

Inhoud | Contents

2	Colofon
3	Van de voorzitter <i>Eduard Looijenga</i>
4	Agenda
6	Nieuws
9	Van het WG
18	In memoriam Harold Scott Macdonald Coxeter <i>T.A. Springer</i>
21	In memoriam Adriaan Cornelis Zaanen <i>Wim Luxemburg, Marinus Kaashoek, Ben de Pagter</i>

Oratie | Inaugural lecture

26	De toepassing als leidraad <i>Wil Schilders</i>
----	---

Over Jean-Pierre Serre | About Jean-Pierre Serre

35	Parti d'un exercice, on se retrouve avec une théorie <i>Gunther Cornelissen</i>
38	I hope we shall continue <i>Martin Raussen, Christian Skau</i>
42	Correspondance Grothendieck-Serre <i>John Tate</i>

Onderzoek | Research

48	GPS and integer estimation <i>Peter Teunissen</i>
54	Rondom het Jacobivermoeden <i>Arno van den Essen</i>

Geschiedenis | History

58	Een onbekende bekende wiskundige <i>Robbert Fokkink</i>
----	---

Onderwijs | Education

64	Off the beaten track <i>Stephan Hussmann</i>
----	--

Boeken | Books

69	Italienische Reise <i>Pieter Moree</i>
72	Boekbesprekingen

Rubrieken | Departments

45	Brieven <i>Letters to the editor</i>
47	Nieuw-Zeeuwse Kroniek <i>Hans van Ditmarsch</i>
83	Problemen/UWC

Brief van Grothendieck aan Serre van 2 april 1984.
Zie bladzijde 42 voor een recensie van de onlangs
in het Engels vertaalde correspondentie.

KWG één jaar

Vorig jaar bestond ons genootschap 225 jaar. Het bereiken van deze mooie leeftijd is natuurlijk vooral een verdienste van onze voorgangers, maar het was aan deze generatie om daar passend aandacht aan te geven. Dat is gelukt lijkt me, want de gastheer van het NMC 2003, de wiskunde-afdeling van wat tegenwoordig heet de Radboud-universiteit had ons een fraai programma bereid. Zo liet een gezelschap van geleerden en bestuurders zijn licht schijnen over de rol en het belang van de wiskunde in onze samenleving onder de naam 'Wiskunde nodig en in nood'.

De bekroning van het NMC 2003 was de toekenning van het Koninklijk predikaat. Dat werd bekend gemaakt werd door de burgemeester van Nijmegen, G. ter Horst en overeenkomstig een vertrouwde vaderlandse traditie verzuimde zij niet om met enige trots melding te maken van de eigen slechte prestaties op het gebied van de wiskunde in haar schooltijd. Zulks gaat natuurlijk gepaard met altijd dezelfde, niet mis te verstane, impliciete boodschap, een verschijnsel dat vermoedelijk verband houdt met het thema van het lustrumprogramma.

In wezen is datzelfde op een verontrustende wijze aan de orde bij de revisie van de profielen (de zogenaamde tweede fase) van VWO en HAVO. Men is het misschien al weer vergeten, maar de aanleiding hiervoor was het kruisen van de wereldkrommen van een paar tomaten en die van staatssecretaris Adelmund tijdens een demonstratie van enkele middelbare scholieren op het Haagse Malieplein. Dat bracht de voormalige vakbondsvrouw kennelijk in verwarring, want het moet een oude reflex geweest zijn die haar toen bewoog te verklaren: 'Ik sta achter jullie'. Hiermee zette zij een ambtelijk-politieke trein in beweging die niet meer te stuiten bleek. Voor de buitenstaander moge dit het startschot zijn geweest van een nieuwe reeks in één der langstlopende politieke *sitcoms* (die zeker zijn komische momenten heeft), betrokkenen weten helaas maar al te goed dat het geen zeepbellen zijn die hier geblazen worden. Zo werd voorgesteld om natuurkunde uit het bètaprofiel 'Natuur en Gezondheid' te schrappen en nu is het voorstel om het wiskundepakket van de twee bètaprofielen aanzienlijk te reduceren, dit onder meer ten gunste van, jawel, het nieuwe vak Lichamelijke Oefening II. Het KWG is hiertegen samen met de ander de beroepsverenigingen in de bètasfeer (verenigd in de zogenaamde *Bètafederatie*) in het geweer gekomen, maar aan de vooravond van de bespreking van deze voorstellen der vaste kamercommissie (dit stukje dagtekent 1 februari 2000) zie ik het somber in.

Nu we het toch over wiskunde-onderwijs op de middelbare school hebben: zoals bekend bepleit het KWG al enig tijd het aanbieden van een universitair traject voor tweedegraads lerarenopleidingen in de vorm van een Bachelorstudie. Dat idee heeft

intussen op een hoger niveau weerklank gevonden en de verwezenlijking ervan lijkt kans te maken. Bij de argumenten ten gunste genoemd in <http://www.wiskgenoot.nl/nieuws/dossier> heeft zich nu een nieuw gevoegd en dat is onze zorg over de kwaliteit van de bestaande tweedegraads lerarenopleidingen.

Degenen die na de afsluiting van deze vierjarige (!) studie zo enthousiast zijn dat zij zich bij een universiteit melden voor een wiskundestudie worden als regel tot het tweede jaar toegelaten. De ervaring in Utrecht en ook elders is dat een meerderheid het dan toch niet redt. Omdat het hier een relatieve top betreft, lijkt de conclusie onontkoombaar dat vele tweedegraads lerarenopleidingen ernstig tekort schieten waar het gaat om het bijbrengen van vakkennis. (En dit dreigt nog erger te gaan worden: blijkens een pas uitgekomen notitie van het *Samenwerkingsorgaan Beroepskwaliteit Leraren*, een club met een hoog vakbondsgehalte, volstaat het kunnen maken van de opgaven die de leerlingen krijgen voorgelegd. Die opgaven mogen dus niet te moeilijk te zijn en natuurlijk over twintig jaar, wanneer een aldus opgeleide onderwijsprofessional zijn top bereikt, niet wezenlijk verschillen van die van vandaag.) Tijdens een discussiebijeenkomst over het middelbaar onderwijs tijdens het NMC 2003 in Nijmegen werden door de daar aanwezige leraren vele voorbeelden genoemd die dat illustreren.

Dit verdient mijns inziens veel meer aandacht van de Nederlandse (academische) wiskundige gemeenschap dan tot nu toe het geval is. Het ligt daarbij voor de hand dat de Nederlandse Commissie voor Onderwijs in de Wiskunde (waarin zowel het KWG als de NVvW vertegenwoordigd zijn en die dit jaar vijftig jaar bestaat) zich actief met deze materie gaat bezig houden en zich daarbij verstaat met andere organisaties voor wie dat ook een punt van zorg is, zoals de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Temeer omdat de voorzitter van de aan de KNAW ondergeschikte Akademieraad voor de Wiskunde van oordeel is dat dit buiten het werkterrein van deze raad valt.

Laat ik besluiten met een positief bericht: het staat nu vast dat het het vijfde Europees Mathematisch Congres in 2008 te Amsterdam gehouden wordt. Het *site committee* van de EMS bezocht afgelopen zomer de beoogde plek (de RAI) en was zeer te spreken over het voorstel van de drie Amsterdamse instellingen. In de loop van dit jaar zal in dit blad hierover nader bericht worden.

Eduard Looijenga

voorzitter van het Koninklijk Wiskundig Genootschap

Disciplinegroep Wiskunde, Universiteit Utrecht, Postbus 80.010, 3508 TA Utrecht
looijeng@math.uu.nl

Agenda

Upcoming Events

maart 2004

8–12 maart

☐ Buildings and Groups of Lie-Type

Minisymposium over semi-simpele Liegroepen vanuit combinatorisch perspectief. Docent: Bernhard Mühlherr (Université Libre de Bruxelles).

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.win.tue.nl/math/eidma

15–19 maart

☐ Mathematics with Industry

48ste Europese Studiegroep. Bedrijven leveren problemen aan die wiskundigen proberen op te lossen.

plaats Technische Universiteit Delft

info ta.twi.tudelft.nl/swi

19 maart

☐ Kangoeroe

Wedstrijd voor middelbare scholieren en voor leerlingen van groep 7 en 8 van de basisschool.

info www.math.kun.nl/kangoeroe

23 maart

☐ Johan Bernoulli lezing

Prof.dr.ir Bart de Moor (Katholieke Universiteit Leuven) verzorgt de Bernoulli lezing met titel *Systems biology: a new mathematical frontier*

plaats Aula Academiegebouw, Rijksuniversiteit Groningen

25–26 maart

☐ Nationale rekendagen

Conferentie, gewijd aan het rekenonderwijs.

plaats De Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/rekenweb/rekendagen

26 maart – 26 september

☐ Goochelen met getallen

Expositie over de plaats en historie van getallen in de samenleving.

plaats Museum Boerhaave, Leiden

info www.museumboerhaave.nl

29 maart – 4 april

☐ Workshop Conformal Invariance, Scaling limits and Percolation

Organisatoren: Nina Gantert, Remco van der Hofstad

plaats Eurandom

info www.eurandom.tue.nl

april 2004

16–17 april

☐ Nederlands-Belgisch Mathematisch Congres

Gast sprekers: Neil Sloane (AT&T), Bernard de Baets (Universiteit Gent) en Stef Tijs (Universiteit van Tilburg), Manjul Bhargava (Princeton University).

plaats Universiteit van Tilburg

info www.uvt.nl/nmc2004

20–29 april

☐ Continuous and Discrete Random Spatial Processes

Organisatoren: J. van den Berg (CWI), B. Nienhuis (UvA).

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

21 april

☐ Koksma symposium

Symposium naar aanleiding van de honderdste geboortedag van J.F. Koksma.

plaats Vrije Universiteit Amsterdam

info maryke@few.vu.nl

mei 2004

10–14 mei

☐ Approximation Algorithms and Games on Networks

Minicursus op de doorsnede van de vakgebieden algoritme-ontwerpen en speltheorie door prof. Éva Tardos (Cornell University, USA).

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.win.tue.nl/math/eidma

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

15 mei

□ Symposium X Historische kring reken- en wiskunde onderwijs

Organisatie: Freudenthalinstituut.

plaats Hogeschool Domstad, Utrecht**info** www.fi.uu.nl/nl/indexagenda.html

28 mei

□ Panama voorjaardag

Panama voorjaardag en NVORW-jaarvergadering.

plaats De Uithof, Utrecht**info** www.fi.uu.nl/panama/voorjaarsdag

juni 2004

3–25 juni

□ Lie groups in Analysis, Geometry and Mechanics

MRI Spring School 2004, AiO-cursus van drie weken. Sprekers: J.J. Duistermaat, J.A.C. Kolk, R.H. Cushman, G.J. Heckman, E.P. van den Ban.

plaats Universiteit Utrecht**info** www-mri.sci.kun.nl

9–11 juni

□ Onderwijs Research Dagen 2004

plaats Universiteit Utrecht**info** www.fi.uu.nl/nl/indexagenda.html

14–18 juni

□ Moda 7

Conferentie over het ontwerpen van statistische experimenten.

plaats Kapellerput, Heeze**info** www.eurandom.tue.nl

21–25 juni

□ 13th European Conference for Mathematics in Industry

Internationale conferentie over wiskundig modelleren van industriële processen.

plaats Technische Universiteit Eindhoven**info** www.ecmizoo4.tue.nl

23–25 juni

□ Workshop HPOPT 2004

Internationale workshop over High Performance Optimization Techniques met thema: Optimization and Polynomials.

plaats CWI, Amsterdam**info** www.cwi.nl/~monique/hpopt2004

30 juni

□ MSOM Multi-Echelon Inventory Conference

plaats Eindhoven**info** www.tm.tue.nl/opc/msom2004

juli 2004

1–2 juli

□ MSOM 2004 Conference

plaats Eindhoven**info** www.tm.tue.nl/opc/msom2004

4–11 juli

□ ICME-10

10th International Congress on Mathematical Education

plaats Kopenhagen, Denemarken**info** www.icme-10.dk

6–18 juli

□ Internationale Wiskunde Olympiade

De 45ste versie van het grootste internationale wiskundetoernooi voor middelbare scholieren.

plaats Athene, Griekenland**info** olympiads.win.tue.nl/imo/index.html

augustus — oktober 2004

15–19 augustus

□ International Society for Clinical Biostatistics 2004

Internationale conferentie georganiseerd door de afdeling Medische Statistiek van de Leiden University Medical Centre (LUMC).

plaats Leiden**info** iscb2004.clinicalresearch.nl

23–26 augustus

□ Harmonic Analysis and Homogeneous Spaces

Workshop, gewijd aan harmonische analyse en haar toepassingen in de mathematische fysica, niet-communicatieve meetkunde en getallentheorie.

plaats Lorentz Center, Universiteit Leiden**info** www.lc.leidenuniv.nl

27 augustus

□ Special day in honour of Gerrit van Dijk

Special day in honour of Gerrit van Dijk on the occasion of his 65th birthday.

plaats Universiteit Leiden**info** harmonic@math.leidenuniv.nl

30 augustus–3 september

□ Workshop Algebraic Cycles and Motives

Organisatoren: S.J. Edixhoven, J. Nagel, C. Peters.

plaats Lorentz Center, Universiteit Leiden**info** www.lc.leidenuniv.nl

6–8 oktober

□ Woudschoten-conferentie

De 29-ste conferentie van de Nederlands-Vlaamse Numerieke Wiskunde Gemeenschappen. Thema's van deze conferentie zijn Computational electromagnetics en Geometrische integratie voor ODEs en PDEs.

plaats Conferentiecentrum Woudschoten, Zeist**info** www.cwi.nl/projects/wnw/conf2004

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar naw@math.leidenuniv.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Nederlands-Belgisch Mathematisch Congres

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap en het Belgisch Wiskundig Genootschap houden dit jaar een gezamenlijk congres. Het congres vindt plaats op vrijdag 16 en zaterdag 17 april 2004 aan de Universiteit van Tilburg.

Er zijn drie hoofdvoordrachten. Stef Tijs (Universiteit van Tilburg) geeft een voordracht over Nash-evenwichten, Bernard De Baets (Universiteit van Gent) spreekt over vage verzamelingen en Neil Sloane (AT&T) over zijn 'On-Line Encyclopedia of Integer Sequences'. Verder is er de tweejaarlijkse Beeger lezing (getaltheorie) door Manjul Bhargava (Princeton University), een speciale voordracht over gokken in het casino door Ben van der Genugten (Universiteit van Tilburg) en een interactieve veiling (met een echte veiling) door Casper de Vries (Erasmus Universiteit Rotterdam). Daarnaast zijn er vijftien minisymposia, korte presentaties van promovendi en aangemelde voordrachten.

Voor het eerst is zaterdag een congresdag. De organisatie verwacht dat dit interessant kan zijn voor hbo- en vwo-docenten. Het programma houdt hiermee rekening en er is een speciaal tarief voor deelname op zaterdag.

Voor informatie, zie <http://www.uvt.nl/nmc2004>

Willem Haemers

Veertigste Mersenne-priemgetal gevonden

Het GIMPS-project (*Great Internet Mersenne Prime Search*) heeft op 2 december 2003 aangekondigd dat Michael Shafer (werkzaam op de Michigan State University) het veertigste Mersenne-priemgetal

$$2^{20996011} - 1$$

gevonden heeft. Het getal bestaat uit meer dan zes miljoen cijfers en slaat daarmee het vorige record $2^{13466917} - 1$, dat gevonden werd op 14 november 2001 en iets meer dan vier miljoen cijfers telde.

Het GIMPS-project wordt op dit moment gedragen in een wereldwijd virtueel netwerk van ongeveer 211.000 computers. Mersenne-priemgetallen zijn genoemd naar Marin Mersenne, een Franse geestelijke, die zo'n driehonderd jaar geleden als eerste getallen van het type $2^p - 1$ bestudeerde. (In die laatste formule is ook p , de exponent van 2, een priemgetal.) Bij het GIMPS-project wordt gebruik gemaakt van software ontwikkeld door George Woltman en Scott Kurowski, draaiend op 'gewone' PC's.

Informatie: www.mersenne.org/20996011.htm

Dick Klingens

Koksma Symposium

Op woensdag 21 april 2004 vindt op de Vrije Universiteit voor een breed publiek een symposium plaats naar aanleiding van de honderdste geboortedag van J. F. Koksma (1904-1964), voornaamste grondlegger van de beoefening van de wiskunde aan de VU. Koksma promoveerde op 4 juni 1930 bij Van der Corput in Groningen. Op 10 oktober van hetzelfde jaar werd hij gewoon hoogleraar aan de VU. Voor de VU, die zich als universiteit waar moest maken, was Koksma een gouden greep. Hij was een goed wiskundige, die onder meer met Erdős samenwerkte.

Zijn hoofdwerk is *Diophantische Approximationen* uit 1936. Koksma was ook een doortastend netwerker, die binnen het Mathematische Centrum en bij de organisatie van het Internationale Mathematische Congres in Amsterdam een grote rol speelde. En hij gaf ook nog uitstekend college, daarbij het contact met zijn gehoor voortdurend handhavend. "U zit toch nog wel in de diligence, meneer Kok", sprak hij ooit,

toen student Kok glazig begon te kijken.

Op het symposium zal ook het eerste exemplaar van het boek *Worsteling naar waarheid* van H. Blauwendraat worden gepresenteerd. Dit boek beschrijft de geschiedenis van het wiskunde- en informatica-onderwijs en -onderzoek aan de Vrije Universiteit.

Aan het symposium werken onder meer mee: Hendrik Blauwendraat, Gerard Alberts, Rob Tijdeman en Cor Baaijen. Aanvang: 14.30 uur. Plaats: zaal D107, Gebouw voor Natuurwetenschappen.

Inlichtingen: T.Koetsier@few.vu.nl

Teun Koetsier



Omdat de Leidse universiteit was gesloten, promoveerde N.G. de Bruijn (midden voor) in 1943 niet bij Kloosterman (rechts zittend), maar aan de VU bij Koksma (derde van links op de eerste rij, naast Bottema).

Nieuwe opzet tweede fase gepubliceerd en bijgesteld

Donderdag 4 december heeft minister Van der Hoeven de eind oktober toegezegde nieuwe opzet voor de profielen in havo/vwo aan de Tweede Kamer gezonden. Globaal is de opzet drie verplichte vakken per profiel, één vak te kiezen uit een beperkt cluster en één keuzevak in het vrije deel.

Op 4 februari 2004 zijn de schema's met de invulling van het havo en het vwo bijgesteld na het overleg van de minister met de vaste commissie voor onderwijs van de tweede kamer. Het is opvallend dat het vak natuurkunde niet langer verplicht is bij het profiel Natuur en Gezondheid.

Voor het downloaden van de brief van de minister en voor een schema van de aanpassing, zie: www.tweedefase-loket.nl/downloaden/index.php

Gerard Koolstra

Nieuwe profielen voor havo en vwo zijn een ramp

De rectores van de drie technische universiteiten J. Fokkema, R. van Santen en F. van Vught waarschuwen in een brief in de NRC voor de gevolgen van het nieuwste plan van minister Verhoeven. Enige citaten:

"Begin december heeft minister Van der Hoeven haar nieuwste plan gepresenteerd voor aanpassing van de profielen in de Tweede Fase van het voortgezet onderwijs (de klassen 4 en 5 van het havo en de klassen 4, 5 en 6 van het vwo). Alleen al het feit dat dit de derde keer was in 2003 dat de minister met een plan kwam, illustreert hoe complex deze profielenkwestie is. En hoe omstreken. Want zowel na de lancering van het eerste plan, in januari 2003, als na de bijstelling van juli waren de bezwaren niet van de lucht.

De minister roept het beeld op dat de bètavakken moeilijk en weinig aantrekkelijk zijn en dat het allemaal wel wat minder mag. De twee

natuurprofielen Natuur en Gezondheid (N en G) en Natuur en Techniek (N en T) worden een stuk lichter, er wordt, met name in het vwo, minder wiskunde, algemene natuurwetenschappen en natuurkunde gegeven, terwijl natuurkunde ook nog eens verdwijnt als verplicht vak uit het N en G-profiel.

De technische universiteiten zijn tegenstander van een verlichting van de bètacomponent in de twee natuurprofielen N en G en N en T. Zo'n verlichting staat op gespannen voet met de voorbereiding die het vwo moet bieden op een vervolgstudie, bijvoorbeeld aan een van de drie technische universiteiten.

De beide natuurprofielen zijn niet robuust genoeg en bereiden onvoldoende voor op bijvoorbeeld een technische vervolgstudie. Elk van de beide natuurprofielen moet vier verplichte, echte bètavakken kennen. Alleen zo is er voldoende ruimte om het vwo (voorbereidend wetenschappelijk onderwijs) inderdaad te laten voorbereiden op een universitaire vervolgstudie met als doelen: voldoende diepgang, ruimte voor vernieuwing, ruimte om aansprekende contexten uit natuur, wetenschap en techniek aan te reiken en ruimte voor interdisciplinaire ontwikkelingen op de snijvlakken van de klassieke bètavakken."

bron: NRC Handelsblad, 3 februari

Wiskundig onderzoek leidt tot nieuw muziekinstrument

Twee Canadese wiskundigen, Samuel Gaudet en Claude Gauthier hebben een nieuw muziekinstrument ontwikkeld — de tritare.

Tijdens hun onderzoek op het gebied van getaltheorie stuitte ze op een verzameling getallen met symmetrieën die mogelijkheden leken te hebben in de electronica, en uiteindelijk was een nieuw instrument het resultaat. Het heeft de vorm van een (omgekeerde) Y en heeft zes netwerken van snaren, die een hele serie geluiden kunnen voortbrengen, variërend van snaargetokkel tot het luiden van kerkklokken.

Voor meer informatie, zie www.radio-canada.ca/regions/atlantique/tele/Chroniques/tritare.12371.shtml

Gerard Koolstra



Bedrijfswiskunde positief beoordeeld

De opleidingen bedrijfswiskunde van de Nederlandse hogescholen leveren waardevolle krachten voor het bedrijfsleven en (semi-) overheidsinstellingen af. Dit concludeert de onafhankelijke visitatiecommissie die, onder voorzitterschap van prof.dr. J. van de Craats, in 2003 vier hbo-opleidingen bedrijfswiskunde voor de eerste keer op hun kwaliteit heeft beoordeeld. De bevindingen zijn vastgelegd in het in december 2003 gepubliceerde visitatierapport *Analyse en Inzicht*. Het beroep van bedrijfswiskundige is nieuw en nog tamelijk onbekend. Het overgrote deel van de hbo-studenten in de bedrijfswiskunde is min of meer toevallig 'tegen de opleiding aangelopen'. Er blijkt dus geen effectief wervingsbeleid gevoerd te worden. Het volledige visitatierapport is te downloaden via de site van de hbo-raad onder publicaties, (sub)thema kwaliteitszorg.

Zie de website www.hbo-raad.nl

Metha Kamminga

Sneeuwbal binnenstebuiten

Een prachtig — maar vergankelijk — voorbeeld van wiskundige kunst wordt gevormd door een vier meter hoog beeld van sneeuw dat voorstelt hoe een bol volgens de topologische regels der kunst binnenstebuiten kan worden gekeerd. Dat dit mogelijk is werd pas in 1959 bewezen (door Stephen Smale) en concrete ideeën over hoe dit gevisualiseerd kon worden stammen uit de jaren zeventig van de vorige eeuw.

Een team onder leiding van de wiskundige Stan Wagon (Macalester College in St. Paul, Minnesota- VS) heeft vorige maand tijdens het *14th International Snow Sculpture Championship* (Breckenridge, VS) het binnenstebuiten keren letterlijk in beeld gebracht. De creatie kreeg een eervolle vermelding als 'meest ambitieus beeldhouwwerk'.

Zie www.sciencenews.org/20040207/mathtrek.asp Gerard Koolstra



Wintersymposium Wiskunde en muziek

Tweehonderd belangstellenden kwamen af op het wintersymposium van het Koninklijk Wiskundig Genootschap met het thema *Wiskunde en Muziek*, dat plaatsvond in de Aula van het Academiegebouw van de Universiteit Utrecht. Door de grote toeloop moest organisator Metha Kamminga de dag een kwartier later dan gepland openen.

Er werden drie plenaire lezingen gegeven. De eerste lezing over boventonen werd verzorgd door Jan van de Craats en was een groot succes. Hij illustreerde zijn lezing met experimenten aan de vleugel. De tweede lezing werd verzorgd door sonoloog Rutger Teunissen die een digitale presentatie hield over signaalbewerking. Ook dit onderwerp werd uitstekend gevisualiseerd met behulp van computerbeelden met bijpassende geluidsweggeving.

Na de lunchpauze was het de beurt aan Henkjan Honing die over zijn onderzoek naar de persoonlijke perceptie van het fenomeen ritme in de muziek vertelde. Dit ging op geanimeerde wijze met vele vragen aan het publiek, zoals: "Kunt u dit ritme klappen?" Als laatste maakte Loek Dikker, componist van filmmuziek, een aantal improvisaties gebaseerd op verschillende groepen boventonen. Het was een zeer interessante en uitstekend verzorgde dag.
bron: webserv.nhl.nl/~kamminga/wintersymposium/verslagwintersympo4.html

Wiskundeonderwijs webwijzer

Tijdens de Nationale Wiskunde Dagen te Noordwijkerhout is een nieuwe website ten doop gehouden. Deze 'wiskundeonderwijs-webwijzer' is het initiatief van de samenwerkende niet-commerciële wiskundeonderwijs-websites in Nederland, waaronder die van het Freudenthal Instituut, het APS, de Ned. Vereniging van Wiskundeleraars, het Koninklijk Wiskundig Genootschap, de Digitale School, WisBase, Pythagoras, Vierkant voor Wiskunde en Kennislink. De bedoeling is

om onder andere door overzichten per onderwerp en zoekmogelijkheden op meerdere websites tegelijk, de steeds groeiende hoeveelheid informatie en bruikbaar materiaal toegankelijker te maken, met name voor leerlingen en docenten.

Internetadres: www.wiskundeonderwijs.nl

Gerard Koolstra

Nieuw rekenonderwijs voor ouders onbegrijpelijk

In het februarinummer van het blad *J/M*, dat zich richt op ouders van opgroeiende kinderen, wordt aandacht besteed aan het veranderde rekenonderwijs op de basisschool. Verschillende deskundigen komen aan het woord over onderwerpen als vermenigvuldiging van breuken (citaat: "Welke leerling wist nu precies wat hij deed als hij twee breuken vermenigvuldigde? Bijna niemand toch?"), het verdwijnen van staartdelingen en het zogenaamde realistische reken- en wiskundeonderwijs.

Afgezien van het ontbreken van kritische distantie bij de geïnterviewde deskundigen geeft het artikel een helder overzicht van de huidige stand van zaken op de basisschool.

Derk Pik

Expositie Museum Boerhaave in Leiden

Museum Boerhaave te Leiden exposeert van 26 maart tot en met 26 september demonstratiespellen en historische voorwerpen onder het thema *Goochelen met getallen*. Er zijn meerdere thema's: getallen in de natuur, inhoud- en lengtematen, getallen in de astronomie, landmeetkunde en zeevaartkunde, mechanica en statistiek.

Onder de historische voorwerpen bevinden zich de differentiemachine van Babbage uit 1830, oude rekenlinialen, rekenschijven en rekencylinders, schoolboekjes, land- en zeekaarten, oude rekenmachines, planetaria, *staatsloten* en een Babylonisch kleitablet van 2000 jaar voor Christus.

bron: www.museumboerhaave.nl



Planetarium (1794) George Adams, Londen

Bessensap

Het evenement *Bessensap*, dat op dinsdag 18 mei plaats zal vinden in het Amsterdamse *NEMO*, brengt journalisten, redacteurs, voorlichters en mediagenieke onderzoekers bij elkaar onder het motto: wetenschap ontmoet pers, pers ontmoet wetenschap. Bessensap is inmiddels uitgegroeid tot een sfeervolle en interactieve gebeurtenis in de niche van wetenschap, media en samenleving. NWO verwacht veel publiciteit op en rond deze dag.

Ook mag tijdens *Bessensap* een aantal onderzoekers zich met actueel en journalistiek spannend onderzoek presenteren aan de media. Doel is om via heldere, krachtige en voor journalisten prikkelende presentaties steeds het laatste nieuws te belichten.

Bron: e-mailcirculaire NWO

van het KWG

| KWG activiteiten

Algemene Ledenvergadering van het Wiskundig Genootschap

De 227ste Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap zal gehouden worden te Tilburg tijdens het Nederlands-Belgisch Mathematisch Congres 2004, op zaterdag 17 april 2004.

1 Agenda

- 1 Opening
- 2 Verslag van de 226ste Algemene Ledenvergadering van het Wiskundig Genootschap
- 3 Mededelingen
- 4 Besprekingen van de jaarverslagen over 2003. De hier ontbrekende verslagen worden ter vergadering uitgereikt.
 - a. Verslag van de Secretaris
 - b. Verslag van de Penningmeester
 - c. Verslag van de Kascommissie
 - d. Verslag van het Nederlands Mathematisch Congres
 - e. Verslag van de Inspecteur der Boekerij
 - f. Verslag van de Publicatiecommissie
 - g. Verslag van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde
 - h. Verslag van de Archivaris
 - i. Verslag van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen
 - j. Verslag van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde
- 5 Begroting 2004
- 6 Vaststelling contributie voor 2005
- 7 Samenstelling Kascommissie 2004
- 8 Voordracht ereleden
Het bestuur is voornemens een of meerdere leden van het Genootschap voor te dragen voor het erelidmaatschap.
- 9 Samenstelling van het Bestuur
prof.dr. E.J.N. Looijenga, dr. G.M. Hek en dr. M.H. Vellekoop treden af als bestuurslid; het bestuur draagt prof.dr. J. van Mill (VU) en prof.dr. H.W. Broer (RUG) voor als kandidaat voor een bestuursfunctie en is nog op zoek naar nieuwe kandidaten om de resterende drie vrije posities in te vullen.
De resterende leden van het bestuur zijn
 - dr. S.A.J. Dekkers (UU), penningmeester
 - drs. M. Kamminga (Noordelijke Hogeschool Leeuwarden), contacten met leraren
 - drs. A.C. Kik (CWI), PR
 - dr.ir. H.J.J. te Riele (CWI), secretaris
 - dr. V. Rottschäfer (UL), lid
 Leden die interesse hebben in een bestuursfunctie wordt verzocht contact op te nemen met de secretaris.
- 10 Instelling Commissie voor Statutenwijziging
Het bestuur is voornemens een commissie voor statutenwijziging te laten benoemen, onder andere in verband met het toevoegen van het predikaat 'Koninklijk' aan de naam van het Genootschap.
- 11 Rondvraag
- 12 Sluiting

2 Ad punt 2 van de Agenda

Hieronder volgen de notulen van de 226e Algemene Ledenvergadering, tezamen met de bijbehorende verslagen die niet eerder gepubliceerd zijn: het financieel verslag over 2002 en het verslag van de kascommissie over 2002.

2.1 Notulen van de 226ste Algemene Ledenvergadering van het Wiskundig Genootschap, gehouden tijdens het NMC te Nijmegen op 2 mei 2003.

De vergadering werd bijgewoond door 62 leden.

Deze rubriek is een kroniek van de activiteiten van het Wiskundig Genootschap. Van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan en toekomstige activiteiten worden aangekondigd.

1 *Opening.*

De voorzitter opent de vergadering om 12.36 uur.

2 *Notulen van de vorige vergadering.*

De heer Barning merkt op dat de datering van het verslag van de kascommissie over het jaar 2001 verkeerd is; dit moet zijn 3 april 2002.

3 *Mededelingen van het bestuur.*

De voorzitter deelt mede dat gedurende het jaar 2002 zijn overleden de ereleden Coxeter (31 maart 2003) en Zaanen (1 april 2003).

De voorzitter maakt melding van de verdere ontwikkeling van de website, onder leiding van Mark Peletier, en met name de lancering van de Wiskunde PersDienst, een initiatief in samenwerking met de NVvW. Ook dankt de voorzitter Annette Kik voor haar vele inspanningen op het gebied van PR. Wel is duidelijk dat de ambities van het bestuur de huidige capaciteit te boven gaan; het bestuur zal op zoek gaan naar verdere versterking van het PR-team.

Gedurende het jaar is het WG een aantal malen met een standpunt naar buiten getreden, met name over het wetsvoorstel van de Minister van Onderwijs en Wetenschappen. Ook is gepleit voor invoering van een korte vervolgstudie waarmee bachelors in de wiskunde een eerstegraads lesbevoegdheid kunnen halen. Tenslotte heeft het WG zich ook geroerd in de discussie rond de afslanking van de Subfaculteit Wiskunde in Nijmegen, helaas zonder het gewenste resultaat.

4 *Verslagen.*

De verslagen over 2002 worden besproken (de verslagen van de secretaris, de Publicatiecommissie, de Inspecteur der Boekerij, de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, de archivaris, de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen, en van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde zijn gepubliceerd in het Nieuw Archief voor Wiskunde (vijfde serie, jaargang 4, nummer 1); de verslagen van de penningmeester en de Kascommissie zijn hieronder opgenomen). Er zijn geen op- of aanmerkingen.

5 *Financiën.*

De penningmeester licht het financiële verslag toe. Over het boekjaar 2002, dat begint en eindigt op 1 januari, is een positief resultaat geboekt van € 2.054,04. Hieraan heeft bijgedragen eenmalige baten van in totaal € 5.286,82; zonder deze eenmalige baten zou het resultaat zijn € -3.232,78, hetgeen goed overeen komt met de begroting.

De begroting voor het jaar 2003 laat een (structureel) positief saldo zien van € 7.450. Deze wordt voor een groot deel veroorzaakt door de succesvolle invoering van het instituutslidmaatschap, waardoor een aantal salarisposten is overgenomen door instituten in de vorm van sponsoring. De voorzitter meldt dat thans instituutslid zijn: de Rijksuniversiteit Groningen, de Universiteit van Amsterdam, de Vrije Universiteit, het Centrum voor Wiskunde en Informatica, de Universiteit Utrecht, de Universiteit Leiden, EURANDOM, en de Technische Universiteit Eindhoven.

De heer Van Emde Boas vraagt naar de ontwikkeling van het ledenaantal. De secretaris meldt dat op 1 januari 2003 het Genootschap 1409 leden had, ongeveer 200 meer dan enkele jaren geleden.

De voorzitter leest het verslag van de Kascommissie voor (zie hieronder); de penningmeester wordt gedechargeerd.

6 *Contributie.*

De contributie voor 2004 wordt vastgesteld conform het bestuursvoorstel:

gewone leden	€ 70
reciprociteitsleden	€ 50
gepensioneerden	€ 35
aio/oio's en studenten	€ 25

Verder wordt aangenomen het voorstel van het bestuur om aan die leden die het NAW in het buitenland ontvangen de werkelijke meerkosten van buitenlandse versturing in rekening te brengen.

7 *Samenstelling van de Kascommissie 2003.*

De voorzitter bedankt de heren Barning en Beukers voor hun inspanningen, en benoemt de heer Barning en dr. L. Florack, de huidige penningmeester, tot de Kascommissie 2003.

8 *Samenstelling van het bestuur.*

De voorzitter meldt dat drs. H. Bakker, dr. L. Florack, prof. dr. ir. J. Molenaar, dr. M. A. Peletier en prof. dr. ir. O. J. Vrieze het bestuur zullen verlaten. Het bestuur draagt voor als nieuwe leden Fieke Dekkers (als penningmeester), Herman te Riele (als secretaris) en Vivi Rottschäfer. De voorzitter legt uit dat zijn eigen bestuurstermijn nu ten einde is, maar dat wegens het ontbreken van een opvolger hij zich bereid heeft verklaard nog maximaal een jaar aan te blijven. Hij vraagt de Vergadering expliciet hier haar goedkeuring aan te verlenen; die wordt gegeven. Het voorstel wordt bij acclamatie aangenomen. Hiermee is de samenstelling van het bestuur:

dr. S.A.J. Dekkers (UU), financiën

dr. G.M. Hek (UvA), publicaties

drs. M. Kamminga (Noordelijke Hogeschool Leeuwarden), contacten met leraren

dr. A. Kik (CW), PR

prof. dr. E.J.N. Looijenga (UU), voorzitter

dr. H. te Riele (CWI), secretaris, archivaris en Inspecteur der Boekerij

dr. V. Rottschäfer (UL), gewoon lid

dr. M. Vellekoop (UT), contacten met studenten

De heer Levelt vraagt of, wanneer een kandidaat voor het voorzitterschap in de loop van het jaar gevonden wordt, de huidige voorzitter terstond plaats maakt of tot aan de volgende jaarvergadering aanblijft. De voorzitter antwoordt dat de benoeming van de voorzitter van het WG een taak is voor de ALV; hij zal in een dergelijk geval dus tot de volgende jaarvergadering aanblijven.

De heer Barning vraagt naar de statutaire status van de voorzitter, de secretaris, en de penningmeester; de secretaris antwoordt dat deze functies in de statuten expliciet genoemd worden. De heer Mebius voegt hieraan toe dat ook het Nederlands verenigingsrecht vereist dat een vereniging deze drie functionarissen heeft.

9 *Prijsvraag '225'.*

Wim Veldman legt de gang van zaken rond de prijsvraag toe. Er zijn 16 inzendingen binnengekomen; samen met Bernd Souvignier heeft hij hier één van uitgekozen. De winnaar is John Simons van de Rijksuniversiteit Groningen.

10 *Koninklijk Wiskundig Genootschap.*

De voorzitter legt de vraag aan de Vergadering voor of de naam van het Genootschap moet worden gewijzigd in Koninklijk Wiskundig Genootschap. De Vergadering antwoordt met een applaus.

De heer Veling vraagt wat de Engelse vertaling van de naam zal zijn; hij stelt voor 'Royal Mathematical Society' in plaats van de vertaling 'Royal Dutch Mathematical Society' die al eerder genoemd is. De voorzitter zal dit meenemen. De heer Mebius stelt in verband hiermee voor 'Royal Netherlands Mathematical Society'.

De heer Zaal vraagt hoe de koninklijke status afstraalt op de leden. De voorzitter antwoordt dat de toekenning nog geen 24 uur oud is, en dat het nieuwe bestuur zal overleggen over de invulling. De voorzitter merkt op dat uiteraard het logo en het briefpapier gewijzigd zal worden.

11 *Rondvraag.*

De heer Van Casteren vraagt of er contact is met het Belgisch Wiskundig Genootschap. De voorzitter meldt dat het Nederlands Mathematisch Congres in 2004 in Tilburg zal worden gehouden, en dat dit congres samen met het BWG zal worden georganiseerd. In het jaar 2005 zal een gezamenlijk congres, in samenwerking met het BWG, de SMF, en mogelijk de Luxembourg Mathematical Society, worden gehouden in Gent.

12 De voorzitter sluit de vergadering om 13.20 uur.

2.2 *Financieel verslag 2002 en begroting 2003*

Het jaarverslag van het boekjaar 2002 is grotendeels analoog aan dat van voorgaand boekjaar tot stand gekomen. De belangrijkste wijziging is de invoering per 1 januari 2002 van een aantal zogenaamde *kostenplaatsen*, te weten: Algemeen, WG, NAW en Pythagoras.

