderwijs. Enkele leraren uit het voortgezet onderwijs hebben een (deeltijd) aanstelling bij de afdeling exacte vakken. Ze geven directe voeding uit hun praktijk."

Het accent van de opleiding ligt in toenemende mate op integratie van de diverse onderdelen. Vakdidactiek, pedagogie, wiskunde zijn op termijn nauwelijks als aparte onderdelen te onderscheiden. De aanpak van de lerarenopleiding verschuift sterk naar directe afstemming op het beroepsperspectief: leraar in het tweedegraads gebied. Welke kennis en vaardigheden heeft een tweedegraads leraar nodig in het vmbo? Bij de ene leraar zijn dat pedagogische en didactische vaardigheden, bij een andere leraar ligt het accent op wiskunde. Door van elke aanstaande leraar een

competentieprofiel op te stellen kan de opleiding maatwerk leveren. De aanpak van de opleiding is dan vraaggericht via een persoonlijk ontwikkelingsplan; meer dan aanbodgericht middels een strak lesprogramma.

Beroepsvaardigheden

Tijdens een wiskundeles in het vmbo luidt de vraag: Bereken het volume in liters van een zwembad. De afmetingen in meters zijn gegeven. De leerlingen worstelen ruim een half uur, maar vinden geen antwoord. De wiskundeleraar vraagt zich af waar de *bottle neck* zit en vraagt: "Hoeveel centimeters telt een meter?" Na enig aarzelen en onderling overleg komt een leerling met een antwoord. "zestig centimeter?"

Bergsma herkent deze kenmerkende situatie. "De NHL is afgelopen jaar gevisiteerd. De visitatiecommissie is over het algemeen tevreden over het niveau van onze opleiding. Kanttekeningen plaatst de commissie bij onze voorbereiding van aanstaande leraren voor aanpak van lessen op het vmbo. Lesgeven in het vmbo is niet gemakkelijk als het om overdracht van wiskundige kennis en vaardigheden gaat. Sinds het speciaal onderwijs

grotendeels is afgeschaft en leerlingen met leer- en gedragsmoeilijkheden weer samen naar school gaan met minder problematische leerlingen zijn de uitdagingen toegenomen. Hoe gaan we wiskunde geven aan leerlingen met beperkte capaciteiten? Hoe gaan we om met de schakeringen allochtoon/autochtoon, met zwak, sterk, met taalproblemen? Dat zijn vragen waar we niet eenvoudig antwoorden op kunnen formuleren." De integratie van wiskunde met de beroepspraktijk zorgt voor — soms ingrijpende — accentverschuivingen. Bergsma: "Wat wil je dat een leraar wiskunde van het vak weet om effectief les te kunnen geven in het vmbo?" Deze vraag raakt op de achtergrond op het moment dat de systemscheiding tussen vak en didactiek en pedagogie verdwijnt. De grotere nadruk op beroepsvaardigheden betekent echter niet dat tweedegraads leraren geen inzicht hebben in de lesstof van de bovenbouw. Bergsma: "Studenten gebruiken zelf methoden voor vwo. Ze kennen de inhoud en deels ook de aanpak in de Tweede Fase. Studenten zijn op de hoogte van definities die op een afwijkende — eenvoudiger — manier worden geformuleerd." Kan een tweedegrader met deze bagage een plek ver

Bedrijfswiskunde

In de jaren rond 1980 blijkt dat afgestudeerde leraren wiskunde ook gewild zijn in het bedrijfsleven. Dat is reden voor de start in 1985 van de algemene beroepsvariant (abv) van de lerarenopleiding wiskunde. Deze ABV is in 1994 overgegaan in de opleiding Bedrijfswiskunde. Er zijn in Nederland vijf opleidingen bedrijfswiskunde (Fontys, Hogeschool van Amsterdam, Hogeschool Inholland, Hogeschool Rijswijk (gestart in 2003), Noordelijke Hogeschool Leeuwarden).

De opleidingen bedrijfswiskunde hebben in 2000 een gemeenschappelijk beroepsprofiel 'Bedrijfswiskunde in perspectief' vastgesteld. Het leerplan is gericht op toepassingsgebieden zoals; logistiek en planning, statistiek, wiskundige softwareontwikkeling, verzekeringswiskunde. Het leerplan aan de NHL omvat 10% algemene vaardigheden (communicatie, organisatiekunde), 20% informatica, 45% wiskunde en 25% stage en afstudeerproject. De visitatiecommissie, die in 2003 vier opleidingen bedrijfswiskunde in het rapport *Analyse en inzicht* tegen het licht heeft gehouden, concludeert dat de opleidingen waardevolle krachten afleveren voor het bedrijfsleven en (semi-)overheidsinstellingen. Van de commissie mogen de opleidingen wel wat meer aan de weg timmeren. Op www.hbo-raad.nl staat het persbericht over de visitatie Bedrijfswiskunde van de HBO-raad. Daar staat ook het volledige rapport van de visitatie Bedrijfswiskunde (ga via *Pers of Hogescho-len* naar *Publicaties* en vervolgens naar subthema *Kwaliteitszorg*).

overen in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs? Bergsma: "Wiskunde A in de vierde klas van het havo, dat kan een tweedegraader wel. Examenniveau wiskunde B, daar heb ik liever een eerstegrader voor."

Basisschool

Tweedegraads leraren komen vooral in de onderbouw terecht. Ze krijgen te maken met een diverse instroom vanuit de basisschool. "De wiskunde in het eerste jaar in het voortgezet onderwijs en het laatste jaar van de basisschool vertoont veel overlap," zegt Bergsma. "Er zijn grote verschillen tussen leerlingen wat kennis aangaat. Als ik me voorzichtig uitdruk zou ik zeggen: niet alle leerlingen van alle basisscholen hebben alle kerndoelen gehaald

als ze de overstap maken naar het voortgezet onderwijs."

Het takenpakket van een leraar in het basisonderwijs verschilt aanzienlijk van een leraar wiskunde in het voortgezet onderwijs. De pabo-leraar heeft een heel breed takenpakket. De leraar wiskunde kan zich op een deel-terrein uitleven.

Bergsma: "Studenten wiskunde van exacte vakken geven ondersteuning aan aanstaande leraren basisonderwijs. We slaan twee vliegen in één klap. Onze studenten oefenen hun didactische lerarenvaardigheden en de leraren basisonderwijs verhogen hun rekenvaardigheden. Dat de aanstaande leraren wiskunde tijdens die bijlessen aan pabostudenten uitgebreid kennismaken met rekenen in contexten en vandaar de overstap kunnen maken naar modellen en het formele rekenen is pure winst."

Vakdidactiek

De programma's van de diverse tweedegraads lerarenopleidingen in het land zijn in het verleden deels op elkaar afgestemd. Didactici hebben in onderling overleg materiaal ontwikkeld voor aanstaande leraren. Zo zijn er modulewijzers voor algebra, meetkunde, informatieverwerking en statistiek, rekenen. De boeken bevatten didactische achtergronden en voorbeelden uit schoolmethoden. Bergsma: "Deze boeken zijn al enkele jaren oud, en wellicht toe aan enige bijstelling, maar ze zijn nog goed bruikbaar." Deze boeken zijn niet het enige 'landelijke' materiaal. "Er is ook een serie *Effectief lesgeven* met boekjes over onderwerpen als: Probleem oplossen, Voorbereiden van een lessenserie."

Gebruik van blackboard en van internet maakt gebruik van elkaars materiaal op ruimere schaal mogelijk, ook zonder afspraken over *copyrights* en regelmatige overleg. Het competentiedenken beïnvloedt ook de keuze van lesmateriaal. Wie leemtes signaleert kan op zoek naar materiaal om de hiaten te vullen; materiaal dat wereldwijd beschikbaar is.

Educatieve master

Tweedegraads afgestudeerden van de NHL kunnen op een soepele manier doorstromen naar de eerstegraads opleiding van de Rijksuniversiteit, of kiezen voor een deeltijdopleiding van de NHL. Voltooiing van de opleiding levert de titel: Educatieve Master. Docent wiskunde Herman Bloem werkt zowel bij de opleiding van tweedegraads als van eerstegraads. "De directe doorstroom van tweedegraders naar de eerstegraads opleiding is niet zo groot. Tweedegraders die binnenstromen

Van middelbaar onderwijs naar bachelor

In Noord-Nederland verzorgden de Noordelijke Leergangen in de jaren '60 van de vorige eeuw in deeltijd opleidingen *M.O.-A* en *M.O.-B*. Deze vakopleidingen waren niet als lerarenopleiding opgezet, maar ze resulteerden wel in een bevoegdheid. De nadruk lag op vakkennis en niet op didactiek en pedagogiek.

In 1971 werden de Nieuwe Lerarenopleidingen (NLO's) opgericht. Deze experimentele lerarenopleidingen gingen van start met een geïntegreerd aanbodgestuurd model waarin vak, vakdidactiek, onderwijskunde en stage een gelijkwaardige positie innamen. In Groningen en Leeuwarden werd dat de lerarenopleiding Ubbo Emmius. De opleiding was tweevakig, en in vierenhalf jaar konden studenten een tweedegraads en een derdegraads bevoegdheid halen. In 1986 fuseerden de (deeltijdse opleiding) Noordelijke Leergangen en (de voltijdse opleiding) Ubbo Emmius en gingen in 1990 verder als Noordelijke Hogeschool Leeuwarden. De studiebelasting voor deeltijdstudenten was 84 studiepunten, de helft van het aantal dat een voltijdstudent nodig had om eenzelfde diploma in ontvangst te mogen nemen. Ook in 1986 werd de derdegraads diplomering afgeschaft. De cursusduur ging terug naar vier jaar en de opleiding werd in 1990 eenvakig. Vier jaar was te weinig om in twee vakken bekwaam te worden.

In 1998 formuleert de commissie Procesmanagement Lerarenopleiding eindtermen voor de tweedegraadsopleidingen. Deze eindtermen verliezen geleidelijk hun betekenis met de overstap naar de competentiegerichte benadering. De tweedegraads opleiding verschuift van aanbodgestuurd onderwijs (= dit moet je doen) naar vraaggestuurd en competentiegericht onderwijs.

In 2003 worden aan de NHL de eerste getuigschriften Bachelor of Education uitgereikt.

hebben veelal enkele jaren lesgegeven in het voortgezet onderwijs. Het duurt een paar jaren voor ze de startersproblemen achter de rug hebben en tijd en energie vinden voor de eerstegraads opleiding."

Een aantal van de tweedegraders geeft onbevoegd les in de bovenbouw. De schoolleiding stimuleert doorstroming van tweedegra-

ders naar de eerstegraads om in de toekomst over bevoegde en vakbekwame docenten te kunnen beschikken. De studenten volgen een inservicestage op de eigen school. In Groningen duurt de opleiding drie jaar. Er is één avond in de week les. Er zijn circa 30 studenten voor de eerstegraads opleiding. De leeftijd van de studenten varieert van 23 tot 58 jaar. Eenderde is vrouw, tweederde man.

Globaal eenderde van de tijd wordt besteed aan didactiek van de Tweede Fase en tweederde van de tijd is er aandacht voor wiskundige vakverdieping. Centraal staat het concept van onderzoekend wiskunde leren, ook wordt er veel samengewerkt en een aantal keren gepresenteerd. Aandacht voor algemene onderwijswiskunde is er nauwelijks, leerlingen in de bovenbouw verschillen weliswaar van leerlingen in het tweedegraads gebied, maar de verschillen zijn niet zo heel groot. Het leeuwendeel van de tijd gaat zitten in de wiskundige vakinhoud. “Abstract redeneren in de getaltheorie, meetkundig onderzoeken met Cabri, de leerstoflijn analyse met veel aandacht voor ondersteunende computerprogramma’s, dat zijn enkele *high lights*,” zegt Bloem. Ook maakt een wiskundig getint didactisch onderzoek deel uit van de opleiding.

Trends

In 1993 is tegelijk met de invoering van de basisvorming het wiskundeonderwijs grondig herzien. Dat heeft geresulteerd in een frisse aanpak van de wiskunde in het voortgezet onderwijs.

De grafische rekenmachine is gemeengoed in de Tweede Fase. In de onderbouw komen deze rekenmachines in de les niet voor.

“Elke schoolmethode heeft wel enige software te bieden; *VU-grafiek*, *VU-statistiek* en *Doorzien* zijn de bekendste. Ze zijn zowel in de onderbouw als in de bovenbouw te gebruiken. Ze verlichten de taak van de leraar nauwelijks, al zijn ze wel nuttig voor het aanbrennen van begrip,” zegt Bergsma. Het is een illusie te denken dat wiskunde in rustigervaarwater komt te verkeren. De veranderingen komen niet enkel door mogelijke maatregelen van de minister van onderwijs met betrekking tot de studiebelastingen, ook onvoldoende aansluiting van de wiskunde uit het voortgezet onderwijs op vervolgoopleidingen speelt een rol bij aanpassingen van het programma.

Bij de lerarenopleiding is er aan het front van *competenties* en *assessment* volop beweging. Competenties beschrijven kennis en vaardigheden die een kandidaat bezit om als bevoegd en bekwaam leraar te kunnen functioneren. De manier waarop de student zich deze kennis en vaardigheden eigen heeft gemaakt is in mindere mate een zaak van de opleiding; er zijn diverse leerwegen. Elders verworven competenties kunnen bij het behalen van het Bachelordiploma een rol spelen. In hoeverre een kandidaat voldoet aan de eisen kan onderwerp zijn van een assessment, een uitgebreide praktijktoets. De verantwoordelijkheid voor verwerving van kennis en vaardigheden verschuift van de lerarenopleider naar de student. Deze werkwijze is een parallel met de trend — vooral in de bovenbouw — in het voortgezet onderwijs naar zelfstandig en zelfverantwoordelijk leren. De rolveranderingen van student, van leraar in het voortgezet onderwijs, van lerarenopleider en schoolopleiders vragen in de komende ja-

Wiskunde NHL

De opleiding tot leraar wiskunde van de NHL telt circa honderd studenten. De jaarlijkse instroom is gemiddeld vijftientig voltijdstudenten en twintig zij-instromers (studenten met een voltooide universitaire of hbo-opleiding). Ongeveer de helft van de voltijdstudenten kiest voor de opleiding Bedrijfswiskunde en informatica (bwi). Circa 15% van de eerstejaars stopt in het eerste jaar met de studie.

ren veel aandacht. De aanbodgerichte benadering; *dit moet een leraar wiskunde in elk geval van de wiskunde weten*, verandert in een vraaggestuurde aanpak; *wat heeft een leraar in het vmbo en in het bve-veld nodig om effectief les te geven, nu en in de toekomst*. De — veranderende — examenprogramma’s zijn daarbij deels richtlijn. Een vastomlijnde aanpak — in elk geval die en die onderdelen van analyse of van algebra — verdwijnt. De leraar in de klas geeft aan wat hij of zij nodig heeft. Differentiatie naar beroepenveld hoort zeker tot de mogelijkheden. Een leraar wiskunde in het vmbo bij de basisberoepsgerichte leerweg heeft meer behoefte aan extra scholing in pedagogie dan in lineaire algebra. Een leraar in het beroepsveld volwasseneneducatie (bve) wil wellicht meer weten van integreren en grafentheorie. Differentiatie naar toepassingsgebied ligt in de lijn der verwachtingen. Deze cultuurslag gaat in de komende jaren gestalte krijgen. 

Websites

- 1 www.iec.nhl.nl/exact
- 2 www.nhl.nl/bwi

- 3 www.nhl.nl/lerarenopleiding
- 4 <http://webserv.nhl.nl/bloemh/studiegrad1/grad1/index.htm>

Peter Kop

Goudse Scholengemeenschap

Burg. Martenssingel 15,

2806 CL Gouda

peterkop@worldonline.nl

Onderwijs

Een wiskunde-B examenjaar

Sinds de invoering van de nieuwe Tweede Fase in het middelbare onderwijs volgen alle leerlingen van het vwo één of meer wiskunde-vakken. Er zijn vier profielen waar de leerlingen uit kunnen kiezen: cultuur en maatschappij, economie en maatschappij, natuur en gezondheid en natuur en techniek. Voor het profiel natuur en gezondheid is het vak wiskunde B1 bedoeld en voor het profiel natuur en techniek wordt het vak wiskunde B1,2 gegeven. Op dinsdag 25 mei werden voor het vwo de examens wiskunde-B afgenomen.

Dit schooljaar had ik, als docent wiskunde op het vwo, enkele groepen waarvan wij zeggen "zo word je oud in het onderwijs"; leerlingen die wat willen en wat kunnen. Wat hebben wij, docent en leerlingen, de afgelopen twee jaar bij wiskunde B1 en B1,2 (een combinatieklas) gedaan als voorbereiding op het komende eindexamen?

Wat vind ik belangrijk dat leerlingen in mijn lessen leren? Zonder compleet te zijn: enthousiasme en waardering voor wiskunde op kunnen brengen, problemen oplossen en daarbij strategieën ontwikkelen en zelfvertrouwen opbouwen, redeneren en bewijzen en de diversiteit van wiskunde laten zien en wat je er mee kan. Hieronder zal ik trachten te schetsen hoe ik daar bij de wiskundelessen aan werk.

In de lessen en proefwerken komt regel-

matig de opdracht 'formuleer een vermoeden' voor. Mijns inziens een onmisbare schakel om wiskundige problemen op te lossen. Een voorbeeld: Gegeven de functie $f(x) = x^2$. Kies een punt A , met x -coördinaat a op de grafiek van f en teken de raaklijn in dat punt. Deze raaklijn snijdt de x -as in punt B met coördinaten $(b, 0)$. Formuleer een vermoeden voor de ligging van punt B en bewijs dit ook. Als $f(x) = x^n$ kun je iets dergelijks doen. Formuleer weer een vermoeden voor de ligging van punt B en geef een bewijs. Dit zijn pogingen om met behulp van algebra generalisaties te maken en onderscheid te maken tussen vermoedens en bewijzen. Leerlingen vinden dit niet simpel, maar, als er tenminste regelmatig een succes te boeken valt, wel leuk en spannend.

Een ander voorbeeld is de opdracht 'het gewichtig probleem' dat destijds in het Promateriaal verscheen. Een historische context waarbij de noodzaak om zonder grafische rekenmachine (GR) een maximum te vinden zichtbaar wordt. Daarna wordt ook zichtbaar wat de rol van de GR kan zijn. Bij dit probleem is tegenwoordig mijn laatste vraag om dit ook met behulp van computeralgebra (TIinteractieve) op te lossen. Zo ontwikkelen leerlingen een gevoel voor welke problemen blijven en welke problemen verminderd kunnen worden met ICT. Ieder jaar doet de hele bovenbouw

mee aan de wiskunde A-lympiade of wiskunde B-dag. In vwo 5 en 6 telt dit mee als praktische opdracht in het kader van het school-examen. Samenwerken en communicatie zijn noodzakelijk om deze grotere en moeilijkere problemen op te lossen. Voor de *Zebrablokken* (een keuze-onderdeel in het examenprogramma) wordt gewerkt uit boekjes uit de Zebrareeks. Deze boekjes met verschillende onderwerpen worden door leerlingen zelfstandig doorgewerkt waarna een afsluitende opdracht gemaakt moet worden. Ook dit telt als praktische opdracht. Het afgelopen jaar hebben de B1,2-leerlingen gekozen om in het kader van de Zebrablokken mee te doen aan de Wiskunde Olympiade. In een zestal bijeenkomsten buiten de lessen om werden oude Olympiades besproken door leerlingen onderling (onder leiding van de docent). Leerlingen waren erg enthousiast en besteedden veel tijd om zelf de oplossingen en strategieën te verzinnen. Bij de beoordeling speelde de strategie en hoe je deze kon uitleggen ook een rol. De spelregel dat alles zonder GR gedaan moest worden is soms onhandig, maar iedereen gaf na afloop aan dat dit geen onoverkomelijk probleem was. Bijna iedereen vond deze wijze van wiskunde doen leuker en uitdagender dan de wiskunde in de reguliere lessen. Opmerkelijk was dat leerlingen vooral problemen hadden met elementaire drie-

hoeksrekening zoals de zogenaamde 30-60-90-driehoek. Omdat communicatie, redeneren en bewijzen een belangrijke rol spelen, krijgen leerlingen in vwo 5 de opdracht om een aantal bewijzen binnen de vlakke meetkunde voor te bereiden en deze ook aan de anderen te presenteren. De B1-leerlingen presenteren een hoofdstuk statistiek en nemen een eigen gemaakte toets over dit hoofdstuk af.

We hebben veel gedaan de afgelopen twee jaar en deze leerlingen willen veel, doen veel en kunnen veel. Nu zal het komende eindexamen wel weer vooral vanuit het algebraïsch perspectief bekeken worden: welke algebra wordt ook al weer gevraagd en wat kunnen ze allemaal niet? Vooraf kan ik al voorspellen dat ze gekke fouten zullen maken. Ik heb een entreetoets van een van de WO-opleidingen laten maken en was toch weer verbaasd over wat ze niet konden. Daarnaast heb ik ook gezien wat ze wel kunnen. Het lijkt bijna niet te rijmen met elkaar. Bij de eerste experimenten met dit nieuwe wiskunde B1,2-programma verzuchtte iemand al eens "we weten niet meer wat moeilijk is". Na vier jaar Tweede Fase snap ik dit nog steeds niet. Maar wel weet ik dat de veiligheid van vaste algoritmen oefenen in een beperkt aantal standaardsituaties, zoals vroeger gebeurde en nu weer hier en daar bepleit wordt, ons niet verder brengt. We willen immers ook dat leerlingen flexibel met hun algebra-kennis omgaan. En dat konden ze vroeger toch ook niet. Het leren van al-

gebra verdient misschien iets meer aandacht, maar het verloopt anders dan vroeger. Mijn zoektocht naar hoe het beter kan gaat verder maar mijn weg gaat via AF.

Leerlingen blikken terug

Ze vinden het zebraboekjes-perspectief en de wiskunde B-dag wel leuk en zeker nuttig. Als reden wordt gegeven: samenwerken en creatief denken worden ontwikkeld. Velen gebruiken de grafische rekenmachine als controle-middel; ook in het geval dat er exact gerekend moet worden. Sommigen vragen zich echter af 'of de grafische rekenmachine wel te vertrouwen is'. Over meetkunde in het platte vlak, *Cabri* en vooral de Wiskunde Olympiade zijn de B12-leerlingen enthousiast: "Het is sowieso leuk om samen hardop te denken over een bewijssom." De stelling "De wiskunde op het VWO is simpel en weinig uitdagend" wordt niet onderschreven. Degenen die meer moeite hebben met de wiskunde noemen zelfs expliciet dat "wiskunde alleen leuk is als je er uit komt". Men vindt wiskunde een nuttig en leuk vak, waarin de afwisseling tussen projectjes en onderzoekjes, het gebruik van de computer en andere dingen zoals de wiskunde B-dag en de Wiskunde Olympiade het vak leuker maken. "Vooral ook veel dingen naast het boek doen" is het advies dat ik krijg.

Direct na het eindexamen besprak ik met de leerlingen het werk. Zowel bij de B1- als bij de B1,2-leerlingen waren er enkelen die klaagden over de hoeveelheid. Slechts twee

waren eerder dan 16.00 uur klaar. Opmerkelijk vond ik dat voornamelijk de opgave over de vlakke meetkunde (opgave *Cirkel met lijnen*) als een schaakpartij geanalyseerd werd. Blijkbaar spreekt dit soort wiskunde leerlingen erg aan. Ook aan de opgave over goniometrie (een verzameling functies) werd op deze wijze aandacht besteed. Een bewijs rondkrijgen was in onze nabespreking belangrijker dan de uitkomsten van de diverse opgaven. Volgens de leerlingen zat er redelijk wat algebra in dit examen ("je moest best vaak iets exact berekenen"). Verschillende leerlingen hebben daarbij zo hun eigen strategie ontwikkeld: sommigen doen een beroep op de grafische rekenmachine en bluffen bij 9,42 gewoon 3π , anderen voelen zich zonder een formulekaart kansloos. Op mijn vraag of zo'n hiervoor genoemde entreetoets voor het WO, die geoefend was in de voorbereiding, nu een simpeler examen op zou leveren, werd hier voorzichtig bevestigend geknikt: het is een kwestie van oefenen, vond men. Misschien is dat wel het geval en blijft de vraag: wat willen we dat de leerlingen weten en kunnen, met de wiskunde die ze krijgen. We kunnen echter niet van alle leerlingen alles willen, dus we moeten kiezen. We moeten met z'n allen maar eens nadenken over wat te kiezen bij de aanpassing van de Tweede Fase per 2007. $\triangleleft$

De vwo-examens van dit jaar zijn te vinden op de internetpagina <http://www2.citogroep.nl/v0>



Het wiskunde B1,2-examen op het Canisius college te Nijmegen

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Alle in de vijfde serie van het NAW verschenen boekbesprekingen zijn te vinden op onze webpagina.

Tevens staat daar een lijst met ter recensie aangeboden congresverslagen en eventueel andere boeken.

Indien u er prijs op stelt een van deze verslagen te bespreken, meld dit dan binnen een maand na verschijnen van dit nummer (bij voorkeur per e-mail) op onderstaand adres.

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.10
Dept. of Math. and Computer Science
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
Webpagina: www.math.rug.nl/revwg/
e-mail: wgreview.win@tue.nl



M. Molloy, B. Reed
Graph Colouring and the Probabilistic Method

(Algorithms and Combinatorics 23)

New York: Springer-Verlag, 2001,

326 p., prijs €80,-

ISBN 3-540-42139-4

The probabilistic method has been introduced and advocated by Paul Erdős since 1947. It proved to be a powerful and successful tool in obtaining many deep theorems in combinatorics and number theory. Moreover, the method is easy to use.

The authors of the book under review have aimed to write a gentle introduction to the probabilistic method for readers with little or no background in probability theory. One of the fundamental tools is the Lovász Local Lemma. It can be used to prove that a random object has certain desirable properties with probability near one.

In an introductory chapter several conjectures are formulated concerning the (vertex) chromatic number, the total chromatic number and the list chromatic number. Among other things a strengthening of Brooks' theorem is proved: there exists some $\epsilon > 0$ such that for every graph G we have $\chi(G) \leq \epsilon \cdot \omega(G) + (1 - \epsilon)(\Delta(G) + 1)$; here χ is the chromatic number, ω is the clique number and Δ is the maximum degree of G . Furthermore, interesting results on triangle-free graphs and graphs with girth at least 5 are presented.

The proofs of these results require only simple probabilistic tools, and in most cases a very simple colouring procedure is used.

C. de Vreugd

H.J.M. Bos

**Redefining Geometrical Exactness:
Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction**

(Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences)

New York: Springer-Verlag, 2001

470 p., prijs €129,00

ISBN 0-387-95090-7

Zonder twijfel is Henk Bos één van de meest vooraanstaande autoriteiten op het gebied van het wiskundige werk van René Descartes (1596–1650), gemeenlijk bekend als de 'ontdekker van de analytische meetkunde'. Te beginnen met een baanbrekend artikel dat verscheen in 1981, heeft Bos in vele zeer genuanceerde (en vaak behoorlijk technische) artikelen laten zien hoe veel meer de *Géométrie* uit 1637, Descartes' enige tijdens zijn leven in druk verschenen wiskundige werk, wel niet is dan het begin van de analytische meetkunde. Het hier te recenseren boek is de neerslag van meer dan twintig jaar intieme omgang met het wiskundig oeuvre van de Franse filosoof.

Zoals de titel van Bos' boek aangeeft, is het belangrijkste thema de status van de meetkundige constructie in de wiskunde en de hiërarchische verhouding tussen algebra en meetkunde. Voor de meerderheid van Descartes' tijdgenoten en ten dele ook voor Des-

cartes zelf was het vanzelfsprekend dat alleen die algebraïsche resultaten 'legitiem' waren die in tastbare meetkunde constructies vertaald konden worden. Welke meetkundige constructies nu precies voor dit doel aanvaardbaar waren voor Descartes en diens tijdgenoten is de vraag die in dit boek centraal staat.

Het boek bestaat uit twee delen. In het eerste deel behandelt Bos het idee van constructie en exactheid vanaf de klassieke oudheid tot en met de directe voorgangers van Descartes. In het tweede deel komt het werk van Descartes zelf aan bod en de wijze waarop Descartes' werk de relatie tussen de algebra en de meetkunde voorgoed zou veranderen, zij het naar Bos laat zien nu niet bepaald op een manier die Descartes zelf in gedachten had.