ACTIVA	f	€	PASSIVA	f	€
vlottende activa:			vreemd vermogen:		
<i>vorderingen:</i>			<i>crediteuren:</i>		
debiteuren	6.715,00	3.047,13	crediteuren totaal	141.694,01	64.297,94
dubieuze debiteuren	1.830,50	830,64			
deelname Epsilon Uitgeverij	16.840,00	7.641,66	eigen vermogen:		
<i>liquide middelen:</i>			algemene reserve	20.000,00	9.075,60
Postbank	47.604,76	21.602,10	bijzondere reserve	24.000,00	10.890,73
ABN AMRO Bank	87.220,97	39.579,15			
vaste activa:					
<i>financiële vaste activa:</i>					
aandelen	9.312,39	4.225,78			
Postbank Kapitaalrekening	179.000,52	81.226,89			
ABN AMRO Kapitaalmarktindex	131.371,86	59.613,95	kapitaal eind 2001	299.777,61	136.033,15
afrondingsverschillen		0,01			
	485.471,62	220.297,42		485.471,62	220.297,42

Tabel 1 Eindbalans 2001

ACTIVA	€	PASSIVA	€
vlottende activa:		vreemd vermogen:	
<i>vorderingen:</i>		<i>crediteuren:</i>	
debiteuren	3.047,13	crediteuren totaal	64.297,94
dubieuze debiteuren	830,64		
deelname Epsilon Uitgeverij	7.641,66	eigen vermogen:	
overbrugging Pythagoras	2.530,11	algemene reserve	19.966,32
<i>liquide middelen:</i>			
Postbank	21.602,10		
ABN AMRO Bank	39.579,15		
vaste activa:			
<i>financiële vaste activa:</i>			
aandelen	4.225,78		
Postbank Kapitaalrekening	81.226,89		
ABN AMRO Kapitaalmarktindex	59.613,95	kapitaal begin 2002	136.033,15
	220.297,41		220.297,41

Tabel 2 Beginbalans 2002

ACTIVA	€	PASSIVA	€
vlottende activa:		vreemd vermogen:	
<i>vorderingen:</i>		<i>crediteuren:</i>	
debiteuren totaal	5.219,66	crediteuren totaal	94.250,90
deelname Epsilon Uitgeverij	7.468,96		
<i>liquide middelen:</i>		eigen vermogen:	
Postbank	26.971,97	algemene reserve	19.966,32
ABN AMRO Bank	63.897,32		
vaste activa:			
<i>financiële vaste activa:</i>			
aandelen	2.824,39		
Postbank Kapitaalrekening	83.905,16		
ABN AMRO Kapitaalmarktindex	62.016,95	kapitaal eind 2002	138.087,19
	252.304,41		252.304,41

Tabel 3 Eindbalans 2002

De kostenplaats 'Algemeen' is ingevoerd als 'default', maar wordt niet als feitelijke kostenplaats gebruikt. Door deze instelling wordt een actieve keuze afgedwongen voor één van de overige kostenplaatsen. Onder kostenplaats 'WG' worden alle boekingen van het Wiskundig Genootschap geplaatst die niet direct betrekking hebben op het Nieuw Archief voor Wiskunde of Pythagoras. De overige kostenplaatsen spreken voor zich. Omdat de boekhouding van het WG (inclusief NAW) en die van Pythagoras in 2002 nog gescheiden zijn opgesteld is het netto resultaat over 2002 binnen de kostenplaats Pythagoras middels de debiteuren- en crediteurenadministratie op nul gesteld. Per 1-1-2003 kunnen de eindbalansen van beide worden samengevoegd tot een gezamenlijke beginbalans 2003.

Verder is de rubricering ten opzichte van voorgaand boekjaar iets vereenvoudigd. De grootboekrekeningen drukkosten en drukwerk en papier zijn samengebracht onder drukkosten. Met het oog op de kostenplaatsen NAW en Pythagoras is de grootboekrekening advertenties NAW vervangen door advertenties. De grootboekrekening afdracht SDF is per ultimo 2002 niet meer van toepassing. Dat geldt ook voor de balanspost overbrugging Pythagoras.

Balans begin 2002

De beginbalans 2002 is afgeleid uit de eindbalans 2001. De eindbalans 2001 is vrijwel ongewijzigd overgenomen uit het Financieel Jaarverslag 2001. Zie tabel 1 en tabel 2.

Merk op:

- De balansposten algemene reserve en bijzondere reserve zijn samengevoegd onder de nieuwe rubriek algemene reserve. Merk op dat de algemene reserve op de beginbalans 2002 € 0.01 lager is dan de totale reserve vermeld op de eindbalans 2001. Dit wordt hieronder toegelicht.
- De balanspost afrondingsverschillen, nodig als gevolg van de euroconversie, is verdwenen. Het afrondingsverschil van € 0.01 op de eindbalans 2001 is op de beginbalans 2002 verrekend met de algemene reserve. Het balans totaal is overeenkomstig gewijzigd. Dit heeft geen invloed op het kapitaal.

Balans eind 2002

De balans over het boekjaar ziet er als volgt uit: tabel 3.

Resultatenrekening 2002

Het eigen vermogen is over het boekjaar 2002 met € 2.054,04 toegenomen: tabellen 6 en 7. Gecorrigeerd voor eenmalige kosten en baten bedraagt het resultaat € 2.054,04 – € 5.286,82 = –€ 3.232,78 negatief, zie tabel 8 voor een specificatie van de eenmalige kosten en baten.

Toelichting op balans en resultatenrekening 2002

De baten en lasten die bepalend zijn voor het resultaat kunnen worden onderverdeeld in eenmalige en overige. Hieronder volgt een toelichting uitgesplitst naar beide categorieën. Zie ook tabellen 4 en 5.

Toelichting bij eenmalige baten en lasten (zie tabel 8)

1. De rubriek dubieuze debiteuren (beginbalans 2002: € 830,64) keert niet terug op de eindbalans 2002. Dit bedrag is in de loop van 2002 deels alsnog ingevorderd (€ 323,32). Het restant (€ 507,32) is ten laste gebracht van het boekjaar 2002.
2. Een onbekende betaling à € 105,00 is ten laste gebracht van het boekjaar 2002.
3. Door vrijval zijn twee openstaande rekeningen uit 1996 à € 3.630,24, respectievelijk € 2.268,90 ten gunste gekomen van het boekjaar 2002.

Toelichting bij de balansposten deelname Epsilon Uitgaven, overbrugging Pythagoras en aandelen:

1. Epsilon Uitgaven betaalde in 2002 € 172,70 aan aflossing (naast 10% rente: € 17,27). De deelname van het WG in Epsilon Uitgaven is hierdoor gedaald van € 7.641,66 naar € 7.468,96: tabel 9. De eindafrekening over 2002 wordt verwacht in de loop van 2003 en zal verrekend worden met de deelname van Epsilon Uitgaven op de eindbalans 2003.
2. De balanspost overbrugging Pythagoras (beginbalans 2002: € 2.530,11) keert niet terug op de eindbalans 2002. De resterende schuld van Pythagoras is verrekend met een subsidie van eveneens € 2.530,11 van het WG aan Pytha-

goras. Dit subsidiebedrag wijkt (eenmalig) af van de gebruikelijke jaarlijkse subsidie (structureel € 2.268,90, voorheen f 5000,00): tabel 10. Met het oog op de euroconversie kan worden overwogen het jaarlijkse subsidiebedrag met ingang van 2003 aan te passen tot een nieuw, rond bedrag, afhankelijk van de wenselijkheid van structurele subsidiëring.

3. De aandelenportefeuille is per ultimo 2002 als volgt samengesteld: 167,9187 aandelen Rolinco à € 16,82: € 2.824,39: tabel 11.

Begroting en kosten 2002 en begroting 2003

Tabel 4 toont de begrote en werkelijke kosten over het boekjaar 2002 en de kosten zoals die begroot zijn voor het boekjaar 2003.

Toelichting bij tabel 4:

Ad 4125: De salarisverdeling ten laste van het boekjaar 2002 is als volgt:

- uitgever NAW (Zaal): € 14.180,48 (0.3 fte),
- eindredactie NAW (Pik): € 9.703,38 (0.2 fte),
- bureauredactie NAW (Hafkenscheid): € 5.612,88 (0.2 fte),
- bureauredactie NAW (Brakenhoff): € 4.059,24 (0.2 fte),
- bladmanager NAW (Erné): € 2.323,93 (0.3 fte)
- secretariaat ledenadministratie WG (Van Os): € 7.453,00 (0.2 fte)

Het totaal hiervan bedraagt € 43.332,91. De begroting voor 2003 gaat ervan uit dat de salariskosten voor uitgever (0.3 fte) en secretariaat ledenadministratie (0.2 fte) per 1-1-2003 zullen verdwijnen.

Ad 4151: Dit betreft het netto WG-aandeel in de portikosten; de vergoeding door het CWI voor de porti ruilabonnementen (in 2002 € 2.038,27) is hierin reeds verdisconteerd. Het WG heeft het CWI hiervoor in het boekjaar 2001 € 1.535,59 teveel in rekening gebracht als gevolg van een misrekening in de porti ruilabonnementen 2001. Dit bedrag is verrekend met de CWI bijdrage voor 2002 en komt derhalve ten laste van 2002. Omdat dezelfde misrekening ten grondslag ligt aan de totstandkoming van de begroting voor 2002 is deze laatste navenant te laag ingeschat. Dit verklaart het significante verschil tussen werkelijke kosten en de begroting voor 2002.

Ad 4153: In de voorafgaande begroting voor 2002 (€ 10.000) is de rubriek ontwerpkosten gebruikt voor zowel ontwerpkosten als PR/reclamekosten samenhangend met het ontwerp en de productie van WG posters en ansichtkaarten. Voor wat deze begroting betreft dienen de rubrieken ontwerpkosten en PR/reclamekosten daarom als één rubriek beschouwd te worden. De werkelijke kosten alsook de begroting voor 2003 zijn wel uitgesplitst naar de afzonderlijke rubrieken. Voorts is in de voorafgaande begroting in de rubriek ontwerpkosten rekening gehouden met eenmalige conversiekosten van de nieuwe ledenadministratie. Deze kosten zijn echter in werkelijkheid geboekt onder de rubriek overige kosten, zie hieronder (4160).

Ad 4154: Onder PR/reclamekosten zijn alle kosten en baten geboekt die betrekking hebben op ontwerp en productie van WG posters en ansichtkaarten in het boekjaar 2002. Hierin (maar niet in de voorafgaande begroting) is ook een sponsorbedrag van € 1.250 door ABE aan het WG verdisconteerd, evenals een reservering ten laste van 2001 à € 4.000. Voor het boekjaar 2003 is eveneens ruimte voor PR/reclamekosten vrijgemaakt op de begroting met het oog op de lustrumviering.

Ad 4155: De werkelijke vergaderkosten over 2002 zijn hoger dan voorheen begroot en vormen het uitgangspunt voor de begroting voor 2003.

Ad 4160: Deze rubriek maakt geen onderscheid tussen overige kosten van eenmalige en overige kosten van structurele aard. Daarnaast is er inhoudelijk enige overlap met enkele andere rubrieken. Zo omvatten de werkelijke kosten onder meer de eenmalige kosten voor conversie van de ledenadministratie (€ 1.291,06) en de (structurele) kosten voor nieuwe factuurcombola's (€ 852,52). Voor deze kosten is in de voorafgaande begroting ruimte vrijgemaakt onder de rubriek ontwerpkosten, zie hierboven (4153). Ook de herwaardering van de aandelen drukt relatief zwaar op de rubriek overige kosten. Het verlies

grootboekrek. nr.	omschrijving	begroot 2002 (€)	werkelijk (€)	begroot 2003 (€)
4125	salarissen	40.000	43.332,91	23.000
4151	porti	3.500	6.380,08	5.000
4152	drukkosten	22.000	20.691,52	22.000
4153	ontwerpkosten	10.000	3.228,96	3.500
4154	PR/reclamekosten	0	2.595,96	2.500
4155	vergaderkosten	1.700	2.753,55	2.500
4160	overige kosten	7.500	11.293,87	12.000
4161	declaraties	2.000	3.954,25	6.500
4170	sponsoring	8.000	6.450,54	8.000
4200	verzekering	0	291,32	300
4251	afdracht EMS	1.500	1.485,00	1.700
4252	afdracht IM	2.000	1.681,16	1.700
4253	afdracht IMU	750	0	750
4980	bankkosten	300	603,20	550
4	kosten totaal	99.250	104.742,32	90.000

Tabel 4 Resultatenrekening 2002 en begroting 2003: kosten.

grootboekrek. nr.	omschrijving	begroot 2002 (€)	werkelijk (€)	begroot 2003 (€)
5150	contributies WG-leden	77.500 ^a	76.493,20 ^b	75.500
5151	legaten en donaties	250	222,12	250
5152	abonnementen	8.500	10.305,37	10.000
5153	advertenties	2.250	4.085,67	4.000
5160	overige baten	0	8.694,42	0
5251	contributies EMS-leden	500	405,00	620
5252	abonnementen IM	1.000	1.220,00	1.700
9052, 9090	rente	6.000	5.370,58	5.380
5+9	baten totaal	96.000	106.796,36	97.450

Tabel 5 Resultatenrekening 2002 en begroting 2003: baten.

(a) Dit bedrag is inclusief SDF donaties; (b) Dit bedrag is exclusief SDF donaties. Het totaal aan SDF donaties in 2002 bedraagt € 1.829,58.

over het slechte beursjaar 2002 (€ 1.401,39) is in deze rubriek verwerkt. In de begroting voor 2003 is enige ruimte vrijgemaakt voor overige kosten gerelateerd aan het lustrumjaar en voor onderhoud en gebruik van de nieuwe ledenadministratie.

Ad 4161: Ook de rubriek declaraties is enigszins ambigu; afhankelijk van inzicht in de aard van de betreffende onkosten kunnen deze ook onder één van de overige rubrieken geboekt worden. De werkelijke declaraties zijn hoger dan voorheen begroot, voornamelijk als gevolg van de hogere declaraties in verband met de invitatie van de Brouwermedaillist (€ 2.340,47). Met opzet is een ruimere begroting gemaakt voor de rubriek declaraties in 2003 dan op grond van werkelijke declaraties in 2002 verwacht mag worden, dit in verband met het feit dat de uitgever in 2003 op declaratiebasis in plaats van vaste bezoldiging beschikbaar zal blijven voor advies aan de redactie van het NAW. Ook het lustrumjaar kan extra declaraties met zich meebrengen. Het bedrag van € 6.500 dat voor dit alles begroot is betreft een ruwe en onzekere schatting.

Ad 4170: Het WG heeft in 2002 de volgende sponsorbijdragen verstrekt:

- NMC 2002: € 2.268,90,
- NMC 2002, receptie Brouwer Medaille: € 900,00,
- Wintersymposium: € 505,53,
- Studievereniging A-Eskwadraat, ten bate van symposium Kaleidoscoopdag: € 500,00,
- Pythagoras: € 2.530,11.

Daarnaast heeft het WG een bedrag van € 254,00 terugontvangen uit het positief saldo van het NMC 2002. Het totaal aan sponsoring inclusief deze verrekening bedraagt € 6.450,54. De bijdrage aan Pythagoras is verrekend

met het restant van de balanspost overbrugging Pythagoras op de beginbalans 2002: tabel 10. Het bedrag van € 8.000 uitgetrokken voor sponsoring in 2003 is gebaseerd op inmiddels gedane toezeggingen (Wintersymposium 2003, Veelvlakkenwedstrijd Pythagoras en NMC 2003, samen € 4.130,80), continuering van de sponsoring aan Pythagoras (€ 2.268,90) en nader te bepalen bestemmingen (restant, dat is € 1.600,30).

Ad 4200: De premie voor prolongatie van de bestuursverzekering per 1-12-2002 is ten laste gebracht van het boekjaar 2002 in tegenstelling tot de aanneming bij de voorafgaande begroting.

Ad 4252: Het WG heeft in 2002 te weinig in rekening gebracht voor abonnementen op het vaktijdschrift Indagationes Mathematicae. Mede hierdoor is de afdracht IM hoger dan de bate uit abonnementen IM (tabel 5). Het tarief wordt met ingang van 1-1-2003 gecorrigeerd.

Ad 4253: De KNAW heeft het grootste deel van de jaarlijkse kosten op zich genomen van het IMU-lidmaatschap van Nederland. Het WG draagt € 750 per jaar bij. Een niet bestede reservering voor het boekjaar 2001 is aangewend ter dekking van de WG-bijdrage voor 2002.

Begroting en baten 2002 en begroting 2003

Tabel 5 toont de begrote en werkelijke baten over het boekjaar 2002 en de baten zoals die begroot zijn voor het boekjaar 2003.

Toelichting bij tabel 5:

Ad 5150: De werkelijke inkomsten blijken redelijk in overeenstemming met de voorafgaande begroting. De begroting voor 2003 is iets lager omdat de werkelijke inkomsten in 2002 voor een klein deel bestaan uit achterstallige be-

	€
kapitaal eind 2001	136.033,15
resultaat boekjaar 2002	2.054,04
kapitaal eind 2002	138.087,19

Tabel 6 Resultatenrekening 2002. Zie tabel 7 en tabel 8 voor een specificatie van het resultaat.

	€
kosten boekjaar 2002	104.742,32
resultaat boekjaar 2002	2.054,04
baten boekjaar 2002	106.796,36

Tabel 7 Resultatenrekening 2002. Zie tabel 8 voor een specificatie van eenmalige kosten en baten.

omschrijving	€
<i>eenmalige kosten:</i>	
1. afschrijving dubieuze debiteur beginbalans 2002	-507,32
2. afschrijving onbekende betalingen boekjaar 2002	-105,00
<i>eenmalige baten:</i>	
3. vrijval crediteur beginbalans 2002	3.630,24
4. vrijval crediteur beginbalans 2002	2.268,90
totaal	5.286,82

Tabel 8 Eenmalige kosten en baten in 2002. Het totaalbedrag is het aandeel in het resultaat zoals vermeld in tabellen 6 en 7 welk als eenmalig moet worden beschouwd.

deelname Epsilon Uitgeverij begin 2002	7.641,66
Af: door Epsilon Uitgeverij aan WG afgelost	172,70-
deelname Epsilon Uitgeverij eind 2002	7.468,96

Tabel 9 Mutaties in deelname Epsilon Uitgeverij. De vetgedrukte bedragen zijn terug te vinden in de beginbalans 2002 respectievelijk eindbalans 2002.

overbrugging Pythagoras begin 2002	2.530,11
Af: door Pythagoras aan WG betaald	0-
Af: WG sponsoring 2002 aan Pythagoras	2.530,11-
overbrugging Pythagoras eind 2002	0

Tabel 10 Mutaties in overbrugging Pythagoras. De vetgedrukte bedragen zijn terug te vinden in de beginbalans 2002 respectievelijk eindbalans 2002.

aandelen begin 2002	4.225,78
Af: koersverlies	1.401,39-
aandelen eind 2002	2.824,39

Tabel 11 Mutaties in aandelenportefeuille. De vetgedrukte bedragen zijn terug te vinden in de beginbalans 2002 respectievelijk eindbalans 2002.

talingen.

Ad 5151: In de begroting is uitsluitend de structurele bate van het Godefroy legaat opgenomen.

Ad 5152: Het cijfer voor 2002 is maatgevend voor de begroting voor 2003.

Ad 5153: De werkelijke advertentie-inkomsten zijn hoger dan aanvankelijk verwacht. De begroting voor 2002 was uitsluitend gebaseerd op reeds lopende contracten bij aanvang van het boekjaar. Die voor 2003 is een schatting op basis van werkelijke inkomsten in 2002. Hiervan is € 3.448 inmiddels contractueel vastgelegd.

Ad 5160: Een significant deel (€ 5.899,14) van de werkelijke baten in 2002 is

eenmalig, zie tabel 8 en de toelichting daarbij. Dit deel was niet in de begroting voor 2002 opgenomen. De overige, merendeels eveneens eenmalige baten zijn gekoppeld aan eenmalige kosten (daar deze irrelevant zijn voor het resultaat zijn ze niet opgenomen in de tabel). Om deze redenen zijn de overige baten voor 2003 op nul geraamd.

Ad 5251: Er zijn 31 EMS leden ultimo 2002. De contributie voor individueel lidmaatschap 2003 bedraagt € 20.

Ad 5252: Voor wat betreft de werkelijke inkomsten zie de toelichting bij tabel 4 (4252). De begroting voor 2003 gaat uit van de 13 IM abonnees ultimo 2002. Het tarief bedraagt (inclusief de korting en BTW) ongeveer € 130.

Ad 9000, 9052, 9090: De rente-inkomsten over 2003 zullen naar verwachting niet veel afwijken van die in 2002.

Samenvatting

Tabel 6 toont een positief resultaat over 2002 van € 2.054,04, zie ook de tabellen 7, 4 en 5. Hierin zit een eenmalige netto bate van € 5.286,82 verdisconteerd, zie tabel 8. Gecorrigeerd hiervoor bedraagt het netto resultaat over 2002 –€ 3.232,78 negatief.

Gecorrigeerd voor eenmalige kosten en baten komt het feitelijk resultaat over 2002 dus goed overeen met de aanvankelijke begroting (€ 96.000 minus € 99.250, dat is –€ 3.250 negatief, zie begrotingskolommen voor 2002 in tabellen 4 en 5).

De begroting voor 2003 toont een groei van het structurele resultaat tot € 7.450 (€ 97.450 minus € 90.000, zie de begrotingskolommen voor 2003 in tabellen 4 en 5). De significante daling in salariskosten, mede het gevolg van het institutionele lidmaatschap, levert hieraan de belangrijkste bijdrage.

Utrecht, 1 mei 2003, Dr. L.M.J. Florack, penningmeester

2.3 Verslag van de kascommissie 2002

De kascommissie verklaart hierbij het financiële verslag van de penningmeester over het boekjaar 2002 te hebben gecontroleerd. Na inzage van de boeken en verdieping in de gevoerde boekhouding kon worden geconstateerd dat het verslag een getrouw beeld geeft van de financiële situatie van het Wiskundig Genootschap.

Het in 2001 in gebruik genomen boekhoudsoftware-systeem heeft de penningmeester goede diensten bewezen bij de boeking van de vele transacties van het WG. Tevens zorgde de penningmeester voor een uitvoerige en inspirerende verslaggeving, die het controlewerk van de commissie niet alleen gunstig beïnvloedde, maar ook gelegenheid gaf om op enkele zaken dieper in te gaan.

De kascommissie, F.J.M. Barning en F. Beukers, 15 april 2003

3 Ad punt 4 van de Agenda

3.1 Verslag van de Secretaris

3.1.1 Leden De vereniging heeft op 1 januari 2004 1392 leden, van wie 126 gebruik maken van het tarief voor gepensioneerden, 167 van het gereduceerde tarief (reciprociteitstarief) en 166 van het studententarief. Er zijn 24 leden die een introductielidmaatschap hebben.

3.1.2 Verslag van het Najaarssymposium Door een samenloop van omstandigheden was het niet mogelijk om het Najaarssymposium van 2003 daadwerkelijk in de daarvoor bestemde tijdsperiode te organiseren. Het bestuur van de Sectie ITW van het Genootschap is voornemens een (uitgesteld najaars-)symposium te organiseren in februari 2004.

3.1.3 Verslag van de Kaleidoscoopdag De Kaleidoscoopdag werd gehouden op donderdag 27 november 2003 in Leiden, en werd georganiseerd door Studievereniging *De Leidsche Flesch*. Het thema was *Cryptologie* en het programma zag er als volgt uit:

- H.C.A. van Tilborg (TUE), *De wiskunde van geheime codes (toen en nu)*
- P. Steenhagen (UL), *Cryptografie met elliptische krommen*

- B. Schoenmakers (TUE), *An efficient approach to secure two-party computation and its application to Yao's millionaires problem*
- B.S. Gelbord (UL), *On the use of smartcards in upcoming e-government applications*
- H. Tiersma (MIVD), *Toepassingen van het Bellman-algoritme binnen de Cryptografie*

De Kaleidoscoopdag trok dit keer ongeveer zeventig bezoekers. De volgende Kaleidoscoopdag zal gehouden worden op 21 april 2004 aan de Universiteit Twente.

3.1.4 Verslag van het Wintersymposium Het Wintersymposium werd gehouden op 10 januari 2004 in het Academiegebouw bij de Dom in Utrecht. Vergeleken met vorig jaar was de opkomst overweldigend: ruim 200 mensen namen deel aan het symposium. Het thema was *Wiskunde en Muziek* en het programma zag er als volgt uit:

- Jan van de Craats (KMA, UvA, Open Universiteit), *De piano als muzikale logaritmetafel*
- Rutger Teunissen, *Muziek, digitale signaalverwerking en (school)wiskunde*
- Henkjan Honing, *Een slag in de ritmeruimte – Over ritme, timing en tempo in muziek*

Een uitgebreid met foto's geïllustreerd verslag is te vinden op <http://webserv.nhl.nl/~kamminga/wintersymposium>.

3.1.5 Wiskunde Persdienst Deze dienst, in 2002 gelanceerd, is onderdeel van de website van het KWG en verzamelt en verspreidt wiskundig georiënteerd nieuws (www.wiskgenoot.nl/wpd). Andere wiskundige websites in Nederland maken gebruik van deze informatie (bijvoorbeeld de sites van Pythagoras en van het Freudenthal Instituut). In 2003 verschenen meer dan twintig berichten.

3.1.6 PR-activiteiten Het Genootschap heeft bij verschillende gelegenheden PR-activiteiten ontplooid, zoals bij gelegenheid van de toekenning van het predikaat 'Koninklijk', bij de viering van het 225-jarig bestaan (tijdens het 39ste Nederlands Mathematisch Congres te Nijmegen), ter ondersteuning van de acties van de 'Boze Bèta's' die ageren tegen de plannen van de overheid om minder wiskunde in het voortgezet onderwijs aan de leerlingen aan te bieden, en bij evenementen zoals de NVvW conferentie, het Wintersymposium, de NNV-dag, de vakantiecurssussen van het CWI, de 'Getal & Ruimte'-dag, de Wetenschapsdag en de Kaleidoscoopdag. Dit gebeurde veelal in samenwerking met het Nieuw Archief voor Wiskunde en Pythagoras.

Ter ondersteuning van de PR-activiteiten werd promotiemateriaal gebruikt bestaande uit een WG-poster, WG-folder, WG-ansichtkaarten en een uitvouwbare 'frisbee' met het opschrift "KWG 225 jaar". Naar aanleiding van de toekenning van het predikaat 'Koninklijk' werd een nieuw logo ontworpen voor gebruik in het Nieuw Archief voor Wiskunde, op de website en op het briefpapier van het Genootschap.

3.2 Verslag van de Penningmeester

3.3 Verslag van de Kascommissie

3.4 Verslag van het 39ste NMC, Nijmegen, 1 en 2 mei 2003

Dit congres stond mede in het teken van de viering van het 45ste lustrum, dus het 225-jarig bestaan van het Wiskundig Genootschap. Een speciale lustrumvoordracht werd verzorgd door Nobelprijswinnaar Martinus Veltman, onder de titel: *Encounter of the third kind: Fysici, Computers en Mathematen*. Daarnaast werd er een speciaal symposium georganiseerd onder de titel: *Wiskunde, nodig en in nood* met aandacht voor de zorgelijke situatie waarin de wiskunde in Nederland verkeert wat onder andere blijkt uit de teruglopende studentenaantallen en de daardoor dalende budgetten voor de wiskunde. Sprekers waren: P. Nijkamp (NWO), J. Veldhuis (UU), en H. Brandt Corstius (Sorbonne).

Hoofdvoordrachten werden gehouden door Robin Hartshorne van de UC Berkeley (Meetkunde van Euclides) en door Robbert Dijkgraaf (Extra dimensies in

wiskunde en fysica). Speciale voordrachten werden verzorgd door Frits Beukers (algebra), Bart Jacobs (wiskundige aspecten van programma-verificatie), Jan Koenderink (beeldverwerking), en Klaas Landsman (kwantummechanica en representatie-theorie).

Er werden dertien minisymposia georganiseerd: Geschiedenis van de wiskunde, Financiële Wiskunde, Wiskunde Toegepast (STW), Computeralgebra, PDE/Stochastische Analyse, Speltheorie, Cryptografie, Mathematische Fysica, Algoritmische Discrete Wiskunde, Numerieke Wiskunde, Didactiek van de Wiskunde, Meetkunde en Sociale Keuze Theorie.

De organisatie was in bewaamde handen van Gert Heckman (voorzitter), Rini van Doorn, Trees van der Eem, Martijn Grooten, Mascha Honsbeek, Ben Polman, Bernd Souvignier (penningmeester), Jozef Steenbrink, en Wim Veldman.

3.5 Verslag van de Inspecteur der Boekering

In 2003 is een totaal van 103 nieuwe werken aan de boekencollectie toegevoegd, voornamelijk bestaande series monografieën, dissertaties en rapporten. Deze werken werden als geschenk of in het kader van ruil ontvangen.

De ruil met het volgende tijdschrift is beëindigd:

The Mathematics Student, ruil met: Indian Mathematical Society.

Herman te Riele, Inspecteur der Boekering

3.6 Verslag van de Publicatiecommissie

De publicatiecommissie werd in de herfst van 2000 ingesteld. Zij adviseert het bestuur inzake het publicatiebeleid en de aanstelling van hoofdredacties, en zij adviseert de hoofdredacties inzake alle organisatorische, financiële en technische aspecten betreffende de totstandkoming van de publicaties. De hoofdredacties zijn verantwoordelijk voor de inhoud van de publicaties; het bestuur draagt de algehele en in het bijzonder financiële verantwoordelijkheid.

De commissie bestond op 1 januari 2003 uit Luc Florack, Geertje Hek (voorzitter), Eduard Looijenga, Rob Schrauwen, Michiel Vermeulen, Arjen Vestjens en Chris Zaal. Met de wisseling van penningmeester in het KWG bestuur heeft Fieke Dekkers de plaats van Luc Florack ingenomen. Vanaf de zomer heeft Arjen Vestjens een adviserende rol op het gebied van advertentie-acquisitie op zich genomen en is hij verder geen commissielid meer. De commissie vergaderde vier maal met de hoofdredacteuren van *Nieuw Archief voor Wiskunde* en *Pythagoras* en de bladmanager (Reinie Ern ) van beide bladen en heeft daarnaast vele malen tussentijds als aanspreekpunt of vraagbaak gediend.

Het instandhouden van voorwaarden die nodig zijn voor het voortbestaan van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* in de huidige opzet en van *Pythagoras* blijft een belangrijke en soms moeilijke taak van de commissie. Via al bestaande en nieuwe instituu slidmaatschappen dragen diverse wiskunde-instituten in het land inmiddels in natura bij aan de personele lasten en enkele andere grote kostenposten bij met name de productie en verzending van het *Nieuw Archief voor Wiskunde*.

Van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* verscheen in 2003 deel 4 van de vijfde serie, bestaande uit vier nummers. Chris Zaal, die de vijfde serie vrijwel geheel op poten heeft gezet, trad per 1 januari af als hoofdredacteur. Ger Koole bleef aan en samen met de enthousiaste en bewaamde eindredacteur Derk Pik en een zeer actieve bureauredactie en bladmanager heeft hij ook dit jaar vier prachtige nummers van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* weten uit te brengen. Vanaf het septembernummer is Jaap Top met nieuwe, frisse idee n toegetreden tot de hoofdredactie. Na zijn terugtreden als hoofdredacteur is Chris Zaal nog op incidentele basis betrokken bij de productie en treedt hij via de publicatiecommissie ook nog op als adviseur op allerhande gebied.

Een punt van zorg is dat we als KWG alles tot aan de druk en de verzending zelf (willen) doen en dat het hele proces leunt op een paar goede, enthousiaste krachten die dit ieder jaar weer op basis van een tijdelijk contract doen. Het *Nieuw Archief voor Wiskunde* is in de huidige opzet nog steeds een kostbare operatie, maar door verbeterde advertentieopbrengsten, instituu slidmaatschappen en reductie van het aantal pagina's per nummer tot tachtig zijn de kosten wel duidelijk gereduceerd. De publicatiecommissie is van mening dat we moeten proberen de huidige kwaliteit van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* te handhaven, maar heeft tegelijkertijd ook de belangrijkste kostenposten en mogelijke besparingen op

een rij gezet. Mocht het KWG in de toekomst een minder groot deel van haar budget aan het blad willen besteden, dan is duidelijk hoe dat bewerkstelligd kan worden en tegen welke prijs.

Van *Pythagoras* verschenen in 2003 vijf nummers, waaronder een dubbeldik nummer dat geheel gewijd was aan veelvlakken en de daarbij uitgeschreven veelvlakkenwedstrijd. Hoofdredacteur Marco Swaen en eindredacteur Alex van den Brandhof hebben samen met hun redactie wederom een prachtige jaargang weten te maken. *Pythagoras* is financieel gezond, mits derden bereid blijven in de vorm van instituutslidmaatschappen bij te dragen in de kosten van hoofd- en eindredactie. Een geregeld terugkerend onderwerp van gesprek is het aantal en type geabonneerden. Er zijn rond de 3000 abonnees, maar hieronder lijken steeds meer leraren of jongerejaars studenten en relatief weinig middelbare-schoolleerlingen te zijn. Het is dus belangrijk om het niveau en de interesse van leerlingen in de gaten te houden en hier zo nodig de inhoud van het blad op aan te passen. Dit jaar is het zusterblad *Archimedes* ter ziele gegaan, en we mogen dus blij en trots zijn dat het goed gaat met *Pythagoras*. Het is echter wel een signaal dat we goed moeten beseffen dat de basis van *Pythagoras* vrij fragiel is: ook hier hangt het succes van het blad sterk af van een kleine groep zeer enthousiaste mensen.

Geertje Hek, voorzitter Publicatiecommissie

3.7 Verslag van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde

3.7.1 Samenstelling Commissie De samenstelling van de commissie is in 2003 niet veranderd. De volgende personen maken er deel van uit: R. van Asselt, F. Bosman (secretaris), H.W. Broer, J. van de Craats, J.G.M. Donkers, F. Goffree, T. Goris, C.P. Hoogland, C.J. de Jonge, mevr. M. Kamminga-van Hulsen, W. Kleijne, mevr. M. Kollenveld, J.M. Notenboom (penningmeester), D. Siersma (voorzitter), A. van Streun, mevr. H.B. Verhage.

3.7.2 Activiteiten in het algemeen Er is binnen de NOCW veel overleg geweest over de relatie tussen de bevoegdheidseisen voor (aanstaande) wiskundedocenten en de invoering van de bachelor-master-structuur. Enkele leden hebben deelgenomen aan het bredere overleg daarover. Hetzelfde geldt voor de discussie over wiskunde in de profielen voor havo en vwo; enkele leden van de NOCW maken deel uit van het platform dat deze discussie met 'de politiek' voert. De lage instroom van studenten, zowel in het hbo als bij universiteiten, is een bron van zorg. De afwezigheid van wiskundigen in de 'top' van het bedrijfsleven en de inspectie wordt door de NOCW-leden betreurd. Binnen de commissie is vastgesteld dat de rol van de NOCW bestaat uit het fungeren als onafhankelijk platform voor alle instanties die in Nederland iets met wiskundeonderwijs te maken hebben. De NOCW is daartoe door het KWG ingesteld, maar valt niet 'onder' het KWG.

3.7.3 Kangoeroe Wedstrijd Het totaal aantal deelnemers is dit jaar voor het eerst gestegen tot boven de 50.000! Daar zijn 9.000 leerlingen van basisscholen bij inbegrepen. Door een andere indeling van de drie verschillende deelnameniveaus bestrijkt de Kangoeroe nu het reken- en wiskunde onderwijs vanaf groep 7 op de basisschool tot en met 6-vwo.

3.7.4 Nederlandse Wiskunde Olympiade Dit jaar werd door bijna 2500 leerlingen deelgenomen aan de eerste ronde. Daarmee is de deelname terug op het niveau van voor het jaar 2000. Het boek 'De Nederlandse Wiskunde Olympiade, 100 opgaven met hints, oplossingen en achtergronden' is als promotie- en oefenmateriaal cadeau gedaan aan alle deelnemers aan de eerste ronde. De realisatie van dat boek is mede mogelijk gemaakt door WisKids. De scholenprijs die bij de eerste ronde behoort werd, evenals vorig jaar, gewonnen door het Stedelijk Gymnasium in Breda. Voor de tweede ronde zijn 116 leerlingen uitgenodigd, waarvan er 95 daadwerkelijk hebben meegedaan.

3.7.5 Internationale Wiskunde Olympiade De Nederlandse ploeg die heeft deelgenomen aan de 44e IMO (International Mathematics Olympiad) in Japan heeft dit jaar geen medailles weten te behalen.

3.7.6 Wiskunde A-lympiade De deelname groeit nog steeds. Naast Deense en Arubaanse scholen deden er dit jaar ook 90 Duitse scholen mee. Dit succes heeft de vraag opgeworpen of er geen aanleiding is om een Europese versie uit te brengen.

3.7.7 Wiskunde B-dag Ook hier stijgt het aantal deelnemende teams, dit jaar deden er 1300 teams mee.

3.7.8 Vierkant De samenstelling van het bestuur van Vierkant is gewijzigd. Het project loopt vooralsnog goed, maar voor de langere termijn vormen de financiën, of liever het gebrek daaraan, een groot probleem.

3.7.9 Nationale Wiskunde Dagen De deelname toont een stijgende lijn. Het vinden van de juiste personen om een aantrekkelijk programma samen te stellen wordt wel steeds moeilijker.

3.7.10 Pythagoras Het WG fungeert als uitgever. De belangstelling blijft stijgen en het aantal abonnementen groeit. Dit is vooral te danken aan de enthousiaste wijze waarop de redactie haar werk doet.

3.7.11 WisKids Het succes van het inmiddels beëindigde project heeft het denken over een WisKids-2 project sterk gestimuleerd. Het grote probleem wordt ook hier gevormd door een gebrek aan fondsen.

F. Bosman, secretaris NOCW

3.8 Verslag van de Archivaris

Het archief van het Wiskundig Genootschap was in 2002 in goede handen bij het Rijksarchief in de Provincie Noord-Holland, Kleine Houtweg 18, 2012 CH Haarlem. Het archief is ontsloten via de uitgebreide "Inventaris van de archieven van het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven', opgericht te Amsterdam in 1778, (1782) 1798-1968 (1991)" door S. Neugebauer (Haarlem, 1995).

Herman te Riele, archivaris WG

3.9 Verslag van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen

3.9.1 Algemeen De archieven onder beheer bij de CPAW, zijn, met uitzondering van Arch. 1 en Arch. 13, geplaatst bij het Rijksarchief in de Provincie Noord-Holland, Kleine Houtweg 18, 2012 CH Haarlem. Aldaar zijn zij voor onderzoek beschikbaar.

Het betreft de volgende archieven: Arch. 2 (H.B.A. Bockwinkel (1881-1960)), Arch. 3 (R. Lijdsman), Arch. 4 (G. Röhrman), Arch. 5 (W.H.J. van der Stok), Arch. 6 (H. Nyon), Arch. 7 (L.W. Nieland (1901-1945)), Arch. 8 (T. van Aardenne-Ehrenfest (1905-1984)), Arch. 8 (vervolg) (C.C.J. de Ridder en P. Ehrenfest jr. (1880-1933)), Arch. 9 (D.N. van der Neut (1904-1985)), Arch.10 (een 60-tal foto's van wiskundigen), Arch.11 (C.G.G. van Herk (1900-1982)), Arch.12 (J.H. Wansink (1894-1985)), Arch.14 (H. Freudenthal (1905-1990)), Arch.15 (D. van Dantzig (1900-1959)), Arch.16 (N.H. Kuiper (1920-1994)).

Arch.1 (W. Kapteyn (1849-1927)) berust bij de bibliotheek van het Museum Boerhaave in Leiden (onder nr. Arch. 371). Arch. 13 (M.J. van Uven (1878-1959)) berust bij het CWI.

3.9.2 Activiteiten

- Het promotieonderzoek van S. la Bastide-van Gemert over het didactisch werk van H. Freudenthal, mede gebaseerd op diens persoonlijk archief, vordert gestaag.
- Bij het Rijksarchief in Noord-Holland werd in het kader van het programma wetenschapsarchieven de inventarisatie gestart van het archief van D. van Dantzig. De betreffende programma-medewerker aanvaardde in de loop van het jaar echter een betrekking elders, waarna in haar opvolging nog niet is voorzien. De inspanningen zijn erop gericht in 2004 een nieuwe programma-medewerker aan te trekken om de inventarisatie af te ronden.
- Van H.J.A. Duparc, J.J. Seidel en C.J. Bouwkamp zijn geen wiskundige archieven bewaard. De besluiten hiertoe konden zonder tussenkomst van de commissie

genomen worden.

- In het Nieuw Archief voor Wiskunde (maart 2003) verscheen het artikel *Snippers met formules* van de hand van drie leden van de commissie: G. Alberts, T. Koetsier en G.J.A. M. Bolten. In het artikel wordt het belang van archieven uiteen gezet.
- De commissie is in het verslagjaar niet bijeengewoest.

3.9.3 Samenstelling van de CPAW per 31 december 2002 dr. ir. T. Koetsier, voorzitter, dr. M. Bakker, secretaris, dr. G. Alberts, lid, mw. drs. G.J.A.M. Bolten, lid, prof. dr. D. van Dalen, lid.
Miente Bakker, secretaris

3.10 Verslag van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde

Het bestuur van de Sectie ITW van het Genootschap was gedurende 2003 als volgt samengesteld: drs. A.T. Langeveld, voorzitter, dr. F.P.H. van Beckum, secretaris/penningmeester, dr. C. Kraaikamp, prof.dr. J.M. Schumacher.

De jaarlijkse *Studiegroep Wiskunde met de Industrie* werd dit jaar georganiseerd in het Lorentz Center in Leiden, en wel van 17 tot 21 februari. Een groep van circa 50 wiskundigen boog zich over een vijftal problemen die uit het bedrijfsleven waren aangedragen.

De sectie heeft in 2003 geen symposia kunnen realiseren. Het blad ITW-Nieuws is, na een tijdlang in stilstand water te hebben verkeerd,

weer in een stroomversnelling gebracht. Er verschenen twee nummers. De bedoeling is dit aantal te brengen op drie per jaargang. Er is gesproken met kandidaten voor bestuursfuncties.