In het bestek van deze recensie is het nauwelijks mogelijk een compleet beeld te schetsen van de vele perspectieven die het boek biedt en Bos' jaren van onderzoek volledig recht te doen. De geïnteresseerde lezer wordt van harte aanbevolen het boek zelf ter hand te nemen. Bos' lijvig werk is niet voor een breed publiek geschreven, maar met enige volharding (en wiskundige achtergrond) valt er veel uit dit boek te leren. En, ja, en passant komt ook het voor historici heikle onderwerp van Descartes als ontdekker van de analytische meetkunde aan bod. Laat ik hier volstaan met te zeggen dat Bos' werk eens te meer aantoont dat Descartes deze eer in het geheel niet nodig heeft om zijn plaats in de annalen van de geschiedenis van de wiskunde te behouden.

E. Atzema

A. Stubhaug

Ein aufleuchtender Blitz: Niels Henrik Abel und seine Zeit

Berlin: Springer-Verlag, 2003

584 p., prijs €40,-

ISBN 3-540-41879-2

Het lezen van deze dikste Abel-biografie ooit veroorzaakte bij mij als lezer een heleboel wrevet. Wat te denken van volgend veelvuldig toegepast principe: op een bepaalde dag was Abel in een bepaalde stad, in het desbetreffende stadsblad was rond die datum te lezen dat een theaterstuk werd vertoond. Omdat Abel van theater hield, ging hij vermoedelijk naar het stuk kijken. Vervolgens vertellen we de inhoud van het stuk, de namen en korte biografieën van acteurs en actrices (vooral of ze een alcoholprobleem hadden) en gaan in op de inhoud van het stuk en de vraag of die Abel depressief maakte.

Abel wordt in dit boek pas na 70 pagina's geboren. Daarvoor hebben we al gelezen wat zijn grootvader vermoedelijk op 23 december 1795 deed. Nog eerder hebben we een met een Noors-nationalistisch sausjes overgoten vooruitblik door het boek gekregen (en niet gespeend van overdrijvingen: "die [...] in der mathematischen Literatur als die bedeutendste Abhandlung gilt, die jemals verfasst wurde"; uiteraard door Abel).

Het boek doet een verwoede, bijzonder uitvoerige poging Abels tijd tot leven te wekken, maar vaak ontbreekt (voor de buitenlandse lezer) cruciale informatie. Als we bijvoorbeeld te horen krijgen dat Abel 200 'Speziestaler' krijgt, is dat dan veel of weinig geld?

Na verdere 250 pagina's komt er schot in de zaak en wordt Abels buitenlandse reis beschreven aan de hand van Abels eigen brieven: objectiviteitsgehalte en dito leesplezier nemen erg toe.

Rond pagina 210 staan voor het eerst wiskundige beweringen,

die dan ook prompt verkeerd zijn (bijvoorbeeld dat de discriminant van een polynoom een *lineaire* combinatie is van de wortels...).

Springer heeft van dit boek een prachtige uitgave gemaakt, maar toch weer met bijvoorbeeld een drukfout op pagina (i), met veel plaatjes een paar bladzijden later afgedrukt dan ze in de tekst voorkomen, en met de bibliografie van Abel niet chronologisch. Waarom komt er een appendix van meer dan 40 bladzijden aan te pas waar elk hoofdstuk nog eens wordt aangevuld met informatie die net zo goed in het feitelijke boek had kunnen staan?

Abel groeide op en stierf jong in een tijd die voor Noorwegen als beginnende natie buitengewoon spannend was, en het is zeker boeiend zijn verhaal te zien tegen deze achtergrond: de ondergang van zijn vader die zo actief was in de politiek, maar ook in allerlei religieuze haarkloverij verwickeld was; de wens naar een sterke nationale wetenschap, de gebruikelijke (onze minister neme de spiegel ter hand) onwil wiskunde-onderzoek als een onderdeel hiervan te zien, met ontbering en Abels dood aan armenmensen-ziekte tbc als direct gevolg. Helaas is het boek gewoon niet *sec* genoeg — daarvoor komt het woord 'vermutlich' veel te vaak voor.

G.L.M. Cornelissen



H.P.F. Swinnerton-Dyer

A Brief Guide to Algebraic Number Theory

(London Mathematical Society Student Texts 50)

Cambridge: Cambridge University Press, 2001

156 p., prijs £45,-

ISBN 0-521-80292-X

Written by one of the leading number theorists of our time, the book *A Brief Guide to Algebraic Number Theory* provides an account of the basics of the subject. The author aims at a rather large audience assuming only some basic knowledge in field and Galois theory. More advanced topics such as infinite Galois theory, Haar measure and Fourier transformations in locally compact groups are discussed in the two appendices of the book.

A number field is a finite extension of $\mathbb{Q}$ and initially algebraic number theory was devoted to the study of the arithmetic properties of such fields. The first chapter of the book covers the basic theory of norms, ideals, Dedekind domains and factorizations of ideals in those domains. The two basic finiteness theorems of algebraic number theory, namely the finiteness of the class number of a number field and the Dirichlet unit theorem are proved. In the following chapter an approach to the theory, by means of valuations, is taken up. Using this language, H.P.F. Swinnerton-Dyer introduces the notions of ramification and different of a local field and a number field. Adèles and idèles, the natural objects to work with when considering local-to-global problems, are defined in the end of the chapter. Their real importance is shown later in the book.

Chapter 3 is meant to illustrate how the abstract theory works in some concrete cases. Our attention is drawn to explicit computations in quadratic, cubic and biquadratic fields. Special emphasis is put on cyclotomic fields, class number formulas and the classical approach to Fermat's Last Theorem.

Most books on basic algebraic number theory stop at this point but H.P.F. Swinnerton-Dyer takes us further to the world of zeta and L -functions of number fields. In Chapter 4, the reader will find a comprehensive account on Hecke Grössenkaracters, L -series, functional equations of zeta functions and the Čebotarev density theorem.

Chapter 5, which is technically more advanced, is devoted to global class field theory. Though it contains almost no proofs, it gives a very good idea of what this theory is about. The author explains the ideal and the idèlic formulations of the main theorems and draws our attention to the various reciprocity laws coming from class field theory. The discussion ends with an elementary, but rather convoluted proof of the Kronecker-Weber Theorem, that every abelian extension of $\mathbf{Q}$ is cyclotomic. It is a result, as Swinnerton-Dyer says, 'which made the general structure of the classical class field theory plausible long before it was proved'.

The carefully chosen material is further accompanied by a large number of illustrative examples and exercises. Those features make the book an excellent guide for the reader who wants to find out what algebraic number theory is all about. *J. Rizov*

G. Scheja, U. Storch

Regular Sequences and Resultants

(*Research Notes in Mathematics*)

Natick, MA: A.K. Peters, 2001

150 p., prijs \$ 39,-

ISBN 1-56881-151-9

De klassieke stelling van de eliminatietheorie zegt het volgende: "is X een variëteit over een algebraïsch afgesloten lichaam k , Y een Zariski gesloten deelverzameling van $X \times \mathbf{P}^n$, dan is het beeld van $\pi(Y)$ onder de projectie van $\pi : X \times \mathbf{P}^n \rightarrow X$ ook Zariski gesloten." Natuurlijk wil men graag het beeld van π met behulp van vergelijkingen beschrijven. Klassieke hulpmiddelen zijn het eliminatie-ideaal en resultanten.

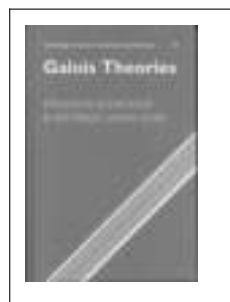
In dit boek wordt de eliminatietheorie algemeen, in een algebraïsche context, besproken. In plaats van het lichaam k wordt een algemene Noetherse grondring A genomen, en X wordt vervangen door een algemene anisotrope projectieve ruimte $\text{Proj}(C)$, waarbij C een eindig voortgebrachte gegradeerde algebra $\bigoplus_{m \geq 0} C_m$ over de Noetherse ring $A = C_0$ is. Er is een natuurlijke projectie $\pi : \text{Proj}(C) \rightarrow \text{Spec}(A)$. Er wordt een ideaal $I_0 \subset A$, het eliminatie-ideaal, gedefinieerd zodat $\text{Im}(\pi) = V(I_0)$. Als belangrijk geval wordt het eliminatieideaal van een willekeurige reguliere rij van homogene polynomen $F_0, \dots, F_n \in A[T_0, \dots, T_n]$ bepaald. Hierbij kunnen de gewichten van de T_i willekeurige natuurlijke getallen zijn: het klassieke geval is dat de gewichten alle 1 zijn. Als techniek wordt hier een uitgebreide versie van dualiteit voor gegradeerde volledige doorsnijdingen gebruikt. Aangetoond wordt, dat het eliminatieideaal een doorsnijding van hoofdidealen is.

In het geval van factoriële ringen A is het resultaat dus dat het eliminatie-ideaal een hoofdideaal is. Het laatste deel van het boek gaat over resultanten en resultantenidealen. Voor het geval dat de grondring *normaal* is wordt het resultantenideaal voor een reguliere rij van homogene polynomen, zoals boven, gedefinieerd. Dit resultantenideaal heeft dezelfde nulpuntsverzameling als het eliminatie-ideaal, maar heeft betere eigenschappen. Later wordt

de resultante voor een willekeurige rij $F_0, \dots, F_n \in A[T_0, \dots, T_n]$ van homogene polynome gedefinieerd, die de klassieke resultante (gewichten allemaal 1) generaliseert. Eigenschappen en verschillende formules betreffende deze resultantes worden bewezen.

De eerste twee hoofdstukken bestaan uit voorbereidend werk: de echte resultaten komen in de laatste twee hoofdstukken. Het is dus verstandig meteen met het lezen van het derde hoofdstuk te beginnen, en terug te bladeren naar de eerste twee zodra dat nodig is.

Het feit dat dit boek verschenen is in de serie *Research Notes in Mathematics* geeft al aan dat dit boek de eigenschappen heeft van een, wat aantal pagina's betreft, uit de hand gelopen onderzoeks-artikel. Het is echter prettig geschreven, en is zeer nuttig voor wiskundigen, die eliminatietheorie nodig hebben die verder gaat dan wat in standaard leerboeken wordt aangeboden. *T. de Jong*



F. Borceux, G. Janelidze

Galois Theories

(*Cambridge Studies in Advanced Mathematics* 72)

Cambridge: Cambridge University Press,

2001,

355 p., prijs £55,-

ISBN 0-521-80309-8

Het eerste dat opvalt aan het boek *Galois Theories* is het meervoud. Ik ken geen boeken met de naam 'Algebraic number theories' of 'Algebraic geometries'. De titel suggereert terecht dat dit boek een enigszins meta-wiskundig karakter heeft: het is een verhandeling over diverse soorten Galoistheorie vanuit categorieën-theoretisch perspectief. Er komen in dit boek geen voorbeelden of opgaven voor, maar wel in abstractie en algemeenheid toenemende formuleringen van de hoofdstelling.

Als eerste wordt de gewone Galoistheorie van eindige lichaamsuitbreidingen behandeld: voor een eindige normale separabele lichaamsuitbreiding $K \subset L$ is er een inclusie-omkerende bijjectie tussen de verzameling tussenlichamen en de verzameling ondergroepen van de Galois groep G , die bestaat uit de lichaamsautomorfismen van L die de elementen van K op hun plek laten. De volgende versie van de hoofdstelling luidt dat de categorie van eindige K -algebras B die gespleten worden door L (dat wil zeggen dat $L \otimes_K B$ als L -algebra isomorf is met een product van kopieën van L) anti-equivalent is met de categorie van eindige G -sets: eindige verzamelingen met een werking van G . In de volgende generalisaties worden de eindigheidscondities op L en B weggelaten: G wordt een pro-eindige groep, en we krijgen de categorie van pro-eindige G -sets.

Dan komen we toe aan de hoofdschotel: de categorieën-theoretische formulering van de tweede auteur van Grothendieck's Galoistheorie over commutatieve ringen. Grothendieck richt zich op étale overdekkingen van een samenhangend schema. In dit boek komen geen schema's voor, over ringen is het resultaat algemener: de overdekkingen hoeven niet eindig te zijn, en de grondring is een willekeurige commutatieve ring met 1. In plaats van G -sets krijgen we nu zekere 'internal covariant presheaves on the Galois groupoid'.

Er volgen nog enige hoofdstukken waarin onder andere verbanden met topologische overdekkingen, topos-theorie en 2-categorieën aan de orde komen. Over topologie is het boek wat summier. Het gaat niet in op de subtielere condities waaronder de hoofdstelling geldt, zoals semilokaal enkelvoudige samenhang, die weer overbodig zijn voor eindige overdekkingen. Ook hier geen voorbeelden.

Al met al maakt het boek een wat onevenwichtige indruk. Wat een algebraïsche lichaamsuitbreiding is wordt uitgebreid uitgelegd, maar de lezer wordt geacht bekend te zijn met Beck's criterium voor 'monadicity' bij geadjungeerde functoren. Meetkundige intuïtie, die in de Galoistheorie zo stimulerend kan werken, komt nergens aan de orde.

Het boek stimuleert wel de abstracte gedachten. Wist u bijvoorbeeld dat een object X samenhangend heet als de functor $\text{Hom}(X, -)$ coproducten respecteert?

B. de Smit



J.S. Cohen
**Computer Algebra and Symbolic
Computation:
Elementary Algorithms**

Natick, MA: A.K. Peters, 2002
323 p., prijs \$ 55,-
ISBN 1-56881-158-6

Dit boek is het eerste van een tweetal boeken die zich met computeralgebra bezig houden. De tekst is gebaseerd op aantekeningen van colleges die door de auteur aan de University of Denver gegeven werden en heeft als doel de kloof tussen geavanceerde tekstboeken over algoritmen en handboeken voor computeralgebrapakketten te overbruggen.

Het tweede boek (met als ondertitel *Mathematical Methods*) is een typisch (elementair) computeralgebra tekstboek met thema's als: gehele getallen, lichamen, veeltermen, simplificatie, Chinese reststelling, factorisatie en Groebner bases.