Frits van Beckum, secretaris

Adressen in de KWG-ledenlijst

Publicaties van het KWG, zoals het Nieuw Archief voor Wiskunde, en andere correspondentie worden automatisch aan het adres gezonden waarmee men in de ledenlijst van het KWG staat opgenomen (zie www.wiskgenoot.nl). Dat adres is vrij opvraagbaar, dus ook voor onbevoegden.

Als men niet met dit adres vermeld wil staan op de ledenlijst van het KWG, kan men een adreswijziging sturen aan admin@wiskgenoot.nl. Consequentie is wel dat dan het NAW naar dit *nieuwe* adres wordt gezonden, en niet meer naar het oude adres.

Het is ook mogelijk om alle lidmaatschapsgegevens bij opvraag van de ledenlijst te laten onderdrukken. Ook dit kan men te kennen geven aan bovengenoemd email-adres. Het is niet mogelijk om een gedeelte te laten onderdrukken.

Herman te Riele, secretaris

The world's first science center for mathematics

100 interactive exhibits on more than 1000 square meters exhibition space
suited for everybody, ideal for families
located in Giessen, in the center of Germany

Prices:

Adults:	6 €
Reduced:	4 €
Family:	12 €

Opening hours:

Monday - Friday:	9.00 - 18.00
Thursday:	until 20.00
Saturday + Sunday:	10.00 - 18.00

Mathematikum • Liebigstraße 8 • D-35390 Giessen
Tel: +49 641 9697970 • Fax: +49 641 97269420
info@mathematikum.de • www.mathematikum.de



mathematikum
GIESSEN

T.A. Springer

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 80010, 3508 TA Utrecht

springer@math.uu.nl

In memoriam Harold Scott Macdonald Coxeter (1907–2003)

Een meetkundekunstenaar

Op 30 maart 2003 overleed op 96-jarige leeftijd de meetkundige Harold Scott Macdonald Coxeter, sinds 1936 verbonden aan de Universiteit van Toronto (Canada). In Nederland had hij vele vrienden, waarvan de graficus M.C. Escher wel de bekendste is. Hij ontving diverse onderscheidingen en acht eredoctoraten. In 1948 werd hij fellow van de Royal Society van Canada en in 1950 van de Britse Royal Society. Sinds 1978 was hij erelid van het Wiskundig Genootschap en in 1974 werd hij benoemd tot buitenlands lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Dit In Memoriam is geschreven door T.A. Springer voor de Levensberichten (2003) van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. De auteur is emeritus hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit Utrecht.

Donald Coxeter werd geboren in Kensington (Londen) in een familie van Quakers. Zijn vader had een familiebedrijf waar chirurgische apparatuur vervaardigd werd, maar in zijn hart was hij kunstenaar. In het gezin was dan ook veel artistieke activiteit: Coxeters vader musiceerde en zijn moeder schilderde.

Al heel vroeg bleek dat Donald wiskundig en muzikaal begaafd was. Als kleuter keek hij graag in de financiële pagina's van de krant, omdat daar zoveel getallen te vinden zijn. Hij wilde eerst componist worden; omstreeks zijn twaalfde had hij al een strijkkwartet en een opera gecomponeerd.

Maar wiskunde ging de boventoon voeren. In 1919 ging hij naar een 'boarding school' (St. George's School te Harpenden ten Noor-

den van Londen). Hij vertelt dat hij daar, toen hij met een kleine aandoening op de ziekenafdeling lag, met zijn buurman John Petrie (zoon van de egyptoloog Sir Matthew Flinders Petrie) aan de praat kwam over regelmatige lichamen (de vijf platonische lichamen), die ze in hun meetkundeboek ontdekt hadden. Donald kreeg de ingeving dat zulke lichamen ook in vier dimensies zouden moeten bestaan en John kon een paar dagen later een realistisch model van zoiets tekenen, waardoor zij de extra dimensie konden zien. Toen wist Donald dat wiskunde, en meetkunde in het bijzonder, zijn toekomst moest zijn. Hij was toen veertien jaar.

Coxeter senior vond dat de school zijn zoon niet voldoende uitdaging bood en bracht Donald in contact met wiskundigen. Hij kreeg het advies zich via privé-onderwijs voor te bereiden op een studie in Cambridge, en dat gebeurde. In 1926 won hij een studiebeurs van Trinity College. Hij kwam er in contact met coryfeeën als G.H. Hardy, J.E. Littlewood (zijn 'director of studies'), L. Wittgenstein. De Ph.D.-graad behaalde hij in 1931, zijn supervisor was de meetkundige H.F. Baker. Het proefschrift gaat — uiteraard — over meerdimensionale regelmatige lichamen.

In de entourage van Baker leerde de jonge Coxeter de groepentheorie kennen, die de wiskundige aanpak belichaamt van meetkundige symmetrieën. De negentiende-eeuwse wiskundigen hadden ingezien dat de symmetrieën van de platonische lichamen in interessante twee- en driedimensionale groepen van lineaire transformaties georganiseerd zijn. Coxeter begreep dat zijn meerdimensionale

regelmatige lichamen samenhangen met interessante meerdimensionale lineaire groepen en hij begon omstreeks 1930 over die groepen na te denken.

Tot 1936 was hij 'research fellow' van Trinity College. Hij bracht ook twee academische jaren (1932–1933 en 1934–1935) door in Princeton in de Verenigde Staten. Daar leerde hij veel van O. Veblen en hij maakte kennis met latere prominenten van zijn generatie als R. Brauer en N. Jacobson. In 1934 publiceerde hij de resultaten van zijn groepentheoretisch werk: de classificatie van 'kaleidoscopen' of spiegelingsgroepen, dat wil zeggen groepen van reële lineaire transformaties voortgebracht door spiegelingen. In dat fundamentele artikel vindt men ook de diagrammen die deze groepen beschrijven (thans Coxeterdiagrammen of Coxeter-Dynkindiagrammen genoemd). Hij gaf een exposé van zijn resultaten in de vermaarde 'notes' van een college van H. Weyl over Liegroepen aan het Institute for Advanced Study in Princeton.

Tegenwoordig komt ieder die in wiskunde of natuurkunde van doen heeft met continue symmetrieën (belichaamd in de Liegroepen) de Coxeterdiagrammen tegen. In genoemd artikel vindt men ook wat nu het Coxeterelement wordt genoemd: het product van de voortbrengers van een spiegelingsgroep.

Een ander artikel uit 1934, dat gaat over groepen met een presentatie $(R_i^2 = (R_i R_j)^{k_{ij}} = 1)$ als die van de spiegelingsgroepen, is het begin van de theorie van de Coxetergroepen.

In 1936 werd Coxeter een assistant professorship aangeboden in Canada, aan de Uni-

versiteit van Toronto. Op advies van zijn vader, die de oorlogswolken al zag hangen, en van G.H. Hardy besloot hij het aanbod aan te nemen. Hij is tot zijn dood in Toronto gebleven.

Ook in 1936 trouwde hij met de Nederlandse Rien (Hendrina) Brouwer, die hij in 1935 in Engeland ontmoet had bij gemeenschappelijke kennissen. Zij was hem vele jaren een trouwe steun; zij overleed in 1999. Het echtpaar had twee kinderen, een zoon en een dochter.

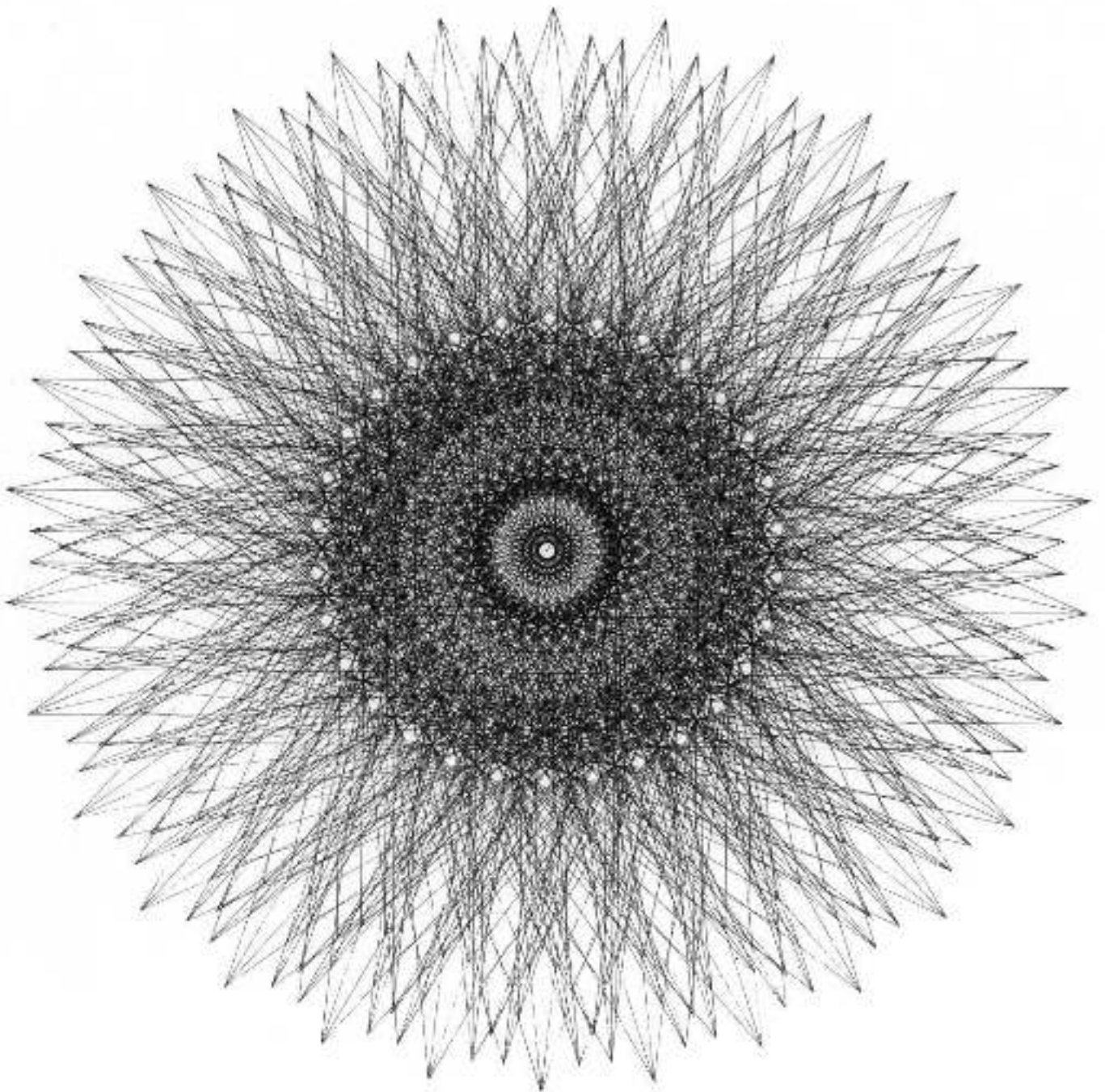
Coxeters academische carrière verliep langzaam, na zeven jaar werd hij associate profes-

sor en pas na twaalf jaar full professor (Coxeter zei dat hij zich voelde als de aartsvader Jacob, die zeven jaren moest werken voor Lea en zeven jaren voor Rachel).

Coxeter was een productieve wiskundige; hij publiceerde ongeveer 200 artikelen. Daarnaast schreef hij verschillende boeken. Een standaardwerk is *Regular Polytopes* (1948, nieuwe uitgave 1973), waar zijn encyclopedische kennis blijkt van de literatuur over regelmatige lichamen. In dat boek komt men ook Coxeter's vriend John Petrie tegen als ontdek-

ker van de Petrie-veelhoeken van een regelmatig lichaam.

In vele talen vertaald is *Introduction to Geometry* (1961/1981). De titel van de Duitse vertaling *Unvergängliche Geometrie* geeft weer wat Coxeter in dat boek voor ogen stond. Naast boeken over meetkundige onderwerpen is er het algebraïsch georiënteerde boek met W.O.J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups* (1957/1980). Coxeter zelf was het meest gesteld op zijn boek *Regular Complex Polytopes* (1974/1991) over re-



De Great grand stellated 120-cell, een van de vele figuren uit het boek *Regular Complex Polytopes* van Coxeter. Coxeter liet zich graag inspireren door muziek; uit het voorwoord: "This book has occupied much of my time and attention for nearly twenty years. [...] I have made an attempt to construct it like a Bruckner symphony, with crescendos and climaxes, little foretastes of pleasure to come, and abundant cross-references. The geometric, algebraic and group-theoretic aspects of the subject are interwoven like different sections of the orchestra."

gelmatige lichamen in een complexe ruimte, een boek met spectaculaire illustraties. De bijbehorende symmetriegroepen zijn eindige groepen van complexe lineaire transformaties, voortgebracht door complexe spiegelingen, een soort gegeneraliseerde Coxetergroepen. De belangstelling ervoor is in de loop van de jaren steeds meer toegenomen.

Coxeters publicaties zijn zorgvuldig geredigeerd en helder geschreven; esthetische aspecten waren voor hem belangrijk. Hij was een inspirerend spreker die altijd iets verrassends bracht. Zijn grote meetkundige intuïtie blijkt overal; hij kon meerdimensionale objecten 'zien'. De thema's van Coxeters publicaties zijn al genoemd: regelmatige lichamen, meetkundige symmetrieën en de bijbehorende groepentheorie, thema's waarop vele variaties kunnen worden gemaakt, waaraan hij zelf ook gewerkt heeft. Hier volgen enkele voorbeelden.

In een artikel uit 1951 worden de (reeds genoemde) Coxeter-elementen nader bekeken. Coxeter vertelt dat de aanleiding was een voordracht van C. Chevalley over de Bettigetallen van compacte Liegroepen. Coxeter herkende getallen die hij in zijn *Regular Polytopes* was tegengekomen. Dit bracht hem ertoe de eigenwaarden van Coxeter-elementen te bepalen. Die bleken een fraaie wetmatigheid te vertonen, later door anderen uitvoerig geanalyseerd (een voorbeeld van wisselwerking tussen Coxeters concrete meetkunde en meer esoterische delen van de wiskunde.)

De icoesaëder (het regelmatig twintigvlak) treft men aan als ruimtelijke configuratie in sommige virussen. Het optreden van regelmatige of halfregelmatige lichamen buiten de wiskunde interesseerde Coxeter zeer. Vice versa was er bij niet-wiskundigen belangstelling voor zijn werk. De Amerikaanse ontwerper en architect Buckminster Fuller droeg één van zijn boeken op aan Coxeter. Fuller maakte in de jaren '40 van de vorige eeuw furore met zijn 'geodesic dome's'. Daarvan is een belangrijk constructie-element de 'buckyball', een afgeknotte icoesaëder met 60 hoekpunten, 12 regelmatige vijfhoeken en 20 regelmatige zeshoeken als zijvlakken, natuurlijk goed bekend aan Coxeter (Leonardo da Vinci had er overigens al een tekening van gemaakt).

In de jaren '80 bleken buckyballs op te treden als bouwstenen van moleculen genaamd fullerenes. Eén ervan is C_{60} , waarvan de moleculen buckyballs zijn met in ieder hoekpunt een koolstofatoom. C_{60} heeft zeer bijzondere chemische eigenschappen. De ontdekkers ervan ontvingen in 1996 de Nobelprijs voor chemie.



Coxeter in Banff, augustus 2001, gedurende een lezing over meetkunde bij Escher.

Coxeter had een speciale relatie met Nederland. Hij kwam regelmatig met zijn vrouw op familiebezoek in Nederland en kreeg contacten met Nederlandse wiskundigen. Er waren ook andere wiskundige connecties. Coxeter was vertrouwd met het werk over meerdimensionale regelmatige lichamen van Nederlandse wiskundigen uit het begin van de twintigste eeuw (onder anderen E.L. Elte, S.L. van Oss, P.H. Schoute, W.A. Wythoff). In Nederland zijn zij wat in het vergeetboek geraakt. Maar hun werk komt uitvoerig aan de orde in *Regular Polytopes*.

Tijdens een bezoek aan Nederland in 1954 nam Coxeter deel aan het vierjaarlijkse Internationale Wiskundecongres dat toen in Amsterdam plaats vond. In het kader van het congres was er een expositie van het grafische werk van M.C. Escher, toen buiten Nederland nauwelijks bekend. Coxeter werd er zeer door geboeid en bezocht Escher in Baarn. Zij raakten bevriend en Coxeter bracht Escher in contact met de symmetrieën van het niet-Euclidische vlak (gevisualiseerd als het inwendige van een cirkel). Deze symmetrieën heeft Escher in zijn latere werk geëxploreerd.

Bijvoorbeeld in zijn houtsnede *Cirkellimiet III* uit 1959 (met vissen die naar de rand toe steeds kleiner worden). Coxeter heeft de trigonometrie die er achter zit geanalyseerd. Hij was geïmponeerd door Eschers intuïtieve gevoel voor de wiskundige details die Coxeter alleen met ingewikkelde trigonometrie kon aanpakken. (Coxeter vertelt dat na afloop van een lezing waarbij Escher ook aanwezig was, deze hem vertelde dat hij er geen woord van begrepen had...) Coxeter heeft veel gedaan voor het bekend maken van Eschers werk buiten Nederland.

Coxeter overleed plotseling op 96-jarige leeftijd, op 30 maart 2003. Hoewel zijn mobiliteit achteruit gegaan was, was zijn geest nog fris. De meetkunde heeft hem tot het laatst beziggehouden.

Wim Luxemburg

California Institute of Technology
Mathematics 253-37
Pasadena CA 91125-0037
Verenigde Staten van Amerika
lux@caltech.edu

Marinus Kaashoek

Vrije Universiteit
Faculteit der Exacte Wetenschappen
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam
kaash@cs.vu.nl

Ben de Pagter

Technische Universiteit Delft
Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Postbus 5031
2600 GA Delft
b.depagter@ewi.tudelft.nl

In memoriam

Adriaan Cornelis Zaanen (1913–2003)

In april van vorig jaar is prof.dr. A.C. Zaanen op negenentachtigjarige leeftijd overleden. Van 1956 tot 1981 was hij als hoogleraar analyse aan de Universiteit Leiden verbonden. Hij vormde een invloedrijke onderzoeksgroep, met vele succesvolle promovendi, waaronder de auteurs van dit In Memoriam. Hij was erelid van het Wiskundig Genootschap, lid van de Koninklijke Academie voor Wetenschappen en Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw.

Adriaan (Aad) Cornelis Zaanen overleed op 1 april 2003. Hij was weduwnaar van Ada Jacoba van der Woude die ongeveer zes jaar eerder was overleden. Samen hadden zij vier zonen, en bij zijn overlijden waren er negen kleinkinderen en twee achterkleinkinderen. Aad Zaanen werd geboren op 14 juni 1913 te Rotterdam en was de oudste zoon in het gezin van Pieter Zaanen en Ariaantje de Bruijn. Zijn vader had een aannemersbedrijf en restaureerde vooral historische gebouwen. Van 1925 tot 1930 bezocht Aad de HBS in Rotterdam. Zijn wiskundeleraar was een broer van de bekende wiskundige J.G. van der Corput.

Wiskundestudent in Leiden

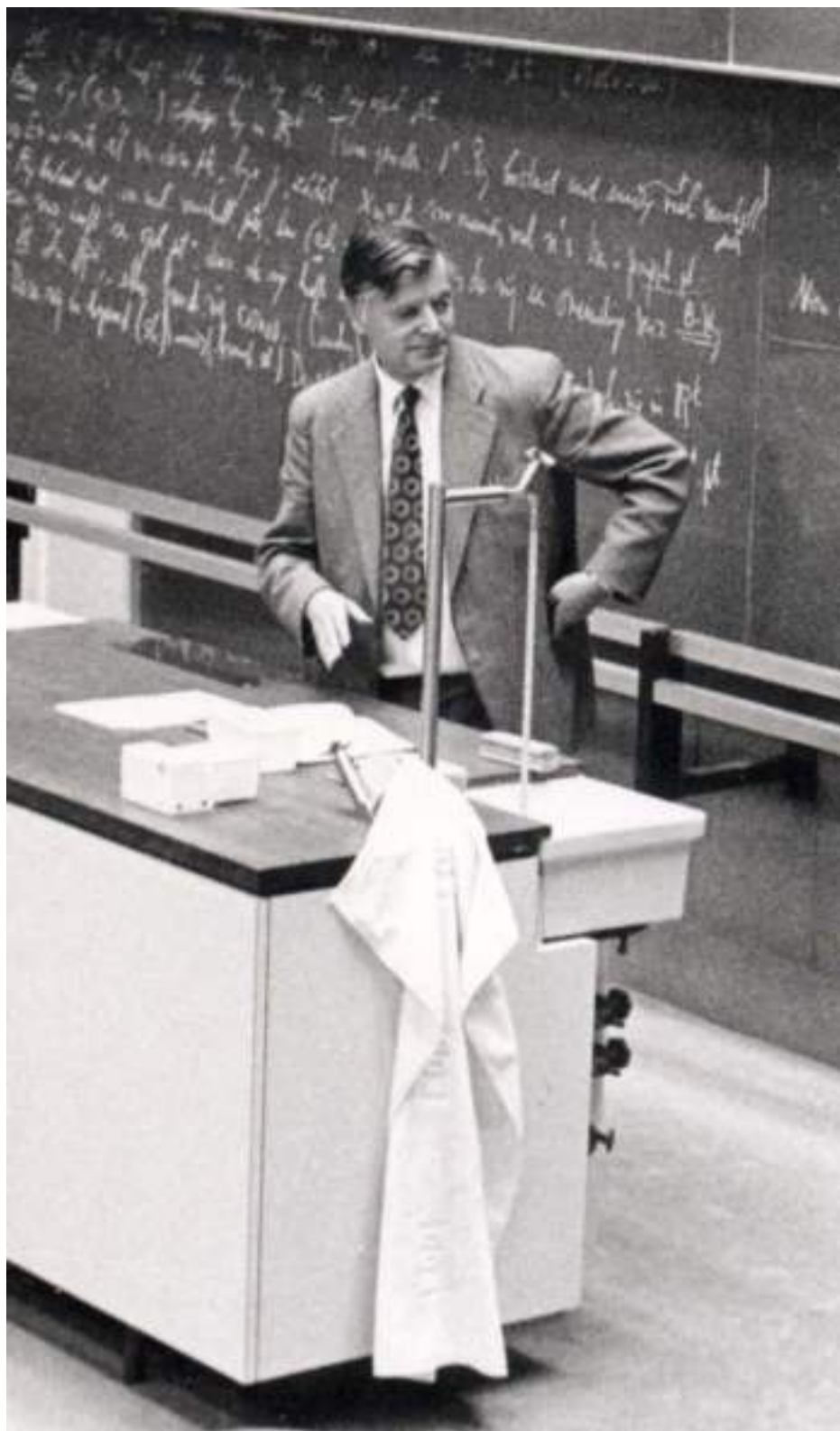
In 1930 slaagde hij voor het eindexamen HBS-B met de bijzondere onderscheiding van de op één na beste in Nederland. Voor deze prestatie ontving hij een studiebeurs. Hij ging wis- en natuurkunde studeren aan de Universiteit in Leiden, met als bijvak sterrenkunde. Zijn interesse ging eerst meer uit naar het vakgebied der natuurkunde. Hij had zelfs nog overwogen zich in te schrijven voor de nieuwe studierichting van natuurkundig ingenieur in Delft. In Leiden werd het al gauw wiskunde. Die keuze was vooral bepaald door de goed verzorgde en inspirerende colleges in de wiskunde van de hoogleraren J. Droste en W. van der Woude en de jonge begaafde lector H.D. Kloosterman. Daarbij kwam nog dat gedurende die tijd Kloosterman speciale caputcolleges verzorgde over meer moderne onderwerpen die toen nog geen deel uitmaakten van het officiële klassieke wiskundeprogramma, zoals Lebesgue-integratie, lineaire operatoren in Hilbert-ruimten, groepentheorie en getallenleer. Na het afleggen in 1935 van het doctoraalexamen begon Aad met zijn studie voor het behalen van de doctorsgraad.

Met J. Droste als promotor promoveerde hij in 1938, op basis van zijn proefschrift *Over reeksen van eigenfuncties van zekere randproblemen*, handelend over het asymptotisch gedrag en de convergentie van reeksen van eigenfuncties van de oplossingen van Sturm-Liouville-randwaardeproblemen. Een prachtig klassiek onderwerp, voortbouwend op het werk op dit gebied van G.B. Birkhoff (1909), A. Haar (1910–1912) en E.W. Hobson (1908–1912).

Leraar en onderzoeker

Gedurende de jaren 1938–1946 was Zaanen leraar wiskunde aan een middelbare school in Rotterdam. In die jaren ontmoette hij ook onder zijn leerlingen zijn toekomstige echtgenote Ada Jacoba van der Woude (geen relatie met de wiskundige Van der Woude). Ondanks zijn drukke en veeleisende leraarsbaan bleef er gelukkig nog wel tijd over om zich verder te verdiepen in de wiskunde.

Door het onderwerp van zijn proefschrift was zijn aandacht getrokken door het in 1935 in de Poolse blauwe serie verschenen boek van A. Zygmund over Fourierreeksen en



Zaanen geeft college in een van de zalen in het Gorlaeuslaboratorium van de Universiteit Leiden (1974).

door het baanbrekende boek *Théorie des Opérations Linéaires* van Stefan Banach, verschenen in dezelfde serie in 1932. Dit laatste werk bracht hem ertoe om ook het nu klassieke standaardwerk van Marshall H. Stone,

Linear Transformations in Hilbert space grondig te bestuderen. Door deze studie begon Zaanen meer en meer geïnteresseerd te raken in de algemene theorie der integraalvergelijkingen, waarvoor de grondslag gelegd was

door D. Hilbert rond 1912. Vooral ook omdat dit type van vergelijkingen een belangrijke rol speelt in de randwaardeproblemen onderzocht in zijn proefschrift. Aanvankelijk ging dit hoofdzakelijk om integraalvergelijkingen met symmetrische kernen, die optreden bij de zogenaamde zelfgeadjungeerde randwaardeproblemen waarvan de Greense functie symmetrisch is. Voor bepaalde niet-symmetrische kernen werd rond 1910 door de Franse wiskundige J. Marty het begrip symmetriseerbare integraaloperator ingevoerd. Dit type van integraaloperator en de daarmee samenhangende klasse van symmetriseerbare lineaire operatoren in de Hilbert-ruimte werden het onderwerp van een grondig onderzoek van Zaanen. Zijn resultaten verschenen na de oorlog in 1946 en 1947 in een serie van negen artikelen in de Proceedings van de KNAW.

Over dit onderzoek gaf Zaanen op 3 december 1982 in zijn Leidse afscheidscollege, verschenen in het NAW 1983, nog de volgende toelichting: "Later na de oorlog, heb ik gehoord dat deze operatoren een rol spelen in de theorie van trillingen in vliegtuigvleugels. Hierover is in de oorlogsjaren in Nederland onderzoek verricht door Van der Vooren, onderzoek dat tijdens de oorlog niet aan de Duitsers bekend mocht worden. Nog een aantal jaren later vertelde de Duitse wiskundige Wielandt mij dat hij bij zijn werk in de oorlog ook zulke operatoren ontmoet had maar dat hij zijn resultaten vóór zich gehouden had. Ik vermoed dat zijn werk in de oorlog ook iets te maken had met het gedrag van vliegtuigen." Volledigheidshalve moeten we hieraan toevoegen dat Luxemburg van zijn collega wijlen Olga Taussky Todd leerde dat zij gedurende de oorlogsjaren in Engeland als 'Scientific Officer of the Ministry of Aircraft Production', in verband met numerieke berekeningen van 'wing flutter calculations' ook te maken kreeg met dit type van symmetriseerbare transformaties.

Delft, Bandoeng, Delft

In 1946 werd Zaanen benoemd, op strikt tijdelijke basis, als docent in de wiskunde aan de Technische Hogeschool (TH) in Delft voor het verzorgen van een eerstejaarscollege over analytische meetkunde van drie uur per week. Gedurende datzelfde jaar was Zaanen, op aanbeveling van zijn vroegere leermeesters, benoemd tot privaatdocent in Leiden. Hij heeft dat cursusjaar, naast zijn werkzaamheden als leraar en docent, ook nog in Leiden een caput college gegeven over Lebesgue-integratie.

Een grote verandering in zijn carrière brak

aan toen hij in 1947 een benoeming tot hoogleraar wiskunde aan de TH in Bandoeng aanvaardde, als opvolger van Boomstra. Omstreeks diezelfde tijd had het Mathematisch Centrum in Amsterdam hem ook een positie aangeboden, maar Zaanens voorkeur ging uit naar Bandoeng. (Met dank aan dr. G. Alberts voor deze informatie.) Gedurende zijn Bandoengse tijd heeft Aad met veel energie en succes zijn onderzoek in symmetriseerbaarheid voortgezet en deze klasse van operatoren uitgebreid met het invoeren van de door hem genoemde normaliseerbare operatoren. Het resultaat van dit onderzoek verscheen in 1950, in een lang artikel in het tijdschrift *Acta Mathematica* (83, 1950, p. 197–248) met de titel ‘Normalisable transformations in Hilbert space and systems of linear integral equations’. Dit artikel heeft een grote invloed uitgeoefend op de verdere ontwikkeling van de theorie der

symmetriseerbare en normaliseerbare operatoren. In hetzelfde jaar 1950 werd Zaanen benoemd tot hoogleraar wiskunde aan de TH in Delft.

Symmetriseerbare operatoren

We zullen nu even in het kort het begrip symmetriseerbaarheid toelichten. Beschouw een Hilbert-ruimte H voorzien van het inwendig product $(\cdot, \cdot)$. Een begrensde lineaire operator T op H wordt *symmetriseerbaar* genoemd als er een hermitesche operator $A > 0$ bestaat zodanig dat T ten aanzien van het inwendig product

$$(x, y)_A = (Ax, y) \quad (x, y \in H)$$

hermitisch is, dat wil zeggen,

$$(Tx, y)_A = (x, Ty)_A$$

voor alle $x, y \in H$. Het inwendig product

$(x, y)_A$ definieert een norm

$$\|x\|_A = \|A^{\frac{1}{2}}x\|, \quad (x \in H),$$

op H , waarbij $A^{\frac{1}{2}}$ de unieke positieve wortel is van $A > 0$. Uit

$$\|x\|_A \leq \|A^{\frac{1}{2}}\| \|x\|$$

volgt dat $\|\cdot\|_A$ continu is ten opzichte van $\|\cdot\|$. Het omgekeerde geldt alleen als A een begrensde inverse heeft op $(H, (\cdot, \cdot)_A)$. De complementering van $(H, (\cdot, \cdot)_A)$ is weer een Hilbert-ruimte H_A en T definieert een duidelijk een hermitesche operator op H_A , omdat T ook begrend is op $(H, (\cdot, \cdot)_A)$. Het spectrum $\sigma_A(T)$ van T in H_A voldoet aan $\sigma_A(T) \subseteq \sigma(T)$, waarbij $\sigma(T)$ het spectrum van T op H is. De eigenwaarden en multipliciteiten van de twee operatoren zijn gelijk aan elkaar. Verder is T compact op H dan en alleen dan als T compact is op H_A , en in dat geval zijn de spectra aan elkaar gelijk en ook de spectrale multipliciteiten en generaliseerde eigenruimten stemmen overeen. Bovendien is het spectrum van T op H reëel. Het laatste is nu een belangrijk gevolg van de symmetriseerbaarheid. In het geval van normaliseerbaarheid bestaat er een operator $\tilde{T}$ zodanig dat

$$(Tx, y)_A = (x, \tilde{T}y)_A$$

en $A\tilde{T}T = A\tilde{T}T$. Voor compacte operatoren T bewees Zaanen dat de spectra van T op H en H_A gelijk zijn met dezelfde multipliciteiten.

Met dit werk over symmetriseerbare en normaliseerbare operatoren was Zaanen een pionier. Later zouden ook vooraanstaande wiskundigen als P. Lax (1954), J. Dieudonné (1961) en T. Andô (1971) zich met dit onderwerp bezighouden. De huidige lezer herkent in het begrip symmetriseerbaarheid ook al een eerste aanzet tot een spectraaltheorie van operatoren op ruimten met twee normen (I.C. Gohberg en M.K. Zambikij, 1966). Nog steeds is er geen bevredigende intrinsieke karakterisering van symmetriseerbaarheid gegeven. Voor compacte injectieve operatoren T geldt de volgende stelling: T is symmetriseerbaar dan en slechts dan als de verzameling

$$\left\{ x \in H : \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \|e^{i\lambda T^*} x\| < \infty \right\}$$

dicht is in H . Dit is analoog aan de stelling van G. Lumer (1964) voor spectraal operatoren van scalair type met reëel spectrum.



Zaanen met Freudenthal en Luxemburg bij het symposium van 5 en 6 juli 1982 op de Universiteit Leiden ter ere van zijn emeritaat.

foto: archief M.A. Kaashoek



Zaanen met enkele promovendi in Oberwolfach. Van links naar rechts: Grobler, Luxemburg, De Jonge, Zaanen, Huijsmans, Schep, Vietsch en De Pagter

foto: archief H.A. Zaanen

Linear Analysis

In Bandoeng begon Zaanen ook met de eerste voorbereidingen voor het schrijven van een monografie over de theorie van niet-singuliere integraalvergelijkingen. Historisch gezien hebben de methoden ontwikkeld in de theorie van dit type vergelijkingen een belangrijke rol gespeeld in de ontwikkeling van de functionaalanalyse, waarvan het eerder genoemde boek van Stefan Banach duidelijk getuigenis aflegt. Anderzijds hebben de hoofdprincipes van de functionaalanalyse belangrijke toepassingen gevonden in de theorie van integraalvergelijkingen, zoals bij de symmetriseerbaarheid en normaliseerbaarheid. Om deze wisselwerking duidelijk te laten uitkomen besloot Zaanen tot het toevoegen van twee delen: een over maat- en integratietheorie en een over de grondslagen van de functionaalanalyse, dat het langste werd om de lezer een goede inleiding in deze theorie te verschaffen.

In Delft werd de laatste hand gelegd aan het boek dat hij voorzag van de titel *Linear Analysis*. Toen Luxemburg assistent in Delft was werd hij in 1952 als assistent aan Zaanen toegevoegd. Zijn eerste taak was het corrigeren van de proefdrukken van het boek. Deze taak bracht hem voor het eerst in contact met deze nieuwe belangrijke tak van de analyse. Het 600 bladzijden tellende boek verscheen in 1953 in de serie 'Bibliotheca Mathematica'. Het boek was voor de naoorlogse generatie een van de weinige moderne bronnen om functionaalanalyse uit te

leren. Er kwamen herdrukken in 1957 en 1960. *Linear Analysis* is nu een van de klassieke leerboeken over functionaalanalyse en de theorie der lineaire integraalvergelijkingen. Door de rijke verzameling van zorgvuldig gekozen opgaven, velen met aanwijzingen en soms oplossingen, is het boek ook uitstekend geschikt gebleken voor zelfstudie.

Met het verschijnen van *Linear Analysis* nam Zaanen in zekere zin afscheid van zijn onderzoek in de theorie van de lineaire integraalvergelijkingen. Integraaloperatoren keerden later wel terug, in meer abstracte vorm, als 'kernel operators'. Ook stimuleerde hij zijn promovendus Kaashoek, in het begin van de zestiger jaren, lijnen uit *Linear Analysis* voort te zetten met een studie van gesloten lineaire operatoren waarmee hij aansluiting zocht bij de theorie van Fredholm-operatoren die toen in ontwikkeling was. Van een update van *Linear Analysis*, hoewel nog wel eens overwogen, is het niet meer gekomen.

Vectorroosters en hoogleraar in Leiden

Zaanens interesse ging na het verschijnen van *Linear Analysis* meer uit naar vragen over de structuur van de ruimten die optreden als domeinen van integraaloperatoren, zoals de klassieke L_p - en Orlicz-ruimten van meetbare functies. Oplossingen van een aantal vragen die hierbij opkwamen verschenen in 1955 in het proefschrift *Banach Function Spaces* van zijn eerste promovendus Luxemburg.

Het soort ruimten waar het hier over gaat zijn voorbeelden van de zogenaamde lineaire

vectorroosters, die in navolging van N. Bourbaki ook wel Riesz-ruimten worden genoemd. Als kritische bewonderaar van deze imaginair-wiskundige had Zaanen, zoals hij in zijn afscheidscollege vermeldde, "goed nota genomen van de uitspraak dat inzicht in de structuur van een wiskundige theorie even belangrijk is als de in die theorie te behalen resultaten". Zo ontwikkelde zich bij hem een steeds dieper gaande belangstelling voor de structuur van partieel geordende ruimten en toepassingen daarvan. Volledigheids-halve vermelden we hier dat H. Freudenthal een van de grondleggers van de theorie van dit type ruimten is. Zijn baanbrekend artikel 'Teilweise geordnete algebraischen Strukturen' verscheen in 1936 in deel 39 van de Proceedings van de KNAW. Het bevat onder andere een spectraalstelling voor elementen van een vectorrooster, waarvan de klassieke spectraalstelling voor hermitesche operatoren een speciaal geval is. Deze *Freudenthal-spectraalstelling* is een van de fundamenteën van de theorie der vectorroosters. Omstreeks die tijd verschenen ook belangrijke bijdragen van G. Birkhoff, L.V. Kantorovitch, H. Nakano en S. Ogasawara.

In 1956 vertrok Zaanen uit Delft naar zijn Alma Mater voor het aanvaarden van een hoogleraarschap in de analyse en waar hij bleef tot aan zijn emeritaat in 1982. In Leiden, in verband met de groeiende belangstelling in vectorroosters en de theorie der positieve operatoren, begon Zaanen met Luxemburg aan een systematisch onderzoek naar de aard van de structuur van deze ruimten. De resultaten van dit onderzoek verschenen in een reeks van vijftien artikelen in de Proceedings van de KNAW. Er bleven echter genoeg interessante vragen over voor zijn twaalf Leidse promovendi om aan dit project deel te nemen, en wel acht proefschriften maken duidelijk hiervan deel uit. Tenslotte werden deze resultaten opgenomen in een monografie getiteld *Riesz Spaces*, deel 1 (samen met Luxemburg) verscheen in 1971 en deel 2 in 1983. De lange en vruchtbare samenwerking van Zaanen met Luxemburg werd sterk bevorderd door gast-hoogleraarschappen aan het California Institute of Technology (Caltech) gedurende de cursusjaren 1960–61 en 1968–69, en door wederzijdse kortere bezoeken gedurende de zomervakanties.

Vanaf het midden van de zeventiger jaren ging Zaanens belangstelling verder uit naar de theorie van de geordende algebra's, in het bijzonder de f -algebra's. Deze f -algebra's, tezamen met de hiermee gerelateerde orthomorfismen op vectorroosters, geïntroduceerd

door H. Nakano en G. Birkhoff, bleken een belangrijke rol te spelen in de spectraaltheorie van positieve operatoren op Banach-roosters.

In de hierop volgende jaren heeft de theorie van Banach-roosters en positieve operatoren zich verder ontwikkeld in verschillende richtingen. Veel van deze ontwikkelingen zijn gebaseerd op het fundamentele werk van Zaanen en zijn leerlingen op dit gebied. We noemen in het bijzonder de theorie van halfgroepen van positieve operatoren, met toepassingen in de theorie van elliptische differentiaaloperatoren. In de afgelopen jaren heeft de theorie van de Banach-functieruimten zich ook verder ontwikkeld in de richting van de zogenaamde niet-commutatieve analyse, waarbij de onderliggende maatruimte wordt vervangen door een 'niet-commutatieve maatruimte', een Von Neumann-algebra. Deze theorie, geïnspireerd door de theorie van de Banach-roosters, slaat een brug tussen enerzijds de klassieke Banach-functieruimten en anderzijds de theorie van idealen van compacte operatoren in de zin van Gohberg-Krein, waarin ook de algemenere niet-commutatieve L_p -ruimten zijn opgenomen (recent werk van P.G. Dodds, B. de Pagter, F. Sukochev). Gedurende de laatste tien jaar speelt de theorie van de vectorroosters ook een belangrijke rol in bepaalde takken van de theoretische economie, geïnitieerd door C.D. Aliprantis.

Een onvermoeide arbeid komt alles te boven

Al de promovendi van Zaanen zijn het er over eens dat zij met Aad een uitstekende leermeester hebben gehad. Hij volgde nauwkeurig en met grote belangstelling de vooruitgang van je werk. Het stellen van kritische vragen en het eisen van het geven van niet triviale voorbeelden waaraan de diepte van de stellingen getoetst kon worden werkte hoogst inspirerend. Het zal niemand verbazen dat hij ook veel aandacht schonk aan de wijze waarop de resultaten waren opgeschreven. Dit gaf dikwijls aanleiding tot veel herschrijvingen, maar het eindresultaat mocht er altijd zijn.