In het boek *Elementary Algorithms* gaat het daarentegen om onderwerpen die ergens op het raakvlak van wiskunde en informatica liggen en die mogelijkheden en beperkingen van computeralgebrasystemen voor het voetlicht brengen. Een goed perspectief om dit boek te lezen is misschien de vraag: Wat moet een computeralgebrasysteem eigenlijk kunnen of weten om een zekere operatie uit te voeren? Of sterker: Welke methoden zijn nodig om zelf een computeralgebrasysteem op te zetten? Dat dit voor veel wiskundigen geen voor de hand liggende vragen (meer) zijn, maakt duidelijk hoe vanzelfsprekend het gebruik van computeralgebrasystemen geworden is. Men denkt er (gelukkig?) nauwelijks over na, dat een systeem de commando's moet interpreteren voordat er een berekening plaats kan vinden.

Een eerste accent van het boek ligt op de representatie van input: Elke invoer wordt in een boomstructuur omgezet die vervolgens geanalyseerd en in een voor algoritmen geschikte datastructuur getransformeerd wordt. Uitgaande van boomstructuren is het maar een kleine stap naar het principe van recursie. Er wordt een apart hoofdstuk besteed aan recursieve procedures, waarbij in een aantal voorbeelden duidelijk wordt dat dit een krachtig en elegant concept is. Wel wordt het punt dat recursie vaak niet

de meest efficiënte implementaties geeft alleen maar aangeduid, namelijk in verband met de faculteitsfunctie en het berekenen van Legendre veeltermen. Als uitgebreid voorbeeld voor recursie wordt de symbolische integratie behandeld.

Een onderwerp dat als rode draad van het boek beschouwd kan worden is de vraag hoe een uitdrukking vereenvoudigd kan worden. Hierbij komen veel elementaire problemen naar boven die duidelijk maken dat vaak heuristische trucjes en workarounds nodig zijn om een praktische oplossing te bereiken.

De soms subtiële problemen bij de interpretatie van uitdrukkingen worden bij de behandeling van veralgemeende veeltermen bediscussieerd. Hierbij kunnen de variabelen uitdrukkingen zoals $(x + 1)$ of $\sin(x)$ zijn en zijn als coëfficiënten willekeurige uitdrukkingen toegelaten die 'onafhankelijk' van de variabelen zijn. De prijs die voor de grotere flexibiliteit betaald moet worden is een gebrek aan wiskundige nauwkeurigheid dat tot het probleem van een goede definitie voor variabelen en coëfficiënten in een veralgemeende veelterm leidt.

Samenvattend lijkt dit boek me een goede optie voor een lezer die een inleiding in de grondslagen van computeralgebrasystemen zoekt. De tekst is goed leesbaar, de voorbeelden zijn in een pseudocode beschreven, die erg op de syntax van gebruikelijke computeralgebrasystemen lijkt en er zijn voorbeelden in Mathematica, Maple en MuPad (een wat willekeurige keuze) bijgevoegd. Positief te vermelden zijn ook de case studies, waarin ingewikkeldere voorbeelden gedetailleerd bediscussieerd worden.

Er valt nog een kleine slordigheid te noemen: Natuurlijk is het een goed idee om aan zo'n boek een CD met de tekst van het boek en de algoritmen toe te voegen. Helaas is er bij de productie van de CD iets misgelopen, want onder Linux is 'root' de owner van alle bestanden en mogen 'others' niets uitvoeren, ze kunnen dus ook niet naar de directory met de tekst. Oplossing: CD op de harde schijf kopiëren.

B. Souvignier

C.P. Milies, S.K. Seghal
An Introduction to Group Rings

(Algebras and Applications 1)
Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002
383 p., prijs € 133,-
ISBN 1-4020-0238-6

De titel van het boek suggereert dat het een pendant of aanvulling zou zijn op het bekende werk van D.S. Passman uit 1977: *The Algebraic Structure of Group Rings*. Niets is echter minder waar! Dit boek biedt onder meer, een heel goede inleiding, op tweedejaarsniveau en verder, van bijvoorbeeld de groepentheorie, met onderwerpen als groepswerkingen, p -groepen, Sylow-theorie, oplosbare en nilpotente groepen, vrije groepen. Maar ook over de theorie van ringen, modulen en algebra's, groepsrepresentaties en dito karaktertheorie, algebraïsche getallen, wordt het nodige opgebouwd en gezegd.

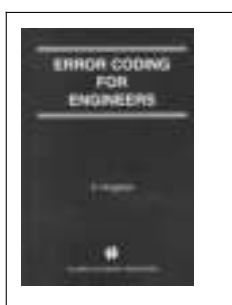
Er zijn heel veel mooie, instructieve opgaven en bewijzen. Aardig is ook, dat historische, inleidende beschouwingen over de opbouw van het vakgebied in de tweede helft van de 19e eeuw en de eerste helft van de 20ste eeuw niet ontbreken. Inderdaad, groepenringen treden in dit boek als culminatiepunt op (ongeveer veertig procent van de totale tekst).

Een aantrekkelijk onderwerp dat ter sprake komt, is de proble-

matiek rond het thema: Gegeven een groep G met ring K , te bepalen alle groepen H zodat de groepenring KG isomorf is met de groepenring KH . Juist de afgelopen vijftig jaar (en dan wel vooral in de laatste twintig jaar) is hier veel onderzoek naar gedaan. Denk aan werk van Perlis, Walker, Deskins, Coleman, Passman, Dade, Higman, Scott, Roggenkamp, Sandling, Kruse, Hertweck, de auteurs van dit boek, enzovoort. Allerhande aspecten van hun werk worden in het boek kort, maar inzichtelijk, belicht.

Zoals het hoort besluit een literatuurlijst, waarbij nogal wat recent werk wordt genoemd, het boek. Kortom, een verrassend frisse inleiding, heel geschikt voor algebraïci om een college groepentheorie uit samen te stellen, en voor studenten om zich een snelle, gevarieerde, en niet al te moeilijke inleiding in het vakgebied eigen te maken. Zeer aanbevolen!

R.W. van der Waall



A. Houghton
Error Coding for Engineers

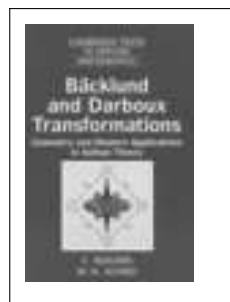
Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001
246 p., prijs €156,-
ISBN 0-7923-7522-X

Het boek is een poging om de werking van fouten-verbeterende codes uit te leggen zonder veel wiskunde te gebruiken. De auteur bezigt zinnen als 'Obviously, this will seem a little out of context at the moment since there have been no examples yet, to hang these ideas on; the engineering mind is often frustrated by solely abstract ideas.' (Zie samenvatting aan het eind van hoofdstuk 2 'A Little Maths.') De auteur toont zelf niet bijzonder bedreven te zijn in de wiskunde van eindige lichamen (primitieve polynomen en irreducibele polynomen worden bijvoorbeeld op één hoop gegooid). Ook het onderscheid tussen een polynoom en een vergelijking schijnt lastig te zijn. Daarbij komen ook nog vele typografische slordigheden.

Het boek blinkt niet uit in duidelijkheid, zeker waar het (wiskundig) ingewikkeldere constructies betreft. In paragrafen 7.6 en 7.7, bijvoorbeeld, komen de algoritmen van Berlekamp-Massey en Forney aan bod. Hier wordt wel erg veel aan het voorstellingsvermogen van de lezer overgelaten. Het lijkt erop dat de gebruikelijke (wiskundige) beschrijvingen van deze algoritmen als uitgangspunt zijn genomen, waar uiteindelijk nog enkele flarden van zijn overgebleven. In de appendix staat dan nog wel een volledig programma voor deze algoritmen, maar het is te verwachten dat de lezer toch een ander boek zal raadplegen waar deze algoritmen wel op een duidelijke en bruikbare manier zijn beschreven.

De poging om zo het veronderstelde gat tussen een praktijk-gerichte ingenieur en theoretisch-georiënteerde wiskundige te dichten lijkt daarmee ook mislukt. Gezien het grote aanbod van boeken over fouten-verbeterende codes lijkt dit nieuwe boek overbodig. Er blijkt zelfs al een boek van dezelfde auteur te zijn met als titel *Engineer's Error Coding Handbook* (bij dezelfde uitgever). Het vreemde is dat er naar dit boek op geen enkele manier wordt verwezen. Zo wordt de indruk gewekt dat het hier om een nieuw boek gaat.

L.A.M. Schoenmakers



C. Rogers, W.K. Schief
Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory
(Cambridge Texts in Applied Mathematics)
Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
432 p., prijs £24,95
ISBN 0-521-01288-0

This interesting monograph is devoted to the geometric origins of Bäcklund and Darboux transformations and their application in modern soliton theory. Starting from classical differential geometry in the 19th century, the authors give an excellent description of how the classical Bäcklund transformation is connected with soliton theory in chapter 1. The Sine-Gordon equation arising from pseudospherical surfaces and the nonlinear sigma-type model equivalent to the Bianchi system are both invariant under the classical Bäcklund transformations constructed in this geometric manner. Their soliton solutions can be generated algebraically by a nonlinear superposition principle derived from the auto-Bäcklund transformations, now known as Bianchi's permutability theorem.

Chapter 2 concentrates on the connection between the motions of curves and surfaces and soliton (integrable) equations. The Sine-Gordon equation can also be derived from the motion of an inextensible curve of constant torsion tracing out a pseudospherical surface. The compatibility of the 3-dimensional linear system describing the evolution of this curve leads to the AKNS spectral representation of the Sine-Gordon equation. Then the topic switches to a discussion of two particular classes of motion of pseudospherical surfaces, namely, an anharmonic lattice system and the Weingarten system.

Chapter 3 discusses Tzitzeica surfaces, which are associated with the nonlinear hyperbolic equation, called the Tzitzeica equation. The concept of Laplace-Darboux transformation is explained. Iterated application of such transformation leads to the Toda lattice scheme. The Tzitzeica equation can be generated as a particular periodic Toda lattice.

The main topic of chapter 4 is the nonlinear Schrödinger equation. This equation with wide physical applications can remarkably be derived in a purely geometric manner. The connections between the nonlinear Schrödinger equation and other integrable equations, such as the Heisenberg spin equation and unpumped Maxwell-Bloch system linked with Pohlmeyer-Lund-Regge model, are discussed.

Chapter 5 deals with isothermic surfaces. A reduction of its Gauss-Mainardi-Codazzi system, also called isothermic system, which is integrable, leads to the Calapso equation. This can be extended to higher dimensions. The explicit Bäcklund transformations for both the vector isothermic system and the vector Calapso system are obtained. Finally their soliton solutions for the 3-dimensional case are constructed via permutability theorems.

Chapter 6 answers the inverse question: how to construct soliton surfaces knowing the systems with $su(2)$ spectral representation. The notions of gauge and reciprocal transformations are introduced in a geometrical context. Special attention is paid to the systems invariant under reciprocal transformations.

Chapter 7 and 8 present the important connections between

matrix Darboux transformation and Bäcklund transformation in a geometrical setting. Iteration of matrix Darboux transformation is associated with the permutability theorems. Chapter 7 works on the systems with underlying $su(2)$ spectral representation and chapter 8 on the systems with non-isospectral linear representations such as Bianchi and Ernst systems.

Chapter 9 is the only chapter treating another geometry, namely projective geometry, instead of Euclidean geometry, describing the connection between projective-minimal and isothermal-asymptotic surfaces with soliton theory starting with the analogues of the Gauss-Mainardi-Codazzi and Gauss-Weingarten equations.

The authors did a great job in choosing the topics from the rich and rather unorganized literature. Lots of concrete examples are worked out in detail and explicit solutions are illustrated by pictures. It is an excellent book for graduate students and young researchers. Besides, it contains 395 references, from the 19th century to today, which is very useful for scientists in this field.

J.P. Wang



J. Gallier

**Geometric Methods and Applications
For Computer Science and Engineering**

(*Texts in Applied Mathematics 38*)

Berlin: Springer-Verlag, 2001.

565 p., prijs €75,-

ISBN 0-387-95044-3

Wat hebben Radon's stelling, de projectieve meetkunde, Hermietse afbeeldingen, Liegroepen, Voronoi-diagrammen en apenzadels gemeen? Het zijn allemaal meetkundige begrippen die zijn te beschrijven in twee of drie dimensies en dat is dan ook gedaan in dit boek. Het resultaat is een lijvig werk dat daarnaast nog vertelt waar één en ander buiten de meetkunde kan worden toegepast.

Laten we met deze toepassingen beginnen. Hoewel 'Applications' bijna de helft van de titel beslaat, is maar vijf procent van het boek aan toepassingen zoals computationele meetkunde of camera calibraties gewijd. Deze laatste toepassing van de projectieve meetkunde wordt uitgebreid behandeld. Overige toepassingen worden slechts genoemd.

Op zich is dit niet zo'n probleem: uit de ondertitel blijkt namelijk dat het boek gericht is op ingenieurs en informatici en dezen zullen zelf al een toepassing in hun achterhoofd hebben als ze naar een wiskundeboek grijpen. De vraag is of het dit boek is dat ze moeten pakken. Het is een vrij gedetailleerd, degelijk werk en daardoor soms wat aan de taaie kant. Zeker, er worden zeer veel meetkundige constructies geïntroduceerd, maar niet in een stijl die je bij een introductie zou verwachten.

Ik zou dit boek dan ook eerder aanraden aan een recent afgestudeerde wiskundige. Het behandelt zoveel klassiek meetkundige resultaten dat ik me niet kan voorstellen dat junior wiskundigen deze allemaal paraat hebben. Maar bijna elk onderwerp dat behandeld wordt, is van dien aard dat het eigenlijk tot de algemene ontwikkeling behoort; een ideaal werk voor in een vertraagde trein op weg naar een seminar dus. Als de spoorwegen het echt laten afweten, zijn er voldoende opgaven van wisselende moei-

lijkeidsgraad aanwezig om de tijd door te komen.

Voor de potentiële lezer die terugschrikt van de prijs maar over een snelle internetverbinding beschikt, is er nog een tip: tien rijk geïllustreerde extra hoofdstukken over met name rationale krommen en oppervlakken kunnen binnengehaald worden via de pagina van de auteur: <http://www.cis.upenn.edu/~jean/gbooks/geom2.html>

R.C. Lindenbergh



M. Grosser, M. Kunzinger, M. Oberguggenberger, R. Steinbauer

Geometric Theory of Generalized Functions with Applications to General Relativity

(*Mathematics and its Applications 537*)

Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001

521 p., prijs €181,50

ISBN 1-4020-0145-2

Dit boek geeft een goede stand van zaken van het onderzoek in de niet-lineaire theorieën van veralgemeende functies die voortbouwen op het werk van J.-F. Colombeau. De theorie van Colombeau is ontstaan als een antwoord op de vraag om niet-lineaire bewerkingen te definiëren op singuliere (in distributionele zin) objecten. De eerste toepassingen ervan situeren zich in het domein van de partiële differentiaalvergelijkingen.

De kern van het boek bestaat uit de recentelijke verwezenlijking van een diffeomorfisme-invariante definitie van dergelijke algebra's van veralgemeende functies. Dit brengt met zich mee dat deze veralgemeende functies, en de niet-lineaire bewerkingen erop, ook kunnen gedefinieerd worden op differentieerbare variëteiten (hiernaar verwijst de term 'geometric' in de titel). Hoewel de constructie van zulke algebra's behoorlijke technische complicaties met zich meebrengt (onder meer een theorie van afleidbaarheid in welbepaalde niet-normeerbare vectorruimten, genaamd 'convenient vector spaces'), hebben de auteurs gekozen voor een bevattelijke uiteenzetting door de theorie van de afleidbaarheid in deze 'convenient vector spaces' in hoofdzaak zonder bewijzen (maar met referenties) te behandelen en zich te concentreren op de gevolgen ervan.

Het boek kan ook dienen als inleiding tot het onderzoeksdomein: hoofdstuk 1 vereist geen gespecialiseerde voorkennis. Er wordt bovendien veel aandacht besteed aan het geven van motiveringen voor bepaalde definities in de Colombeau-theorie (meer dan in de meeste andere inleidingen tot de Colombeau-theorie), zodat de niet-specialist zich in korte tijd de denkwijzen van het vakgebied eigen kan maken. Verder bieden de talrijke referenties in de tekst aanknopingspunten voor een diepere studie van die facetten die buiten het kader van het boek vallen.

In de laatste twee hoofdstukken worden toepassingen behandeld. Hoofdstuk 4 behandelt symmetriegroepen van stelsels partiële differentiaalvergelijkingen. Meer bepaald worden 'veralgemeende symmetriegroepen' beschouwd: Liegroepen van veralgemeende transformaties die veralgemeende oplossingen omzetten in veralgemeende oplossingen. Zoals in het klassieke geval kunnen zogenaamde infinitesimale criteria gegeven worden.

Hoofdstuk 5 behandelt toepassingen in de algemene relativiteitstheorie. Aangezien in de algemene relativiteitstheorie de ruimte-tijd een 4-dimensionale variëteit vormt waarop de

Lorentz-metrick voldoet aan de (niet-lineaire) vergelijkingen van Einstein, vormt een niet-lineaire theorie van veralgemeende functies op differentieerbare variëteiten een geschikt kader voor het behandelen van singulariteiten (in distributionele zin) van de ruimte-tijd. Hoewel blijkt dat deze aanpak een aantal voordelen biedt in vergelijking met andere theorieën over singulariteiten in de algemene relativiteitstheorie, staat ze mijns inziens nog in de kinderschoenen (hetgeen niet verwonderlijk is, gezien de onderliggende wiskundige theorie pas recentelijk verwezenlijkt is).

H. Vernaeye

P. Schneider

Nonarchimedean Functional Analysis

(Springer Monographs in Mathematics)

Berlin: Springer-Verlag, 2002

156 p., prijs €43,-

ISBN: 3-540-42533-0

Niet-Archimedische functionaalanalyse is functionaalanalyse, waarbij het gebruikelijke complexe scalairenlichaam is vervangen door een niet-Archimedisch gewaardeerd volledig lichaam K , zoals bijvoorbeeld het lichaam van de p -adische getallen. De grondvester van deze discipline was de Nederlandse wiskundige A.F. Monna met een serie artikelen, beginnend in 1943, en verder ontwikkeld in de jaren zestig en zeventig met als eerste hoogtepunt het boek van A.C.M. van Rooij: *Non-Archimedean Functional Analysis* (Marcel Dekker, 1978), een systematische behandeling van de theorie van Banachruimten. In het proefschrift van J. van Tiel (1965) kon men de fundamenteën van de theorie van de lokaal-convexe ruimten vinden. Nadien verschenen talloze artikelen over het onderwerp, maar geen systematische boeken, tot 2001, toen het nu te bespreken boek verscheen. Het is het eerste tekstboek dat de theorie van lokaal-convexe ruimten grondig behandelt, dus alleen al om die reden uiterst welkom.

Volgens de auteur zette de groeiende belangstelling vanuit andere gebieden (getaltheorie, p -adische modulaire vormen, deformatie van Galois-representaties, representaties van p -adische groepen) voor functionaalanalytische methoden hem aan tot het schrijven van dit werk. Maar zoals het boek voorligt is het ook zeer geschikt voor hen, die niet in bovengenoemde onderwerpen thuis zijn. Een beetje voorkennis van lineaire algebra en verzamelingstheoretische topologie is al genoeg. Enige kennis van klassieke functionaalanalyse lijkt mij echter wel nodig om van het boek ten volle te kunnen genieten.

De eerste twee hoofdstukken behandelen de basistheorie, die men ook wel in de bovengenoemde werken kan vinden. Het echte verhaal begint in hoofdstuk 3, met de dualiteitstheorie. Vanaf hier beperkt de schrijver zich tot het geval waarbij K sferisch volledig (= maximaal compleet) is. Dit, omdat in de toepassingsgebieden die hij op het oog heeft de lichamen veelal discreet gewaardeerd (dus sferisch volledig) zijn, en omdat de stelling van Hahn-Banach zonder restricties geldig is voor zulke K . Vanuit zijn kant gezien een redelijk standpunt, maar het is toch wel een beetje jammer, dat de algemeen belangstellende lezer het interessante algemene geval (bijvoorbeeld waar K de completering van de algebraïsche afsluiting van het p -adische lichaam is) wordt onthouden. Hoe het ook zij, met deze restrictie loopt de theorie wel gemakkelijker dan in het algemene geval.

In hoofdstuk 3 worden de basisbegrippen 'c-compact' en 'compactoid' ingevoerd; dit zijn 'convexificaties' van compactheid, resp. precompactheid, en nodig omdat K in het algemeen niet lokaal-compact is. Hiermee worden stellingen over de Mackey-topologie and reflexiviteit bewezen. Veel aandacht is er voor compacte inductieve limieten (een operator heet compact als er een nulomgeving is waarvan het beeld een c-compacte afsluiting heeft). In hoofdstuk 4 worden injectieve en projectieve tensorproducten ingevoerd, maar die blijken gelijk te zijn(!); dit heeft tot gevolg dat de niet-Archimedische versies van Schwarzruimten en nucleaire ruimten samenvallen. Volcontinue, compacte, en nucleaire operatoren worden bestudeerd. Nucleaire operatoren hebben een spoor, dat aan alle redelijke eisen voldoet. Tenslotte wordt een theorie van Fredholmoperatoren (kern en cokern zijn eindigdimensionaal) ontwikkeld.

Al deze theorie is van recente datum, interessant en diep. Het boek is zeer goed geschreven, met aandacht voor details. Aanbevelen.

W.H. Schikhof

A. Abbate, C.M. Decusatis, P.K. Das

Wavelets and Subbands: Fundamentals and Applications

Basel: Birkhäuser, 2001

568 p., prijs €105,-

ISBN 0-8176-4136-X

Nog steeds verschijnen er regelmatig nieuwe boeken over wavelets. Dit is niet verrassend als men bedenkt dat wavelets wellicht een van de meest succesvolle nieuwe methoden in de toegepaste wiskunde vormen van de afgelopen twintig jaar. Met name in de signaal- en beeldverwerking behoren wavelets inmiddels tot de basisuitrusting van ieder onderzoeker. Maar zoals voor de hand ligt bij het verschijnen van een nieuw boek, vraagt men zich onmiddellijk af waarin dat zich onderscheidt van hetgeen er al is. Ook de auteurs van dit boek vragen zich dit af in de inleiding: 'Why another book on this topic?' Het antwoord daarop laten ze onmiddellijk volgen: 'The easy answer is to say that we wanted to write our own book; however there are other more practical reasons as well.' Dat eerste deel van het antwoord lijkt te kloppen, voor de juistheid van het tweede deel heb ik geen aanwijzingen gevonden.

Onder de boeken welke inmiddels over wavelets zijn verschenen zitten een aantal pareltjes, zoals *Ten Lectures on Wavelets* door Ingrid Daubechies, *A Wavelet Tour of Signal Processing* door Stéphane Mallat, en niet te vergeten *Wavelets and Subband Coding* door Martin Vetterli and Jelena Kovacevik. Het boek dat hier besproken wordt voegt niet alleen in het geheel niets toe aan eerdergenoemde uitgaven, maar komt daar zelfs bij benadering niet in de buurt. Dit geldt niet alleen voor de wiskundige die geïnteresseerd is in de onderliggende theorie van multiresolutie analyse, wavelets en frames, maar evenzeer voor de toepasser in signaal- en beeldverwerking die met name geïnteresseerd is in subband-codering en toepassingen in bijvoorbeeld beeldcompressie en communicatie-theorie.

Het boek is opgesplitst in drie delen, waarvan het eerste, *Fundamentals* geheten, met name de theorie van wavelet bases en frames behandelt. Het tweede deel, *Wavelets and Subbands*, gaat over meer toegepaste aspecten zoals tijd-frequentie analyse, subband decomposities, en beeldcodering. Het laatste deel, *Applica-*

tions, gaat inderdaad over toepassingen, onder andere in communicatiesystemen. Helaas hangen de verschillende delen veelal als los zand aan elkaar en zijn duidelijk geschreven door verschillende auteurs. Het boek faalt derhalve als introductie in de wavelet-theorie omdat het er niet in slaagt om de verschillende aspecten van wavelets met elkaar te verbinden. Zo wordt, om een voorbeeld te noemen, nauwelijks duidelijk wat wavelets met subband decomposities te maken hebben, toch het centrale thema van het boek. Het boek schiet ook als naslagwerk hopeloos tekort omdat het verre van compleet is. Zo krijgt het *lifting scheme*, een van de belangrijkste recente ontwikkelingen, slechts één (!) pagina aandacht. En om het allemaal nog erger te maken is het boek niet alleen slecht maar ook nog lelijk. Met name wiskundige formules en illustraties zijn vaak niet om aan te zien. Niet kopen dus, en zeker niet lezen!

H.J.A.M. Heijmans

F. Hélein

Harmonic Maps, Conservation Laws and Moving Frames

(Cambridge Tracts in Mathematics)

Cambridge: Cambridge University Press, 2002

290 p., prijs £50,-

ISBN 0-521-81160-0

The study of harmonic maps began with the work of Eells and Sampson (*Amer. J. Math.* (1964); MR29:1603). Since then the subject has developed in many different directions: topology, differential geometry, algebraic geometry and integrable differential equations, etc. This book covers the analytical aspects of the harmonic map theory, mainly the recent developments of the regularity of weakly harmonic maps and their compactness in the weak topology.

The first chapter begins with defining harmonic maps and various notions of weak solutions, presenting two versions of Noether's theorem and ends with a quick survey of the known regularity results concerning weak solutions.

The second chapter deals with harmonic maps between a surface and a symmetric space (a Lie group, or a homogeneous space). The harmonic map equations can be reformulated as an integrability condition (Lax representation) although the geometric interpretation of the spectral parameter remains mysterious! First the author gives a neat description of this method, and then presents some functional analytic results including the compactness in the weak topology of the set of weakly harmonic maps with symmetry and his own regularity result for weakly harmonic maps between a surface and a sphere.

The third chapter is the preparation for the last two chapters, including Wente's inequality, Hardy spaces and Lorentz spaces.

The fourth chapter is devoted to harmonic maps without symmetry. This is the main chapter of this book. By constructing a special moving frame, called a Coulomb frame, the author proves the regularity of weakly harmonic maps on a surface and Bethuel's regularity results in arbitrary dimension. However, the problem of compactness is still open in general. The chapter ends with an attempt to find conservation laws for generalized harmonic maps.

In the fifth chapter, the author uses Wente's inequality and Coulomb frames to study surfaces with mean curvature in L^2 .

The book is self-contained, meanwhile covering recent re-

search results. The reader can just start to read it and will get to the point where he can start his own research.

J.P. Wang



W. Cheney

Analysis for Applied Mathematics

(Graduate Texts in Mathematics 208)

New York: Springer-Verlag, 2001

444 p., prijs €32,-

ISBN 0-387-95279-9

This book evolved from a course for graduate students of mathematics and other disciplines like physics, engineering or computer science the author gave at the university of Texas at Austin. It is less about applications itself than about topics in analysis that provide the analytical tools, concepts and viewpoints required in modern applied mathematics, corresponding to the author's algorithm for creating an applied mathematician: "Start with a pure mathematician, and turn him or her loose on real world problems."

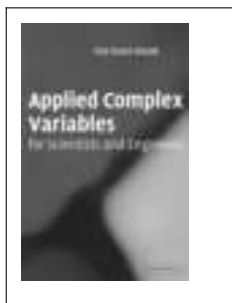
The scope of the book spans from Zorn's Lemma to the Raleigh-Ritz method. In the chapters, after introducing the topic in the necessarily rigorous way and presenting some selected but careful proofs, an excellent survey of more recent developments follows. Each section finishes with a list of exercises left to the reader. The introduction of abstract notions in a sharp and correct way is mostly followed by an explanation where these concepts appear in applied problems, often combined with surveys where the crucial ideas are presented in a very conceivable way. These surveys contain not only interesting mathematical and historical background information, they also ease the readability of the book and keep the suspense. To complete the information about special topics, also a series of rather deep and more recent theorems, which are partially startling, is also presented, mostly without proof. In general, not every theorem is proved, but if it can not be considered well-known to graduate students, like the Heine-Borel theorem, the reader is referred to a carefully quoted bibliography.