Dit gold niet alleen voor zijn leerlingen. Een manuscript van een nog jonge wiskundige dat Zaanen ontvangen had voor aanbieding voor publicatie in *Indagationes Math.* kwam terug tezamen met de in de hand van Zaanen geschreven versie, die middenin de laatste paragraaf ineens ophield met de aanwijzing: "En ga zo op deze wijze verder". Gelukkig voor de schrijver is alles toch goed afgelopen. Zo dragen de geschriften die door zijn hand gingen allemaal het stempel van Zaanen. In alle opzichten deed zijn werkwijze eer aan het motto

van het KWG: *Een onvermoeide arbeid komt alles te boven.*

Behalve de hierboven genoemde boeken schreef Zaanen ook een heel belangrijk leerboek over integratietheorie. Het verscheen in 1958, herdrukken in 1961 en 1965, en een geheel herziene en uitgebreide versie ervan verscheen in 1971. Gedurende zijn emeritaat verschenen van zijn hand nog twee leerboeken. Een over de onderwerpen continuïteit, integratie en Fourieranalyse, verschenen in 1983. Het is een zeer origineel werk en in vele opzichten een uniek leerboek over deze onderwerpen. Zijn laatste en misschien wel het meest geslaagde boek van zijn hand, gewijd aan zijn lievelingsonderwerp, de theorie van positieve operatoren, verscheen in 1997. Hij schreef dit boek als een inleiding in de theorie van vectorroosters en positieve operatoren. Maar er komen ook veel verrassende en nieuwe inzichten in voor, waar ook de specialisten van kunnen genieten.

Niet onvermeld mogen blijven Zaanens verdiensten als bestuurder en als lid van de wiskundige gemeenschap. Hij zal worden herinnerd als een rustig bestuurder, die door zijn nauwgezette werkwijze en heldere betoogtrant ook in moeilijke tijden — hij was onder andere voorzitter van de Leidse afdeling Wiskunde in de woelige jaren van 1965 tot 1971 — koers wist te houden. Hoewel hij zelf niet al teveel belang hechtte aan al zijn 'nevenactiviteiten', is zijn lijst van verdiensten voor de Nederlandse wiskundige gemeenschap indrukwekkend. Naast zijn bestuurlijk werk in Leiden was hij bijna dertig jaar lang, van 1953 tot zijn emeritaat

in 1982, een van de redacteurs van het Nieuw Archief voor Wiskunde. Van 1965 tot 1979 was hij curator van het toenmalige Mathematisch Centrum. Zo zijn er nog wel een paar andere taken te noemen die hij met zorg en grote zorgvuldigheid verrichtte. Zijn grote werkkraft kwam hem hierbij van pas: zijn wetenschappelijk werk leed er weinig onder.

Zijn werk en verdiensten voor de wiskundige gemeenschap bleven niet onopgemerkt. In 1960 werd hij gekozen tot lid van de KNAW en werd rustend lid in 1980. Bij zijn afscheid in Leiden in 1982 ontving hij de Orde van de Ridder van de Nederlandse Leeuw. Het KWG, waarvan hij gedurende de jaren 1970–72 het voorzitterschap bekleedde, benoemde hem in 1988 voor zijn vele verdiensten tot erelid.

Zijn promovendi eerden hem met twee *Festschriften*. Het eerste, ter gelegenheid van zijn emeritaat, verscheen in 1982 met de betekenisvolle titel *From A to Z, Proceedings of a symposium in Honour of A.Z. Zaanen*, onder redactie van zijn promovendi C.B. Huijsmans, M.A. Kaashoek, W.A.J. Luxemburg en W.K. Vietsch. Het tweede, ter ere van zijn tachtigste verjaardag, verscheen in 1995 met als titel: *Operator Theory in Function Spaces and Banach Lattices*, onder de redactie van zijn promovendi C.B. Huijsmans, M.A. Kaashoek, W.A.J. Luxemburg en B. de Pagter. Helaas moesten de plannen voor de viering van zijn negentigste verjaardag in 2003 gewijzigd worden. Er is nu besloten dat de *Proceedings* van de International Conference on Positivity and Applications (Rhodos, 2003) zullen worden opgedragen aan de nagedachtenis van A.C. Zaanen.



Lezing bij het symposium van 5 en 6 juli 1982 op de Universiteit Leiden ter ere van zijn emeritaat. Van links naar rechts, op de voorste rij: Butzer, Schaefer, Sz.-Nagy, Zaanen, Smithies, Huijsmans

Wil Schilders

Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
w.h.a.schilders@tue.nl

Inaugurele rede

De toepassing als

De numericus Lloyd N. Trefethen omschreef numerieke wiskunde als het vakgebied waar algoritmen worden bestudeerd voor het oplossen van problemen uit de continue wiskunde. Deze problemen zijn meestal afkomstig uit de fysische werkelijkheid en worden dikwijls aangeleverd door industriële bedrijven. In deze oratie laat Wil Schilders zien, dat de studie van numerieke algoritmen ook de studie van de fysische werkelijkheid inhoudt. Hij pleit voor meer samenwerking met onderzoekers uit andere disciplines. Wil Schilders werd in het najaar van 2003 benoemd tot hoogleraar Numerieke Wiskunde voor de Industrie aan de Technische Universiteit Eindhoven.

Een van de meest gerenommeerde wiskundigen van de twintigste eeuw, G.H. Hardy, getaltheoreticus en onder collega's bekend als 'een echte wiskundige', schreef in zijn essay *A Mathematician's Apology* [1]: "Een van de eerste taken van een hoogleraar is het om het belang van zijn vakgebied enigszins te overdrijven, en tevens zijn eigen rol hierin." Graag maak ik van de gelegenheid gebruik om in deze rede het eerste te doen, en ik hoop dat

u de rede ook in dit licht wilt zien. Het tweede deel van Hardy's advies zal ik zo veel als mogelijk achterwege laten, aangezien er voldoende spreekwoorden en gezegden bestaan aangaande bescheidenheid.

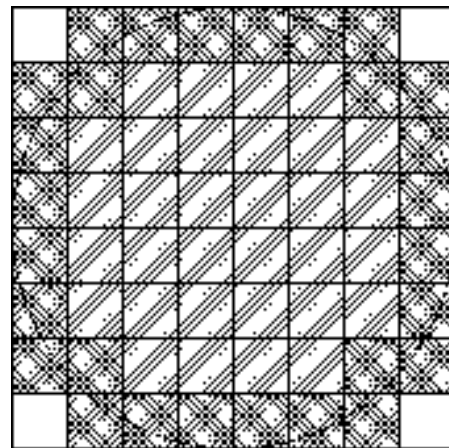
In deze rede wil ik graag het belang onderstrepen van mijn vakgebied, Numerieke Wiskunde voor de Industrie, en u een idee geven van de werkwijze die mij voor ogen staat. Numerieke wiskunde is een relatief jonge tak van wiskunde, de belangrijkste ontwikkelingen stammen uit de tweede helft van de twintigste eeuw. Toch is er al eerder aan methoden gewerkt die tot de numerieke wiskunde gerekend kunnen worden. Een van de oudste en bekendste voorbeelden is wel de benadering van π , een getal dat zeer tot de verbeelding van de oude Grieken sprak. Vierkantjes tellen binnen en buiten een eenheidscirkel, zoals geïllustreerd in figuur 1 en tabel 1, levert onder- en bovengrenzen op voor de waarde van π en zodoende hebben we ook meteen een idee van de nauwkeurigheid van de gebruikte benaderingen.

Hoewel het een antiek voorbeeld is, en er in de afgelopen twee millennia veel snellere en efficiëntere methoden voor de benade-

ring van π zijn ontwikkeld [2], geeft het wel de essentie van de numerieke wiskunde goed weer:

- met een eindig aantal bewerkingen een benadering vinden,
- uitspraken doen over de nauwkeurigheid van deze benadering.

Kenmerkend is dus de eindigheid van het proces dat uiteindelijk leidt tot de gewenste



Figuur 1 Een benadering van de oppervlakte van een cirkel: de ondergrens is licht gearceerd, de bovengrens is donker gearceerd.



Wil Schilders

leidraad

benadering. Dit proces wordt ook wel algoritme genoemd, volgens het *Groot Woordenboek der Nederlandse Taal* “een systematisch stelsel voor het uitvoeren van rekenkundige bewerkingen en de volgorde daarvan.” Maar ook, volgens dezelfde bron, “een strikt technische redeneermethode die geen menselijke intuïtie vereist.” Over dat laatste valt te redetwisten, en zeker als we het hebben over algoritmen die ontwikkeld worden voor het oplossen van industriële problemen. Daarover later meer.

Het tweede aspect is onlosmakelijk verbonden met het eerste. Een benadering waarvan men niet weet hoe nauwkeurig deze is, is

feitelijk nietszeggend. In bepaalde toepassingen kan het voldoende zijn om π te benaderen met 3, juist omdat we weten dat dit slechts vijf procent van de werkelijkheid af is. Ontberen we deze kennis, dan valt over het eindresultaat ook weinig te melden, hetgeen vooral in het bedrijfsleven een ongewenste situatie is. Later in deze rede komt een voorbeeld ter sprake waarin een gevonden ‘benadering’ een geheel foutieve, zelfs niet-bestaande, ‘oplossing’ bleek te zijn.

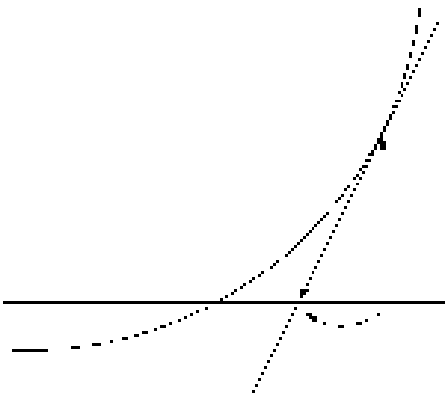
Naast genoemde aspecten zijn er nog verscheidene andere die een rol spelen bij de ontwikkeling van numerieke methoden. Snelheid en efficiency zijn voor de hand liggen-

de aspecten, tenslotte wil ieder een nauwkeurig antwoord op zo goedkoop en snel mogelijke wijze verkrijgen. Een minder voor de hand liggend aspect is robuustheid. Hiermee bedoelen we dat de algoritme bestand zou moeten zijn tegen allerlei negatieve invloedsfactoren. Een voorbeeld hiervan is het Newton-iteratieproces voor het bepalen van nulpunten van niet-lineaire vergelijkingen. In figuur 2 is dit proces voor een eenvoudig 1-dimensionaal voorbeeld weergegeven: vanuit het startpunt wordt de raaklijn aan de grafiek bepaald, en het snijpunt van deze raaklijn met de horizontale as wordt de nieuwe benadering. Dit proces kan herhaald worden met het nieuwe punt als startpunt van de zojuist beschreven procedure. Op deze manier ontstaat een iteratief proces, dat benaderingen oplevert die steeds dichterbij de oplossing komen te liggen.

Op het eerste gezicht (voor het getoonde voorbeeld) lijkt er geen vuiltje aan de lucht. Echter, er zijn voorbeelden te over waarbij dit proces slechts tot de gewenste oplossing leidt indien men het startpunt dicht genoeg bij deze oplossing kiest. Dat klinkt tegenstrijdig: men dient al kennis te hebben van de locatie

Aantal hor./vert.	Binnen cirkel	Benadering	Overlappend	Benadering
8	32	2	60	3.75
32	732	2.85938	856	3.34375
128	12596	3.0752	13104	3.19922
512	204836	3.12555	206880	3.15674
2048	3290000	3.13759	3298188	3.1454

Tabel 1 Verschillende benaderingen van π .



Figuur 2 Het Newton-iteratieproces voor het bepalen van een nulpunt van een niet-lineaire vergelijking.

van de oplossing teneinde deze (nog) beter te kunnen benaderen. In deze zin is de algoritme dus niet robuust: een willekeurig gekozen startpunt zou wel eens kunnen leiden tot een niet-convergerend iteratief proces.

Robuustheid kent echter vele kanten. Zelfs al starten we het Newton-proces dicht genoeg bij de oplossing om convergentie te kunnen garanderen, dan nog is het mogelijk dat zich ongewenste fenomenen voordoen. Een voorbeeld hiervan komen we tegen bij het oplossen van halfgeleiderproblemen. Deze notoir niet-lineaire problemen vertonen een vreemd gedrag ten aanzien van het Newton-proces: extreem veel iteraties, en vaak stagnerende processen. Voor dit laatste fenomeen is zelfs een naam bedacht door degenen die het verschijnsel voor het eerst observeerden: *self-limiting behaviour*. Na grondige analyse blijken de problemen goed te beschrijven met een simpel modelprobleem:

$$\exp(40x) - 1 = 0.$$

De oplossing van dit probleem is natuurlijk $x = 0$, en het is inderdaad zo dat het niet uitmaakt waar we het startpunt neerleggen voor Newton's methode, in alle gevallen zal er convergentie optreden. Vervelend is wel dat het aantal iteraties sterk afhangt van het startpunt, zoals te zien is in tabel 2.

Met 40 iteraties is in de praktijk nog wel te leven, maar het is duidelijk dat 10 miljoen iteraties een onzinnig groot aantal is. Werk aan de winkel voor de numeriek wiskundige, teneinde de mate van robuustheid van de oplossingsmethode te vergroten. Dit bleek inderdaad mogelijk, door gebruik te maken van niet-lineaire transformaties. Zo werd een nieuwe methode geboren, die *correctietransformatie* is genoemd [3]. En passant bleek het self-limiting behaviour ook een eenvoudige verklaring te hebben: afgezien van de laatste paar (kwadratische convergentie!) neemt de fout in iedere iteratie met ongeveer $1/40$ af.

Startpunt	Aantal iteraties
0.1	10
1	46
-0.1	56
-0.2	2979
-0.3	162748
-0.4	8886100
-0.41	13256508

Tabel 2 Het aantal iteraties bij het bepalen van het nulpunt van $\exp(40x) - 1$.

Dit volgt onmiddellijk uit de formule voor de Newton-correctie.

Ongemerkt zijn we bij de praktijkvoorbeelden aangeland, maar alvorens daar op door te gaan wilde ik graag nog even een stapje terug doen. Ik hoop in het voorgaande een indruk gegeven te hebben van hetgeen numerieke wiskunde inhoudt. Het beeld is echter niet compleet zonder dit vak te plaatsen binnen de omgeving waarin het meestal functioneert. Enerzijds is er de klassieke, pure of zuivere, vorm van numerieke wiskunde. Deze houdt zich onder andere bezig met het benaderen van integralen, met interpolaties, met het oplossen van grote niet-lineaire en lineaire stelsels, en met het oplossen van differentiaalvergelijkingen. De theorie kan hierbij soms zeer abstracte vormen aannemen, zoals onder meer het geval is bij de eindige elementenmethode en de daarmee geassocieerde functieruimten. De zogenaamde 'Franse school' is hierbij een bekend begrip, wat echter vaak wordt begeleid door een zekere vorm van afgrijzen.

Numerieke wiskunde, of beter: *Scientific Computing*, speelt een hoofdrol binnen het vakgebied Computational Science, ook wel aangeduid met 'de derde discipline'. Het rangwoord 'derde' doet vermoeden dat er minimaal nog twee andere disciplines zijn. Inderdaad, hiermee worden 'theorie' en 'experiment' bedoeld. Figuur 3 laat zien dat er tussen deze drie disciplines sterke interacties plaatsvinden.

Van oudsher zijn theorie en experiment natuurlijk nauw met elkaar verbonden: experimentele resultaten leiden uiteindelijk vaak tot een theorie (denk aan de zwaartekrachtwet van Newton), terwijl het ook voorkomt dat op theoretische wijze verkregen resultaten met experimenten worden gestaafd.

Door de opkomst van de computer, het gebruik van software en de ontwikkeling van

numerieke algoritmen is het heden ten dage vaak ook mogelijk om experimenten op een virtuele wijze uit te voeren. Computers en in software verpakte algoritmen fungeren als experimenteertfaciliteiten. Niet voor niets ontstaan er softwarepakketten met namen als *Numlab* (Numeriek Laboratorium) en *Matlab* (Mathematisch Laboratorium).

Virtueel experimenteren heeft een aantal voordelen boven het experiment dat we van oudsher kennen. Zo kan men bijvoorbeeld het gedrag van grootheden in het inwendige van structuren bestuderen, iets wat technisch vaak niet haalbaar is bij traditionele experimenten. Daarnaast is het invoeren van minder gangbare vormen en structuren geen enkel probleem. Ook kunnen materiaaleigenschappen met één druk op de knop worden aangepast. De derde discipline biedt dus meer mogelijkheden, en bij het verwezenlijken hiervan speelt numerieke wiskunde een essentiële rol. Nog niet zo lang geleden is becijferd dat de snelheid van numerieke algoritmen de afgelopen decennia beschreven kan worden met een zelfde wetmatigheid als in de wet van Moore voor de snelheid van computerchips: iedere achttien maanden een factor twee sneller. (Voor computerchips komt er wellicht binnen afzienbare tijd een einde aan deze wetmatigheid. Ironisch genoeg zou dit ook wel eens kunnen gelden voor de snelheid van numerieke algoritmen...) Numerieke wiskunde draagt dus een beduidende steen bij aan de vooruitgang.)

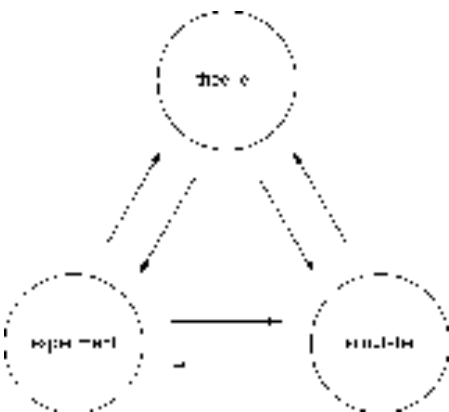
De wiskundige leest in bedrijf

De derde discipline, waarover ik zojuist sprak, heeft zijn intrede gedaan in de jaren zestig van de vorige eeuw. Sindsdien heeft zij een grote vlucht genomen, en zich mogen verheugen in een toenemende mate van populariteit. Krachtiger wordende computers en snellere algoritmen stelden onderzoekers in staat om virtuele experimenten uit te voeren. Een van de pioniers op dit terrein is Richard Varga, die in zijn beroemde boek [4] beschrijft hoe het gedrag van kernreactoren berekend kan worden. Het aardige van dit boek is dat de auteur zich uitput in het opsommen en bewijzen van eigenschappen van speciale matrices die vooral voor praktijkproblemen van groot belang blijken te zijn. Zo bewijst hij dat een strikt diagonaaldominante *L-matrix* altijd een *M-matrix* is, en zodoende een inverse heeft met louter niet-negatieve elementen. Dit laatste feit blijkt vervolgens samen te hangen met een discreet maximumprincipe, zodat het eindige probleem dus een eigenschap heeft die het oorspronkelijke, vaak in differentiaalver-

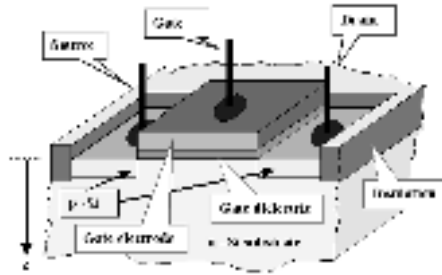
gelijkingen geformuleerde, probleem ook bezit. Dit lijkt een algemeen principe te zijn voor het welslagen van een numerieke methode: zorg er voor dat de numeriek wiskundige formulering de essentiële eigenschappen van het oorspronkelijke probleem overneemt.

In de praktijk blijkt dit principe zeker nog geen gemeengoed te zijn, het is dan ook niet eenvoudig om toe te passen. Op de eerste plaats dient men namelijk een goed model te hebben dat het te simuleren probleem in voldoende mate beschrijft. Modelvorming is uitermate belangrijk, en dient te gebeuren in nauw overleg met onderzoekers uit de betreffende discipline. Mijns inziens geldt namelijk ook hier het principe 'schoenmaker blijf bij je leest'. Persoonlijk laat ik de modelvorming graag over aan natuurkundigen, scheikundigen, mechanisch ingenieurs, et cetera, of aan toegepast wiskundigen. Ik zie de rol van de numeriek wiskundige vooral in het begeleiden van deze modelvorming, hij kan wijzen op artefacten die worden geïntroduceerd door het model, of attenderen op ongewenste eigenschappen van oplossingen.

Om een voorbeeld te geven: voor de simulatie van halfgeleiders (zoals diodes en transistoren, zie figuur 4) wordt meestal gebruik gemaakt van het zogenaamde drift-diffusie model. Dit model, dat is afgeleid uit de Boltzmann transport vergelijking middels een momentenaanpak, blijkt het gedrag van halfgeleiders goed te beschrijven. Althans, mits er adequate modellen worden gebruikt voor de parameters in het model. Een van deze modelparameters is de mobiliteit van elektronen. Voor veel situaties kan men volstaan met een mobiliteitsfunctie die afhangt van het elektrische veld. In de negentiger jaren gingen echter ook mobiliteitsmodellen gebruiken die afhankelijk waren van de gradiënten van de quasi-Fermi-niveaus. Vanuit experimenteel oogpunt was er niets mis met deze



Figuur 3 *Scientific Computing* is een van de drie disciplines binnen de *Computational Science*



Figuur 4 Een ruimtelijke voorstelling van een halfgeleider.

nieuwe modellen. Er leek een correlatie te zijn tussen de mobiliteit van elektronen en de gradiënt van het quasi-Fermi-niveau. Tevens kwamen de gemeten waarden van de mobiliteitsfunctie aardig overeen met waarden berekend met het nieuwe model. Een wiskundige analyse bracht echter naar voren dat met dit model het maximumprincipe werd geschonden, en simulaties gebruikmakend van het model verliepen uitermate moeizaam: Newton-processen convergeerden niet, en het oplossen van de lineaire stelsels bleek een lastige kwestie. Uiteindelijk is, mede door de numeriek wiskundige inzichten, het model bijgesteld op zodanige wijze dat wel garanties konden worden gegeven voor een maximumprincipe.

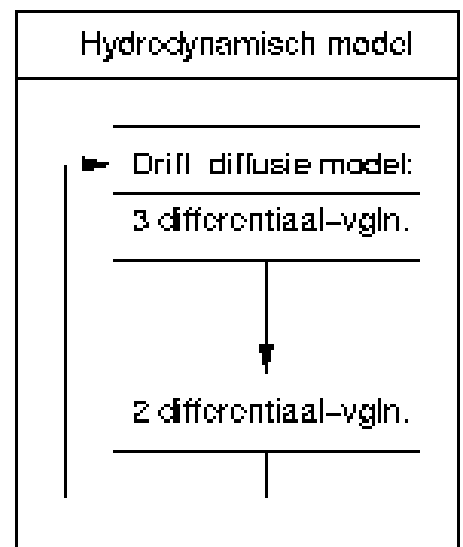
Als de modelvorming eenmaal naar tevredenheid is geschied, vangt het traject voor de numeriek wiskundige pas echt aan. Dit traject kan in twee onderdelen verdeeld worden: het opstellen van het discrete modelprobleem (discretisatie) en het oplossen van het discrete modelprobleem (oplossing).

Voor het selecteren of ontwikkelen van de te gebruiken discretisatiemethoden is het van essentieel belang dat eigenschappen van het model en zijn oplossingen goed in kaart worden gebracht. Na discretisatie liggen namelijk de numerieke benaderingen vast, hieraan wordt door het oplossingsproces niets meer veranderd (afgezien van onnauwkeurigheden die worden geïntroduceerd door het oplossen). Men dient zich hier terdege van bewust te zijn. Dat dit niet altijd het geval is, blijkt uit het volgende voorbeeld. Toen in de negentiger jaren het drift-diffusiemodel niet leek te voldoen voor situaties waarin hete elektronen een rol speelden, raakte het zogenaamde hydrodynamische halfgeleidermodel in gebruik. Dit model is een uitbreiding van het drift-diffusiemodel, met extra differentiaalvergelijkingen voor de temperatuur van elektronen en gaten. Omdat de verschillen tussen oplossingen van het drift-diffusie model en het hydrodynamische model slechts in een beperkt gebied significant waren, gebruikte men een iteratief oplosproces zoals geïllustreerd

in figuur 5.

Op conferenties werd echter veelvuldig gerapporteerd dat de oplosmethode niet convergeerde, en dat moeizaam verkregen oplossingen artefacten vertoonden, zoals negatieve temperaturen. Dat de problemen niet lagen in het oplosproces maar in de discretisatie bleek een boodschap die moeilijk was over te brengen. Men had namelijk de indruk dat, door de ontkoppeling van het oplossen van beide onderdelen, de grootheden onderling ook waren ontkoppeld. Men raakte pas overtuigd toen een nieuw discretisatieschema voor de extra vergelijkingen het oplosproces sterk vereenvoudigde, en bewijsbaar in alle situaties niet-negatieve temperaturen opleverde. Ook hier lag het discrete maximumprincipe aan de basis van de oplossing.

De voorgaande voorbeelden tonen aan hoe belangrijk het is om er voor te zorgen dat het discrete probleem eigenschappen overneemt van het oorspronkelijke probleem. Hierbij is een zeer nuttige rol weggelegd voor numeriek wiskundigen. Hun toegevoegde waarde ligt in het vermogen om te kunnen abstraheren (zoals het een wiskundige betaamt), naast het hebben van inzicht in het grote aantal methoden dat tegenwoordig beschikbaar is en 'op de plank' ligt. Dit laatste leidt zelfs tot discussies of numeriek wiskundigen zich wellicht overbodig gemaakt hebben, aangezien vrijwel alle bekende algoritmen in software beschikbaar zijn. Waarom zouden onderzoekers uit andere disciplines überhaupt een beroep moeten doen op een numeriek wiskundige, zij kunnen de methoden toch zelf wel aan elkaar knopen door gebruik te maken van die



Figuur 5 Het hydrodynamische halfgeleidermodel.

software? In een aantal gevallen is dit inderdaad mogelijk, maar ik durf te stellen dat het in de overgrote meerderheid van de gevallen niet mogelijk is. Ieder probleem heeft zijn eigen specifieke eigenschappen, en vergt derhalve een investering aangaande onderzoek naar geschikte algoritmen. Deze investering kan natuurlijk door de onderzoeker zelf gedaan worden, daarbij het terrein van de numericus betredend. Raadzamer is het om, in samenspraak met een numeriek wiskundige, op zoek te gaan naar geschikte combinaties van algoritmen of zelfs nieuwe algoritmen te ontwikkelen indien dit nodig blijkt te zijn.

Dat het soms zelfs gevaarlijk kan zijn om zonder veel voorkennis algoritmen te gebruiken, wil ik illustreren met het volgende voorbeeld. Enige jaren geleden raakte men geïnteresseerd in het gebruik van vloeibare kristal polymeren (zogenaamde LCP's) voor consumentenproducten. Voor het beschrijven van het gedrag van deze materialen was al langere tijd een model bekend, ontwikkeld door de Nobelprijswinnaar Philippe de Gennes [5]. Vanwege de aanzienlijke lengte van de moleculen werden zij in dit model als staafjes voorgesteld, en het probleem is dan om de richting van de staafjes te bepalen.

Een van de eerste testvoorbeelden betrof de stroming van vloeibare kristal polymeren tussen twee platen, waarbij de bovenste plaat met een constante snelheid v beweegt ten opzichte van de onderste. Voor het meest gangbare materiaal bleek het vrij eenvoudig om dit probleem te simuleren. Het resultaat laat zien dat de hoek van de staafjes (precies in het midden tussen de platen) een monotone functie is van de snelheid.

Problemen traden op toen het materiaal vervangen werd door het materiaal 8CB, dat geheel andere eigenschappen heeft. Voor dit materiaal bleek het niet mogelijk om de curve van het gedrag van de hoek als functie van de snelheid te bepalen. Omdat men hoopte dat een methode genaamd *simulated annealing* wellicht wel tot een oplossing zou leiden, werd deze 'van de plank' gehaald. Inderdaad leidde deze tot oplossingen, maar naarmate de snelheid opliep, bleken oplossingen ook veel moeizamer berekend te kunnen worden. Vanaf een bepaalde snelheid bleek dat het zogenaamde residu (een maat voor het resultaat wanneer men de oplossing substitueert in de vergelijkingen) stagneerde, en niet kleiner wilde worden. Hieruit werd de conclusie getrokken dat men waarschijnlijk de oplossing toch te pakken had.

Toen een rapport over de bevindingen reeds in het eindstadium was, begon men

zich zorgen te maken, omdat de gevonden resultaten niet overeenstemden met hetgeen op fysische gronden verwacht mocht worden. De hulp van een numeriek wiskundige werd ingeroepen, en deze had binnen afzienbare tijd de vinger op de zere plek gelegd. Door de hoek als variabele te gebruiken, en de snelheid als functie hiervan te bepalen, bleek het probleem moeiteloos oplosbaar, zonder gebruik te hoeven maken van simulated annealing. Nu werd ook duidelijk waarom het residu voor hogere snelheden stagneerde: er was voor die snelheden simpelweg geen oplossing meer die in het verlengde lag van de opgebouwde curve. De verklaring hiervoor kon ook gegeven worden na bestudering van de berekende resultaten: de oplossing tussen de platen bleek uit steeds meer lagen te gaan bestaan, waarbij in elke laag de moleculen ongeveer in dezelfde richting (dus hoek) lagen. Dit is een bekend gedrag van LCP's, en verklaart ook de sterkte van deze materialen.

Het voorgaande voorval heeft geleid tot een bloeiende samenwerking tussen fysici en numerici bij de simulatie van vloeibare kristal polymeren. Er zijn diverse gemeenschappelijke publicaties verschenen, en het probleem bleek uitermate interessant en uitdagend vanuit wiskundig oogpunt vanwege de vaak onverwachte fenomenen.

De wiskundige leest in bedrijf

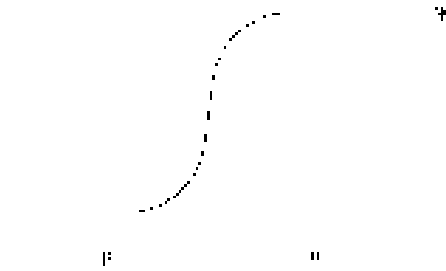
In het voorgaande betoogde ik reeds dat het verstandig is om een numeriek wiskundige in te schakelen bij het construeren van algoritmen voor het simuleren van industriële problemen. Enerzijds heeft ieder probleem zijn eigen specifieke eigenschappen, en het is belangrijk de eigenschappen van het wiskundige model in kaart te brengen en te gebruiken bij het ontwikkelen van geschikte algoritmen. Anderzijds is er tegenwoordig zo'n groot scala aan numerieke oplosmethoden, dat een leek vaak door de bomen het bos niet meer zal kunnen zien. Voldoende redenen om iemand in te schakelen die overweg kan met deze problematiek. En dit bedoel ik ook vrij letterlijk. De samenwerking tussen onderzoekers en numeriek wiskundigen dient dynamisch te zijn, met input van beide kanten. Een hechte samenwerking, met uitwisseling van ideeën en ervaringen. Het is namelijk zeker geen eenrichtingsverkeer. Vaak blijkt dat de uiteindelijk gekozen algoritmen dankbaar gebruik maken van specifieke kenmerken van het probleem.

Een voorbeeld hiervan kwamen we begin jaren '80 tegen toen er een softwarepakket werd geproduceerd dat, voor willekeurige

structuren, stroomloze situaties in halfgeleiders simuleerde. Hiervoor diende een niet-lineaire Poissonvergelijking opgelost te worden. Op zich was dit al een ambitieus streven, in die tijd hechtte men nog weinig geloof aan het kunnen welslagen van zo'n algemeen pakket. Het vergde dan ook veel numeriek wiskundig onderzoek om algoritmen te vinden die bestand waren tegen die algemeenheid, en tegen de extreme niet-lineariteiten. In eerste instantie werd de oplossing gezocht in continueringsmethoden, en werd er lustig gestrooid met de continueringsparameter t . Bij deze methoden wordt voor $t=1$ de gewenste oplossing gevonden. Helaas bleek het vaak onmogelijk om bij $t=1$ te komen, en strandden de oplosprogingen onderweg. Hulp kwam uiteindelijk van de onderzoekers zelf. Zij hadden het voortdurend over een begrip 'ladingsneutraliteit', wat neerkwam op het gelijk aan nul stellen van het niet-lineaire deel van de vergelijking. Gebruikte men de hieruit resulterende (dus: ladingsneutrale) oplossing als beginschatting voor een Newton-proces, dan bleek dit uitstekend te convergeren, zelfs zonder gebruik te hoeven maken van continuering. Hiermee werd de algoritme vele malen simpeler en efficiënter, en tot op vandaag is deze methode in gebruik.

Het aardige is dat deze wijze van het genereren van een beginschatting ook op wiskundige wijze verklaard kan worden. Uit analyses is namelijk bekend dat de niet-lineaire Poissonvergelijking singulier gestoord van aard is. Dit betekent dat er een kleine parameter in het spel is, welke de oplossing in een klein deelgebied snel laat variëren. (Dat deze parameter klein is ten opzichte van de andere grootheden in de vergelijking, blijkt na dimensieloos maken. Dit is een techniek die uitermate belangrijk is voor het verwerken van de nodige inzichten, maar niet altijd meer tot de basisvaardigheden van numerici behoort.) Dit is te zien in figuur 6, waar een oplossing is weergegeven van een eendimensionaal probleem.

Voor dit soort problemen kan men asymptotische expansies genereren, die de vorm hebben van een reeks in de machten van de kleine parameter. De nulde orde term, ook wel gereduceerde oplossing genoemd, blijkt precies overeen te stemmen met de ladingsneutrale oplossing. Daarnaast blijkt dat, met deze oplossing als startpunt, het Newton-proces monotone convergentie vertoont. Al met al is op deze wijze een mooie wiskundige verklaring gevonden voor het succes van de ladingsneutrale startoplossing, geïnitieerd door fysische inzichten. De continueringsme-



Figuur 6 Een oplossing van een singulier gestoord probleem.

thoden zijn hierdoor voorgoed in de ijskast verdwenen.

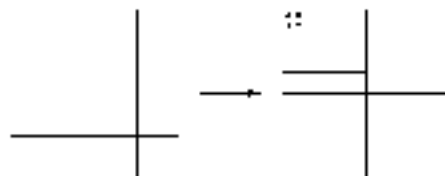
Het voorgaande voorbeeld laat zien dat het uitermate belangrijk is voor numeriek wiskundigen om hun oor te luister te leggen bij collega's uit andere disciplines. Uiteindelijk zal dit vaak tot een *win-winsituatie* leiden: betrouwbare en efficiënte algoritmen voor het uitvoeren van de simulaties van de onderzoeker, en nieuwe inzichten of methoden voor de numeriek wiskundige. In deze zin is het dus goed als de wiskundige zich rekenschap geeft van de achtergronden van een probleem, en daar ook gebruik van maakt. Zijn kennis wordt hierdoor vergroot, het bedrijf fungeert als leer-school en ideeënbank. Of, met een letterlijke vertaling uit het Engels: hij 'leest'.

In een aantal gevallen kan dit 'lezen' zelfs leiden tot nieuwe methoden die algemeen toepasbaar zijn. Bij het simuleren van het gedrag van elektronische schakelingen spelen twee soorten variabelen een rol, namelijk de spanning en de stroom. De lineaire stelsels die uiteindelijk ontstaan na discretisatie van dit probleem zijn indefiniet, hetgeen problematisch is voor het gros van de gangbare oplostekniken. Sterker nog, men is ook momenteel nog zeer actief in het zoeken naar geschikte algoritmen voor het oplossen van indefiniete lineaire stelsels. Voor het onderhavige probleem ontstond op natuurlijke wijze het idee om stromen en spanningen op een bepaalde manier te koppelen, te groeperen in setjes van twee bij elkaar behorende variabelen. Door de lineaire stelsels vervolgens te herordenen (zie figuur 7) en de twee bij twee blokjes als enkele entiteiten op te vatten, bleek een decompositie geconstrueerd te kunnen worden die analoog is aan de bekende Choleski-decompositie voor positief definitie matrices. Het aardige van de methode is dat de indefinietheid volledig wordt geïsoleerd in een blokdiagonaalmatrix. De methode blijkt algemeen toepasbaar op indefiniete stelsels, en is inmiddels in een vergevorderd stadium van ontwikkeling.

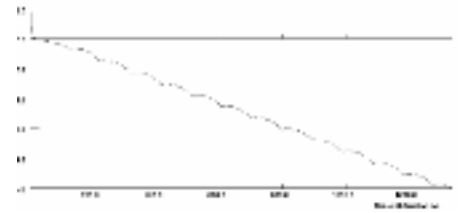
Er zijn vele voorbeelden te geven van sa-

menwerkingen tussen onderzoekers en numeriek wiskundigen, die uiteindelijk leiden tot prachtige resultaten. Soms leiden deze resultaten tot zodanige nieuwe numerieke inzichten dat zij ook bij latere problemen worden gebruikt. Toen wij midden jaren tachtig software ontwikkelden voor het simuleren van het gedrag van halfgeleiders, waren er twee scholen binnen het bedrijf. Wij waren zeer geporteerd van het gebruik van de methode van Newton vanwege haar aantrekkelijke convergentie-eigenschappen en de brede toepasbaarheid qua soorten halfgeleiders. Op het Research Laboratorium in Engeland gebruikte men echter de zogenaamde Gummel-algoritme (in wiskundige taal is dit een blok Gauss-Seidel algoritme), hetgeen neerkomt op het sequentieel oplossen van de drie gediscrètiseerde vergelijkingen. Toepassing van deze algoritme op de voor hen belangrijke problemen (voor ingewijden: MOS transistoren) bleek vele malen snellere simulaties op te leveren. Uiteindelijk konden wij er ook niet onderuit om deze algoritme toe te passen in onze software. Echter, het aardige van de zaak was dat we er een essentiële verbetering in konden aanbrengen. Er was namelijk gebleken dat de Gummel-methode weliswaar convergente processen opleverde, maar dat voor bepaalde situaties het aantal iteraties behoorlijk hoog kon worden. Zie figuur 8 voor een voorbeeld van deze langzame convergentie.

Wat opvalt in figuur 8 is dat de convergentie erg voorspelbaar is, namelijk lineair. Blijkbaar is er een grootste eigenwaarde die een dominante rol speelt in dit proces. We vroegen ons dan ook af of hier gebruik van gemaakt kon worden. Dit bleek het geval: door gebruik te maken van vectorextrapolatie, kon de convergentie zeer aanzienlijk versneld worden. Het toeval wilde dat er in de literatuur juist op dat moment veel aandacht was voor vectorextrapolatie algoritmen. Wij maakten hier dankbaar gebruik van, en zo ontstond een aangepaste versie van Gummels algoritme die vele malen sneller was dan de oorspronkelijke. Later hebben we dit idee van vectorextrapolatie gebruikt bij andere toepas-



Figuur 7 Voor het zoeken naar geschikte algoritmen voor het oplossen van indefiniete lineaire stelsels wordt het lineaire stelsel op een bijzondere manier gegroepeerd. Deze hergroepering is geïnspireerd door kennis van elektronische schakelingen.



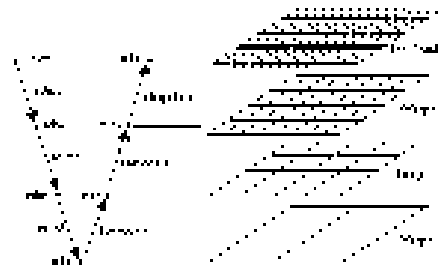
Figuur 8 Het aantal iteraties bij gebruik van de Gummel-methode voor simulatie van halfgeleidermodellen.

singen, zoals bij het simuleren van de productie van televisiebuizen en bij de koppeling van elektromagnetische velden met halfgeleider-substraten.

Aansluiting met het bedrijfsleven

De numericus kan zijn wiskundige ei nog immer goed kwijt binnen het vakgebied van Computational Science, en dus in het bedrijfsleven. Men is er in geslaagd om numerieke methoden de weg te laten vinden naar toepassingen voor lastige praktijkproblemen. Soms vergt dit proces vele jaren, zoals in het geval van de iteratieve oplosmethoden voor lineaire stelsels. Eerst in het laatste decennium van de vorige eeuw werden deze methoden gemeengoed in software, en nog steeds zijn er commercieel beschikbare pakketten die er geen gebruik van maken.