The book starts with a chapter on normed linear spaces, where the basic concepts of analysis are introduced, followed by the Hahn-Banach theorem and Baire's theorem with its well-known consequences. A chapter on Hilbert spaces including Sturm-Liouville theory follows, where the Spectral theorem is presented only for Hermitian compact operators. Calculus in Banach spaces is presented in the next chapter, including a recent version of Newton's method and a section on calculus of variations. Chapter 4 is concerned with approximation. After some remarks on discretization, many iteration methods like the methods of Raleigh-Ritz and Galerkin are presented in a very readable way; collocation and descent methods are also included. The next two chapters deal with the usual theory of distributions and Fourier transformations with applications to partial differential equations. In chapter 7 selected topics are considered, like fixed-point, selection and separation theorems, the Arzela-Ascoli theorem, Fredholm theory and linear topological spaces. An inspiring section on analytic pitfalls follows. Chapter 8 contains the basics of measure

and integration theory.

In my opinion the book is splendidly written, the material is not too dense, the remarks are very informative and also the layout is nice. It was a pleasure to read the book and I think that it can be highly recommended to both students or lecturers in mathematics or related fields and applied mathematicians or engineers in industry.

H. Winkler



Yue Kuen Kwok

Applied Complex Variables for Scientists and Engineers

Cambridge: Cambridge University Press, 2002

404 p., prijs £21,-

ISBN 0-521-00462-4

Dit boek is geschreven als een inleiding in de complexe analyse en is, zoals de ondertitel al aangeeft, niet in de eerste plaats geschreven voor studenten wiskunde maar voor 'scientists' en 'engineers'. Het is niet zo dat het boek hierdoor ongeschikt zou zijn voor een inleiding in het vak voor wiskundigen, maar wie op zoek is naar een gedegen wiskundige behandeling van het onderwerp, kan beter elders zijn heil zoeken. Zo ligt de nadruk op het toepassen van de theorie en het verkrijgen van vaardigheid in het oplossen van vraagstukken. Ongewoon in een boek over complexe analyse, wordt er een heel hoofdstuk gewijd aan het oplossen van rand- en beginwaardenproblemen. Uitvoerig wordt aandacht besteed aan de toepassing van complexe analyse op problemen uit de toegepaste natuurkunde, met name op het gebied van de stromingsleer, maar ook op problemen uit de elektrostatica. Verder zijn er heel veel uitgewerkte voorbeelden. Zoals te verwachten valt in een boek van deze aard, zijn er ook zaken die een wiskundige node mist, zoals de hoofdstelling van de algebra, die niet eens genoemd wordt, en ook het principe van het argument. Je kunt kennelijk niet alles hebben en de schrijver zou ongetwijfeld antwoorden dat het boek dan ook voor 'scientists' en 'engineers' bedoeld is en niet in de eerste plaats voor wiskundigen.

De in het boek genoemde stellingen worden gelukkig wel bewezen, zij het niet met de grootst mogelijke degelijkheid. Verwijzingen naar verdere ontwikkelingen van de theorie ontbreken geheel. De fysische toepassingen zijn overigens opgenomen in aparte paragrafen en wie alleen aan de wiskunde aandacht wil besteden, kan gewoon de betreffende paragrafen overslaan. Ik zal kort beschrijven wat er zoal aan bod komt.

Er zijn acht hoofdstukken: het eerste gaat over het complexe vlak en behandelt ook de stereografische projectie op de Riemannbol. Hoofdstuk 2 gaat verder met zaken als continuïteit, differentieerbaarheid, de Cauchy-Riemannvergelijkingen en harmonische functies. Hoofdstuk 3 beschrijft de elementaire transcendente functies en hun inversen en sluit af met een paragraaf over Riemann-oppervlakken. Het volgende hoofdstuk is gewijd aan complexe integratie, de stelling van Cauchy en de integraalformule van Cauchy en een aantal gevolgen daarvan, maar dus niet de hoofdstelling van de algebra. Aan het eind van dit hoofdstuk staat verder een lange paragraaf over conservatieve stromings- en krachtevelden en complexe potentialen.

Het onderwerp van hoofdstuk 5 wordt gevormd door rijen en reeksen, en dan met name machtreeksen en Laurentreeksen. In het zesde hoofdstuk wordt het begrip residu geïntroduceerd en wordt de residustelling toegepast op het berekenen van integralen met behulp van contourintegratie. Ook zijn er een paar bladzijden gewijd aan de Fouriertransformatie. Veel meer aandacht is er in het zevende hoofdstuk voor de Laplacetransformatie en dan met name de toepassing hiervan op rand- en beginwaardenproblemen. In dit hoofdstuk komen het Dirichletprobleem in $\mathbb{R}^2$, en de eendimensionale warmte- en golfvergelijking om de hoek kijken. Het laatste hoofdstuk tenslotte behandelt conforme afbeelding door middel van Möbiustransformaties en de Schwarz-Christoffeltransformaties. Helaas wordt er geen enkele melding gemaakt van de Riemann-afbeeldingsstelling, die toch een en ander in een wat breder kader zou plaatsen. Achterin elk hoofdstuk staat een dertig- tot veertigtal opgaven, alle van een redelijk niveau, en achterin het boek staat een lijstje met antwoorden. Dit maakt het boek samen met de vele voorbeelden, wel geschikt voor zelfstudie of voor een inleidend college in de complexe functietheorie waarbij de nadruk vooral ligt op het aanleren van vaardigheden.

R.J. Kooman

A. Dijksma, M.A. Kaashoek, A.C.M. Ran (eds.)

**Recent Advances in Operator Theory
The Israel Gohberg Anniversary Volume**

(Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 124)

Basel: Birkhäuser, 2001

568 p., prijs €151,-

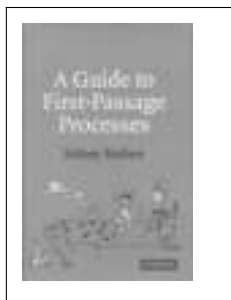
ISBN 3-7643-6573-0

Volume 124 of the series *Operator Theory: Advances and Applications* is dedicated to the outstanding Mathematician Israel Gohberg on the occasion of his 70-th birthday. Israel Gohberg is one of the world leading specialists in operator theory and founding fathers of the IWOTA workshops, and founder of the *Journal on Integral Equations and Operator Theory*. The book contains a selection of 25 articles on modern operator theory and its applications, most of which are related to lectures presented at the *International workshop on operator theory and its applications* held in the summer of 1998 at the University of Groningen (IWOTA-98) in Groningen, the Netherlands. In honour of Israel Gohberg and to reflect his outstanding achievements and his personality, this volume also contains his Curriculum Vitae and a complete list of publications (21 books and 401 articles) as well as a short review of his mathematical work and the relaxed and amusing speeches dedicated to him, delivered by his friends and colleagues at the workshop dinner.

In the articles, linear operators, operator pencils, operator polynomials or analytic operator functions are considered, acting on Banach or Hilbert spaces, in particular reproducing kernel spaces, or indefinite inner product spaces as Krein or Pontryagin spaces. The topics of the articles include extension, estimation and interpolation problems, factorization, decomposition and realization problems, Riccati equations and spectral problems for differential operators, dilation and commutant lifting, numerical ranges of operators, inverse and scattering problems. Many problems are application oriented, for instance in electrical engineering. All articles underwent the usual refereeing process. As the

title of the volume already indicates, it is not a textbook on operator theory. Its comprehension assumes in general deep and specialized knowledge, and the subjects of the articles are rather disconnected. I think the book is of interest for pure and applied mathematicians or engineers with a special interest in operator theory and its applications.

H. Winkler



S. Redner

A Guide to First-Passage Processes

Cambridge: Cambridge University Press, 2001

322 p., prijs £60,-

ISBN 0-521-65248-0

Een verbazingwekkend aantal stochastische processen is terug te voeren op eerste-passageprocessen. Een typische vraag die bestudeerd wordt bij eerste-passageprocessen is de vraag wanneer een deeltje, dat bijvoorbeeld een *random walk* maakt of onder diffusie beweegt, voor het eerst op een bepaalde plek terecht komt. Het feit dat hierbij naar de eerste passage wordt gekeken is cruciaal in een groot aantal toepassingen, zo worden vaak aandelen verkocht als hun waarde voor het eerst boven een bepaalde waarde uitkomt, en reageren deeltjes in chemische reacties wanneer ze elkaar voor het eerst ontmoeten. Alhoewel eerste passage processen in veel boeken beschreven worden, zoals in de standaardwerken *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* van W. Feller (Wiley, New York, 1968) en *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* van N.G. van Kampen (Noord-Holland, Amsterdam, 1997), wordt in dit boek voor zover mij bekend voor het eerst het eerste passage proces als centraal thema genomen en wordt een groot aantal stochastische processen vanuit dit perspectief behandeld.

Dit is tegelijkertijd ook het enige minpuntje van het boek. Door de nadruk op een bepaald thema te leggen, is het boek minder geschikt als algemene introductie in stochastische processen en als zodanig ook minder geschikt als boek om bij een college te gebruiken. Aan de andere kant is door deze keuze wel een prettig leesbaar en origineel boek ontstaan, dat veel waardevol materiaal bevat.

De auteur begint na een korte inleiding in het eerste hoofdstuk met het uitleggen van de basisideeën en het beschrijven van een aantal belangrijke technieken om eerste passage processen te analyseren. Een aantal daarvan, zoals het gebruiken van genererende functies en Fourier en Laplace transformaties is welbekend, de analogie met electrostatische systemen is wellicht minder bekend maar blijkt in de rest van het boek vaak de meest efficiënte manier te zijn om een eerste passage proces te bestuderen. In deze aanpak wordt de kans op een bepaalde eerste passage gerelateerd aan de spanningen in een netwerk van weerstanden met geschikte randvoorwaarden.

De rest van het boek past deze basistechnieken toe op een groot aantal verschillende situaties, beginnend met de standaard random walk op een interval en op de halve lijn. De laatste heeft de merkwaardige eigenschap dat een deeltje met kans 1 uiteindelijk in de oorsprong terugkeert, maar dat de verwachte lengte

van de bijbehorende random walk oneindig is. Deze resultaten zijn zeker niet nieuw maar dienen vooral als illustratie. De overige hoofdstukken beschrijven eerste passage processen in meer gecompliceerde situaties, zoals fractale netwerken, systemen met bolsymmetrie, systemen met tijdsafhankelijke randvoorwaarden, en eindigt met een toepassing op eenvoudige reactieprocessen. In deze hoofdstukken staat een aantal nieuwe resultaten, en veel van de oude resultaten worden op een vaak nieuwe en eenvoudigere manier afgeleid. Verder staan er verspreid in het boek vele handige trucs en observaties.

Gecombineerd met de schrijfstijl, zorgt dit voor een uitstekend leesbaar en nuttig boek. De auteur beschrijft altijd zorgvuldig de gemaakte aannames, en na de meeste berekeningen volgt vaak een intuïtieve uitleg van het resultaat. Ik kan dit boek van harte aanbevelen als eerste kennismaking met stochastische systemen, maar ook experts zullen er de nodige inspiratie uit kunnen halen.

J. de Boer



O. Häggström

Finite Markov Chains and Algorithmic Applications

(London Mathematical Society Student Texts 52)

Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

124 p., prijs £17,95

ISBN 0-521-89001-2

This elegant little book is a beautiful introduction to the theory of simulation algorithms, using (discrete) Markov chains (on finite state spaces). Throughout the book the pace is very relaxed, and the proofs and explanations are very lucid and illuminating. Also, almost no background knowledge is needed nor assumed (there is an introductory chapter to refresh one's memory). Unfortunately, in the chapters where discrete Markov chains and their properties are introduced (chapters 2–6), the examples are rather dull. However, as soon as the author discusses the application of these Markov chains (chapter 7 and on), the examples—such as the Hardcore model, the Ising model, etc.—become very interesting. Clearly these examples and the algorithms described there are close to the author's heart!

In amazingly few pages the author discusses Markov chain Monte Carlo (chapter 7), the convergence of such MCMC algorithms (chapter 8), various properties of the Propp-Wilson algorithm (chapters 10–12), and simulated annealing, which is applied to the travelling salesman problem (chapter 13). In the last chapter, chapter 14, a small but important set of topics for further reading is mentioned, such as the coupling method (which plays an important role in this book), and Fill's algorithm, which is an interesting alternative to the Propp-Wilson algorithm.

This book is highly recommended to anyone interested in the theory of Markov chain simulation algorithms. It also would have been—in my opinion—a first choice as a textbook for an introductory course on Markov chains, if continuous time Markov chains were not completely absent in this book. This is a deliberate choice of the author. In his view 'several of the most important ideas and concepts in Markov theory arise already in this (= the discrete, C.K.) setting; these ideas are more digestible when

they are not obscured by the additional technicalities arising from continuous time and more general state spaces.' This is indeed correct, but given the fact that the book only has 124 pages, and also given the lucid style of the book, I find it a pity that an introduction to the Poisson process and more general continuous time Markov chains are missing.

C. Kraaikamp

V. Dragan, A. Halanay

Stabilization of Linear Systems

Basel: Birkhäuser, 1999

328 p., prijs €105,-

ISBN 0-8176-3970-5

The book under review consists of six chapters. The first two are of an introductory nature. The remaining four contain more specialized material based on work published previously by the authors. The main problem described in the book is the stabilization of linear dynamical systems represented in standard state space form.

Chapter 1 serves as an introduction and intends to provide motivation. It briefly discusses some stability concepts.

Chapter 2 reviews standard concepts in state space approach to linear systems theory such as controllability, stabilizability, observability, and detectability. The famous pole placement theorem is given for single input systems only. Ackerman's formula is derived without reference to Ackerman and with the wrong sign. The multi input case is not covered.

The chapter then moves on to Lyapunov equations. At this point the equations are treated as algebraic equations for which a solution has to be found. The connection with Lyapunov functions is not made here.

The next subject is Optimal control of linear systems with quadratic cost function. Only the infinite horizon case is treated. The Lurie-Yakubovich-Popov equations are derived. These are equivalent to the more usual Riccati equation. The formulation is unnecessary restrictive by requiring that the input is square integrable and that the state tends to zero asymptotically. These properties can also be derived rather than assumed. By directly starting with the infinite horizon case, the approach via the finite horizon case is blocked. On the other hand, the finite horizon case would have required the development of dynamic programming.

Chapter 2 presents standard results, treated in a less standard sometimes rather technically involved way. An example: Lemma 2.5.6 states that observability and detectability are preserved under an extended form of output injection. Using the Hautus test for observability, provided earlier in the book, the proof is two or three lines. However, the authors provide a lengthy proof where observability and detectability are treated separately.

The third chapter is devoted to the study of systems with separated time scales, also known as singular perturbed systems. This chapter contains results obtained by the authors. These concern observers for singular perturbed systems and optimal stabilization.

Chapter four is concerned with high-gain control. By high gain control the authors mean a state feedback control of the form $u = \frac{F}{\epsilon}x$ that is stabilizing for any $0 < \epsilon < \epsilon_0$ for some positive ϵ_0 . First the relative degree one case is considered followed by generalizations. This chapter is based on work published earlier by

the same authors.

The fifth chapter presents a study of adaptive stabilization. Generally, adaptive control is concerned with the control of systems of which the dynamic laws are partially unknown or slowly varying with time. The first situation is of interest when one wants to design a controller that can be used to control any system belonging to a large class of systems. An example is the self-learning thermostat of domestic heating systems. Systems with slowly time varying characteristics occur when for example wear of certain parts cannot be neglected. In both cases a controller is called for that is able to adapt its characteristics. Adaptive control is therefore a highly relevant part of control theory. The chapter lacks clear motivation. In fact, it is only implicitly mentioned what exactly adaptive controllers are. The adaptive control schemes that are discussed in this chapter are adaptive versions of the high gain controllers that were treated in the previous chapter. Adaptive high gain control received ample attention in the 1980s. The work of S.A. Morse, B. Mårtensson, and many others is well known. Most of this work is not mentioned, let alone covered. This makes this chapter a somewhat unbalanced account of literature.

The sixth and last chapter deals with discrete implementation of controllers. The main concern here is to ensure that a digital implementation of a continuous time controller design yields a controlled behavior that satisfies the control specifications, at least approximately. The chapter more or less follows the subjects of the previous chapters. State feedback control, dynamic output feedback, singular perturbed systems, high gain controllers, and finally adaptive controllers are considered. Many of the results in this chapter were obtained by the authors.

In conclusion, the book under review presents a narrow selection of subjects. It appears that the selection is mainly driven by the research interests of the authors and not so much by the desire to come up with a well-balanced account of stability issues. It is therefore not quite clear to me which audience the authors had in mind. There are numerous books that cover the standard material from the first two chapters. The subsequent chapters treat more specialized subjects that are perhaps not really of great interest to the general audience. The book is written in a staccato theorem-proof style and lacks clear motivation. Some of the proofs are unnecessary long and complicated. Each chapter concludes with an overview of the relevant literature. This is, of course, most welcome. However, for example the overview at the end of chapter 5 misses some of the more central publications.

J.W. Polderman

J. Haigh

Probability Models

(Springer Undergraduate Mathematics Series)

Berlin: Springer-Verlag, 2002,

256 p., prijs €32,-

ISBN 1-85233-431-2

Probability models is a non-measure theoretic introduction on probability theory with some applications to the theory of stochastic processes and their applications. It is apparently designed for a first or second year introductory course to probability. The only knowledge required is contained in every calculus class (sequences, convergence criteria for series, ...).

The theorems that are given are motivated by numerous examples from everyday life (such as dice and cards on the well-known birthday problem), thereby increasing the accessibility of their content. Moreover, the theorems are also proven in a very pedagogic way, thereby abstaining from stating them under the most general conditions (this applies in particular to the Strong Law of Large Numbers). The applications include branching processes and Markov chains (with random walks as a particular example), queuing and renewal theory, and even Brownian motion.

The reader may now feel: '*yet another introductory book on probability theory*'. Given the selection of topics and in particular the choice of the examples, the book under review indeed hardly differs from the standard textbooks in the area of probability theory. What makes it special, though, is the didactic approach. Neither is the book overloaded with notation, nor is it burdened with too many technical details arising from the desire for optimal conditions.

This is basically also the reason why I would advice to consult this book when preparing an introductory course in probability theory (for mathematics students as well as for students from physics, computer science, or engineering). Students could benefit from the intuitive picture they get, before they are confronted with the technical issues from measure theory and measure-theoretic probability.

M. Löwe

V. Tsurkov

Large-Scale Optimization – Problems and Methods

(*Applied Optimization*)

Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001

324 p., prijs €137,50

ISBN 0-7923-6817-7

The author is the head of the Department of Complex Systems at the Computing Center of the Russian Academy of Sciences. In the preface he writes that this monograph can be regarded as a survey of work in decomposition over the last 30 years. It is based on work of the author, his colleagues and students from the Complex Systems Department of the above computing center, as well as his close partners from other universities and institutes.

The need for decomposition techniques is obvious when dealing with large-scale problems. Methods that work well for smaller problems, may fail when the dimension of the problem grows large. Higher dimensions may cause computer memory to become insufficient or the computing time may become so high that a solution of the problem will not become realistically available. It has turned out to be good practice to partition such a large-scale problem into a number of problems of lower dimension by using so-called dimension-reduction schemes. In some situations such a decomposition follows naturally from the specific structure, e.g., when the constraints occur in a block structure. This is the idea underlying the well known Dantzig-Wolfe method in linear optimization and the Sanders method for variational problems. In fact, the basic idea is then to reduce a multi-dimensional problem to a certain combination of lower dimensional problems.

The monograph presents selected aspects of the dimension-reduction problem. It consists of four rather independent chapters, entitled Exact and Approximate Aggregation, Iterative Aggregation, Introduction to Block Integer Programming and Block

Problems with a Special Condition for Coupling Variables. The first two chapters mainly deal with aggregation methods, whereas in the last two chapters the emphasis is on decomposition methods. The author writes in the preface: 'Within the bounds of a monograph it is not possible to give a complete analysis of methods. Rather, the basic concepts of the various approaches are presented and the interested reader is referred to the cited literature for a detailed analysis. The monograph is presented for the reader who has a university-level background in the methods of optimization and control.' Readers who want to consult the references should be able to read Russian, because most of them are written in that language.

It may be clear from the above discussion that this is a book for specialists. The book is well written. I would have liked to see the words decomposition and aggregation in the title, because these are the methods which are applied in this monograph to various types of large-scale optimization problems.

C. Roos

S. Kilian, S. Turek

The Virtual Album of Fluid Motion

Berlin: Springer-Verlag, 2002

DVD-rom, prijs €92,75

ISBN 3-540-14900-7

The Virtual Album of Fluid Motion omvat meer dan de titel doet vermoeden. Hoewel het album met een veelheid aan kleurrijke videopresentaties en bijbehorende uitleg een belangrijk onderdeel van de DVD-rom is, wordt er ook veel aandacht besteed aan de numerieke kant van de stromingssimulaties. Op de DVD kan men bijvoorbeeld een eindig elementen pakket (FEATFLOW) vinden met bijbehorende gridgenerator en postprocessors, alsmede artikelen waarin aspecten van de numerieke technieken zoals deze gebruikt zijn in het FEATFLOW programma uitgebreid worden behandeld. De FEATFLOW broncode (versie 2.1), geschreven in Fortran 77, kan men vrij op een lokale computer installeren. Bij voorkeur op een Linux of een Unix systeem, maar ook een installatie onder Windows is mogelijk. Voorwaarde is wel dat men over een geschikte Fortran compiler beschikt. Bij eventuele problemen is er voor de Linux en Unix gebruiker de mogelijkheid om ondersteuning te krijgen. Volgens de auteurs wordt FEATFLOW veelvuldig gebruikt op de universiteit, bijvoorbeeld om studenten wiskunde, natuurkunde, mechanica enzovoort, kennis te laten maken met moderne numerieke software in combinatie met geavanceerde grafische en multimedia tools. Tevens wordt FEATFLOW gebruikt in afstudeerprojecten en bij promotieonderzoek. De DVD-rom wordt samen met een handzaam introductieboekje geleverd in een plastic doosje.

Het eerste wat opvalt bij het inlezen van de DVD is dat deze niet automatisch gestart wordt. Om te beginnen moet men het bestand '*index.html*' in de webbrowser laden om vervolgens door een veelheid aan informatie geleid te worden. Ondanks de enorme hoeveelheid aan informatie is de structuur behoorlijk overzichtelijk, mede omdat het ontwerp van de diverse onderdelen redelijk uniform gehouden is. Het virtuele album zelf omvat een groot aantal simulaties van viskeuze twee-dimensionale (2D) en drie-dimensionale (3D) onsamendrukbare stromingen die in de loop der jaren meestal door studenten zijn uitgevoerd. Hierbij kan men denken aan de stroming rond een roterende volleybal,

de stroming rond een vrachtauto enzovoort. Alle simulaties zijn voorzien van een degelijke beschrijving en worden geïllustreerd middels een aantal begeleidende filmpjes. Helaas laten de auteurs hier een paar steken vallen. Onder Windows blijken niet alle mpeg filmpjes door de 'Windows Media Player' te kunnen worden weergegeven. Hoewel minder storingsgevoelig dan die media player blijkt ook de 'Realplayer' niet in alle gevallen te werken. Om de ergernis nog verder te vergroten zijn een paar filmpjes geproduceerd in Quicktime formaat, waarvoor men weer de 'Quicktime player' van Apple nodig heeft. Achteraf bleek de Quicktime player de enige waarmee alle filmpjes konden worden afgespeeld. De auteurs zouden er goed aan doen om hier voor meer uniformiteit te zorgen en zich ervan te verzekeren dat alle filmpjes ook daadwerkelijk afspeelbaar zijn op de diverse platformen of op zijn minst erop te wijzen dat voor het afspelen van de filmpjes op een Windows systeem de Quicktime player dient te worden geïnstalleerd.

De aankoop van de DVD-rom is aan te raden voor mensen (studenten, onderzoekers en andere belangstellenden) die gebruik willen maken van - of nader kennis willen maken met - een modern eindig elementenpakket waarmee onsamendrukbare stromingsproblemen kunnen worden opgelost. Voor mensen die slechts geïnteresseerd zijn in het kijken naar kleurrijke stromings-simulatiefilmpjes is de aanschaf minder aan te raden. De CD-rom *Multi-Media Fluid Mechanics* is dan een betere keus. Ongetwijfeld hebben de auteurs veel moeite gestoken in het samenstellen van de DVD, desondanks is het eindresultaat nog voor verbetering vatbaar.

J. Wissink

P.G. Drazin

Introduction to Hydrodynamic Stability

(Cambridge Texts in Applied Mathematics)

Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

258 p., prijs £23,-

ISBN 0-521-00965-0

Uit het voorwoord valt af te leiden dat dit leerboek is ontstaan uit aantekeningen bij een caput college 'Hydrodynamic Stability' aan de Universiteit van Bristol in de jaren tachtig. Het boek richt zich op 'graduate students', die al een cursus 'Inleiding stromings-leer', 'Elementaire Lineaire Algebra en Analyse' en 'Partiële differentiaalvergelijkingen' hebben doorlopen. Begrippen zoals vorticeit, grenslaag, Euler-vergelijking, enzovoort, worden bekend verondersteld. Het boek behandelt instabiliteiten in stromingen vanuit vijf gezichtspunten: (1) waarneming, (2) numeriek experiment (3) linearisatie rond kleine verstoringen, (4) bifurcatie analyse en (5) niet-lineaire theorie (van Serrin). Alle klassieke instabiliteiten (onder andere Kelvin-Helmholtz, Rayleigh, Taylor, Görtel) passeren de revue. Daarna worden routes naar chaos geschetst, en het boek eindigt met een beschrijving van een aantal numerieke studies naar transitie. Het boek is glashelder geschreven. Afleidingen en analyses gaan stapje-voor-stapje. Ieder hoofdstuk eindigt met een uitgebreide collectie opgaven (zowel met als zonder ster). Het boek vormt een goede ingang tot het onderzoek naar 'Hydrodynamic Stability', zij het dat de doorkijkjes naar recent of lopend onderzoek niet rijk gezaaid zijn. Theorie en numerieke simulatie/waarneming worden veelvuldig verweven, veelal door na verbazing 'waarom zien we deze stromingspatronen in

een numerieke simulatie/waarneming' via een theoretische analyse tot een verklaring te komen: daarom zien we deze stromingspatronen! Echter, de keuze van de voorbeelden en toepassingen is erg traditioneel waardoor het boek ietwat zouteloos overkomt. Kortom dit leerboek vormt qua opzet, tekst, opgaven een uitstekende basis voor een caput college, waaraan de docent zelf naar believen sprankelende voorbeelden en toepassingen kan toevoegen.

R.W.C.P. Verstappen

W. Jäger, H. Krebs (eds.)

Mathematics - Key Technology for the Future Joint Projects between Universities and Industry

Berlin: Springer-Verlag, 2003

732 p., prijs €106,95

ISBN 3-540-44220-0

This is an unusual book. At first glance it reminds one of an Annual Report: mildly entertaining, but one usually has better things to do than actually reading it. In fact, it is a report, or more precisely, the proceedings of an extensive German governmental research program aimed at 'supporting joint projects involving mathematics and industry in order to speed up the transfer of knowledge and technology' (from the Preface). The 700-page book is simply a collection of 10-page mini-articles, each describing the progress of one of the projects in this program. There is little or no connection between the articles, though the editors have made a rough classification into themes.

Supposing, however, that one does take the time to actually read the mini-articles, one will find that they are generally well-written and accessible to a general applied audience. Naturally, computer methods and simulations are well represented, but there is also a fair share of hard analysis. And among the very broad collection there are a few gems. How about designing a catamaran which (theoretically) *leaves no waves* behind, thereby drastically reducing its drag? Or an algorithm to optimize the packing of suitcases in the trunk of your car?

Would I advise anyone to buy this book? Generally speaking, no, unless reading annual reports is your thing. On the other hand, if you're looking for reading material for an applied mathematician's waiting room, then look no further - this book is for you.

M. Peletier



S.A. Borovkova et al. (eds.)