Hier is duidelijk een taak weggelegd voor de numeriek wiskundige. Mijs inziens is er namelijk een te grote afstand tussen numerici enerzijds en onderzoekers of ontwikkelaars van software anderzijds. Numerieke methoden dienen misschien veel meer te worden gezien als onderdeel van een bedrijfsmatig proces, waarin onderzoek plaats zou moeten vinden met in het achterhoofd de verdere ontwikkeling van het gebruik van dit product. Vaak blijft het op de universiteit bij academische voorbeelden, en wordt de stap naar daadwerkelijke praktijkproblemen niet aangedurfd, of slechts voor de eenvoudigste situaties. Ik wil hier niet beweren dat het numerieke onderzoek in voorkomende gevallen niet nuttig zou zijn of kunnen zijn. Het is de aloude discussie over de toepasbaarheid van wiskundige methoden. In veel gevallen is er gewoonweg veel tijd nodig om het product, in dit geval een numeriek algoritme, te vervolmaken. Het voorbeeld van de iteratieve lineaire oplosmethoden is een succesverhaal. Daarentegen is de meerroostermethode (zie figuur 9) een voorbeeld waarvan men zich kan afvragen wanneer dit product rijp is voor toepassing op gecompliceerde praktijkproblemen. Deze methode wordt al sinds het begin van de tachtiger jaren verder ontwikkeld, en er zijn nog veel vragen te beantwoorden. Op zich is het een prachtige methode, die vast en zeker zal



Figuur 9 Een schematische voorstelling van de meerroostermethode.

kunnen bijdragen aan het verbeteren van de kwaliteit van hedendaagse simulaties.

Dit geldt in eendere mate voor adaptieve roosterverfijning. Hoewel er in de numeriek wiskundige literatuur veel aandacht aan is besteed in de afgelopen twintig jaar, zien we dat er nagenoeg geen gebruik van wordt gemaakt in software bedoeld voor probleemklassen die belangrijk zijn voor het bedrijfsleven. Weliswaar zijn er pogingen, maar vaak zijn deze niet gebouwd op een gedegen wiskundig fundament. Kenmerkend is ook dat ze vaak semi-adaptief zijn, verfijning vindt vaak plaats op grond van een naburige oplossing. Blijkbaar is het een stap te ver om de methoden verder te ontwikkelen voor deze doeleinden. Naar mijn mening zouden numeriek wiskundigen meer moeite moeten doen om deze aansluiting met het bedrijfsleven voor elkaar te krijgen. Als dit zou lukken, dan wordt de kwaliteit van de simulatieresultaten drastisch verbeterd. Ik zie het dan ook als een van mijn taken om deze kloof te overbruggen en jonge onderzoekers te stimuleren lastige praktijkproblemen op te nemen in hun pakket testvoorbeelden.

Een ander obstakel bij de aansluiting met het bedrijfsleven is de complexiteit van de software. Promovendi testen hun algoritmen meestal binnen omgevingen zoals Matlab, omdat dit hen in staat stelt om snel en efficiënt programmatuur te ontwikkelen. Vaak lukt het om in deze omgeving tests uit te voeren voor een aantal modelproblemen die karakteristiek bezitten van het uiteindelijk op te lossen algemenere probleem. Echter, als het onderzoek eenmaal naar tevredenheid is afgerond en een adequate algoritme is ontwikkeld, komt het probleem van de implementatie in de binnen het bedrijf gebruikte software. Helaas blijkt in de praktijk dat bedrijven vaak niet goed voorbereid zijn op deze taak, en blijft de algoritme uiteindelijk ongebruikt. Deze situatie treedt vooral de laatste jaren veelvuldig op nu bedrijven vaak andere, kortere termijn, prioriteiten hebben. Ik wil hier mijn zorg uiten over deze aansluiting, en

me inzetten voor een verbetering van deze situatie.

Nieuwe ontwikkelingen

Tot op dit moment heb ik, een enkele uitzondering daargelaten, in deze rede slechts gesproken over algoritmen en software voor individuele componenten of eigenschappen. Dit is ook kenmerkend voor de ontwikkelingen binnen het vakgebied Scientific Computing. Zoals gezegd werd het doen van groot-schalige simulaties mogelijk in de zestiger jaren, en de afgelopen decennia hebben we gezien dat er meer en meer softwarepakketten op de markt kwamen voor verschillende klassen en soorten van problemen. Geavanceerde numerieke methoden zorgen er voor dat de meest gecompliceerde simulaties kunnen worden uitgevoerd.

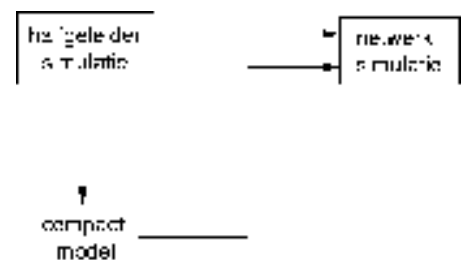
De afgelopen jaren is er een tendens waar te nemen dat men zich niet meer tevreden stelt met de beschikbare software. Er worden steeds hogere eisen gesteld aan producten. Waar men vroeger vaak optimaliseerde met een enkel aspect in het achterhoofd, zo wordt er tegenwoordig geoptimaliseerd met betrekking tot een aantal parameters. Een voorbeeld hiervan is de ontwikkeling van beeldbuizen voor televisies en de bijbehorende maskers, waarbij zowel elektromagnetische als thermische effecten meegenomen dienen te worden. Of bij de ontwikkeling van MRI systemen voor medische toepassingen, waarbij de interactie tussen elektromagnetische en mechanische velden voor ongewenste geluidsproblemen zorgt. Kortom, meer en meer vereisen de praktijkproblemen een samensmelting van afzonderlijke simulatiegereedschappen. Een terminologie die hiervoor ook wel wordt gebezigd is: multifysica.

Helaas is het niet zo eenvoudig om deze gecombineerde berekeningen uit te voeren. Op de eerste plaats zijn de individuele simulaties vaak al erg tijdrovend, zodat het uitvoeren van een reeks berekeningen met verschillende pakketten vrijwel uitgesloten is. Daarnaast zal er vaak een behoorlijke mate van koppeling zijn tussen de verschillende aspecten, hetgeen betekent dat er vele iteraties nodig zijn om de gewenste oplossing te vinden. Voor bepaalde toepassingen worden wel gecombineerde berekeningen uitgevoerd teneinde überhaupt resultaten te verkrijgen, maar het lijkt een weg die uiteindelijk doodloopt.

Er zullen dus andere strategieën bedacht dienen te worden, en ideeën hiervoor kunnen we wederom opdoen als we goed kijken naar hetgeen in het bedrijfsleven gebeurt. Binnen de elektronische industrie wordt bij-

voorbeeld al vele jaren gewerkt met compacte modellen voor de beschrijving van transistoren, welke vervolgens worden gebruikt in simulaties van grote elektrische netwerken. In wezen voert men op deze wijze gecombineerde berekeningen uit. Het aardige is dat het gedrag van de individuele transistoren beschreven wordt met slechts een klein aantal parameters. Met andere woorden: in plaats van de tijdrovende berekeningen met behulp van software voor halfgeleidersimulatie rechtstreeks te koppelen met software voor netwerksimulatie, wordt een tussenstap uitgevoerd. In deze tussenstap wordt zeer nauwgezet het gedrag van de individuele transistoren bekeken, en uiteindelijk samengevat in compacte modellen. Deze compacte modellen worden verpakt in een stukje software dat verwaarloosbaar weinig tijd kost in vergelijking met een halfgeleidersimulatie, en deze software wordt gekoppeld met de netwerksimulatie. De uiteindelijke gecombineerde berekening zal dan vergelijkbare rekentijd vergen als een enkele netwerksimulatie. In figuur 10 is deze werkwijze schematisch weergegeven.

Nu zullen experts op dit terrein onmiddellijk roepen dat de tussenstap, die uiteindelijk leidt tot het compacte model, louter gebruik maakt van experimentele resultaten. Dit is ook inderdaad de werkwijze zoals die tot nog toe wordt gebezigd. Echter, het is duidelijk dat gemeten resultaten evenzogoed vervangen kunnen worden door resultaten van simulaties. Men zou zelfs kunnen denken aan het combineren van simulaties en metingen, om zodoende een zo accuraat mogelijk compact model te kunnen construeren. Bovendien is dit een discussie die voor mijn betoog geen gevolgen heeft. Het gaat namelijk om het idee van de tussenstap. Door een of meerdere aspecten van gedrag samen te vatten in een model met slechts een beperkt aantal parameters, zullen gecombineerde berekeningen veel minder tijdrovend zijn. Kortom, het ge-



Figuur 10 Halfgeleidersimulaties worden nu ook uitgevoerd door het invoegen van een extra tussenstap, het compact model waar het fysische gedrag van enkele transistoren wordt gemodelleerd. Dit compact model is op experimentele resultaten gebaseerd.



Figuur 11 Hoe kunnen we een model met een groot aantal parameters reduceren tot een model met slechts een klein aantal parameters? (illustratie: http://people.deas.harvard.edu/~xgu/paper/Silhouette.Map/silhouette_simp.html)

bruik van compacte modellen lijkt een goede oplossing voor onze problematiek.

Het construeren van compacte halfgeleidermodellen is een vak apart, waarover vele boeken en artikelen zijn verschenen. De modellen zijn vaak erg ingewikkeld, bovendien is er een hiërarchie van modellen ontstaan welke is ingegeven door de historische gang van zaken. Het kopiëren van deze aanpak in een algemenere context lijkt daarom niet voor de hand te liggen, het is allemaal erg specifiek. Bovendien wordt voor de constructie van de modellen nog veel werk handmatig verricht, terwijl ons streven juist is om modellen automatisch te kunnen genereren. Het lijkt daarom beter om de essentiële kenmerken te isoleren en te gebruiken voor een algemene aanpak.

De algemenere aanpak wordt met een Engelse term aangeduid: *reduced order modelling*, afgekort ROM. Een letterlijke vertaling hiervan geeft de essentie van de methode aan: het modelleren met een model van lagere orde. Dit klinkt abstract, is echter eenvoudig te verklaren. Immers, indien men een simulatie uitvoert, dan hangt de oplossing af van een groot aantal parameters: parameters in de gebruikte fysische modellen, afmetingen, tijdstippen, numerieke parameters, et cetera. Dit kunnen duizenden, tienduizenden of zelfs miljoenen parameters zijn. Kan men de oplossing formuleren in termen van veel minder parameters, dan heeft men automatisch een model van lagere orde.

Op het alomtegenwoordige internet vond ik enige aardige illustraties, die meteen de essentie duidelijk maken van hetgeen reduced order modelling inhoudt. Kijkt u eens naar het volgende rijtje plaatjes (figuur 11).

Van links naar rechts worden steeds meer details weggelaten. Echter, zou men alleen het laatste plaatje bekijken, dan nog is duidelijk dat het hier om een voorstelling van een konijn handelt.

De cruciale vraag is natuurlijk: hoe kunnen we een model met een groot aantal parameters reduceren tot een model met slechts een klein aantal parameters?

Naar een antwoord op deze vraag is de afgelopen jaren uitgebreid onderzoek gedaan

door numeriek wiskundigen. Een zeer kansrijke aanpak maakt gebruik van projecties op deelruimten. Deze deelruimten worden op iteratieve wijze gegenereerd (meestal via het bekende Krylov proces), waarbij de grootste eigenwaarden van het probleem feitelijk worden geïsoleerd. Dit verklaart ook meteen waarom zo'n aanpak succesvol kan zijn: er wordt enkel gekeken naar het dominante gedrag van oplossingen, details in het gedrag worden verwaarloosd.

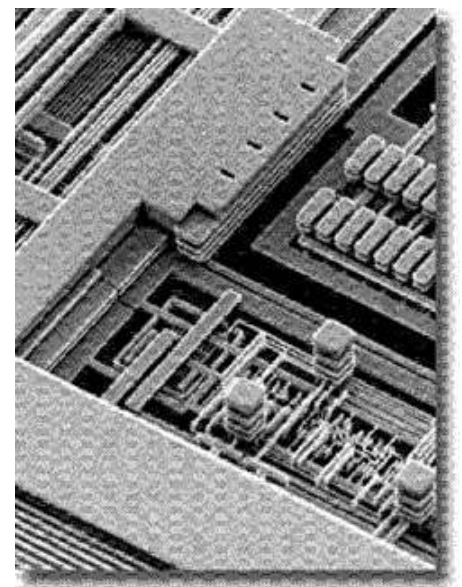
De resulterende methoden voor het construeren van compacte modellen leunen zwaar op de numerieke wiskunde die zich bezighoudt met het iteratief oplossen van lineaire stelsels. Krylov methoden, geconjugeerde gradiënten, deelruimtes, eigenwaarden, het zijn allemaal begrippen die een essentiële rol spelen binnen dit relatief nieuwe vakgebied. Aardig is tevens dat er een duidelijk verband bestaat met het vakgebied van de meet- en regeltechniek. Begrippen als observeerbaarheid en controleerbaarheid komen op natuurlijke wijze naar voren, en in deze zin is het raadzaam om samen te werken met de collega's van meet- en regeltechniek.

Reduced order modelling mag zich verheugen in een snel groeiende belangstelling, zowel vanuit de universiteiten als vanuit bedrijven. Middels het Europese wiskundenetwerk MACSInet [6] organiseren we op regelmatige basis symposia over dit onderwerp. Inmiddels zijn in deze bijeenkomsten vele toepassingen de revue gepasseerd, waarbij tevens duidelijk is geworden dat er grote behoefte bestaat aan betrouwbare constructieve methoden.

Een van de gebieden waarin erg veel onderzoek wordt gedaan naar reduced order modelling is het vakgebied waarin ik gedurende enige jaren werkzaam ben: het ontwerp van analoge en digitale schakelingen. Zoals bekend worden chips almaar kleiner, en ze lijken gedichteerd te worden door de al eerder ter sprake gekomen wet van Moore. Karakteristieke afmetingen worden kleiner, en de frequenties waarbij de schakelingen opereren worden hoger. Tezamen zorgt dit ervoor dat zeer dicht bij elkaar gelegen onderdelen steeds duidelijker invloed van elkaar ondervinden. Soms kan dit een hinderlijke en zelfs ongewenste invloed zijn. Aangezien ontwerpen tegenwoordig liefst dienen te voldoen aan het dictaat van 'first time right', zijn er krachtige virtuele ontwerpomgevingen gecreëerd waarmee het gedrag van deze enorm omvangrijke schakelingen onderzocht kan worden. Graag zou men binnen deze ontwerpomgeving ook de mogelijke nega-

tieve invloedseffecten simuleren. Dit is echter tot op heden niet of slechts in zeer beperkte mate mogelijk. Vandaar dat wij onderzoek zijn gestart naar methoden voor het efficiënt berekenen van deze effecten. Hiertoe worden structuren onderzocht als weergegeven in figuur 12.

Deze zogenaamde interconnect structuren bestaan uit een aantal verschillende lagen, met daarin onder andere verbindingen van metaal die zorgen voor het transport van de elektrische signalen tussen de vele elektronische componenten. Om eventuele ongewenste effecten te kunnen detecteren, dient het elektromagnetische gedrag van deze interconnect structuren nauwkeurig bepaald te worden. Dit gebeurt via het numeriek oplossen van de Maxwellvergelijkingen, hetgeen een rekenintensieve exercitie is vanwege het driedimensionale karakter en het grote aantal variabelen dat dit met zich meebrengt. Men kan echter aanvoelen dat deze miljoenen parameters zeker niet nodig zijn voor een analyse van de ongewenste effecten. Immers, tot voor kort waren de afmetingen zodanig dat er geen ongewenste effecten optraden. Kortom: er is gerede hoop dat de resultaten van de driedimensionale simulaties samengevat kunnen worden in een model van drastisch gereduceerde orde. Momenteel vindt er veel onderzoek plaats naar geschikte methoden om modellen van gereduceerde orde te construeren voor genoemde toepassing. Hierbij treden allerlei problemen op. De initieel gangbare methode genaamd AWE (asymptotic waveform evaluation) blijkt voor ordes hoger dan 8 geen



Figuur 12 Geïntegreerde circuits worden steeds kleiner en werken met steeds hogere frequentie.

geschikte modellen op te leveren. PVL, een bijzonder slimme herformulering van AWE welke gebruikmaakt van het Lanczosproces voor het vinden van eigenwaarden, won in de jaren negentig snel terrein. Tot men constateerde dat PVL enige essentiële eigenschappen van het oorspronkelijke probleem niet behoudt. Dit heeft het onderzoek geïnitieerd naar methoden welke de zogenaamde passiviteit behouden. Inmiddels zijn er een aantal voorstellen in deze richting gedaan, maar is ook een nieuwe eis toegevoegd aan het wensenlijstje: causaliteit. Kortom: het onderzoeksterrein ligt nog voor een groot gedeelte braak, doch wordt langzaam maar zeker ontgonnen door numerici in nauwe samenwerking met onderzoekers en ontwerpers uit de elektronische industrie.

Onderzoekers uit andere disciplines

Ik hoop dat ik u enige kijk heb kunnen geven op de methodes en werkwijze die gepaard gaan met het bedrijven van numerieke wiskunde voor industriële problemen. Ik ben erg blij om in zo'n boeiend gebied te kunnen en mogen werken. Mijns inziens is de combina-

tie van een interessante en veelzijdige baan in het bedrijfsleven met een uitdagende taak aan deze universiteit ideaal. Op deze wijze ontstaat tweerichtingsverkeer. De ervaringen, opgedaan in het bedrijfsleven, kunnen doorgegeven worden aan jonge onderzoekers die, op hun beurt, nieuwe methoden ontwikkelen om er uiteindelijk weer lastige praktijkproblemen mee op te kunnen lossen. En zo is de cirkel rond.

Ik hoop tevens dat ik u heb kunnen overtuigen van het belang van het vakgebied Numerieke wiskunde voor de industrie. Het is een vak met veel facetten, en het beoefenen ervan vereist een gedegen kennis van beschikbare methoden en hun eigenschappen. De beschikbaarheid van grote hoeveelheden numeriek wiskundige software doet vermoeden dat het vak beoefend zou kunnen worden door eenieder. Het is echter zeer aan te raden gebruik te maken van de diensten van een numericus. Niet alleen vanwege zijn kennis van de methoden, maar ook vanwege zijn vermogen tot abstractie en generalisatie. De numeriek wiskundige zal het wezenlijke en diepere van het praktijkprobleem grondig analyse-

ren, volgens zekere regels. Hierdoor kan vaak meteen een grote klasse van problemen beschreven en aangepakt worden.

In de rede heb ik ook aangegeven dat de numeriek wiskundige veel kan leren van het werken met echte praktijkproblemen. Enerzijds kan men zich niet tevredenstellen met het ontwikkelen van methoden voor simpele modelproblemen, het praktijkprobleem vergt doorgaans veel meer diepgang. Dit komt ten goede aan de methoden, zij zullen hierdoor robuuster worden en algemener toepasbaar. Anderzijds dient men dankbaar gebruik te maken van de inzichten van onderzoekers, die vaak verrassende suggesties hebben voor de te ontwikkelen numerieke methoden. Numeriek wiskundigen die werkzaam zijn in of voor een bedrijf dienen zich bij voorkeur niet eenzaam terug te trekken in hun kamer, doch actief contact te onderhouden met onderzoekers uit andere disciplines. Een hechte samenwerking zal uiteindelijk leiden tot de beste resultaten, zowel vanuit bedrijfsmatig als numeriek wiskundig oogpunt. 

Noten en referenties

- 1 G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press (1940)
- 2 J.M. Borwein and P.B. Borwein, *Pi and the AGM*, John Wiley & Sons (1998)
- 3 S.J. Polak, C. den Heijer, W.H.A. Schilders, and P.A. Markowich, *Semiconductor device mod-*

- elling from the numerical point of view, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, volume 24, pagina's 763-838 (1987)
- 4 R.S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice Hall (1962)

- 5 P.G. de Gennes and J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals - 2*, Clarendon (1995)
- 6 <http://www.macsinet.org/>

Gunther Cornelissen

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 80010

3508 TA Utrecht

cornelis@math.uu.nl

Over Jean-Pierre Serre

Parti d'un exercice, on se retrouve avec une théorie

Op 3 juni 2003 kreeg Jean-Pierre Serre de eerste Abelprijs, een bedrag van € 750.000,–, voor het “spelen van een sleutelrol in het vormen van vele delen van de moderne wiskunde, zoals topologie, algebraïsche meetkunde en getaltheorie”. In het stafcolloquium Wiskunde van de Universiteit Utrecht werd een middag gewijd aan leven en werk van deze invloedrijke wiskundige. Gunther Cornelissen vertelt over zijn persoonlijke ervaringen met Serre en wat er op die dag zoal is verteld.

Mijn eerste ‘persoonlijke’ ervaring met Serre gaat terug tot het jaar van mijn afstuderen. In 1993 ging ik met mijn afstudeerbegeleider Jan Van Geel naar de Journées Arithmétiques in Bordeaux, een getaltheoretische conferentie met wel driehonderd deelnemers. Ik begreep van precies vier voordrachten meer dan een fractie. De eerste had met mijn afstudeeronderwerp te maken, de tweede en derde werden door didactisch onderlegde Nederlandse collega’s gehouden, en de vierde door Jean-Pierre Serre. Maar met die laatste was er toch een probleempje: *tijdens* de voordracht wist ik steeds waar het om ging, dacht vaak “aha” of “jawel”, maar *achteraf* kreeg ik het verhaal

niet meer coherent bij mekaar. *Voilà* lezingen van Serre zoals ik ze sindsdien altijd heb ervaren: over moeilijke thema’s, maar helder, duidelijk, met voorbeelden gelardeerd (die vaak als opgaven op het publiek worden losgelaten, en waar venijnige addertjes onder het gras zitten), en bovenal slim, ja zelfs *sluw* opgebouwd en niet te reconstrueren.

Twee jaar later in een klein zaaltje van het Collège de France. Na een vermoeiende autorit met drie Gentse wiskundigen op de achterbank staat Jacques Tits voor ons aan het bord, en belooft eindelijk het circa twintigkopig publiek een classificatiestelling uit te leggen waarvan hij al vele jaren beweerde “dat ze waar is, maar het bewijs alleen nog maar in zijn hoofd zit” (hierbij met de vinger een karakteristieke beweging makend). Na 10 minuten vraagt een collega wie toch dat vervelende oude mannetje is dat op de eerste rij zit en om de 30 seconden een vraag stelt. Inderdaad, Serre, met zijn tweede typische eigenschap: een hekel aan onduidelijkheid, een voorkeur voor heldere definities en bewijzen.

Het jaar daarop schreef ik mijn eerste artikelje dat ik naar Serre stuurde voor publicatie in de *Comptes Rendus* van Parijs. Tot mijn gro-

te verbazing kwam er binnen twee dagen een antwoord van drie regels: “*Cher* Cornelissen, bedankt voor uw artikel, pagina 1, regel 15: correctie ..., pagina 3, regel 6: correctie *Bien à vous.* J.P. Serre.” Eigenschap drie: snel, correct en to-the-point.

Serre zelf aan het woord¹

Serre werd geboren op 15 september 1926 te Bages in de Pyreneeën. Na studies aan de École Normale Supérieure te Parijs in de naoorlogse jaren werd hij onderzoeker aan het C.N.R.S., promoveerde in 1951, werkte korte tijd in Nancy, en werd in 1956 hoogleraar aan het Collège de France, waar hij in 1994 met emeritaat ging. Hij gaf in 1973 les in Utrecht: in ons gastenboek is zijn handtekening te vinden. Zijn wiskundige output bedraagt circa 180 artikelen en 12 boeken, hij kreeg ettelijke prijzen, waaronder een Fieldsmedaille als 28-jarige. Bovendien was hij sinds 1949 lid van ‘Bourbaki’, een groep wiskundigen die in de jaren zestig en zeventig een grote invloed hadden op het abstractieniveau van de wiskunde.²

Als je Serre vraagt wat wiskunde voor hem is, dan komt als antwoord dat wiskunde een



deel van de werkelijkheid is: niets is meer concreet dan een getal of een boloppervlak. Hij heeft een bijzondere voorkeur voor de toepassing van grote, abstracte theorieën op bijzondere gevallen, waar zij feilloos feiten kunnen voorspellen die anders niet te bewijzen zijn.

Zijn methode van onderzoek beschrijft hij zelf als volgt: eerst en vooral is de vraag naar belang niet relevant. Aan een intrigerend probleem wordt gewerkt, zelfs als het door anderen als een eenvoudige opgave wordt afgedaan. Men denkt na, vindt een methode, en plotseling blijkt die ook op andere terreinen toepasbaar te zijn. *Parti d'un exercice, on se retrouve avec une théorie*. Anderzijds bedenkt hij vaak een methode, waarvan nog niet duidelijk is waar ze goed voor is. De toepassing vind je dan later door rond te kijken in de wiskundige werkelijkheid. Serre vindt het minder leuk om bewust te gaan zitten en stap voor stap een groot programma uit te werken.

De explosie aan wiskundige kennis van de laatste jaren hoeft je volgens Serre helemaal niet bij te houden. Als je een specifiek probleem wilt oplossen, is er waarschijnlijk bijzonder weinig relevant bestaand werk te vinden. Maar met een specifieke probleem in gedachten kan je vaak dingen veel beter oppikken. Je leert ook veel beter van je vrienden die iets uitleggen aan het bord dan uit een boekje.

Hij heeft wel een probleem met grote belangrijke stellingen met ingewikkelde bewijzen die niet te verifiëren zijn. Waarschijnlijk moeten we dit soort feiten dan maar aannemen, maar dat manoeuvreert ons wel in een oncomfortabele positie. Nog meer problemen ziet Serre in de differentiaaltopologie, waarbij je op basis van een 2-dimensionaal plaatje zomaar iets moet aannemen over de vijfdimensionale ruimte...

Serre beweert te zijn begonnen met wiskunde op een internaat in Nîmes, waar hij de pesterijen van ouderejaars wist af te houden door wiskundehuiswerk voor ze te maken. Hij vindt het heel belangrijk dat scholieren leren dat wiskunde *bestaat* en niet een doods onderwerp is. Er is een enorme neiging te denken dat er alleen in de natuurkunde of biologie nog open vragen zijn. Hij vindt het echt jammer dat in het traditionele wiskunde-onderwijs deze open problemen niet worden vermeld, en dat men te veel angst heeft voor het vertellen van grote, nieuwere stellingen zonder bewijs. Hij doet de vreemde suggestie dat men niet hoeft te proberen jonge mensen voor de wiskunde te winnen: we hebben niet zo veel wiskundigen nodig, dus moeten we

scholieren eerst *afraden* wiskunde te doen, maar als ze dan nog steeds willen, mogen ze wel... (dit lijkt vanuit Nederlands perspectief een Frans luxe-probleem!).

Serre merkt trouwens op dat de beruchte slechte invloed van de abstracte Bourbaki-methode op de middelbare school ("moderne wiskunde") voortkomt uit een misbruik van de Bourbaki-boeken, die helemaal niet bedoeld waren om er les uit te geven, niet aan de universiteit, en al helemaal niet op school.

Van Euler naar Serre via Ramanujan

Toen ik hoorde dat Serre de Abelprijs zou gaan krijgen, ben ik meteen aan de slag gegaan om een colloquium-namiddag op te zetten in Utrecht, waar iets over zijn leven en werk zou worden verteld. Ieke Moerdijk vertelde over het proefschrift van Serre en zijn baanbrekend werk in de topologie (berekening van homotopiegroepen van sferen), Frans Oort legde ons uit hoe Serre de algebraïsche meetkunde revolutionair veranderde door het invoeren van de schovencohomologische methode, en tenslotte mocht ikzelf wat tijd wijden aan het werk van Serre in de getaltheorie. We moesten flink schrappen: er is natuurlijk nog veel meer in de vier volumes van zijn *Œuvres (incomplètes!)*. Hieronder het getaltheoretisch verhaal, waarbij ik vrees de precisie van Serre niet te kunnen evenaren.

Euler publiceerde in 1727 (hij was toen 20) een heerlijk analysedictaat onder de titel *Introductio in Analysin Infinitorum, Liber Primus*, en daar vinden wij als lemma 323 de bewering dat

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}}.$$

Interessant, omdat de coëfficiënt van q^n aan de linkerkant gelijk is aan $\sum (-1)^v$, waarbij de som loopt over alle partities van n in v ongelijke delen (dat wil zeggen manieren om n als som van v verschillende natuurlijke getallen te schrijven). Euler heeft dus laten zien dat het aantal partities van een getal n in even ongelijke delen hetzelfde is als dat in oneven ongelijke delen, behalve als n van de vorm $k(3k \pm 1)/2$ is (dan verschilt het $(-1)^k$). Zo zijn alle partities van 7 in ongelijke delen gegeven door

$$7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3 = 4 + 2 + 1.$$

Er zijn er 3 met een even aantal termen en 2 met een oneven aantal termen, en inderdaad is $7 = 2(3 \cdot 2 + 1)/2$.

In het algemeen kan je vragen welke coëfficiënten $p_r(n)$ nul zijn in de reeks

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m)^r = \sum_{n=0}^{+\infty} p_r(n) q^n. \quad (1)$$

Omdat dit zo een moeilijke vraag blijkt te zijn, vragen we liever voor welke r geldt dat $p_r(n) = 0$ voor bijna alle n , dat wil zeggen dat de fractie van $n \leq x$ met $p_r(n) \neq 0$ te verwaarlozen is als x groot wordt:

$$\delta_r := \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\#\{n \leq x : p_r(n) \neq 0\}}{\#\{n \leq x\}} = 0.$$

We zeggen dan dat r lacunair is, of dat de dichtheid δ_r nul is. Of r lacunair is of niet heeft weer allerlei implicaties in de theorie van partities. Laat ons even stilstaan bij de vraag: de linkerkant is gewoon de r -de macht van de reeks van Euler. Kan je niet gewoon de r -de macht van de rechterkant van zijn formule berekenen? Als je dit probeert wordt vrij snel duidelijk dat op een oncontroleerbare manier termen kunnen wegvallen.

Je kan er ook over nadenken of dit een vraag in de combinatoriek is of in de getaltheorie, algebra of analyse. Maak nu misschien een keuze en kijk wat er verder komt.

Wat is bekend? Euler leert ons dat $p_1(n) = 0$ tenzij n ongeveer een kwadraat is, dus de dichtheid δ_1 is $\lim \sqrt{x}/x = 0$; dus blijkt 1

lacunair te zijn. In de eerste helft van de 19e eeuw bewees Jacobi dat 3 lacunair is. Er wordt vermoed dat geen enkele oneven $n \geq 5$ lacunair is. Ramanujan bewees rond 1900 dat 2, 4, 6, 8, 10, 14 en 26 lacunair zijn. Serre bewees in 1985 dat geen enkele andere even r lacunair is.³

Such questions are just mathematics

Hoe doet Serre dat? Eerst maak je van het linkerlid in (1) een echte functie van een complexe veranderlijke z door $q = e^{2\pi iz}$ te substitueren. Dan blijkt dit (bijna) een modulaire vorm te zijn, dat is een holomorfe functie die aan oneindig veel symmetriebetrekkingen voldoet.⁴ Daardoor blijkt ze in een eindig-dimensionale vectorruimte te zitten. Daarin zit een deelruimte van CM-vormen. Die laatste werden door Ribet bestudeerd in 1977 en hij bewees dat voor een CM-vorm $f = \sum a_n q^n$ het al dan niet nul zijn van een coëfficiënt a_p voor p een priemgetal afhangt van een eigenschap van p en een enkel berekenbaar geheel getal d_f dat van f afhangt.⁵ Met een stelling van Chebotarëv uit 1922 kan je zien dat aan die eigenschap voor precies de helft van alle priemgetallen is voldaan. Serre merkt op dat dit precies past bij het resultaat van Ramanujan; voor $r = 2, \dots, 26$ is de geassocieerde modulaire vorm een CM-vorm.

Nu bewijst Serre vrij makkelijk dat voor even r niet op de lijst van Ramanujan de geassocieerde modulaire vorm geen CM-vorm is.

Dan komt het moeilijke stuk: in 1981 bewees Serre dat voor een niet CM-vorm, $f = \sum a_n q^n$, de dichtheid van het aantal priemmen, waarvoor $a_p = 0$, nul is. Hieruit volgt dan ook dat $\delta_r = 0$. Daarvoor transformeert hij eerst het probleem naar iets meetkundigs (via een stelling van hemzelf en Deligne uit 1974), namelijk een bewering over elliptische krommen en veralgemeningen daarvan.⁶ Uiteindelijk komt er de theorie van voorstellingen van groepen aan te pas die laat zien dat $a_p = 0$ voor oneindig veel p equivalent is met de bewering dat oneindig veel 2×2 -matrices allemaal spoor nul hebben. Serre had zelf rond 1970 al laten zien dat dit niet het geval is als f geen CM-vorm is.⁷ Einde bewijs.

Je ziet aan dit voorbeeld precies wat Serre bedoelt met de transformatie van een specifiek (historisch) probleem naar een vraag binnen een grote moderne theorie.

Om tenslotte op de vraag terug te komen wat dit voor wiskunde is: combinatoriek (partitieleer), getaltheorie (vergelijkingen oplossen modulo priemmen), meetkunde (elliptische krommen) of analyse (modulaire vormen)? Serre heeft zelf ooit in een interview gezegd dat zulke vragen “geen groepentheorie, topologie of getaltheorie zijn, maar gewoon wiskunde”. Het is onder andere dit brede perspectief wat hem tot een zo groot wiskundige maakt.

Noten

1 gebaseerd op informatie uit *Wolf Prize in Mathematics*, Vol. 2 (p. 523–551), eds. S.S. Chern en F. Hirzebruch, World Scientific Publishing, 2001 en *An Interview With Jean-Pierre Serre* (C.T. Chong en Y.K. Leong), in: J.P. Serre, *Œuvres. Collected papers. IV*. 1985–1998, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

2 lees meer hierover in het uitstekend geschreven werk *Bourbaki — Une société secrète de mathématiciens* door M. Mashaal, Belin, Paris, 2002.

3 *Sur la lacunarité des puissances de η* . Glasgow Math. J. 27 (1985), 203–221.

4 Een gehele even macht η^r van

$$\eta = q^{\frac{1}{24}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m)$$

voor $q = e^{2\pi iz}$ is een modulaire vorm op het complexe bovenhalfvlak $\{\text{Im}(z) > 0\}$: hij is holomorfe, en voldoet aan oneindig veel symmetrievergelijkingen:

$$f\left(\frac{az+b}{144cz+d}\right) = (-1)^{\frac{1-d}{2}} (cz+d)^r f(z), \\ \forall a, b, c, d \in \mathbf{Z} : ad - 144bc = 1.$$

Daarom zit η^r in de heel bijzondere vectorruimte S van alle holomorfe functies die aan deze oneindig veel symmetrievergelijkingen voldoen (plus nog een kleine technische conditie), de zogenaamde spitsenvormen van gewicht $r/2$. Die ruimte blijkt eindig-dimensionaal te zijn.

5 Ribet bewees dat er in S een ‘getaltheoretisch’ stukje S_{CM} zit, en dat als $f = \sum a_n q^n \in S_{CM}$, er een berekenbaar geheel getal d_f is zodat voor priemgetallen p geldt: $a_p = 0$ precies als er geen gehele x bestaat met p een deler van $x^2 - d_f$.

6 Voor de iets makkelijkere modulaire vorm $g = \eta^2(z)\eta^2(11z) = q - 2q^2 - 2q^3 + 2q^4 + q^5 + \dots$ is dat meetkundige object de elliptische kromme $E = \{(x, y) : y^2 - y = x^3 - x^2\}$, en dan geldt voor $p \neq 2, 3, 11$ het merkwaardige feit dat $p - a_p$ het aantal oplossingen van $y^2 - y = x^3 - x^2$ modulo p is. Inderdaad zijn er bijvoorbeeld precies $5 - 1 = 4$ oplossingen modulo 5, namelijk $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ en $(1, 1)$. Op de laatste foto bij het interview met Serre in dit volume zie je hem voor een bord staan met daarop de reële punten van zo een elliptische kromme getekend.

7 De complexe punten van zo een elliptische kromme (=oplossingen (x, y) in het vlak van zulke vergelijkingen) worden een groep als je definieert dat drie punten som nul hebben precies als ze op een rechte lijn liggen (en je een symbool 0 voor “nul” invoert). Die groep heeft dan ook elementen van eindige orde n , dat wil zeggen punten P zodat $nP = 0$. Er blijken voor elke n twee punten P_n en Q_n te bestaan zodat elke P van orde n een lineaire combinatie $P = a_n P_n + b_n Q_n$ is. Serre bewees tussen 1968 en 1972 dat voor voldoende grote, goed gekozen n (en $f \notin S_{CM}$) een willekeurige lineaire transformatie van die basis P_n, Q_n óók door de actie van een element in de absolute Galoisgroep van de rationale getallen kan worden gegeven. Die Galoisgroep is voortgebracht door elementen waarvan het spoor van de matrix die hun actie op P_n, Q_n beschrijft precies gelijk is aan p min het aantal oplossingen van E modulo p (voor bijna alle p). En dat is precies a_p volgens wat we boven zagen. Maar als bijna alle a_p nul zijn, dan kan je alleen lineaire transformaties met spoor nul krijgen. Dit spreekt dan weer de stelling van Serre uit 1968–1972 tegen. Voor de modulaire vorm g kan je zelfs expliciet bewijzen dat ongeveer 84% van zijn coëfficiënten niet verdwijnen.

Martin Raussen

Aalborg Universitet
Postbox 159
9100 Aalborg
Denemarken
raussen@math.auc.dk

Christian Skau

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
7491 Trondheim
Noorwegen
csk@math.ntnu.no

Interview Jean-Pierre Serre

I hope we shall continue

Drie april 2003 is de eerste Abelprijs toegekend aan Jean-Pierre Serre, emiritus hoogleraar aan het College de France, “voor de sleutelrol die hij heeft gespeeld bij het vormgeven van vele gebieden van de wiskunde waaronder topologie, algebraïsche meetkunde en getaltheorie.” De Abelprijs is in 2001 ingesteld door de Noorse regering als wiskundige tegenhanger van de Zweedse Nobelprijs. Elk jaar zal een commissie van vijf Noorse wiskundigen een kandidaat aanwijzen. Aan de prijs is een bedrag van zes miljoen kronen (760.000 euro) verbonden. Onderstaand interview met Jean-Pierre Serre is afgenomen in Oslo op 2 juni gedurende de festiviteiten die de Abelprijs omringden.

First, we congratulate you on winning the first Abel Prize. You started your career with a thesis that centred on algebraic topology. This was then (at least in France) a very new discipline and not a major area. What made you choose this topic? “I was participating in the Cartan Seminar, on Algebraic Topology. But Cartan did not suggest research topics to his students: they had to find one themselves; after that he would help them. This is what happened to me. I found that Leray’s theory (about fibre spaces and their spectral sequence) could be applied to many more situations than was thought possible, and that such an extension could be used to compute homotopy groups.”

The methods and results that you created in your thesis revolutionised homotopy theory and shaped it in its modern look. “They certainly opened up lots of possibilities. Before my thesis, homotopy groups of spheres were almost entirely terra incognita; one did not even know that they are finitely generated!

One interesting aspect of the method I introduced was its algebraic character. In particular, one could make ‘local’ computations, where the word ‘local’ here is taken as in number theory: relative to a given prime number.”

Is it true that one of the crucial points in this story was to identify something that looks like a fibre space without it being on the nose? “Indeed, to apply Leray’s theory I needed to construct fibre spaces which did not exist if one used the standard definition. Namely, for every space X , I needed a fibre space E with base X and with trivial homotopy (for instance contractible). But how to get such a space?

One night in 1950, on the train bringing me back from our summer vacation, I saw it in a flash: just take for E the space of paths on X (with fixed origin a), the projection $E \rightarrow X$ being the evaluation map: path $\rightarrow$ extremity of the path. The fibre is then the loop space of (X, a) . I had no doubt: this was it! So much so that I even waked up my wife to tell her ... (Of course, I still had to show that $E \rightarrow X$ deserves to be called a *fibration*, and that Leray’s theory applies to it. This was purely tech-

nical, but not completely easy.) It is strange that such a simple construction had so many consequences.”

Work Themes and Work Style

This story about your sudden observation is reminiscent of Poincaré’s flash of insight when stepping into a tramway: this is told in Hadamard’s booklet The psychology of invention in the mathematical field. Do you often rely on sudden inspiration or would you rather characterise your work style as systematic? Or is it a mixture? “There are topics to which I come back from time to time (ℓ -adic representations, for instance), but I do not do this in a really systematic way. I rather follow my nose. As for flashes, like the one Hadamard described, I have had only two or three in more than 50 years. They are wonderful ... but much too rare!”

These flashes come after a long effort, I guess? “I would not use the word ‘effort’ in that case. Maybe a lot of thinking. It is not the conscious part of the mind which does the job. This is very well explained in Littlewood’s charming book *A Mathematician’s Miscellany*.”

Most of your work, since the ‘topology years’, has been devoted to number theory and algebraic geometry. “You see, I work in several apparently different topics, but in fact they are all related to each other. I do not feel that I am really changing. For instance,

in number theory, group theory or algebraic geometry, I use ideas from topology, such as cohomology, sheaves and obstructions.

From that point of view, I especially enjoyed working on L -adic representations and modular forms: one needs number theory, algebraic geometry, Lie groups (both real and L -adic), q -expansions (combinatorics style) ... A wonderful mélange."

Do you have a geometric or an algebraic intuition and way of thinking — or both?

"I would say algebraic, but I understand the geometric language better than the purely algebraic one: if I have to choose between a Lie group and a bi-algebra, I choose the Lie group! Still, I don't feel I am a true geometer, such as Bott, or Gromov.

I also like analysis, but I can't pretend to be a true analyst either. The true analyst knows at first sight what is 'large', 'small', 'probably small' and 'provably small' (not the same thing). I lack that intuitive feeling: I need to write down pedestrian estimates."

You have had a long career and have worked on many different subjects. Which of your theories or results do you like most? Which are most important to you? "A delicate question. Would you ask a mother which of her children she prefers?

All I can say is that some of my papers were very easy to write, and some others were truly difficult. In the first category, there is FAC (faisceaux algébriques cohérents). When I wrote it, I felt that I was merely copying a text which already existed; there was almost no effort on my part. In the 'difficult' category, I remember a paper on open subgroups of profinite groups, which gave me so much trouble that, until the very end, I was not sure whether I was proving the theorem or making a counter-example! Another difficult one was the paper dedicated to Manin where I made some very precise (and very daring) conjectures on modular Galois representations (mod p); this one was even painful; after I had finished it, I was so exhausted that I stopped publishing for several years.

On the pleasure side, I should mention a paper dedicated to Borel, on tensor products of group representations in characteristic p . I had been a group theory lover since my early twenties, and I had used groups a lot, and even proved a few theorems on them. But the theorem on tensor products, obtained when I was in my late sixties, was the first one I really enjoyed. I had the feeling that Group Theory, after a 40 years courtship, had consented to give me a kiss."

You have been active in the mathematical



Martin Raussen and Christian Skau interviewing Jean-Pierre Serre

frontline for more than 50 years. Hardy made the often quoted remark that 'Mathematics is a young man's game'. Isn't that wrong — aren't you a perfect counterexample? "Not a perfect one: have you noticed that most of the quotations of the Abel Prize are relative to things I had done before I was 30?

What is true is that people of my generation (such as Atiyah, Borel, Bott, Shimura, ...) keep working longer than our predecessors did (with a few remarkable exceptions such as Elie Cartan, Siegel, Zariski). I hope we shall continue."

Relations to mathematical history

Since you've won the Abel Prize, we'd like to ask some questions with a background in Abel's time. The algebraic equations that Abel and Galois studied, coming from the transformation theory of elliptic functions, turned out to be very important much later for the arithmetic theory of elliptic curves. What are your comments on this remarkable fact, especially in connection with your own contribution to this theory? "Yes, elliptic curves are very much in fashion (with good reasons, ranging from Langlands' program to cryptography). In the 60s and 70s I spent a lot of time studying their division points (also known as Tate modules) and their Galois groups. A very entertaining game: one has to combine information coming from several different sources: Hodge-Tate decompositions, tame inertia, Frobenius elements, finiteness theorems à la Siegel, ... I like that."

Hermite once said that Abel had given mathematicians something to work on for the

next 150 years. Do you agree? "I dislike such grand statements as Hermite's. They imply that the person who speaks knows what will happen in the next century. This is hubris."

In the introduction of one of his papers Abel writes that one should strive to give a problem a form such that it is always possible to solve it — something which he claims is always possible. And he goes on, saying that by presenting a problem in a well-chosen form the statement itself will contain the seeds of its solution. "An optimistic point of view! Grothendieck would certainly share it. As for myself, I am afraid it applies only to algebraic questions, not to arithmetic ones. For instance, what would Abel have said about the Riemann hypothesis? That the form in which it is stated is not the good one?"

The role of proofs

When you are doing mathematics, can you know that something is true even before you have the proof? "Of course, this is very common. But one should distinguish between the genuine goal (say, the modularity of elliptic curves, in the case of Wiles), which one feels is surely true, and the auxiliary statements (lemmas, etc), which may well be untractable (as happened to Wiles in his first attempt) or even downright false (as happened similarly to Lafforgue)."

Do proofs always have a value in themselves? What about, for example, of the proof of the four-colour theorem. "We are entering a grey area: computer-aided proofs. They are not proofs in the standard sense that they can be checked by a line by line verification. They

are especially unreliable when they claim to make a complete list of something or other.

I remember receiving in the 90s such a list for the subgroups of given index of some discrete group. The computer had found, let us say, 20 of them. I was familiar with these groups, and I easily found 'by hand' about 30 such. I wrote to the authors. They explained their mistake: they had made part of the computation in Japan, and another part in Germany, but they had forgotten to do some intermediate part ... Typical!

On the other hand, computer-aided proofs are often more convincing than many standard proofs based on diagrams which are claimed to commute, arrows which are supposed to be the same, and arguments which are left to the reader."

What about the proof of the classification of the finite simple groups? "You are pushing the right button. For years, I have been arguing with group theorists who claimed that the *Classification Theorem* was a theorem, that is, had been proved. It had indeed

been announced as such in 1980 by Gorenstein, but it was found later that there was a gap (the classification of *quasi-thin* groups). Whenever I asked the specialists, they replied something like: "Oh no, it is not a gap, it is just something which has not been written, but there is an incomplete unpublished 800 pages manuscript on it".

For me, it was just the same as a "gap", and I could not understand why it was not acknowledged as such. Fortunately, Aschbacher and Smith have now written a long manuscript (more than 1200 pages) in order to fill in the gap. When this will have been checked by other experts, it will be the right moment to celebrate."

But if a proof is 1200 pages long, what use is it? "As a matter of fact, the total length of the proof of the classification is much more than 1200 pages; about 10 times more. But that is not surprising: the mere statement of the theorem is itself extremely long, since, in order to be useful, it has to include the detailed description, not only of the Chevalley

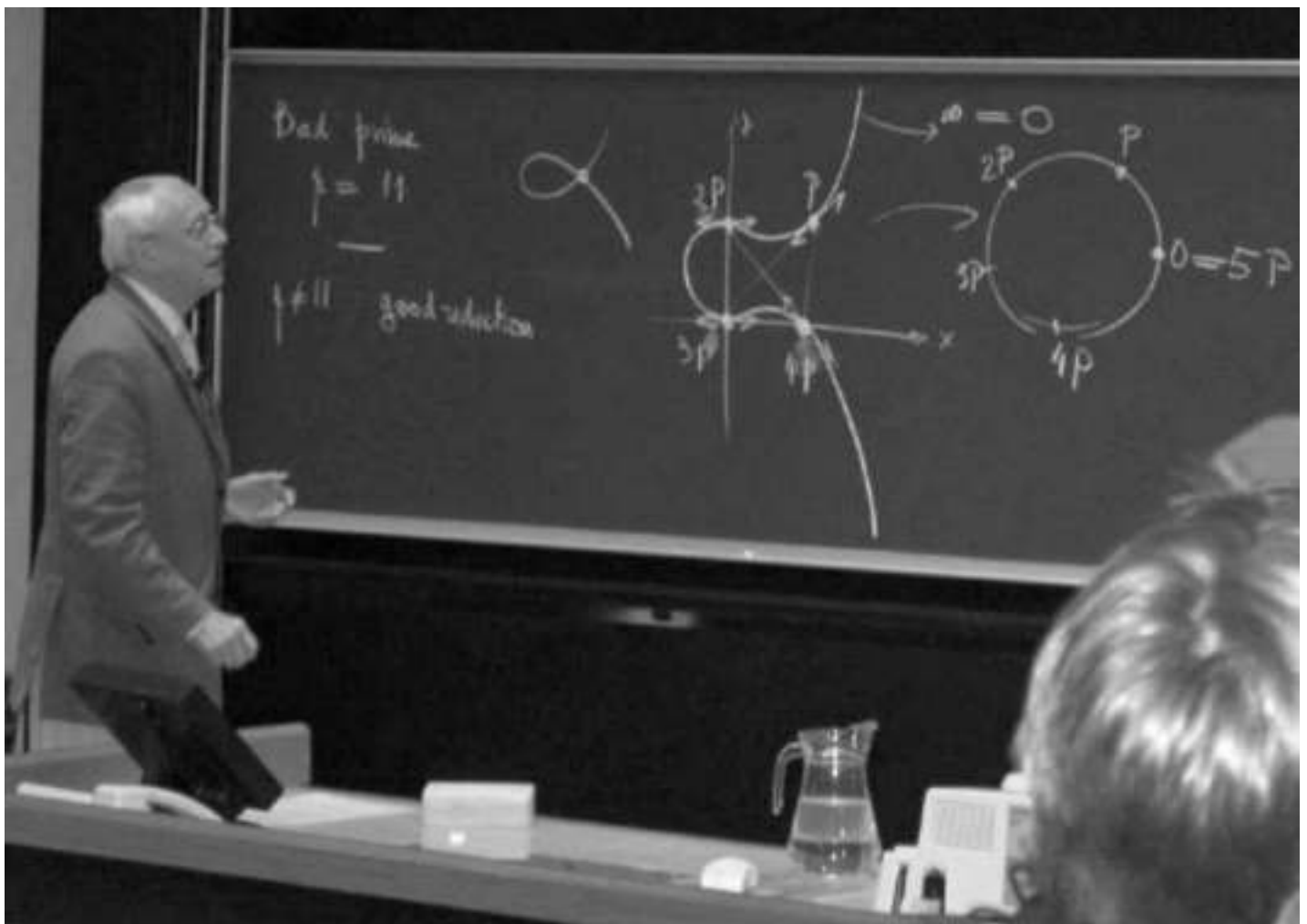
groups, but also of the 26 sporadic groups.

It is a beautiful theorem. It has many very surprising applications. I don't think that using it raises a real problem for mathematicians in other fields: they just have to make clear what part of their proof depends on it."

Important mathematical problems

Do you feel that there are core or mainstream areas in mathematics — are some topics more important than others? "A delicate question. Clearly, there are branches of mathematics which are less important; those where people just play around with a few axioms and their logical dependences. But it is not possible to be dogmatic about this. Sometimes, a neglected area becomes interesting, and develops new connections with other branches of mathematics.

On the other hand, there are questions which are clearly central for our understanding of the mathematical world: the Riemann hypothesis and the Langlands program are two obvious cases. There is also the Poincaré



As a part of the ceremonies, Jean-Pierre Serre delivered a lecture at Universitetet i Oslo.

conjecture — which may well stop being a conjecture, thanks to Perelman!”

Do you have more information, or a hunch, about the correctness of the proof? “Hunch? Who cares about hunches? Information? Not really, but I have heard that people at IHES and MIT are very excited about this sketch of proof. An interesting aspect of Perelman’s method is that it uses analysis, for what is a purely topological problem. Very satisfying.”

We have already moved a little into the future with our discussion of the Poincaré conjecture. Which important mathematical problems would you like to see solved in the near future? And do you agree with the primary importance of the Clay Millennium Prize Problems? “Ah, the million dollars Clay problems! A strange idea: giving so much money for one problem ... but how can I criticise it, just after having received the Abel prize? Still, I feel there is some risk involved, namely that people would shy from discussing their partial results, as already happened ten years ago with Fermat’s theorem.

As for the choice of questions made by the Clay Institute, I feel it is very good. The Riemann hypothesis and the Birch & Swinnerton-Dyer conjecture are rightly there. The Hodge conjecture, too; but for a different reason: it is not clear at all whether the answer will be yes or no; what will be very important will be to decide which (I am hoping, of course, that it will not turn out to be undecidable ...). The $P = NP$ question belongs to the same category as Hodge, except that there would be many more applications if the answer turned out to be “yes”.

Can you think of any other problems of the same stature? “I already told you that the Langlands program is one of the major questions in mathematics nowadays. It was probably not included in the Clay list because it is very hard to formulate with the required precision.”

Besides your scientific merits, you are also known as a master expositor, as we witnessed during your lecture today. “Thanks. I come

from the South of France, where people like to speak; not only with their mouth, but with their hands, and in my case with a piece of chalk.

When I have understood something, I have the feeling that anybody else can understand it too, and it gives me great pleasure to explain it to other mathematicians, be they students or colleagues.

Another side of the coin is that wrong statements make me almost physically sick. I can’t bear them. When I hear one in a lecture I usually interrupt the speaker, and when I find one in a preprint, a paper or in a book I write to the author (or, if the author happens to be myself, I make a note in view of a next edition). I am not sure this habit of mine has made me very popular among lecturers and authors.”

Accessibility and importance of mathematics

Mathematics witnesses an explosion of subjects and disciplines, making it difficult to master even the minor disciplines. On the other hand — as you demonstrated today in your lecture — it is very important that disciplines cross-fertilise each other. How can young mathematicians, in particular, cope with this explosion of knowledge and come up with something new? “Oh yes, I have already been asked that question in my Singapore interview, reproduced by *Intelligencer*.¹ My answer is that, when one is truly interested in a specific question, there is usually very little in the existing literature which is relevant. This means you are on your own.

As for the feeling of ‘explosion’ of mathematics, I am convinced that Abel felt the same way when he started working, after Euler, Lagrange, Legendre and Gauss. But he found new questions and new solutions. It has been the same ever since. There is no need to worry.”

Another current problem is that many young and talented people — and also public opinion leaders — don’t think that mathematics is very exciting. “Yes. Sadly enough, there are many such examples.

A few years ago, there was even a French minister of Research who was quoted as saying that mathematicians are not useful any more, since now it is enough to know how to punch a key on a computer. (He probably believed that keys and computer programs grow on trees ...)

Still, I am optimistic about young people discovering, and being attracted by, mathematics. One good aspect of the Abel festivities is the Norwegian Abel competitions, for high school students.”

Sports and literature

Could you tell us about your interests besides mathematics? “Sports! More precisely: skiing, ping-pong, and rock climbing. I was never really good at any of them (for example, when I skied, I did not know how to slalom, so that I would rather go ‘schuss’ than trying to turn); but I enjoyed them a lot. As luck has it, a consequence of old age is that my knees are not working any more (one of them is even replaced by a metal-plastic contraption), so that I had to stop doing any sport. The only type of rock-climbing I can do now is a vicarious one: taking friends to Fontainebleau and coaxing them into climbing the rocks I would have done ten years ago. It is still fun; but much less so than the real thing. Other interests:

- movies (*Pulp Fiction* is one of my favourites — I am also a fan of Altman, Truffaut, Rohmer, the Coen brothers ...);
- chess;
- books (of all kinds, from Giono to Böll and to Kawabata, including fairy tales and the *Harry Potter* series).”

Prof. Serre, thank you for this interview on behalf of the Danish and the Norwegian Mathematical Societies. ☞

This interview appeared originally in 2003 in the Newsletters of the Norwegian, the Danish and the European Mathematical Societies.

References

- 1 ‘An interview with J-P. Serre’, *The Mathematical Intelligencer* **8** (1986), p. 8–13.
- 2 ‘Jean-Pierre Serre’, *Wolf Prize in Mathematics Vol. II* (eds. S.S. Chern and F. Hirzebruch), World Sci. Publ. Co. (2001), p. 523–551.
- 3 Pilar Bayer, ‘Jean-Pierre Serre, medalla Fields’, *La Gaceta* **4** (1) (2001), p. 211–247.

John Tate

University of Texas at Austin
Department of Mathematics
1 University Station C1200
Austin, TX 78712-0257
Verenigde Staten
tate@math.utexas.edu

Boekbespreking

Correspondance Grothendieck-Serre

In januari 2004 verscheen bij de American Mathematical Society een Engelse vertaling van de briefwisseling tussen twee van de grootste wiskundigen van de tweede helft van de twintigste eeuw: Jean-Pierre Serre en Alexander Grothendieck. Deze briefwisseling verscheen eerder, in 2001, als publicatie van de Société Mathématique de France. De gerenommeerde wiskundige John Tate heeft, evenals Serre en Grothendieck, baanbrekend werk verricht op het gebied van de algebraïsche meetkunde en getaltheorie. Hij is hoogleraar aan de University of Texas at Austin. Hij is lid van de National Academy of Sciences in de Verenigde Staten, buitenlands lid van de Franse Académie des sciences en erelid van de London Mathematical Society. Hier geeft hij zijn commentaar op de Franse editie.

This book gives us intimate views of the collaboration which took place between A. Grothendieck and J-P. Serre during the period 1955–1969, when they played such key roles in revolutionary developments in algebraic geometry. The volume contains about eighty essentially unedited letters from

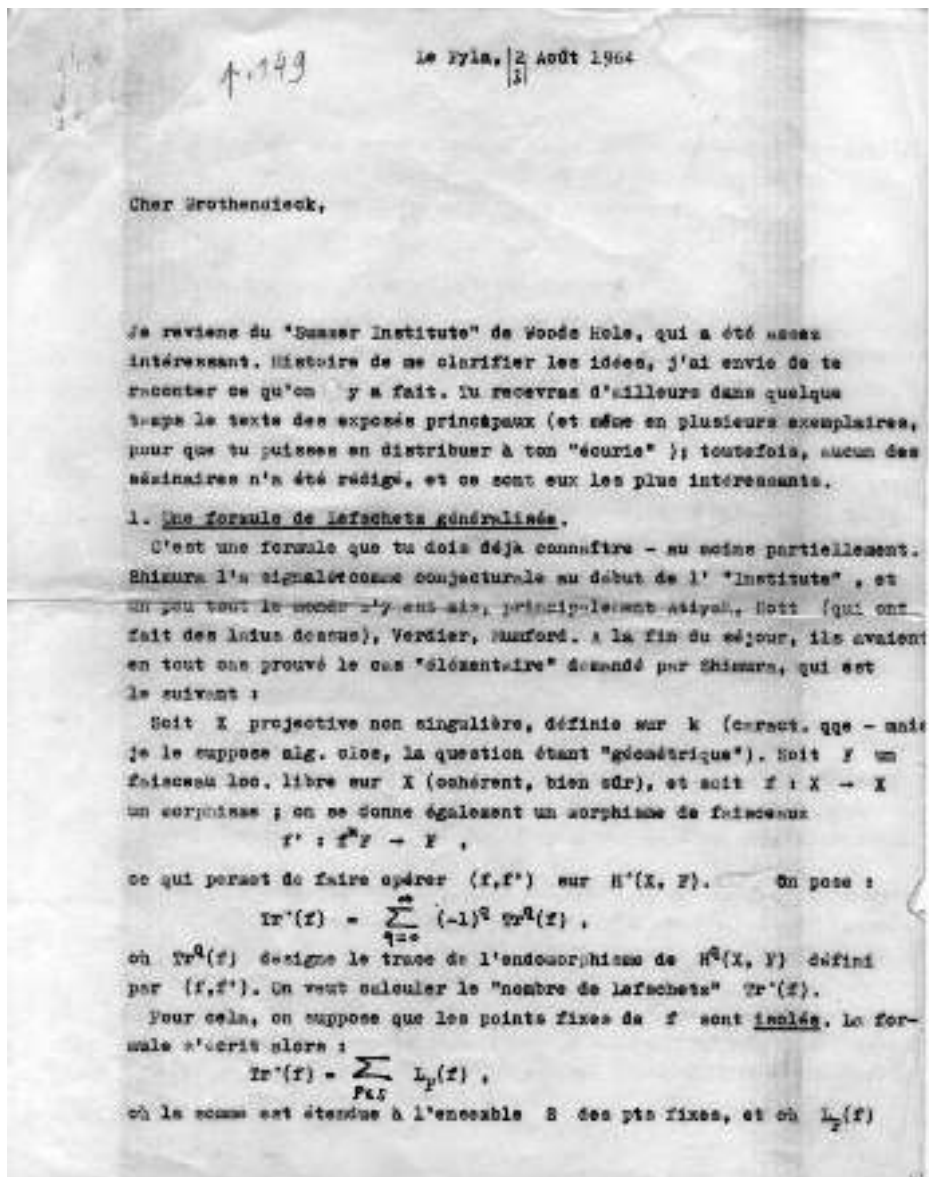
that period plus a few from the mid eighties. It exists thanks to Serre who preserved the letters, to Pierre Colmez who obtained Grothendieck's permission to publish them through an intermediary Jean Malgoire and organized an army of students to $\text{\TeX}$ the letters, to the efforts of those students, and to the French Mathematical Society which created a new book series, *Documents Mathématiques* to accommodate the publication of the letters. The book is attractively and readably printed, with reproductions of two of Grothendieck's letters, one handwritten, one typed, which show that $\text{\TeX}$ ing the letters was not always a routine job. Serre has added very helpful notes explaining unclear references, noting assertions which turned out to be false, and indicating as far as possible the subsequent fate of conjectures made in the letters.

Unfortunately the historical record provided by the letters is full of gaps because the letters were written for the most part only when Serre and Grothendieck were not both in the Paris region. When together there they spent hours on the phone. One can only regret that those conversations were not taped. But if not furnishing a complete his-

torical record, the letters do afford a real understanding of how these men thought and worked together. Their collaboration was especially fruitful because the two think so differently: Grothendieck rushes ahead on his own, full of optimism, guided by the big picture, putting everything in the most general context, sometimes overlooking details in his hurry; Serre, with an amazing knowledge of the literature and special cases, very careful with details, working with a good balance between special and general, and always ready to construct an example or counterexample to keep Grothendieck on track.

Faisceaux Algébriques Cohérents

The collaboration by letter begins in January 1955. Serre has seen that sheaf theory which was so useful in the Cartan seminars on complex analytic varieties serves also in abstract algebraic geometry despite the weirdness of the Zariski topology. He is finishing his paper 'Faisceaux Algébriques Cohérents' (FAC) on the subject. Grothendieck has decided to abandon topological vector spaces for algebraic geometry. In the early letters he bombards Serre with questions, some naive,



First page of a letter from Serre to Grothendieck, dated August 2–3, 1964. Serre tells of his mathematical experiences at the *Summer Institute* in Woods Hole. Grothendieck's answer is printed on the next page.

some not so, which Serre answers patiently. Much of the discussion concerns sheaves.

Grothendieck is developing his own view of abelian categories, derived functors, the various theories of sheaf cohomology, spectral sequences, ... as only he could. His summary was later published as 'Sur quelques points d'algèbre homologique' in *Tohoku Math. J. (1957)*. By the end of 1955 Grothendieck explains to Serre a general formulation of Serre duality, saying it is almost evident, and implicit in FAC. Serre is excited by this formulation, saying it is *the* good way to state duality in both the algebraic case and the analytic case. FAC finished, Serre is following it with GAGA, 'Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique', proving

that for projective varieties, the analytic coherent sheaves are the 'same' as algebraic ones.

The best category of commutative rings

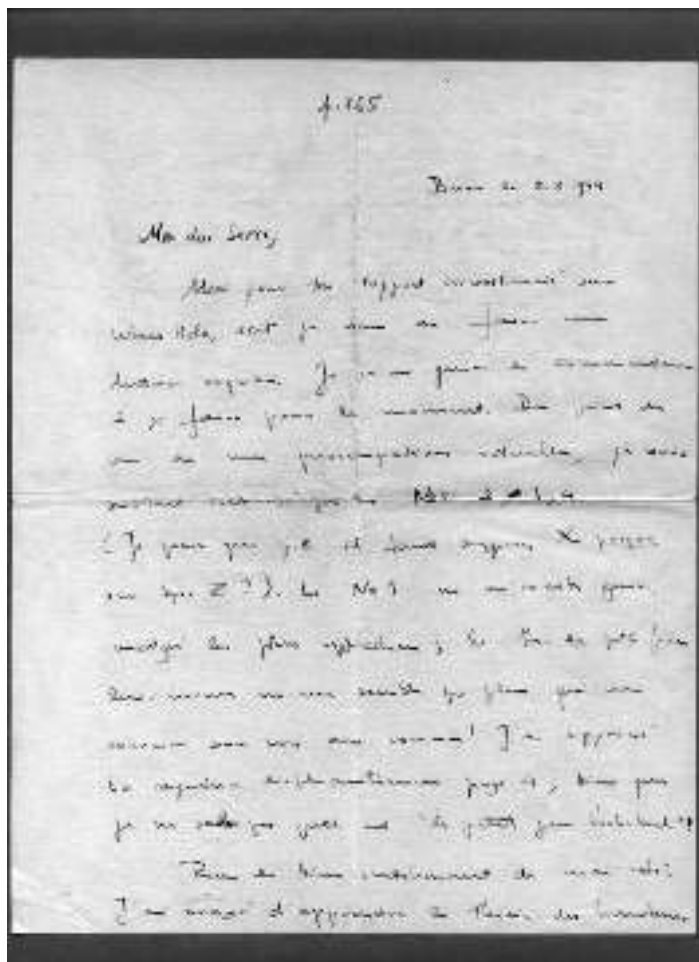
Schemes were already in the air, though always with restrictions on the rings involved. In February 1955 Serre mentions that the theory of coherent sheaves works on the spectrum of commutative rings in which every prime ideal is an intersection of maximal ideals. A year later, Grothendieck tells of Cartier's introducing the technically useful notion of quasi-coherent sheaf on arithmetic varieties made by gluing together the spectra of noetherian rings. But it would take two more years before Grothendieck realized that the noethe-

rian condition should be dropped and one should include all prime ideals in the spectrum, that in the end, as Serre puts it in the notes, the best category of commutative rings is the category of *all* commutative rings.

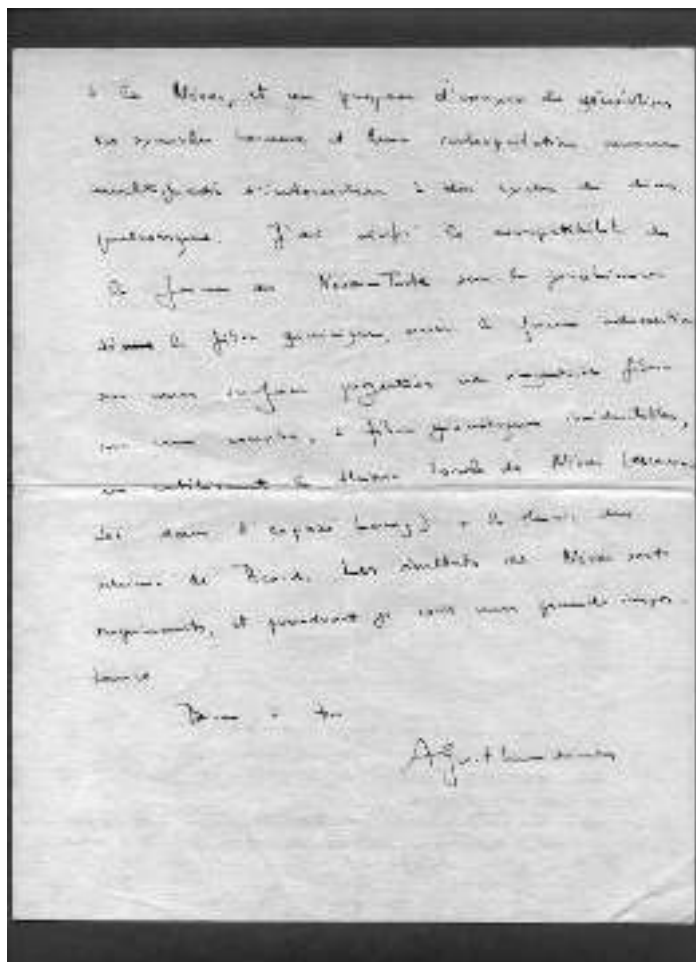
So far, we have given a very sketchy and incomplete description of the mathematics involved in the first two years of the collaboration, as revealed by 27 letters covering 55 pages. The problems under discussion were largely foundational ones. The next seven years saw the exchange of 26 letters, about 85 pages. Some of the topics discussed during these years are: Grothendieck's proof of Riemann-Roch, the progress of his writing of *Éléments de Géométrie Algébrique* (EGA), begun in 1958, Serre's geometric class field theory, Grothendieck's theory of the fundamental group (one of the first big successes of the theory of schemes), Weil's restriction of scalars functor, the astonishing news of Dwork's proof of the rationality of the zeta function of a variety over a finite field (1959), generalized Jacobians and local symbols, purity, the (sad?) situation of mathematics in Paris in 1961, p -adic Lie algebras, M. Artin's proof that every non-singular variety is covered by 'good' opens, the local invariants in the formula expressing the Euler characteristic of an étale sheaf on a curve in terms of its singularities in the case of higher ramification which were requested by Grothendieck, and supplied by Serre, the Swan representation.

An outburst of correspondence

Suddenly, in 1964, there are 22 letters in one year. A big theme is algebraic cycles and the topics are becoming more arithmetical. Serre writes to Grothendieck an extensive report on the Woods Hole Summer Institute: Woods Hole fixed point formula, conjectures on l -adic cohomology of a variety over a local field inspired by Ogg's work on elliptic curves, my conjectures on algebraic cycles and poles of zeta functions, formal groups, the Serre-Tate theorem and Serre's canonical lift. Much of the discussion in the following months is stimulated by this report and by a letter from Serre to A. Ogg announcing the criterion of Ogg-Néron-Shafarevich for good reduction of an abelian variety and its agreeable corollaries, together with a question which Serre calls "naïve": is it true that after a finite extension of the ground field, the connected component of the special fiber of the Néron model of an abelian variety is an extension of an abelian variety by a torus. Grothendieck has no sentiment at first, but later proves it. There is much discussion of zeta and L -functions.



Grothendieck's answer, dated August 8, 1964.



Grothendieck discusses vanishing cycles and introduces a new concept which he calls a "motive", which is to become one of his greatest contributions. Soon after, we have motivic Galois groups, and in early 1965 he formulates the "standard conjectures".

Farewell to Grothendieck

The collaboration is coming to an end. There are three more letters exchanging mathematical ideas. The last, in January 1969 from Grothendieck contains his thoughts on what Serre has told him about Steinberg's theorem. Not long after that Grothendieck abandoned the writing of EGA and dropped out of the mathematical world.

The rest of the book, six letters from the mid 1980's is sad to read. Grothendieck has isolated himself and begun writing *Récoltes et Semailles*, a rambling account of his bitter somewhat paranoid reflections on his mathematical life and on the behaviour of his former students and his colleagues, which he distributes to them. Serre gets the first chap-

ters and writes Grothendieck his comments. Grothendieck finds that Serre accepts the nice things in his account but rejects the disagreeable ones, and says that since he's known him Serre has always shown a horror of serious self-examination. In his reply, Serre asks why Grothendieck abandoned his mathematical program and hazards two guesses. Had the writing of EGA and the seminars simply become too great a burden? Or was the problem a deeper one, that Grothendieck realized that his method of doing mathematics, building big general theories, which worked so well for topological vector spaces and algebraic geometry was not as effective for the problems of number theory and modular forms which were looming in the late sixties when Grothendieck abandoned his program?

At the end of 1986, Serre writes a last mathematical letter, explaining to Grothendieck his conjectures on modular Galois representations of degree 2, and sending best wishes for 1987. Grothendieck replies, thanking Serre for his trouble, but explaining that it is

not worth the effort. He has his own projects and is not interested, but wishes Serre a happy 1987 and all success in his work. Of course the book will be a great resource for future historians of 20th century mathematics, but it is much more than that. It gives today's reader a feel for a very different mathematical era and a unique opportunity to be present at the exchange of mathematical ideas at the highest level, in complete comradeship, between two masters.

Correspondance Grothendieck-Serre, Pierre Colmez-Jean-Pierre Serre (Eds.), Société Mathématique de France, 2001, ISBN 2-85629-104-X.

Grothendieck-Serre Correspondence, Bilingual edition, Pierre Colmez-Jean-Pierre Serre (Eds.), Catriona Maclean-Leila Schneps (translation), American Mathematical Society, Société Mathématique de France, 2004, ISBN 0-8218-3424-X.

Brieven

| Letters to the editor

Author's reply to a review by M. Keane

Cambridge University Press has forwarded to me a copy of the review by Prof. M. Keane, in NAW 5/4 no. 1 (2003), of my monograph *Random Walks on Infinite Graphs and Groups*, Cambridge Tracts in Mathematics 138, 2000.

The tone of the review is very unusual, if not personally offensive — not only in my own view; I also consulted several colleagues before deciding to respond.

Let me start with Prof. Keane's criticism regarding the choice of the material. As stated clearly in the preface, the topic of the book is the interplay between the behaviour of time-homogeneous Markov chains and the geometric-algebraic-combinatorial structure of the underlying state space. This is currently a rather active field of research, and I have the impression that my book has been well received by the scientific community, as one may also see from other reviews like the ones in Bull. London Math. Soc. 33 (2001) p. 243–245, Acta Sci. Math. (Szeged) 67 Vol. 1–2 (2001), or Bull. Amer. Math. Soc. 39 (2002) p. 281–285. The 'missing' topics indicated by M. Keane would correspond to a very different general theme; there are indeed very different ones among the "many of the interesting problems in this area today". (Quotation marks refer to prof. Keane's review.) Also, I do not believe that there is "too much emphasis [...] on the contributions of Varopoulos", since Varopoulos not only has solved a longstanding open problem (classification of finitely generated, recurrent groups) but also opened the door to a wealth of new methods — notably analytic and not probabilistic in flavour — for examining the asymptotics of transition probabilities on graphs. Regarding the "Italian school", I guess that Prof. Keane refers to myself and to close colleagues of mine — I think that it was my right to dedicate a modest part of my monograph to the achievements of those people, in particular including myself.



The most irritating piece of the review is the phrase "One clearly gets the impression that the author has 'learned through writing', as he states in the introduction." The method applied by the reviewer is to quote in such a way as to obtain the opposite of the original meaning; here, Prof. Keane seems to suggest that I did not know what I was going to write when I started to work on my book. Let me explain the true meaning of the respective phrase of mine. Most of us know a good amount of the literature in the field in which we are working (and I believe to have a rather wide overview) to the extent that we know the results and the basic ideas of many other researchers. But there is only a comparatively small portion of papers where we really went through every detail, as required for elaborating the results in such a way that they can for example be presented in a monograph. Here, I have elaborated results from at least eighty original papers in detail,

In deze rubriek reageren lezers op recent in dit blad verschenen artikelen. De redactie behoudt zich het recht voor ingezonden brieven in te korten of niet te plaatsen.

often giving shorter, different, or new proofs — this has been my own fruitful ‘learning’.

The above-mentioned allusion together with the statements that the “organization of the material seems haphazard and without a clear line” and “willy-nilly organization” are in contrast not only with the opinion of other reviewers, but also with the story how this book was prepared. First, I had published a long survey article with the same title as the book, that appeared in *Bull. London Math. Soc.* 26 (1994) p. 1–60. It was organized in a similar way as the book; each chapter is centered around one specific theme, starting with general results and then passing to specific structures. The range of topics is somewhat wider than the selection in the book; in particular, the volume by Guivarc’h, Keane and Roynette is cited there. My impression is that this survey was warmly welcomed by the scientific community; it has been cited very frequently. The letter from the editor, in accepting it for publication, started with the phrase “Thanks very much for your excellent [...] survey.” In the sequel, one of the editors of Cambridge Tracts in Mathematics suggested to me to write a book on the same topic. I submitted a detailed proposal, which was accepted by an anonymous referee. Upon completion of each single chapter, I sent the latter to various colleagues working in the field, asking for comments, criticism, suggestions, et cetera, which were taken into account in the final version.

There are of course two points of legitimate criticism in Prof. Keane’s review. One is the lack of more detailed motivation at the beginning of Chapter II, and the other is the missing citation of the influential book by Guivarc’h, Keane and Roynette, *Marches Aléatoires sur les Groupes de Lie*, Lecture Notes in Math. 624, Springer, 1977. I did of course cite the latter not only in my survey, but also in various of my research papers. It was not cited in my book basically because the latter deals exclusively with discrete structures, and none of those results on Lie groups is used. However, it certainly would have been wise to include the reference in the “Notes and Remarks” at the end of Chapter I.

Wolfgang Woess

Het pseudoniem van god

Met enige verbazing lazen wij in het decembernummer van het NAW de boekbespreking door Roger Cooke van een boek van Ronald Meester. Tot en met de een na laatste kolom is het een interessant artikel. Al zijn we geen van alle erg thuis in het vakgebied waar blijkbaar auteur en

recensent veel van afweten, we hebben toch met genoeg het eerste deel van de bespreking gelezen. Temeer omdat de discussie die in dit artikel wordt gestart van wetenschappelijk niveau is.



De woorden van de laatste kolom verbazen ons echter en als christenen en belangstellende lezers van het NAW willen we hier dan ook op reageren. Werd in het eerste deel van het artikel de christelijke lezer nog serieus uitgedaagd voor zijn geloof op te komen en zijn basis voor wetenschap bedrijven te verdedigen, in de zin die begint met “Of van het feit dat de Roomse Kerk [...]” wordt hij volledig buitenspel gezet, als zou het belachelijk zijn, ja zelfs een schurkendaad, in God te geloven en de Bijbel als richtlijn te nemen. De argumenten voor dit buitenspel gezet worden, raken naar ons idee kant noch wal. Zelf de aangehaalde tekst uit het bijbelboek Numeri lezend, begrijpen we niet wat de recensent hierover bedoelt te zeggen. De woorden tussen haakjes in de laatste alinea, “(zo wordt de evolutietheorie in creationistische kringen genoemd)”, klinken ons kinderachtig in de oren en verraden een niet geheel onbevooroordeelde houding van de recensent ten opzichte van het christendom. Bij het christendom zijn minstens zoveel mensen betrokken als bij de wetenschap en er worden daarom navenant evenveel of zelfs meer fouten gemaakt door christenen en christelijke instanties, als binnen de wetenschap. Het getuigt naar onze mening niet van een wetenschappelijke houding de christelijke gesprekspartner die fouten in de schoenen te schuiven en hem zodoende belachelijk te maken.

Gert-Jan van der Heiden (Nijmegen), Pieter Heres (Eindhoven),

Arie de Niet (Groningen), Christiaan van de Woestijne (Leiden),

Fred Wubs (Groningen)

Hans van Ditmarsch

Computer Science Department, University of Otago

PO Box 56, Dunedin 9015

Nieuw-Zeeland

hans@cs.otago.ac.nz

Column Wiskundigen in den vreemde

Nieuw-Zeeuwse Kroniek

In november 2000 promoveerde Hans van Ditmarsch aan de Rijksuniversiteit Groningen. Een jaar later stapte hij op het vliegtuig naar de andere kant van de wereld en begon een nieuwe carrière aan de University of Otago in Dunedin, Nieuw-Zeeland. Hij doet verslag van zijn ervaringen als Nieuw-Zeeuws immigrant.

Nieuw-Zeeland is een nieuw land. In den beginne . . . waren er alleen vogels en insecten. Geen (land)zoogdieren! De Maori's landden hier naar schatting tussen 900 en 1200. Abel Tasman landde in 1642. In de negentiende eeuw begon de Europese kolonisatie serieus. Dunedin werd gesticht in 1848, door Schotse kolonisten. 'Dun' — zoals in Dundee — is Oud-Schots voor 'borg' en Dun-Edin is fantasie-Schots voor Edin-Burgh. Dunedin is de hoofdstad van de provincie Otago. In 1861 werd in Otago goud gevonden en daarna onderging Dunedin stormachtige groei. De Universiteit van Otago dateert van 1869 en is de oudste van Nieuw-Zeeland. Tussen 1890 en nu is de bevolking van Dunedin op vrijwel constant 100.000 inwoners blijven staan — dat goud raakte ooit op. Die universiteit hebben we echter nog steeds. Het is een van de grotere in Nieuw-Zeeland: in 2001 waren er 18.000 studenten (deeltijdstudenten tellen ook mee). Dunedin is dus een echte studentenstad.

Om nog even op Alexander Aitken terug te komen, de beroemde wiskundige uit Dunedin: inmiddels heb ik ook een lesboek *Determinants and Matrices* doorgebladerd. Oorspronkelijk uit 1939, ik heb een editie uit 1959 voor me. Heel helder geschreven, dit zou zo nog in het onderwijs gebruikt kunnen worden. Ook prachtig is het pamflet *The case against decimalisation* (1962). Waar zou een echte Brit nu voor zijn? Het twaalfstellig stelsel! Aitken moet een gedreven docent zijn geweest, als hij zo prachtig kan schrijven.