Vakantiecursus 2002: Wiskunde en Gezondheid

Amsterdam: CWI Syllabus 50, 2002

140 p., prijs €15,85

ISBN 90-6196-513-6

Al sinds 1946 wordt op het CWI en aan de TUE jaarlijks een vakantiecursus georganiseerd, voor leraren in de exacte vakken van het vwo, havo en hbo. In 2002 stond deze cursus in het teken van *Wiskunde en Gezondheid*. In het gelijknamige boekje zijn de bijdragen van de verschillende sprekers bijeengebracht. De auteurs van

de verschillende hoofdstukken zijn elk op hun eigen wijze met het thema aan de slag gegaan, wat heeft geleid tot een breed spectrum aan interpretaties. Zowel de moeilijkheidsgraad als de onderwerpen lopen sterk uiteen.

Om de eerste twee hoofdstukken goed te kunnen volgen is naast de nodige wiskundekennis op het gebied van de toegepaste analyse ook een flinke dosis natuurkundekennis noodzakelijk. Deze hoofdstukken, over wiskundige modellen van respectievelijk het meten van hersenactiviteit en de behandeling van wijnvlekken, veronderstellen een zekere kennis van zaken als de Maxwell-vergelijkingen, Poissonvergelijkingen en andere differentiaalvergelijkingen. Deze hoofdstukken zijn met name interessant voor leraren met een natuurkunde-achtergrond.

Dat zelfs getaltheorie in een medische context kan worden toegepast wordt beschreven in een hoofdstuk over discrete tomografie, een vorm van beeldreconstructie. Met behulp van de Chinese reststelling wordt een analyse gegeven van de wiskundige aspecten die bij discrete tomografie een rol spelen.

Kansrekening en statistiek komen in maar liefst vier hoofdstukken aan bod. Deze hoofdstukken, over respectievelijk de bijdrage van Florence Nightingale aan de statistiek, de verspreiding van ziekten, het analyseren van data bij patiëntenonderzoek, en het analyseren van gewichtstoename en lengtegroei van jongens en meisjes, vereisen slechts een zeer elementaire voorkennis. Het hoofdstuk over Florence Nightingale is van geschiedkundige aard. Dit vormt een leuk contrast met de meer wiskundige hoofdstukken. Met name de hoofdstukken over ziektebesmetting en groei lijken uitstekend geschikt voor bestudering door leerlingen, bijvoorbeeld in het kader van een profielwerkstuk. Het hoofdstuk over lengtegroei en gewichtstoename is hiertoe zelfs uitgebreid met een extra hoofdstuk, dat praktische oefeningen voor de leerlingen bevat.

De organisatoren van de vakantiecursus zijn erin geslaagd een programma samen te stellen dat voor een breed publiek interessant is. Het boekje bevat voor elk wat wils en kan door leraren zowel gebruikt worden om hun eigen achtergrondkennis te verdiepen als om hun leerlingen van interessante opdrachten te voorzien.

K. J. Batenburg

klassieke problemen. Havin behandelt aspecten van het onzekerheidsprincipe ("een niet-nul object en zijn getransformeerde kunnen niet beide klein zijn"), terwijl zijn plaatsgenoot Nikolski recente resultaten over het 'onzichtbare' spectrum van Banachalgebra's bespreekt. Saffari heeft een boeiend artikel over polynomiale extremaalproblemen, dat hij wegens tijdgebrek abrupt moet beëindigen; zie het slot van zijn verhaal. Kahane heeft een historisch getint overzichtsartikel over kansrekening en Baire theorie, met onder meer zijn geliefde dunne verzamelingen. Körner behandelt in "does order matter?" op zijn karakteristieke wijze de effecten van verandering van sommatievolgorde bij orthogonale reeksen en verkrijgt een nieuw resultaat over wavelets. Wavelets zijn ook vertegenwoordigd door twee artikelen, een overzichtsartikel van Weiss en Wilson en een meer specialistisch artikel van Jaffard. Ook over het aanverwante vak Gabor Analyse zijn er twee bijdragen (Gábor was de uitvinder van de holografie). Onze landgenoot Guido Janssen, die aan de wieg van dit vakgebied heeft gestaan, geeft een gedegen overzicht van deze theorie, terwijl men in een meer toegespitst verhaal van Zeevi onder meer kan lezen waarin beide vakgebieden verschillen. Tolimieri en An bespreken minder bekende Fast Fourier Transforms. Moran heeft een lang artikel over radar; ook voor een 'zuivere' lezer is dit heel interessante stof. Nobelprijswinnaar Hauptmann schrijft over het faseprobleem bij röntgenkristallografie. In een zeer kort artikel van Grünbaum over het plotten van Besselfuncties tenslotte worden enkele bekende Nederlandse wiskundigen geciteerd. In het tweede deel van het boek worden open problemen besproken, waarna nog een nagekomen (?) artikel over asymptotische analyse volgt. Het boek maakt een goed verzorgde indruk, al had wat intensiever corrigeren heel wat slordigheden kunnen voorkomen. Dit geldt al helemaal voor de omvangrijke index, waar blijkbaar iedere controle achterwege is gebleven. Niettemin, een mooi boek waarin men met genoegen zal lezen en waaruit men veel kan leren.

J.D. Stegeman

J.S. Byrnes (ed.)

Twentieth Century Harmonic Analysis, a Celebration

(Nato science series)

Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001

412 p., prijs €168,-

ISBN 0-7923-7168-2

De twintigste eeuw was een Gouden Eeuw voor de commutatieve harmonische analyse. Om dit heuglijke feit te vieren vond in juli 2000 in Italië een NATO-conferentie plaats waarvoor vijftien experts uit de zuivere en de toegepaste hoek waren uitgenodigd. Hun exposés zijn nu in boekvorm verschenen. De onderwerpen zijn zeer gevarieerd, maar het thema is steeds het verband met de harmonische analyse. Alle artikelen zijn overzichtelijk geschreven en prettig leesbaar. Ik geef een opsomming, enigszins gerangschikt van zuiver naar toegepast. Montgomery geeft allerlei voorbeelden van verbanden met analytische getaltheorie (gelijkverdeling, exponentiële sommen, zetafunctie, ...). Shapiro laat zien hoe operatorentheorie kan worden gebruikt bij

Problemen/UWC

Universitaire Wiskunde Competitie

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina <http://academics.its.tudelft.nl/uwc>

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Er worden drie editieprijzen toegekend, van 100, 50, en 25 euro. De puntentotalen van winnaars tellen voor 0, 50, en 75 procent mee in de laddercompetitie. De aanvoerder van de ladder ontvangt een prijs van 100 euro en begint daarna weer onderaan. Daarnaast wordt twee maal per jaar een ster-opgave aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 euro toegekend.

Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in $\text{\LaTeX}$ wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 augustus 2004. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.



Opgave A

The sequence $333111333131333111333\dots$

is identical to the sequence of its block lengths. Compute the frequency of the number 3 in this sequence.

Opgave B

In Quasiland every two people are each others friend or foe. Any two friends have exactly one mutual friend and any two foes have at least ten mutual friends. Can there be foes in Quasiland?

Opgave C

Let A be a ring and let $B \subset A$ be a subring. As a subgroup, B has finite index in A . Show that there exists a two-sided ideal I of A such that $I \subset B$ and I has finite index as a subgroup of A .

Editie 2003/4

Voor de UWC ontvingen wij inzendingen van Syb Botma, Filip Cools en Joeri Vanderveken, Kenny De Commer, en Hendrik Hubrechts.

Opgave 2003/4-A

For each non-negative integer n , let a_n be the number of digits in the decimal expansion of 2^n that are at least 5. For example, $a_{16} = 4$ since $2^{16} = 65536$ has four digits that are 5 or higher. Evaluate the sum $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$.

Oplossing By Filip Cools and Joeri Vanderveken, Kenny De Commer, Hendrik Hubrechts, Bert Jagers, and Jaap Spies.

Here is the solution of Hendrik Hubrechts. In this solution $x \bmod y \in \{0, 1, \dots, y-1\}$. Let $M \in \mathbf{N}$. For $n \in \mathbf{N}$ define $c_n = 1$ if $2^n \bmod 2M \geq M$ and $c_n = 0$ otherwise. We claim that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n} = \frac{1}{M}$.

Using the identities

$$(2^n \bmod 2M) - (2^n \bmod M) = Mc_n, \quad \frac{2^n \bmod 2M}{2} = 2^{n-1} \bmod M$$

for $n \geq 1$, the claim can be deduced as follows:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n} &= \frac{1}{M} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \bmod 2M}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \bmod M}{2^n} \right) \\ &= \frac{1}{M} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \bmod M}{2^{n-1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \bmod M}{2^n} \right) = \frac{1}{M}. \end{aligned}$$

It is possible to generalize this with k^n instead of 2^n and $c_n = j$ for the largest $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ such that $k^n \bmod kM \geq jM$. The sum then still adds up to $\frac{1}{M}$. Further generalizations are possible, but the statements get more involved.

With the help of the above claim we can prove a generalized version of the problem. Let $N \geq 1$ and let a_n be the number of digits $\geq N$ in the expansion of 2^n in the $2N$ -number system. Then

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \frac{2}{2N-1}.$$

To prove this, apply the claim with $M_i = N(2N)^i$ for $i \in \mathbf{N}$. The i -th digit in the expansion of 2^n in the $2N$ -number system is $\geq N$ if and only if

$$2^n \bmod (2N)^i \geq N(2N)^{i-1}$$

or equivalently, $2^n \bmod 2M_{i-1} \geq M_{i-1}$. Hence the sum is equal to

$$\frac{1}{M_0} + \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} + \dots = \frac{2N}{N(2N-1)}.$$

The case $N = 5$ shows that the answer to the problem is $\frac{2}{9}$.

This problem was suggested by Jan van de Lune.

Opgave 2003/4-B Let G be a group such that squares commute and cubes commute, i.e., $g^2h^2 = h^2g^2$ and $g^3h^3 = h^3g^3$ for all $g, h \in G$. Show that G is abelian.

Oplossing This problem was solved by Filip Cools and Joeri Vanderveken, Kenny De Commer, Bert Jagers, Nicky Hekster and Hendrik Hubrechts. Bert Jagers and Nicky Hekster have generalized the problem to commuting powers that are coprime.

Here is the solution of Hendrik Hubrechts. Define $\alpha = gh$ and $\beta = hg$. We will show in three steps that $\alpha = \beta$. First observe that

$$\alpha\beta\alpha = gh^2g^2h = gg^2h^2h = g^3h^3 = h^3g^3 = hg^2h^2g = \beta\alpha\beta$$

This implies that

$$(\alpha\beta\alpha)\alpha = \beta\alpha\beta\alpha = \beta(\alpha\beta)^2\beta^{-2}\beta = \beta^{-1}(\alpha\beta\alpha)\beta^2 = \alpha\beta^3$$

which implies that $\alpha^2 = \beta^2$. Now define $a = \alpha\beta$ and $b = \beta\alpha$ and apply the same calculation to find that $a^2 = b^2$, or, $\alpha\beta\alpha\beta = \beta\alpha\beta\alpha = \beta^2\alpha\beta$. Now $\beta\alpha\beta$ cancels so $\alpha = \beta$. This problem was suggested by Hendrik Lenstra and Bart de Smit for coprime powers n and m , instead of 2 and 3.

Opgave 2003/4-C

Let $(X_n)_{n \geq 1}$ be a sequence of independent and identically distributed random variables with $P\{X_n = 1\} = P\{X_n = -1\} = \frac{1}{2}$. Set $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Calculate

$$P\{\exists n \geq 1 \text{ such that } S_{3n} = n\}.$$

Oplossing By Syb Botma, Filip Cools and Joeri Vanderveken, Hendrik Hubrechts, H. Reuvers and Jaap Spies.

Here is a slight generalization of the solution of Filip Cools and Joeri Vanderveken. Let $m \geq 2$ and denote $\sum_{n=1}^{\infty} P(S_{mn} = n)$ by A_m . Now,

$$\begin{aligned}
 &P(\exists n \geq 1 : S_{mn} = n) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_{mn} = n \wedge \forall i \in \{1, \dots, n-1\} : S_{mi} \neq i) \\
 &= A_m - \sum_{n=1}^{\infty} P(S_{mn} = n \wedge \exists i \in \{1, \dots, n-1\} : S_{mi} = i) \\
 &= A_m - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} P(S_{mn} = n \wedge S_{mi} = i \wedge \forall j \in \{i+1, \dots, n-1\} : S_{mj} \neq j) \\
 &= A_m - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=i+1}^{\infty} P(S_{mi} = i) \cdot P(S_{m(n-i)} = n-i \wedge \forall j \in \{1, \dots, n-i-1\} : S_{mj} \neq j) \\
 &= A_m - \sum_{i=1}^{\infty} P(S_{mi} = i) \cdot \sum_{n=i+1}^{\infty} P(S_{m(n-i)} = n-i \wedge \forall j \in \{1, \dots, n-i-1\} : S_{mj} \neq j) \\
 &= A_m - \sum_{i=1}^{\infty} P(S_{mi} = i) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} P(S_{mn} = n \wedge \forall j \in \{1, \dots, n-1\} : S_{mj} \neq j) \\
 &= A_m \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(S_{mn} = n \wedge \forall j \in \{1, \dots, n-1\} : S_{mj} \neq j) \right) \\
 &= A_m (1 - P(\exists n \geq 1 : S_{mn} = n)).
 \end{aligned}$$

This implies that

$$P(\exists n \geq 1 : S_{mn} = n) = \frac{A_m}{1 + A_m}.$$

Now take $m = 3$ and observe that $S_{3n} = n$ if and only if $X_k = -1$ occurs exactly n times. Hence $A_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} \frac{1}{2^{3n}}$, which evaluates to $\frac{3}{\sqrt{5}}$ using Maple. Thus,

$$P(\exists n \geq 1 : S_{3n} = n) = \frac{3}{3 + \sqrt{5}}.$$

This problem was proposed by Mike Keane.

Uitslag Editie 2003/4

De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

Naam	A	B	C	Totaal
1. Hendrik Hubrechts	9	9	9	108
2. Filip Cools en Joeri Vanderveken	8	8	9	101
3. Kenny De Commer	9	8	—	59
4. Syb Botma	—	—	8	40

De top 5 in de laddercompetitie is als volgt:

Naam	Punten
1. Syb Botma	180
2. Tom Claeys	138
3. Gerben Stavenga et.al.	136
4. Peter Bruin	99
5. Kenny De Commer	90