Een ander beroemd wetenschapper die zijn wortels in Dunedin heeft, is de logicus Arthur Prior, bekend van de modale tijdslogica. Dit is de logica met operatoren als F en P , voor 'ooit in de toekomst', en 'ooit in het verleden', waarin uitspraken als 'het regende' nu waar zijn ('ooit in het verleden (het regent)'; als formule Pq), omdat 'het regent' gisteren waar was (atomaire propositie q). Prior (1914–1969) groeide op in Masterton — op het Noordereiland, ver van Dunedin — maar studeerde aan Otago University en behaalde hier (1932–1937) een Bachelor en een Master in Wijsbegeerte. Hij was in die tijd en daarna (1940) tevens werkzaam aan deze universiteit. Ook studeer-

de hij hier aan het Presbyterian seminarie bij Knox Church, een laat-gotisch bouwwerk op de hoek van de universiteits-campus, waar ik onlangs nog wel geconcentreerd heb. Zijn belangstelling voor tijdslogica was zelfs religieus gemotiveerd. In de traditie van een lange filosofische discussie over voorbeschikking en zelfbeschikking, over determinisme en vrije wil, vond Prior de modale tijdslogica uit. In deze logica kunnen we bijvoorbeeld precies uitdrukken dat tijd vertakt naar de toekomst (*branching time*), en hiermee is vrije wil mogelijk: de toekomst ligt nu niet vast. Modale tijdslogica heeft een hoge vlucht genomen, bijvoorbeeld in het werk van Johan van Benthem en dat van Amir Pnueli. Pnueli deed fundamenteel onderzoek naar het specificeren en verifiëren van *distributive systems* (systemen van parallel opererende processen) met tijdslogica.

Nu nog even terug naar wat persoonlijker activiteiten. Vorig jaar januari was ik betrokken bij het jaarlijkse zomerkamp van de Nieuw-Zeelandse wiskunde-olympiade. Dit was leuk! Een en ander vond plaats in een meisjeskostschool in Christchurch, allemaal *erg* Harry Potter. Gedurende een week werden in dat kamp zo'n vijftiental scholieren onder leiding van een groepje Nieuw-Zeeuwse wiskundigen, waaronder mijn collega Michael Albert, voorbereid op en geselecteerd voor de internationale olympiade. In die van 2002 in Dunblane, Schotland, heeft de Nieuw-Zeeuwse Simon Marshall zelfs een gouden medaille weten te behalen!

Naast alle wetenschappelijke zaken is het verder ook erg goed toeven in Dunedin. Tot mijn geliefde uitjes behoren fietsen naar de albatroskolonie vlakbij Dunedin, of naar Naseby, in de Maniototo, een enorm leeg gebied diep in het binnenland, waar je 's winters kunt schaatsen. En op vier uur auto-afstand zijn de echt hogere bergen richting westkust, met toppen tot 3500 meter. In 'Fiordland', inderdaad sprekend de Noorse fjordenkust, heb ik vorig jaar met Pasen nog met twee maten van de Otago Tramping and Mountaineering Club (OTMC) een vijfdaagse tocht gemaakt, zonder onderweg ook maar iemand tegen te komen. Waar kan dat nog in Europa? Ook muzikaal is Dunedin voor mij, als cellist, erg interessant. Los van een incidenteel concert zoals in het voornoemde Knox Church, zit ik nu tot mijn groot genoegen ook in de *Southern Sinfonia*, het lokale semi-professionele symfonie-orkest. Zo wordt een rustige werkomgeving toch nog druk.



Peter Teunissen

Faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen
Technische Universiteit Delft
Postbus 5048
2600 GA Delft
p.j.g.teunissen@citg.tudelft.nl

Vakantiecursus 2003

GPS and integer estimation

Het Global Positioning System (GPS) is een wereldwijd plaatsbepalingssysteem op basis van satellieten. De eerste plannen en ontwerpen voor het systeem dateren uit de vroege jaren zeventig in de vorige eeuw; reeds in februari van 1978 werd de eerste GPS-satelliet gelanceerd. De nominale constellatie omvat 24 satellieten, die elk in ongeveer 12 uur om de aarde cirkelen. Daardoor kunnen overal ter wereld, doorgaans minstens vier satellieten tegelijkertijd waargenomen worden. Peter Teunissen, hoogleraar mathematische geodesie en positiebepaling aan de Technische Universiteit Delft verzorgde in de zomer van 2003 colleges over Global Positioning Systems in het kader van de, door het CWI georganiseerde, vakantiecursus voor wiskundeleraren.

The Global Positioning System (GPS) nowadays is used for a whole variety of positioning and navigation applications. These applications range from navigating your private sailboat to determining the millimeter movements of the earth's tectonic plates. For the very high-accuracy applications of GPS one needs very precise range information. These precise ranges for positioning with GPS are obtained from carrier phase measurements. These measurements of range inherently contain unknown integer ambiguities to account for the mismatch of a whole number of wavelengths or cycles. This contribution describes the problem of GPS carrier phase ambiguity resolution, discusses some relevant elements of integer estimation theory and reviews some of the high precision positioning applications that come into reach when the integer carrier phase ambiguities can be resolved quickly and correctly.

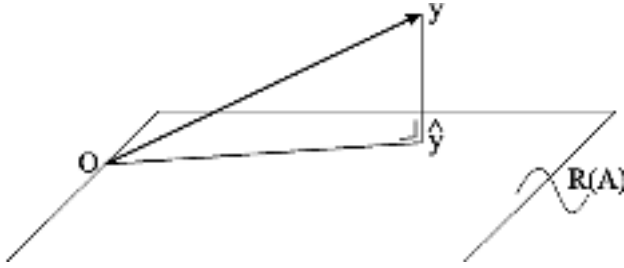
Redundant measurements

As in other physical sciences, empirical data are used in geodesy to make inferences so as to describe the physical reality. Many such problems involve the determination of a number of unknown parameters which bear a linear or linearized relationship to the set of data. In order to be able to check for errors or to reduce for the effect these errors have on the final result, the collected data often exceed the minimum necessary for a unique solution (redundant data). As a consequence of measurement uncertainty, redundant data are usually inconsistent in the sense that each sufficient subset yields different results from another subset. Hence, redundancy generally leads to an inconsistent system of linear(ized) equations, say

$$y \cong Ax \quad (1)$$

where vector y contains the m observations, vector x the n unknown parameters. The $m \times n$ matrix A relates the observations to the parameters. Redundancy of the above system is defined as $m - \text{rank}A$, which in case of a full rank matrix simplifies to $m - n$, the difference between the number of observations and the number of unknown parameters.

The above inconsistent system is without additional criteria not uniquely solvable. The problem of solving an inconsistent system of equations has attracted the attention of leading scientists in the middle of the 18th century. Historically, the first methods of combining redundant measurements originate from studies in



Figuur 1 Least-squares estimation implies a (n orthogonal) projection of the observation vector y onto the plane spanned by the columns of matrix A . Example with three observations and two unknown parameters.

geodesy and astronomy, namely from the problem of determining the size and shape of the earth, and the problem of finding a mathematical representation of the motions of the Moon. Since its discovery almost 200 years ago, the method of least-squares has been and still is too a large extent one of the most popular methods of solving an inconsistent system of equations. Although the method of least-squares may seem 'natural' for a student in modern times, its discovery evolved only slowly from earlier methods of combining redundant observations [1]

GPS positioning basically is determining the location of a (user) receiver with respect to satellites of which the locations (orbits) are known. This determination takes place by measuring distances, and from a geometric point of view three measurements would suffice to determine the three coordinates of the user (fortunately we know on which side of the satellite configuration the earth is located). The simplest example of (1) in case of GPS is therefore when distances are measured from an unknown GPS receiver position to more than three GPS satellites of which the positions are known. Since the distance from the unknown receiver position r to the known position of satellite s is a nonlinear function of the unknown position coordinates,

$$l_r^s = \sqrt{(x^s - x_r)^2 + (y^s - y_r)^2 + (z^s - z_r)^2} \quad (2)$$

the common approach is to approximate this relation by a linearized version, that is, developing the nonlinear relation in a Taylor series with zeroth and first order terms only, using good approximate values for the unknown parameters. As a result the (increments of the) observed distances are collected in vector y , the (increments of the) three unknown coordinates in vector x and the partial derivatives in matrix A . In reality the equations are far more complicated than (2) due to the fact that one also has to account for clock errors, atmospheric delays and orbital errors.

Least-squares

Around 1800 Legendre and Gauss at the same time (most likely independently), invented the method of least-squares for solving an inconsistent system of equations. The least-squares solution to (1) reads

$$\hat{x} = (A^T Q_y^{-1} A)^{-1} A^T Q_y^{-1} y \quad (3)$$

with Q_y^{-1} being the weight matrix. This solution is obtained by first adding an unknown error vector e to (1), giving the consistent but undetermined system $y = Ax + e$, and then minimizing the

weighted norm of e , $\|e\|_{Q_y}$, as function of x . The least-squares estimator has various desirable properties. When the positive definite matrix Q_y is chosen as the variance-covariance matrix of the observations, the least-squares estimator has the smallest variance (best possible precision) of all linear unbiased estimators.

The geometric interpretation of what least-squares does to the observations is shown in figure 1. The inconsistency between observations on one hand and model (with unknown parameters) on the other is removed by orthogonal projection. Vector $\hat{y} = A\hat{x}$ eventually lies in the plane or linear manifold spanned by the columns of matrix A (indicated by $R(A)$). The orthogonal projection realizes shortest distance between the original observation values y and the adjusted ones $\hat{y}$; the observation values are modified as little as possible, though satisfying the assumed model afterwards. This follows from interpreting the least-squares estimation principle as the principle of least distance

$$\min_x \|y - Ax\|_{Q_y}^2. \quad (4)$$

The (squared and weighted) distance between y and $\hat{y} = A\hat{x}$ is minimized.

In order to evaluate the quality of the least-squares solution in a probabilistic sense, we need the probability density function (PDF) of $\hat{x}$. Since $\hat{x}$ of (3) is a linear function of y , the least-squares estimator has a Gaussian distribution whenever y is Gaussian distributed. The PDF of the unbiased least-squares estimator $\hat{x}$ can therefore be uniquely characterized by means of the variance-covariance matrix of $\hat{x}$. With Q_y being the variance-covariance matrix of the observations, application of the error propagation law to (3) gives the variance-covariance matrix of the estimated parameters as

$$Q_{\hat{x}} = (A^T Q_y^{-1} A)^{-1} \quad (5)$$

This matrix can be used to evaluate the precision of the parameter estimators, as for instance the position coordinates.

GPS carrier phase observable

GPS observations of distance or range are obtained by measuring signal travel-times (from satellite to receiver) and multiplying these by the speed of light. Two types of distance measurements are employed: pseudo range code and carrier phase. The code observation is based on the (binary) code the satellite modulates onto the signal carrier; the distance can be measured virtually unambiguously. For the carrier phase, the receiver measures the difference in phase between the carrier wave received from the satellite and the reference carrier wave it generated itself. The (physical) phase difference reads

$$\psi_r^s = \phi_r - \phi^s.$$

With some simplifying assumptions, the phase of a carrier wave at some epoch t equals frequency f multiplied by time t : $\phi = ft$. The receiver compares the reference carrier at time of observation t_r with the carrier received from the satellite, which was generated a little earlier in order to be 'in time' at the receiver, namely at $t_r - \tau_r^s$, where τ_r^s is the signal travel time from satellite to re-



Figure 2 A GPS receiver and antenna permanently installed for precisely monitoring motions of the earth's crust. Site Ranchita in California in the US. Photo taken from album at <http://www.scign.org/>

ceiver.

The above phase difference becomes

$$\psi_r^s = f\tau_r^s,$$

and when multiplied by wavelength $\lambda = \frac{c}{f}$, $\lambda\psi_r^s = c\tau_r^s = l_r^s$, the distance in meters is obtained; it equals the travel time pre-multiplied by the speed of light c , exactly as with the code observation.



Figure 3 Measurement of phase on the continuous carrier wave transmitted by the satellite. The satellite keeps on transmitting the carrier wave, cycle after identical cycle.

As a consequence of carrying out measurements on a (monotone) continuous carrier wave, the receiver can not distinguish one cycle from another. The satellite keeps on transmitting the carrier wave, in principle cycle after identical cycle, see figure 3.

At some epoch in time the receiver simply starts outputting the measured *fractional* difference in phase: $\text{frac}(\psi_r^s) \in [0, 1)$ cycle. The full (physical) phase difference is then decomposed into

$$\psi_r^s = \underbrace{\text{int}(\psi_r^s)}_{N_r^s} + \underbrace{\text{frac}(\psi_r^s)}_{\phi_r^s}.$$

The observed (fractional) phase difference ϕ_r^s (times the wavelength) does thereby not equal the distance from satellite to receiver l_r^s , but equals this distance apart from an integer number of wavelengths

$$\lambda\phi_r^s = l_r^s - \lambda N_r^s.$$

As a consequence the vector x in (1) will, next to the unknown receiver coordinates, now also contain unknown *integer* cycle ambiguities N_r^s .

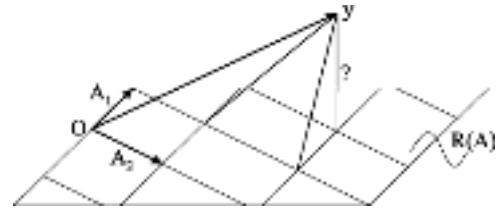


Figure 4 Least-squares with integer parameters: possible solutions for the vector of observations form a grid in the column-space of matrix A (A_1 and A_2 are two columns of matrix A); the solution is no longer allowed to lie anywhere in the plane $R(A)$.

Integer least-squares

The least-squares solution (3) is obtained from solving (4), where x is allowed to vary over the whole n -dimensional space of *real* numbers. In case of GPS however, when use is made of the carrier phase observations, the vector of unknown parameters x consists of both real-valued and integer valued parameters (real-valued coordinates and integer-valued carrier phase ambiguities). We therefore need to modify the solution (3) so as to take the integerness of some of the parameters into account. To keep the discussion simple, it will be assumed here that *all* parameters in vector x are integer-valued. Due to the integerness of the parameters, orthogonal projection of y will now not do the job properly, see figure 4. Nevertheless one can start with 'ordinary' least-squares as a first step, see figure 5. The solution so obtained for the unknown parameters will be real-valued and is usually referred to as the 'float' solution.

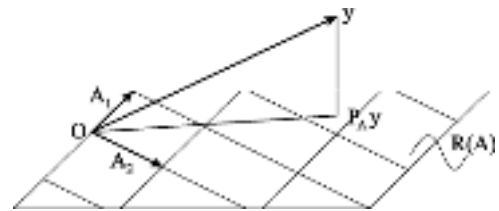


Figure 5 Least-squares with integer parameters: the first step consists of 'ordinary' least-squares (orthogonal projection); the solution $\hat{x}$ for the parameters will consist of real-valued numbers.

To apply the least-squares principle (4), but now under the condition that the parameters in x are all integers, a second step has to be carried out. Since the first step projects orthogonally to the plane $R(A)$, the second step takes place *in* the plane. From the orthogonal decomposition

$$\|y - Ax\|_{Q_y}^2 = \|y - \hat{y}\|_{Q_y}^2 + \|\hat{y} - Ax\|_{Q_y}^2 \quad (6)$$

it follows that the second step amounts to solving the minimization problem

$$\min_x (\hat{y} - Ax)^T Q_y^{-1} (\hat{y} - Ax) = \min_x (\hat{x} - x)^T A^T Q_y^{-1} A (\hat{x} - x) = \min_x (\hat{x} - x)^T Q_x^{-1} (\hat{x} - x) \quad (7)$$

for x being integer, where in the last equation (5) has been used. This minimization can also be visualized in the parameter space, see figure 6, instead of in the observation space as in figures 1 and 4.

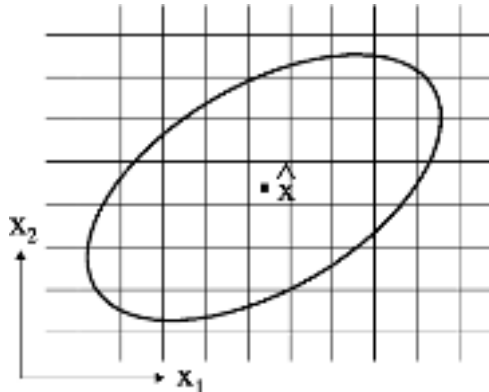


Figure 6 Least-squares with integer parameters: in the second step the integer solution for x is sought that is *closest* to the real-valued solution $\hat{x}$ of the first step; ‘closest’ is to be measured in the metric of the variance-covariance matrix $Q_{\hat{x}}$; the quadratic form (7), set equal to a constant, is represented by the ellipse in this example with two ambiguities x_1 and x_2 .

The integer least-squares principle has been applied very successfully to GPS ambiguity resolution. By the presence of the variance-covariance matrix $Q_{\hat{x}}$ in (7), the precision and correlation of the individual real-valued ambiguity estimates is properly and fully exploited. In contrast to the ‘ordinary’ least-squares solution (3), there does not exist an analytical solution to (7). In practice a search over possible integer solutions has to be carried out. The space of integer solutions is restricted by limiting the squared and weighted distance in (7) to a convenient value. As a result, the volume of the corresponding ellipse (or hyper-ellipsoid in higher dimensions) has to be searched through in order to find the integer least-squares solution of x .

When the ambiguities of the first step are of poor precision and at the same time highly correlated, the ellipse or ellipsoid gets very elongated and narrow. As a consequence the discrete search may get computationally inefficient. For computational efficiency the quadratic form (7) can be integer transformed, so that the resulting ellipsoid becomes more sphere-like and the transformed ambiguities become less correlated [2–3].

Alternative integer estimators

Instead of the integer least-squares estimator one can also think of alternative integer estimators. Starting from the ‘float’ solution, such an estimator $\check{x} = F(\hat{x})$ will consist of a mapping $F : R^n \mapsto Z^n$ from the n -dimensional space of real numbers to the n -dimensional space of integers. Due to the discrete nature of Z^n , the map F will not be one-to-one. This implies that different real-valued ambiguity vectors will be mapped to the same integer vector. One can therefore assign a subset $S_z \subset R^n$ to each integer vector $z \in Z^n$:

$$S_z = \{x \in R^n \mid z = F(x)\}, \quad z \in Z^n \quad (8)$$

The subset S_z contains all real-valued ambiguity vectors that will be mapped by F to the same integer vector $z \in Z^n$. This subset is referred to as the *pull-in-region* of z . It is the region in which all am-

biguity ‘float’ solutions are pulled to the same ‘fixed’ ambiguity vector z .

Since the pull-in-regions define the integer estimator completely, one can define classes of integer estimators by imposing various conditions on the pull-in-regions. One such class is given as follows [4].

An integer estimator is said to be *admissible* if

$$\begin{aligned} (i) & \bigcup_{z \in Z^n} S_z = R^n \\ (ii) & S_{z_1} \cap S_{z_2} = \{0\}, \quad \forall z_1, z_2 \in Z^n, z_1 \neq z_2 \\ (iii) & S_z = z + S_0, \quad \forall z \in Z^n \end{aligned} \quad (9)$$

This definition is motivated as follows. Each one of the above three conditions describe a property of which it seems reasonable that it is possessed by an arbitrary integer ambiguity estimator. The first condition states that the pull-in-regions should not leave any gaps and the second that they should not overlap. The absence of gaps is needed in order to be able to map any ‘float’ solution $\hat{x} \in R^n$ to Z^n , while the absence of overlaps is needed to guarantee that the ‘float’ solution is mapped to just one integer vector. Note that the pull-in-regions are allowed to have common boundaries. This is permitted if we assume to have zero probability that $\hat{x}$ lies on one of the boundaries. This will be the case when the probability density function (PDF) of $\hat{x}$ is continuous.

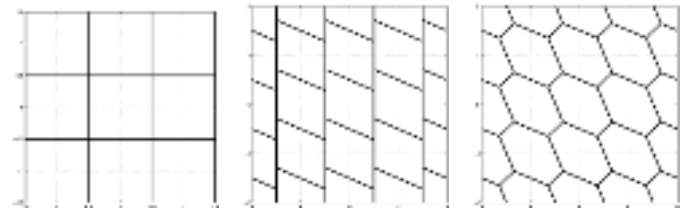


Figure 7 Two-dimensional pull-in regions of rounding, bootstrapping and integer least-squares.

The third and last condition follows from the requirement that $F(x + z) = F(x) + z, \forall x \in R^n, z \in Z^n$. Also this condition is a reasonable one to ask for. It states that when the ‘float’ solution is perturbed by $z \in Z^n$, the corresponding integer solution is perturbed by the same amount. This property allows one to apply the *integer remove-restore* technique: $F(\hat{x} - z) + z = F(\hat{x})$. It therefore allows one to work with the fractional parts of the entries of $\hat{x}$, instead of with its complete entries.

There exist various admissible integer estimators. The simplest integer map is the one that corresponds to integer rounding. In this case the integer vector is obtained from a rounding of each of the entries of $\hat{x}$ to its nearest integer. Since component-wise rounding implies that each real-valued ambiguity estimate $\hat{x}_i, i = 1, \dots, n$, is mapped to its nearest integer, the absolute value of the difference between the two is at most $\frac{1}{2}$. The subsets $S_{R,z}$ that belong to this integer estimator are therefore given as

$$S_{R,z} = \bigcap_{i=1}^n \left\{ \hat{x} \in R^n \mid |\hat{x}_i - z_i| \leq \frac{1}{2} \right\}, \quad \forall z \in Z^n \quad (10)$$

The subset $S_{R,z}$ is an n -dimensional cube, with sides of length 1 and centered at the grid point z .

Another relatively simple integer ambiguity estimator is the integer bootstrapped estimator. This estimator can be seen as a generalization of the previous one. It still makes use of integer rounding, but it also takes some of the correlation between the ambiguities into account. The bootstrapped estimator results from a sequential conditional least-squares adjustment and is computed as follows. If n ambiguities are available, one starts with the first ambiguity $\hat{x}_1$, and rounds its value to the nearest integer. Having obtained the integer value of this first ambiguity, the real-valued estimates of all remaining ambiguities are then corrected on the basis of their correlation with the first ambiguity. Subsequently the second, but now corrected, real-valued ambiguity estimate is rounded to its nearest integer. Having obtained the integer value of the second ambiguity, the real-valued estimates of all remaining $n - 2$ ambiguities are again corrected, but now on the basis of their correlation with the second ambiguity. This process of rounding and correcting is continued until all ambiguities are taken care of.

With c_i denoting the i -th canonical unit vector having a 1 as its i -th entry, the pull-in-regions $S_{B,z}$ that belong to the bootstrapped estimator can be shown to be given as

$$S_{B,z} = \bigcap_{i=1}^n \left\{ \hat{x} \in \mathbb{R}^n \mid |c_i^T L^{-1}(\hat{x} - z)| \leq \frac{1}{2} \right\}, \forall z \in \mathbb{Z}^n \quad (11)$$

with matrix L being the unit lower triangular matrix of the triangular decomposition of $Q_{\hat{x}}$. Note that these pull-in-regions reduce to the ones of (10) when L becomes diagonal. This is the case when the ambiguity variance-covariance matrix is diagonal. In that case the two integer estimators $\check{x}_R$ and $\check{x}_B$ are identical.

The third admissible estimator of which the pull-in-region will be given is the integer least-squares estimator. By again using the LDL^T -decomposition of $Q_{\hat{x}}$ the least-squares' pull-in-region reads

$$S_{LS,z} = \bigcap_{c_i \in L^{-1}(\mathbb{Z}^n)} \left\{ \hat{x} \in \mathbb{R}^n \mid |c_i^T D^{-1} L^{-1}(\hat{x} - z)| \leq \frac{1}{2} c_i^T D^{-1} c_i \right\} \quad (12)$$

Note that (12) and (11) become identical when the matrix entries of L^{-1} are all integer. This is the case when L is an admissible ambiguity transformation.

As an example of the three types of pull-in regions consider figure 7. These three types of pull-in region correspond with the 2-by-2 variance-covariance matrix

$$Q_{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 0.0847 & -0.0364 \\ -0.0364 & 0.0865 \end{pmatrix}$$

The ambiguity success rate

The quality of the integer ambiguity estimator is particularly of interest in case of GPS. One therefore needs the probability mass function (S) of $\check{x}$. It can be obtained as follows. Using the concept of the pull-in-region, the integer estimator is defined as $\check{x} = z \Leftrightarrow \hat{x} \in S_z$. Hence, for the probability masses one has $P(\check{x} = z) = P(\hat{x} \in S_z)$. With the PDF of $\hat{x}$ given as $p_{\hat{x}}(x)$, the PMF of $\check{x}$ follows as

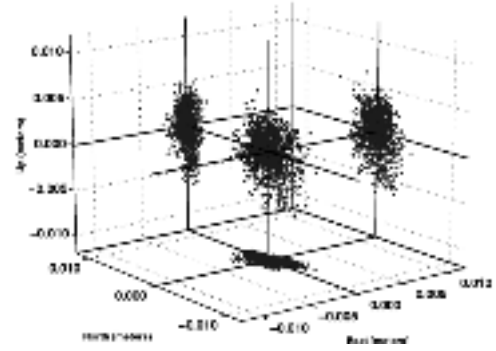


Figure 8 Example of the repeatability of GPS positions after resolving the ambiguities by means of integer least-squares. The three-dimensional position is obtained from a single epoch of observations (so-called instantaneous positioning). The experiment has been carried out 1200 times, and shown are all 1200 ambiguities-fixed position solutions. The measurement noise in the carrier phase observation is at the few millimeter level and the consequent spread in position is clearly below 1 centimeter.

$$P(\check{x} = z) = \int_{S_z} p_{\hat{x}}(x) dx, \forall z \in \mathbb{Z}^n \quad (13)$$

The *ambiguity success rate* is defined as the probability of correct integer estimation $P(\check{x} = x)$. Note that the PMF (13) as well as the success rate still depend on the type of pull-in-region and thus on the type of integer estimator chosen. Changing the geometry of the pull-in-region will change both the PMF and the ambiguity success rate. It is therefore of interest to know which integer estimator maximizes the ambiguity success rate. The answer is given by the following theorem [4]:

Theorem. Let the PDF of $\hat{x}$ be elliptically contoured and the integer least-squares estimator be given as

$$\check{x}_{ILS} = \arg \min_{z \in \mathbb{Z}^n} \|\hat{x} - z\|_{Q_{\hat{x}}}^2$$

Then

$$P(\check{x}_{ILS} = x) \geq P(\check{x} = x) \quad (14)$$

for any admissible estimator $\check{x}$.

This theorem gives a probabilistic justification for using the *integer* least-squares estimator. It applies to GPS ambiguity resolution for which the PDF $p_{\hat{x}}(x)$ is often assumed to be a multivariate normal distribution. For GPS ambiguity resolution one is thus better off using the integer least-squares estimator than any other admissible integer estimator, such as integer rounding or integer bootstrapping.

Applications

Once the integer carrier phase cycle ambiguity has been resolved, the phase observation turns into a direct measurement of distance. These phase observations possess millimeter precision and consequently the user receiver position can be determined with a similar level of precision, see figure 8.

Already early in the history of GPS positioning, the application of surveying topography emerged. By taking the GPS receiver to

sites and features on the earth's surface, their locations can be determined and consequently be mapped. Today, GPS positioning is an important tool in producing and maintaining road-maps, town-plans and precise cadastral maps (and databases).

In the early days, precise positions got available only after considerable time spans (of one or several hours). By including the integer constraints on the ambiguities and developing efficient ways of solving the integer least-squares problem, high precision positions become available virtually immediately, see also figure 8. The ambiguities have been demonstrated to be resolved correctly using just one epoch (second) of observations, thus greatly improving surveying productivity. At present the position can be determined directly in the field, by Real-Time Kinematic (RTK) GPS, see figure 9.



Figuur 9 Real-Time Kinematic (RTK) GPS surveying: the surveyor directly 'digitizes' the points of interest in the field, by holding the antenna accurately in place for just a few seconds.

Similar equipment and algorithms can be used for high precision navigation of moving vehicles on land, vessels at sea and aircraft in the air. Challenging applications are vessel guidance through narrow straights with critical clearance and landing aircraft in conditions of poor visibility.

Precise GPS positioning anywhere on earth is of great benefit also to earth sciences. Tectonic plates may move by several centimeters a year with respect to each other. Such motions of the earth's crust can be monitored with GPS at the required level of precision. This is of particular interest in areas with considerable seismic activity. For instance in California in the United States, with emphasis on the greater Los Angeles metropolitan region, an array of GPS receivers has been installed — under the name of Southern California Integrated GPS Network (SCIGN) — to study geodynamical phenomena. Over 200 locations are covered and GPS receivers are in operation 24 hours a day, 7 days a week. Figure 2 shows an example of a station of the SCIGN.

Conclusion

In this article the problem of the integer cycle ambiguity of the GPS carrier phase observations for ranging has been addressed. The ambiguities are resolved using the integer least-squares principle thus allowing very precise and fast GPS positioning. Since various details were skipped in the above presentation, the interested reader is referred to the many textbooks available on GPS positioning [5–9].

Acknowledgment

Figure 2 courtesy of the US Geological Survey and figure 9 courtesy of M.J.M. Kremers. Thanks also to Dr. C.C.J.M. Tiberius for the assistance in writing this paper.

References

- 1 Teunissen, P.J.G. (2000): A brief account on the early history of adjusting geodetic and astronomical observations. *De Hollandse Cirkel*, 2(1/2), pp. 12–17.
- 2 Teunissen, P.J.G. (1993): *Least-squares estimation of the integer GPS ambiguities*. Invited lecture. Section IV Theory and Methodology, IAG General Meeting. Beijing, China. August. Also in LGR-series No. 6, Delft.
- 3 Lenstra, H.W. (1981): Integer programming with a fixed number of variables. University of Amsterdam, Dept. of Mathematics, Report 81-3.
- 4 Teunissen, P.J.G. (1999): An optimality property of the integer least-squares estimator. *Journal of Geodesy*, 73:587–593.
- 5 Leick, A. (1995): *GPS Satellite Surveying*. 2nd ed. John Wiley, New York.
- 6 Strang, G. and K. Borre (1997). *Linear algebra, geodesy, and GPS*. Wellesley-Cambridge Press.
- 7 Teunissen, P.J.G. and A. Kleusberg (1998): *GPS for Geodesy*. 2nd enlarged edition, Springer Verlag.
- 8 Hofmann-Wellenhof, B., H. Lichtenegger, J. Collins (2001): *Global Positioning System: Theory and Practice*. 5th ed. Springer Verlag.
- 9 Misra, P. and P. Enge (2001): *Global Positioning System: Signals, Measurements and Performance*, Ganga-Jamuna Press.

Arno van den Essen

Subfaculteit Wiskunde
Katholieke Universiteit
Postbus 9010
6500 GL Nijmegen
essen@math.kun.nl

Beroemde problemen

Rondom het Jacobivermoeden

Zoals elke levende tak van wetenschap kent wiskunde grote open problemen. Beroemd is de Claylijst van zeven Millennium Prize Problems uit het jaar 2000; het oplossen van elk ervan levert een bedrag van een miljoen dollar op. Een andere lijst, met 18 problemen (waarvan er 4 ook op de Claylijst staan) werd opgesteld door Steve Smale ter gelegenheid van de zestigste verjaardag van V. Arnold in 1997 en gepubliceerd in de *Mathematical Intelligencer* in 1998. Buiten genoemde lijsten hebben we het Goldbachvermoeden, het Collatz-probleem, het abc-vermoeden en nog veel meer. Als onderdeel van een reeks artikelen over dergelijke problemen geeft Arno van den Essen, expert op het gebied van probleem 16 uit de lijst van Smale, uitleg, achtergronden en verbanden van dit Jacobiprobleem.

Zij $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ een veeltermafbeelding, dat wil zeggen iedere F_i is een veelterm in n variabelen over $\mathbb{C}$. Hoe kunnen we nagaan of zo'n F een inverse heeft? A priori kan je die vraag op verschillende manieren interpreteren: zoeken we naar een inverse in verzamelingentheoretische zin, of willen we een inverse die evenals F een holomorfe afbeelding van $\mathbb{C}^n$ naar $\mathbb{C}^n$ definieert, of willen we, sterker nog, een inverse die zelf ook weer een veeltermafbeelding is? Dit blijkt niet uit te maken: een stelling van A. Białynicki-Birula en M. Rosenlicht uit 1962 zegt dat als F injectief is dan is hij vanzelf inverteerbaar en de inverse is weer een veeltermafbeelding! Als F inverteerbaar is, zeg met inverse G ,

dan volgt uit $G \circ F = x$ en de kettingregel dat $(JG)(F)JF = I_n$, waarbij $JF = (\frac{\partial F_i}{\partial x_j})$ de Jacobimatrix van F is. Door determinanten te nemen zien we dat $\det(JG)(F)$ en $\det JF$ veeltermen zijn met product 1, waaruit volgt dat $\det JF \in \mathbb{C}^*$. Omgekeerd hebben we

Het Jacobivermoeden

Als $\det JF \in \mathbb{C}^*$, dan is F inverteerbaar.

Het Jacobivermoeden werd voor het eerst geformuleerd in 1939. De naam komt af van de in de formulering benodigde determinant van de Jacobimatrix. C.G.J. Jacobi (1804–1851) zelf heeft voorzover bekend nooit iets met het vermoeden dat zijn naam draagt, te maken gehad. Er zijn honderden publicaties over dit probleem en in 1998 verscheen het als probleem 16 op een door Steve Smale samengestelde lijst van 18 beroemde problemen voor wiskundigen van de eenentwintigste eeuw. Het Jacobivermoeden is nog steeds open voor alle $n \geq 2$. Het doel van dit artikel is enkele equivalente formuleringen en verrassende verbanden met andere vermoedens te bespreken.

Enkele 'klassieke' resultaten

Het Jacobivermoeden, van nu af kortweg met JV aangeduid, werd voor het eerst geformuleerd door O. Keller in 1939. In plaats van veeltermafbeeldingen met coëfficiënten in $\mathbb{C}$ bestudeerde hij die

met coëfficiënten in $\mathbf{Z}$. Hij bewees dat het JV waar is als je weet dat F een inverse heeft die uit rationale functies bestaat; met andere woorden als

$$\mathbf{C}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{C}(F_1, \dots, F_n). \quad (1)$$

Dit resultaat werd in de jaren vijftig en zestig gevolgd door een aantal foutieve bewijzen: eerst van Engel (een student van Keller), daarna drie keer Segre en tenslotte in 1961 Gröbner die een puur algebraïsch 'bewijs' gaf. Positieve resultaten waren er natuurlijk ook: zo bewees T. Moh in 1983 dat voor $n = 2$ het JV waar is als F_1 en F_2 beiden graad ≤ 100 hebben. Direct hierna kon op vele plaatsen het gerucht gehoord worden, dat er voor $n = 2$ een tegenvoorbeeld was gevonden, met een F_1 van graad 101(!). Twee jaar later bewezen H. Appelgate en H. Onishi het 2-dimensionale JV voor het geval dat de graad van F_1 of F_2 een product van ten hoogste twee priemgetallen is. Het eerste resultaat in dimensie $n > 2$ na dat van Keller is afkomstig van L. Campbell (1973): hij generaliseerde Keller's stelling door aan te tonen dat (1) al volgt als $\mathbf{C}(F_1, \dots, F_n) \subset \mathbf{C}(x_1, \dots, x_n)$ een Galoisuitbreiding is. Zeven jaar later toonde S. Wang aan dat het JV waar is als iedere F_i graad ≤ 2 heeft. Een zeer kort bewijs hiervoor is afkomstig van S. Oda, dezelfde die op 8 juli 2003 een foutief 'bewijs' op het internet zette.

Hier Oda's argument: stel $\det JF \in \mathbf{C}^*$ en $\deg F_i \leq 2$ voor alle i . Zoals al opgemerkt is het voldoende te laten zien dat F injectief is. Neem daarom aan dat $F(a) = F(b)$ voor zekere $a, b \in \mathbf{C}^n$. Definieer $G(x) := F(x+a) - F(a)$ en $c := b-a$. Dan $\deg G_i \leq 2$ voor alle i en $G(0) = 0 = G(c)$. Merk op dat $JG(x) = JF(x+a)$, dus $\det JG \in \mathbf{C}^*$. Schrijf nu $G = G_{(1)} + G_{(2)}$, zijn ontwikkeling in homogene componenten. Door $G(tc) = tG_{(1)}(c) + t^2G_{(2)}(c)$ te differentiëren naar t zien we

$$G_{(1)}(c) + 2tG_{(2)}(c) = \frac{d}{dt}G(tc) = JG(tc) \cdot c.$$

Hier $t = \frac{1}{2}$ invullen levert $0 = G(c) = JG(c/2) \cdot c$. Omdat $\det JG(c/2) \neq 0$, volgt $c = 0$, dus F is injectief.

Nu zal de lezer misschien denken dat dit wel een zeer speciaal geval van het JV is. Dat is zo, maar ongeveer gelijktijdig met Oda's resultaatje werd onafhankelijk van elkaar door A. Yagzhev en door H. Bass, E. Connell en D. Wright de volgende verrassende reductiestelling bewezen: het is voldoende het JV te bewijzen voor veeltermafbeeldingen F met $\deg F_i \leq 3$ voor alle i . Preciezer, het is voldoende afbeeldingen van de vorm $F = x + H = (x_1 + H_1, \dots, x_n + H_n)$ te bekijken waarbij iedere H_i nul of homogeen van de graad 3 is. We noemen zulke F 's cubisch homogeen. Voor $n = 3$ bewees D. Wright het cubisch homogeen geval in 1993 en het $n = 4$ geval werd een jaar later door E. Hubbers in z'n Nijmeegse afstudeerwerk bewezen (gebruik makend van een computer). Het bewijs van bovengenoemde reductiestelling is gebaseerd op de stabilisatie filosofie uit de K-theorie: een probleem wordt eenvoudiger als je het opvat in een hogere dimensie. Voortbordurend op deze gedachte bewees J. Yu in 1993 een tweetal opzienbarende resultaten. Hij bestudeerde veeltermafbeeldingen met reële coëfficiënten. Preciezer, zij $F = x + F_{(2)} + \dots + F_{(d)} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ een veeltermafbeelding met reële coëfficiënten, waarbij $F_{(i)}$ de homogene component van F is van graad i . Noem F positief (respectievelijk negatief) als alle niet nul coëfficiënten die in

de $F_{(i)}$ optreden positief (respectievelijk negatief) zijn. Yu toonde aan dat het JV waar is als voor iedere $n \geq 2$ en iedere positieve $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ met $\det JF = 1$, F injectief is. Vervolgens liet hij zien dat alle negatieve F 's met $\det JF = 1$ inverteerbaar (en dus injectief) zijn! Yu's resultaten maakten deel uit van een mislukte poging het JV te bewijzen: hij probeerde het geval van positieve F 's te herleiden tot dat van negatieve F 's. Echter steeds kwam hij ergens weer een minteken tekort. Deze poging gaf mij uiteindelijk meer aanleiding om aan het JV te twijfelen, dan het te geloven!

Het reële Jacobivermoeden

In het begin van de jaren zeventig werd het reële JV ingevoerd:

$RJV(n)$

Zij $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ een veeltermafbeelding waarvoor geldt dat $\det JF(x) \neq 0$ voor alle $x \in \mathbf{R}^n$. Dan is F injectief.

Merk op dat als we in dit vermoeden $\mathbf{R}$ door $\mathbf{C}$ vervangen, dan krijgen we het JV terug: de conditie $\det JF(z) \neq 0$ voor alle $z \in \mathbf{C}^n$ betekent dat $\det JF \in \mathbf{C}^*$ en zoals opgemerkt is injectiviteit van een veeltermafbeelding van $\mathbf{C}^n$ naar $\mathbf{C}^n$ equivalent met de inverteerbaarheid ervan. Maar het reële JV is meer dan een reëel analogon van het JV, het impliceert ook het JV. Preciezer, er geldt $RJV(2n) \Rightarrow JV(n)$. Immers, door $\mathbf{C}^n$ op te vatten als reële vectorruimte van dimensie $2n$, geeft een veeltermafbeelding $F : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ ook een veeltermafbeelding $\tilde{F} := \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$. Is bijvoorbeeld $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ de afbeelding gegeven door $F(z) = z^2$, dan is $\tilde{F}$ de afbeelding van $\mathbf{R}^2$ naar $\mathbf{R}^2$ gegeven door $\tilde{F}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Er geldt dat $\det \tilde{F} = |\det JF|^2$. Zij $F : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ een veeltermafbeelding met $\det JF \in \mathbf{C}^*$. Dan is $\det \tilde{F} \in \mathbf{R}^*$. Uit $RJV(2n)$ volgt dat $\tilde{F}$ en dus ook F injectief is. Bijgevolg is F inverteerbaar, en geldt $JV(n)$!

Via deze implicatie het JV bewijzen werkt evenwel niet: in 1994 vond S. Pinchuk het volgende tegenvoorbeeld voor $RJV(2)$, en daarmee voor iedere $RJV(n)$ met $n \geq 2$:

Zij $t = xy - 1$, $h = t(xt + 1)$, $f = (xt + 1)^2(\frac{h+1}{x})$, $p = f + h$ en $q = -t^2 - 6th(h + 1) - 170fh - 91h^2 - 195fh^2 - 69h^3 - 75h^3f - \frac{75}{4}h^4$. Dit zijn allemaal veeltermen. Voor $F := (p, q)$ is $F(1, 0) = F(-1, -2) = (0, -1)$ en $\det JF = t^2 + (t + f(13 + 15h))^2 + f^2 > 0$ voor alle x, y in $\mathbf{R}$.

Dynamische systemen en het Jacobivermoeden

Stabiliteitstheorie van autonome stelsels differentiaalvergelijkingen startte met het pionierswerk van Lyapunov in zijn proefschrift rond 1892. Hij bewees onder meer dat als $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ een $\mathbf{C}^1$ -vectorveld is met $F(0) = 0$, zodanig dat de reële delen van alle eigenwaarden van $JF(0)$ negatief zijn, dan is 0 een lokale attractor van het stelsel $\dot{x}(t) = F(x(t))$. Anders gezegd, iedere oplossing die voldoende dicht bij 0 begint, is gedefinieerd voor alle $t > 0$ en convergeert naar 0 voor $t \rightarrow \infty$.

In 1960 formuleerden L. Markus en H. Yamabe een globale versie van dit resultaat als vermoeden:

$MYC(n)$

Zij $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ een $\mathbf{C}^1$ -vectorveld met $F(0) = 0$. Als voor iedere $x \in \mathbf{R}^n$ de reële delen van alle eigenwaarden van $JF(x)$ negatief zijn, dan is 0 een globale attractor van het stelsel $\dot{x}(t) = F(x(t))$, dus elke oplossing van dit stelsel is gedefinieerd voor alle $t > 0$ en convergeert naar 0 als $t \rightarrow \infty$.

Dit heet het Markus-Yamabe-vermoeden en ook wel het Jacobivermoeden voor differentiaalvergelijkingen. Na 33 jaar werd het vermoeden voor $n = 2$ bewezen, zowel door C. Gutierrez als door R. Fessler. In datzelfde jaar verscheen er een (ongepubliceerd) manuscript van Fournier en Martelli waarin ze een verband legden met het JV. Ze toonden aan dat als het Markus-Yamabe-vermoeden waar is voor alle $n \geq 2$ en alle polynomiale vectorvelden $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ met $\deg F_i \leq 3$ voor alle i , dan is het JV waar. Er was dus hoop dat het JV met theorie over dynamische systemen bestudeerd kon worden. Echter het omgekeerde gebeurde. In 1995 toonde de auteur, in samenwerking met E. Hubbers in Nijmegen en A. Cima, A. Gasull en F. Mañosas in Barcelona, aan dat voor iedere $n \geq 3$ het Markus-Yamabe-vermoeden fout was. Preciezer, zij $n \geq 3$ en $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ gegeven door

$$F(x_1, \dots, x_n) = (-x_1 + x_3 d^2, -x_2 - d^2, -x_3, \dots, -x_n)$$

waarbij $d := x_1 + x_3 x_2$. Dan heeft $JF(x)$ voor iedere $x \in \mathbf{R}^n$ als enige eigenwaarde -1 en $x_1(t) = 18e^t$, $x_2(t) = -12e^{2t}$, $x_3(t) = \dots = x_n(t) = e^{-t}$ is een oplossing van $\dot{x}(t) = F(x(t))$ die naar oneindig gaat als $t \rightarrow \infty$.

Bovenstaand voorbeeld heeft $\deg F_1 = 5$ en $\deg F_2 = 4$, terwijl voor het JV het Markus-Yamabe-vermoeden voor het geval dat $\deg F_i \leq 3$ voor alle i al voldoende zou zijn. Echter een jaar later werden er door de auteur voor iedere $n \geq 5$ nieuwe voorbeelden gevonden die wel aan deze extra graad voorwaarde voldeden. Hiermee was weer een idee het JV te bewijzen de grond in geboord.

Knopen, het Jacobivermoeden en de missing link

Een geheel ander verband met het JV wordt gegeven door het zogeheten Cancellationprobleem (CP), wat teruggaat naar Oskar Zariski in 1949. Meetkundig kan het probleem als volgt worden geformuleerd.

$CP(n)$

Zij $n \geq 1$ en V een affiene algebraïsche variëteit over $\mathbf{C}$ zodanig dat $V \times \mathbf{C} \simeq \mathbf{C}^{n+1}$. Volgt dan dat $V \simeq \mathbf{C}^n$ (als algebraïsche variëteiten)?

Algebraïsch geformuleerd is dit de vraag of een $\mathbf{C}$ -deelalgebra A van $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ zodanig dat $A[T] \simeq_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$, voldoet aan $A \simeq_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$. Een bevestigend antwoord voor $n = 1$ werd in 1972 gegeven door S. Abhyankar, P. Eakin en W. Heinzer en voor $n = 2$ in 1980 door M. Miyanishi en T. Sugie. Zij bewezen de ietwat sterkere uitspraak voor $n = 1$ respectievelijk $n = 2$ dat voor iedere $p \geq 1$ uit $V \times \mathbf{C}^p \simeq \mathbf{C}^{p+n}$ volgt dat $V \simeq \mathbf{C}^n$.

In 1973 publiceerde Miyanishi een verband met het JV: als het JV waar is en het Serre-vermoeden ook, dan heeft het Cancellationprobleem een bevestigend antwoord. Dit Serre-vermoeden (de bewering dat eindig voortgebrachte projectieve modulen over een polynoomring zoals $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ vrij zijn) is in 1976 bewezen door D. Quillen en A. Suslin, dus, volgens Miyanishi, $JV \Rightarrow CP$. We richten daarom onze aandacht op het Cancellationprobleem. Daartoe geven we een herformulering in termen van zogeheten lokaal nilpotente derivaties.

Zij R een $\mathbf{Q}$ -algebra. Een lineaire afbeelding $D : R \rightarrow R$ heet

een derivatie als geldt $D(ab) = aD(b) + D(a)b$ voor alle a, b in R . Zo'n derivatie heet lokaal nilpotent als er voor iedere a in R een natuurlijk getal m bestaat met $D^m(a) = 0$. Een element s in R heet een slice van een derivatie D als $D(s) = 1$. De partiële afgeleide $\frac{\partial}{\partial x_i}$ op de veeltermring $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ is een voorbeeld van een lokaal nilpotente derivatie, met $s = x_i$ als slice. Het Cancellationprobleem blijkt equivalent te zijn met:

$CP'(n)$

Zij D een lokaal nilpotente derivatie op $R := \mathbf{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Neem aan dat D een slice in R heeft. Is dan $\ker D \simeq_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$?

Geïnspireerd door het artikel [2] van T. Asanuma vonden Peter van Rossum en de auteur in 2001 een klasse van lokaal nilpotente derivaties met een slice. Om deze klasse te kunnen beschrijven geven we eerst een klein intermezzo over inbeddingen.

Zij $f = (f_1(t), \dots, f_n(t)) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^n$ een veeltermafbeelding. f heet een inbedding van $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}^n$ als f injectief is en overal een raakvector heeft, oftewel $f'(z) \neq 0$ voor alle z in $\mathbf{C}^n$. Een fundamentele vraag is, of zo'n inbedding rectificeerbaar is: dit wil zeggen, bestaat er een inverteerbare veeltermafbeelding $F : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ zodat $F(f_1(t), \dots, f_n(t)) = (t, 0, \dots, 0)$?

Voor $n = 2$ werd dit probleem bevestigend beantwoord door S. Abhyankar en T. Moh en ook door M. Suzuki (1974). Voor $n \geq 4$ gaven zowel A. Craighero als Z. Jelonek een bevestigend antwoord. Het geval $n = 3$ is nog steeds onopgelost.

We keren terug naar het Cancellationprobleem. Zij $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^n$ een veeltermafbeelding. Definieer daarbij een derivatie D_f op de veeltermring in $n + 2$ variabelen $A := \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n, t, u]$ als

$$D_f = f'_1(t)\partial_{x_1} + \dots + f'_n(t)\partial_{x_n} + u\partial_t.$$

Het is eenvoudig in te zien dat $D := D_f$ een lokaal nilpotente derivatie is. We bewijzen nu dat D een slice heeft in A als f een inbedding is: in dat geval geldt namelijk $\mathbf{C}[t] = \mathbf{C}[f_1(t), \dots, f_n(t)]$. Dus bestaat een veelterm $P \in \mathbf{C}[t_1, \dots, t_n]$ met $t = P(f_1(t), \dots, f_n(t))$. Merk op $D(f_i(t) - ux_i) = 0$ voor alle i , dus $D(P(f - ux)) = 0$. Bijgevolg $u = D(t) = D(t - P(f - ux))$. Verder $P(f - ux) \equiv P(f) = t \pmod{u}$, oftewel $t - P(f - ux) = us$ voor zekere $s \in A$. Omdat $u = D(t - P(f - ux))$, volgt $u = D(us) = uD(s)$ en $D(s) = 1$, dus s is een slice van D in A !

Samengevat, voor iedere inbedding $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^n$ hebben we een lokaal nilpotente derivatie D_f die een slice heeft in $\mathbf{C}[x, t, u]$. De vraag is nu of $\ker(D_f, \mathbf{C}[x, t, u])$ $\mathbf{C}$ -isomorf is met een veeltermring in $n + 1$ variabelen over $\mathbf{C}$. In [8] bewijzen we dat het antwoord op deze vraag bevestigend is als $n \neq 3$. Nu resteert de vraag hoe dit zit voor $n = 3$. Bekijk daartoe de (open) klaverbladknoop, door A. Shastri geparametriseerd door middel van $f(t) = (t^3 - 3t, t^4 - 4t^2, t^5 - 10t) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$. Ook als afbeelding van $\mathbf{C}$ naar $\mathbf{C}^3$ is f een inbedding, want $t = P(f_1, f_2, f_3)$, voor $P = yz - x^3 - 5xy + 2z - 7x$. Shastri formuleerde het vermoeden dat deze inbedding niet rectificeerbaar is. Dit leidde ons tot het volgende vermoeden: de derivatie D_f behorende bij de klaverbladknoop geeft een tegenvoorbeeld voor het Cancellationprobleem!

De oplettende lezer zal zich afvragen wat dit betekent voor het JV, immers een kandidaat tegenvoorbeeld voor het CP levert volgens de implicatie $JV \Rightarrow CP$ van Miyanishi een kandidaat tegen-

voorbeeld voor het JV en bovendien bestaan er voor het testen van inverteerbaarheid verschillende algoritmen! Na nauwkeurig het artikel van Miyanishi bekeken te hebben bleek er een serieuze fout in te zitten! We hebben dus de belangrijke implicatie $JV \Rightarrow CP$ helemaal niet; deze heet nu de ‘missing link’. Het vinden van deze link zou, zoals hierboven uiteengezet is, kunnen leiden tot het oplossen van drie lang openstaande vermoedens.

Enkele recente ontwikkelingen

Zij $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ een veeltermafbeelding van de vorm $F = x + H$ met H homogeen van de graad $d \geq 2$. Dan is het bekend dat de conditie $\det JF \in \mathbb{C}^*$ equivalent is met de nilpotentie van de matrix JH . Zoals eerder beschreven, is het voldoende het JV te bewijzen voor alle $n \geq 2$ en alle veelterm afbeeldingen van de vorm $F = x + H$ met H homogeen van de graad 3 en JH nilpotent. Recentelijk ([3], Juni 2003) hebben Michiel de Bondt en de auteur bewezen dat bovendien mag worden aangenomen dat JH symmetrisch is. Onder deze extra aanname hebben we het JV voor $n \leq 5$ kunnen bewijzen (H mag zelfs homogeen zijn van willekeurige graad ≥ 2). Het gewone JV is evenwel nog steeds open, zelfs voor $n = 2$.

Behalve het JV is er in de exotische wereld van veeltermafbeel-

dingen nog een prominent vermoeden: het tamme voortbrengers vermoeden. Dit vermoeden zegt dat iedere inverteerbare veeltermafbeelding van $\mathbb{C}^n$ naar $\mathbb{C}^n$ een eindig product is van elementaire veeltermafbeeldingen. Dit zijn afbeeldingen van de vorm

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha x_i + a, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

waarbij $\alpha \in \mathbb{C}^*$, en a is een veelterm in $x_1, \dots, x_n$ die geen x_i bevat.

Dit vermoeden werd voor $n = 2$ in 1942 door H. Jung bewezen. In 1972 formuleerde M. Nagata het kandidaat tegenvoorbeeld

$$\sigma = (x - 2qy - q^2z, y + qz, z)$$

waarbij $q = xz + y^2$. In een recent manuscript [6] tonen I. Shestakov en U. Umirbaev op ingenieuze wijze aan dat deze Nagata-afbeelding inderdaad niet tam is, waarmee het tamme voortbrengers vermoeden na meer dan zestig jaar is opgelost!

Laten we hopen dat het JV spoedig zal volgen, temeer daar nu ook steun uit de onverwachte hoek van de mathematische fysica is gekomen [1]. $\Leftarrow$

Referenties

- 1 A. Abdesselam, ‘The Jacobian Conjecture as a Problem of Perturbative Quantum Field Theory’, *Ann. H. Poincaré* (4) (2003), p. 199–215.
- 2 T. Asanuma, ‘Non-linearizable algebraic k^* -actions on affine spaces’, *Invent. Math.* (138) (1999), p. 281–306.
- 3 M. de Bondt and A. van den Essen, *A reduction of the Jacobian Conjecture to the symmetric case*, Report 0308 (Juni 2003), University of Nijmegen (verschijnt in Proceedings of the AMS).
- 4 A. van den Essen, ‘Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture’, *Progress in Math.*, Birkhäuser (190) (2000).
- 5 O. Keller, ‘Ganze Cremona-Transformationen’, *Monatsh. Math. Phys.* (47) (1939), p. 299–306.
- 6 I. Shestakov and U. Umirbaev, ‘The tame and wild automorphisms of polynomial rings in three variables’ *Journal of the AMS* (1) (2004), p. 197–227 (electronic).
- 7 S. Smale, ‘Mathematical problems for the next century’, *Math. Intelligencer* (20) (1998), p. 209–212.
- 8 A. van den Essen and P. van Rossum, ‘Triangular derivations related to problems on affine n-space’, *Proc. of the A.M.S.* (130) No. 5 (2001), p. 1311–1322.

Robbert Fokkink

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
r.j.fokkink@ewi.tudelft.nl

Egbertus Rudolf van Kampen

Een onbekende bekende wiskundige

De Nederlandse topoloog Egbert van Kampen maakte in de dertiger jaren, op jonge leeftijd, furore in de Verenigde Staten. Zijn werk is nog steeds van betekenis en wordt regelmatig geciteerd. Over zijn leven is eigenlijk weinig bekend en ook zijn werk is slecht vertegenwoordigd in de Nederlandse bibliotheken. Robbert Fokkink, redacteur van de problemenrubriek van dit blad en werkzaam als topoloog aan de Technische Universiteit Delft geeft een korte biografische schets van Van Kampen en beschrijft hoogtepunten van zijn werk.

Nog niet zo lang geleden luisterde ik naar een lezing waarin, tussen neus en lippen door, een fraai resultaat werd genoemd. Het was een klassieke inbeddingsstelling van Haefliger, die ruwweg zegt dat je een ruimte X in kan bedden in $\mathbf{R}^n$ als de spiegeling $(x, y) \rightarrow (y, x)$ van $X \times X$ geconjugeerd is met de antipodale afbeelding $x \rightarrow -x$ op S^{n-1} . Enige naspeuring in de literatuur leerde al gauw dat

E.R. van Kampen de eerste was die dit soort inbeddingsstellingen heeft bedacht, zo ergens in het begin van de jaren dertig. Ik zocht in de bibliotheek naar zijn verzameld werk, maar dat was er niet en ook in de wiskundige geschiedenisboeken stond bitter weinig. Dat is opmerkelijk, want E.R. van Kampen is een veel geciteerd wiskundige, naar wie zelfs een onderdeel van de AMS classificatie is vernoemd (20F06). Wie was hij eigenlijk?

De levensloop van E.R. van Kampen

Egbertus Rudolf van Kampen, roepnaam Egbert, wordt op 28 mei 1908 geboren in Berchem als jongste in een gezin met drie kinderen. Egberts ouders waren een paar jaar eerder vanuit Nederland naar België verhuisd, toen zijn vader boekhouder werd bij de Minerva autofabriek in Antwerpen.

De oorlogsjaren 1914–1918 brengen de kinderen door bij familie in Amsterdam. Na de oorlog gaat het gezin in Den Haag wonen, waar Egbert de Eerste Christelijke H.B.S. door-

loopt. Bij zijn eindexamen in 1924 haalt hij de landelijke pers. De Telegraaf en de Amsterdammer berichten van de jonge wiskunstenaar, een uniek talent in Europa, die de onderwijsaktes KI en KV heeft gehaald maar die toch geen vrijstelling kreeg voor wiskunde. Voor zijn studie wis- en natuurkunde in Leiden krijgt hij waarschijnlijk wel de nodige vrijstellingen, want hij doorloopt de studie vliegensvlug. In 1927 gaat hij, nog maar negentien jaar oud, op studiereis naar Göttingen. Hij ontmoet er Alexandroff en Van der Waerden. Zij geven hem het onderwerp voor zijn proefschrift: vind een berekenbare, topologische definitie van het begrip ‘variëteit’. Egbert lost dat probleem op door te laten zien dat de locale homologiegroep een topologische invariant is. Een variëteit volgens Van Kampen is een simpliciaal complex met de juiste locale homologie. Gewapend met deze definitie generaliseert hij de dualiteitsstelling van Alexandervan sferen tot algemene variëteiten en bouwt hij Veblens theorie van intersec-



foto: archief Miele van der Veen

Egbert van Kampen (l) met zus Elizabeth en broer Laurens. Elizabeth studeerde net als Egbert wiskunde in Leiden. Laurens werd hoogleraar economie aan de VU. Beiden zijn 96 jaar oud geworden.

ties en snijpuntsgetallen verder uit. In 1929 promoveert hij in Leiden op het proefschrift *Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze*. Het proefschrift ontbreekt in de universiteitsbibliotheek van Leiden. De promotor is Van der Woude, maar de feitelijke begeleider is Van der Waerden.

In de zomer van 1928 is Van Kampen vijf maanden in Hamburg, waar hij Emil Artin ontmoet. Omstreeks die tijd wordt hij ook geronseld door de *Johns Hopkins* Universiteit, maar omdat hij op dat moment nog te jong is om de VS zonder begeleiding van zijn ouders te betreden, wordt hij eerst assistent van Schouten in Delft. Samen met Schouten schrijft hij in die tijd enkele publicaties over tensoranalyse, het specialisme van Schouten. [4, 6, 9]

In 1931 vertrekt Van Kampen naar Johns Hopkins. In zijn paspoort staat een speciaal visum dat aandachtig wordt bekeken door de Amerikaanse douane. 'Wat bent u van beroep?' vraagt de douanier. 'Topoloog' zegt Van Kampen. Dit komt niet voor op de lijst van werkzaamheden die horen bij het speciale visum. De douanier vraagt om wat meer informatie en raakt ervan overtuigd dat hij van doen heeft met een idioot. Slechts na tussenkomst vanuit Johns Hopkins wordt Van Kampen toegelaten.

Al gelijk in zijn eerste jaar in de VS schrijft Van Kampen een verhandeling over de fundamentealgroep, waarmee hij definitief zijn naam vestigt. In 1933 is hij een jaar op het Institute for Advanced Study en in 1935 geeft hij een voordracht over topologische groepen op

het internationale congres in Moskou. Egbert van Kampen is dan midden twintig en lijkt aan het begin te staan van een glanzende carrière, maar in werkelijkheid heeft hij zijn belangrijkste werk al achter zich. Hij blijft wel bijzonder productief en schrijft samen met Aurel Wintner het *American Journal of Mathematics* vol. In een brief naar huis, eind jaren dertig, klaagt Van Kampen over hoofdpijn. De specialist vermoedt dat het te maken heeft met een nekprobleem.

Hij krijgt eerst fysiotherapie en pas later wordt vastgesteld dat het gaat om een melanoom, ontstaan uit de moedervlek bij zijn linkeroog, die op zijn portretfoto's altijd is gere-toucheerd. In april 1941 wordt hij daaraan geopereerd en in het najaar hervat Egbert de colleges, vol goede moed over zijn herstel. Dat duurt niet lang, hij krijgt opnieuw last van zware hoofdpijn en hij wordt doof aan het linkeroor. In december 1941 ligt hij opnieuw in het ziekenhuis en het gaat snel achteruit. In januari 1942 volgt nog een tweede operatie. Tevergeefs, op 10 februari raakt Egbert in coma en hij overlijdt een dag later, nog maar 33 jaar oud.

Het werk van E.R. van Kampen

Egbert van Kampen heeft aan veel onderwerpen gewerkt: topologie, groepentheorie, tensorrekening, harmonische analyse en kansrekening. Zijn bekendste artikelen liggen in de topologie en de groepentheorie. Hij is een beetje een orakel geweest, want een deel van het werk is pas ontdekt toen anderen het opnieuw gingen bedenken.

De eerste publicatie in 1928

Van Kampens eerste artikel [1] verschijnt in de *Hamburger Abhandlungen* uit 1928. Het bestaat uit tien zinnen en een plaatje en is precies wat je van een briljante jongeling mag verwachten: origineel en onleesbaar. Het gaat over twee krommen α en β die vastzitten aan een vlak V , waarvan het de vraag is of ze uit elkaar te halen zijn, zonder dat de eindpun-



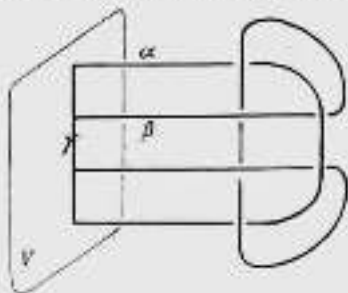
Links Van Kampen, rechts Ehrenfest, Rotterdam circa 1917

Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im R_4 .

Von E. R. VAN KAMPEN.

In seiner gleichnamigen Arbeit hat E. ARTIN¹⁾ auf einige Beispiele von verknöteten und verketteten Kugeln im R_4 hingewiesen. Aus heuristischen Gründen kommt er dort zur Vermutung, daß auf diese Art keine Verkettung von zwei unverknöteten Kugeln herzustellen ist.

Das folgende Beispiel zeigt, daß dies doch möglich ist.



Man lasse die beiden Kurven α und β um die Ebene V im R_4 rotieren, dann entstehen zwei offenbar unverknötete Kugeln. Um zu beweisen, daß sie verkettet sind, braucht man nur zu zeigen, daß die Gruppe G der zwei Kugeln nicht frei ist mit zwei Erzeugenden. Diese Gruppe ist aber, wie E. ARTIN gezeigt hat, gleich der Gruppe des Gebildes $V + \alpha + \beta$ oder auch von $\gamma + \alpha + \beta$, die einfach zu bestimmen ist.

Man berechne nun nach dem Verfahren von K. REIDEMEISTER²⁾ die invarianten Untergruppen vom Index 2 von G . Es gibt deren drei, wovon eine offenbar nicht frei ist (wie das der Fall sein würde, wenn G frei wäre), da die Invarianten seiner Faktorkommutatorgruppe $(0, 0, 0, 3)$ sind. Diese invariante Untergruppe ist die Fundamentalgruppe des zweifach überlagerten, längs $\alpha + \beta + \gamma$ verzweigten, R_3 .

Es ist natürlich klar, daß auf diese Weise unendlich viele verschiedene Verkettungen zu konstruieren sind.

¹⁾ Diese Zeitschrift, Bd. IV, S. 174.

²⁾ Diese Zeitschrift, Bd. V, S. 7; vgl. auch O. SCHREIER, Bd. V, S. 172.

Het eerste artikel (1928) van Van Kampen in de *Hamburger Abhandlungen*

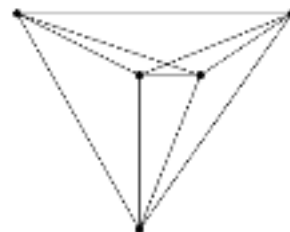
ten het vlak loslaten. Emil Artin had in 1925 in een artikel met dezelfde titel het volgende beweerd: als α en β geketend zijn, dan heeft α of β een knoop. Het plaatje in Van Kampens artikel toont aan dat die bewering onjuist is. Het moge duidelijk zijn dat α en β niet in de knoop zitten, maar ze zijn wel geketend. Van Kampen laat dat zien door te berekenen dat de fundamentealgroep van het complement van $\alpha \cup \beta$ in de halfruimte niet vrij is. Hij trekt eerst een hulplijn γ door de eindpunten van α en β , die overigens niet echt nodig is. Met enige moeite is dan in te zien dat het complement van $\alpha \cup \beta \cup \gamma$ in R^3 dezelfde fundamentealgroep heeft als het complement van $\alpha \cup \beta$ in de halfruimte. Deze groep heeft drie

normaaldelers van index 2 en Van Kampen meldt dat eentje daarvan als abels quotient de groep $Z^3 \oplus Z/3Z$ heeft. Hieruit volgt dat de fundamentealgroep niet vrij kan zijn. De theorie waarop Van Kampen voortbouwt is op dat moment gloednieuw en nog lang niet gladjes. De berekeningen die hij moet uitvoeren kunnen geen kleinigheid geweest zijn. Misschien laat hij daarom wel alle details weg. Tegenwoordig is de berekening veel eenvoudiger, niet in de laatste plaats vanwege het werk van Van Kampen zelf.

De Van Kampen obstructie

In 1932 publiceert Van Kampen een artikel over inbeddingen van complexen in euclidi-

sche ruimten [7]. Opnieuw is het artikel van Artin uit 1925 de inspiratiebron. Van Kampen bestudeert een inbeddingsprobleem dat pas veel later definitief zal worden opgelost: onder welke condities past een n -dimensionaal complex in R^{2n} ? In 1930 had Kuratowski dit opgelost voor $n = 1$. Van Kampen is misschien onbekend met dit resultaat, want hij noemt Kuratowski niet en hij doet het geval $n = 1$ af als eenvoudig.



Figuur 1 De volledige vijf-graaf.

Van Kampens bewijs gaat alleen op voor $n \geq 3$, maar zijn criterium is het best te illustreren aan de hand van het 'eenvoudige' geval $n = 1$. Het complex is dan een graaf G . Teken bijvoorbeeld 5 punten in het vlak en verbind ze allemaal met elkaar. Het resultaat is een afbeelding van de volledige 5-graaf in het vlak. Sommige verbindingslijnen zullen elkaar kruisen, dus de afbeelding is geen inbedding. Je kunt proberen er met vallen en opstaan een inbedding van te maken, door kruisende lijnen weg te halen en te vervangen door nieuwe verbindingen. Voor de 5-graaf loopt dat uiteindelijk vast. In het figuur 1 bijvoorbeeld is nog maar 1 kruispunt over, dat niet meer is weg te werken. Van Kampen laat zien dat dit vallen en opstaan zich afspeelt in een cohomologieklassie en dat de graaf in te bedden is precies wanneer deze klasse nul is. Alleen gebruikt hij een andere terminologie, want cohomologietheorie is in 1932 nog niet echt uitgevonden. Voor een afbeelding $f: G \rightarrow R^2$ met eindig veel dubbelpunten definieert Van Kampen een vector $\mathbf{v}$ met coördinaten in $Z/2Z$. Het aantal coördinaten van $\mathbf{v}$ is gelijk aan het aantal paren $\{I, J\}$ van disjuncte zijden in de graaf. De $\{I, J\}$ -de coördinaat van $\mathbf{v}$ geeft de pariteit van $f(I) \cap f(J)$. Van Kampen definieert vervolgens vectoren $w(p, E)$ in dezelfde ruimte $(Z/2Z)^N$ als $\mathbf{v}$, waarbij p een hoekpunt is en E een zijde die p niet bevat. De $\{I, J\}$ -de coördinaat van $w(p, E)$ is gelijk aan 1 precies als $p \in I$ en $E = J$, of vice versa. Laat L het opspansel van de $w(p, E)$ zijn. Van Kampens criterium is nu dat G inbedbaar is dan en slechts dan als $\mathbf{v} \in L$. Voor de afbeelding van de 5-graaf hiernaast heeft $\mathbf{v}$ één 1 en verder nul-

len. Alle vectoren $w(p, E)$ hebben een even coördinaatsom dus in dit geval geldt $\mathbf{v} \notin L$.

In het hoger-dimensionale geval $n \geq 3$ worden de zijden n -dimensionale cellen en worden de hoekpunten $n - 1$ -dimensionale cellen. De definitie van de vector $\mathbf{v}$ gaat via het 'snijpuntsgetal', waarvoor Van Kampen de theorie had opgezet in zijn proefschrift. Hij merkt eerst op dat de obstructie tegen een inbedding alleen kan zitten in de n -dimensionale cellen. Daarna leidt hij zijn criterium af in vier stappen. Lemma 1 zegt dat dubbelpunten in paren kunnen worden verwijderd, dus enkel de pariteit is van belang. Lemma 2 zegt dat dubbelpunten van aanliggende zijden geen probleem zijn, dus alleen disjuncte cellen zijn van belang. Lemma 3 zegt dat er voor elke vector in $\mathbf{v} + L$ ook een afbeelding $f: K \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ is die die vector oplevert. Lemma 4 zegt dat omgekeerd elke $f: K \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ een vector oplevert in $\mathbf{v} + L$. Einde bewijs, amper een pagina lang. Als toegift laat Van Kampen zien dat elke n -dimensionale variëteit is in te bedden in $\mathbf{R}^{2n}$, een resultaat dat tegenwoordig de inbeddingsstelling van Whitney heet.

Het is een verbluffend resultaat met

slechts één schoonheidsfoutje: het bewijs van lemma 1 is fout. In een nagezonden, haastige correctie geeft Van Kampen aanwijzingen richting een gedeeltelijk herstel. Hij schrijft dat het 'onnodig is om oriëntatie te verwaarlozen', waarmee hij waarschijnlijk bedoelt dat de coëfficiënten in $\mathbf{Z}$ moeten worden genomen in plaats van $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Daarna publiceert Van Kampen niet meer over inbeddingen, zelfs niet als Whitney er een paar jaar later een hele theorie over ontwikkelt. Pas in 1957 laat Arnold Shapiro zien dat Van Kampens criterium volgt uit de resultaten van Whitney.

Zoals reeds opgemerkt gaat Van Kampens bewijs alleen op voor dimensie $n \geq 3$. Het is daarom een verrassing als Sarkaria in 1991 aantoonde dat het criterium ook correct is voor $n = 1$. In 1994 bewijzen Freedman, Krushkal en Teichner dat het criterium niet opgaat voor $n = 2$. Krushkal en Teichner introduceren ook de naam 'Van Kampen obstructie', ruim zestig jaar na het verschijnen van het originele artikel.

Het drieluik over de fundamentealgroep

Oscar Zariski, de bekendste wiskundige van Hopkins, werkt begin jaren dertig aan de

fundamentealgroep van het complement van een algebraïsche kromme. Een algebraïsche kromme kan geknoopt zijn in de projectieve ruimte, wat net als bij een gewone kromme in $\mathbf{R}^3$ is af te lezen uit de fundamentealgroep van het complement. Zariski had de voortbrengers van de fundamentealgroep bepaald en relaties ertussen gevonden, maar het was hem nog niet duidelijk of er meer relaties waren. Zariski legt het probleem voor aan Van Kampen. Die lost het op en schrijft er een drieluik [10–12] over in het American Journal of Mathematics, de huisuitgave van Johns Hopkins. Alledrie de artikelen zijn standaard referenties geworden, alhoewel ze zelden samen worden genoemd. De algebraïsch meetkundigen refereren naar het eerste artikel, de topologen naar het tweede en de groepentheoretici naar het derde. Dat is opvallend, want eigenlijk is alleen het eerste artikel afzonderlijk te lezen, en dat ook maar nauwelijks.

De artikelen zijn geschreven met een onderkoelde toon. In het eerste artikel staat: *As the resulting proof seemed too algebraic for this simple and nearly topological question, Dr. Zariski asked me to publish a topological proof which is contained in this paper.* In deel

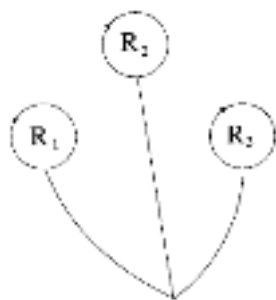


Groepsfoto van staf en postdocs op de Johns Hopkins campus in 1933 met v.l.n.r.: Egbert van Kampen, George Schweigert, Beatrice Aitchison, William Morrill, Oscar Zariski, Charles Wheeler en John Williamson.

twee staat: *The opportunity of simplifying the treatment of a fundamental group by means of this theorem has been overlooked several times [...] for this reason we do not think it superfluous to devote a separate paper to it.* In het derde deel staat: *It is this 2-dimensional method of the proof and not any original result which justifies the publication of this paper.*

Het eerste deel van het drieluik gaat over Zariski's probleem, wat Van Kampen oplost door de ruimte op een handige manier in twee stukken te snijden, U en V , die elk een vrije fundamentealgroep hebben. Dan verdeelt hij elke homotopie in kleine stukjes die ofwel helemaal in U ofwel helemaal in V liggen. Aan gezien de fundamentealgroep van zowel U als V vrij is, is er alleen een keuzevrijheid voor de stukjes homotopie die in de doorsnede $U \cap V$ liggen. Deze keuzevrijheid blijkt precies overeen te komen met de relaties van Zariski en meer relaties zijn er dus niet. Dit resultaat heet nu de stelling van Zariski en Van Kampen.

Het tweede artikel borduurt verder op de vraag hoe je de fundamentealgroep van een vereniging $U \cup V$ berekent uit de groepen van U en V . In de moderne vorm wordt dit resultaat geformuleerd via overdekkingen, maar Van Kampen kijkt meer naar de snede, die de ruimte in twee of meer stukken verdeelt. Hij is niet helemaal tevreden met zijn resultaat en schrijft: *a path is shown to a general theorem, of which the general formulation would be more confusing than helpful, so that it is suppressed.* Deze onderdrukte algemene stelling gaat waarschijnlijk over een zo algemeen mogelijke snede die de ruimte in een willekeurig aantal stukken verdeelt. Uiteindelijk is Corollarium 2, waarin een enkelvoudig samenhangende verzameling de ruimte in twee stukken snijdt, de stelling van Seifert en Van Kampen gaan heten. Deze stelling werd namelijk voor het eerst bewezen door Seifert, een andere promovendus van Van der Waerden.



De typische vorm van een Van Kampen diagram: relaties op een steeltje. Het herschrijven van een woord correspondeert met het samenplakken van het boeket.

Een vervelend technisch detail waar Van Kampen tegenaan loopt, is dat hij bij het opdelen van een homotopie alles moet blijven verbinden met het basispunt. Alle kleine stukjes homotopie moeten ermee verbonden worden. In de algebraïsche vertaling worden de stukjes homotopie uiteindelijk relaties en worden de verbindingen met het basispunt uiteindelijk conjugaties. In het derde deel van het drieluik maakt Van Kampen van de nood een deugd, door te bedenken dat de omgekeerde vertaling een grafisch beeld geeft van groepsrelaties. Hij vertaalt woorden in groepen naar boeketten van krommen, die elk de conjugatieklasse van een relatie voorstellen. Met deze manier van denken vereenvoudigt hij het bewijs van een resultaat van Schreier. Pas in 1966 wordt dit derde artikel ontdekt, als Roger Lyndon en Carl Weinbaum de diagrammen gebruiken om relaties met 'small cancellation' te bestuderen. De boeketten van krommen heten tegenwoordig Van Kampendiagrammen.

Pontrjagin-Van Kampendualiteit en later werk
In 1933 is Van Kampen een jaar in Princeton, net als Pontrjagin bewijst dat compacte abelse groepen duaal zijn met discrete abelse groepen. Pontrjagin gaat uit van separabele groepen, omdat de Haarmaat in 1933 alleen nog maar voor dat soort groepen geconstrueerd was. Von Neumann merkt op dat dualiteit ook wel blijft gelden zonder separabiliteit, als je in plaats van de Haarmaat maar Von Neumanns theorie voor bijna-periodieke functies gebruikt. Van Kampen pakt het op en schrijft een overzichtsartikel over dualiteit van groepen [16]. Sindsdien wordt deze dualiteit ook wel Pontrjagin-Van Kampen dualiteit genoemd.

Van Kampen pakt voor zijn doen breed uit met zestien pagina's, maar hij begint dan ook bij de definitie van topologische groep en eindigt met de dualiteit van lokaal compacte abelse groepen zonder de restrictie van separabiliteit. Het artikel is goed leesbaar en geschreven voor een algemeen publiek, in tegenstelling tot Van Kampens voorgaande werk, dat de indruk geeft van een geheugensteuntje voor de schrijver zelf.

Het markeert het begin van een nieuwe periode, want Van Kampen laat de algebraïsche topologie verder voor wat het is en bestudeert na 1935 vooral bijna-periodieke functies en differentiaalvergelijkingen. Het is niet toevallig dat dit het interessegebied is van Aurel Wintner, een collega van Johns Hopkins. Egbert van Kampen liet zich altijd inspireren door de mensen om hem heen. Aan het eind van zijn leven schrijft hij zelfs



Egbert van Kampen, 1940

foto: archief Mieke van der Veen

enkele artikelen over kansrekening als de jonge Mark Kac naar Baltimore komt. Het laatste grote artikel van Van Kampen, tevens zijn langste, is een verhandeling over productmaten en convoluties. Het verschijnt medio 1940 [49].

Conclusie

Egbert van Kampen stond al op zijn zestienste in de krant als een ongekend wiskundig talent. Hij was een gerenommeerd wiskundige en toch heeft zijn werk lang op erkenning moeten wachten. Misschien lag dat aan zijn ontoegankelijke manier van schrijven: een bewijs is vaak al voorbij voordat je er erg in hebt. Misschien lag het aan zijn bescheidenheid. 'He never spoke very much about his accomplishments', merkte een collega op in een Amerikaanse krant. En dan te bedenken dat Van Kampens naam gebaseerd is op het werk uit zijn beginjaren. Na 1933 heeft hij nog veertig artikelen geschreven. Wie weet wat voor moois er nog op ons ligt te wachten. 

Verantwoording en dankwoord

Dit overzicht zou niet mogelijk geweest zijn zonder de foto's en krantenknipsels van Mieke van der Veen, dochter van Elizabeth van Kampen. Graag wil ik haar bedanken voor de toestemming om dit materiaal te gebruiken en voor de zorgvuldigheid waarmee zij het bewaard heeft. Boudewijn van Kampen, ook familie, wees mij op de foto van Egbert van Kampen en Paul Ehrenfest. Om in familiekringen te blijven: de betovergrootvader van Egbert van Kampen was Jacobus van der Blij en dat was ook de betovergrootvader van de emeri-

tus hoogleraar van der Blij uit Utrecht.

De anecdote over het visum van Van Kampen komt uit de memoires van Mark Kac, *Enigmas of chance*, London, Harper and Row, 1985. Meer anecdotes zijn in deze memoires

te vinden rond pagina 85.

Cor Kraaikamp maakte mij opmerkzaam op de autobiografie van Kac. Slava Krushkal hielp met de details van de Van Kampen obstructie. Mark de Bock van de gemeente Ant-

werpen en Albert Schiltmeijer uit Amsterdam stuurden mij gegevens van de familie Van Kampen. Jim Stimpert van Johns Hopkins Library stuurde informatie over Van Kampens publicaties.

Publicaties van E.R van Kampen

- 1 'Zur Isotopie zweidimensionaler Fläche im R^4 ', *Abh. Math. Sem. Hamburg* (6) (1928), p. 216.
- 2 'Eine Verallgemeinerung des Alexanderschen Dualitätssatzes', *Proc. Kon. Ak. Weten. Amsterdam* (31) (1928), p. 899.
- 3 *Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze*, Diss. Leiden, Van Stockum, Den Haag, 1929.
- 4 met J.A. Schouten, 'Zur Einbettung und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde', *Math. Ann.* (103) (1930), p. 752–783.
- 5 'Komplexen in Euclidische Ruimten', *Handelingen XXIII^e Nederl. Natuur- en Geneeskundig Congres* (1931), 123–124.
- 6 met J.A. Schouten, 'Über die Krümmung einer V_m in V_n ; eine revision der Krümmungstheorie', *Math. Ann.* (105) (1931), p. 144–159.
- 7 'Komplexe in euklidischen Räumen', *Abh. Math. Sem. Hamburg* (9) (1932), p. 72–78, Berichtigung dazu, (1933), p. 152–153.
- 8 'Some remarks on the join of two complexes and on invariant subcomplexes', *Amer. J. Math.* (44) (1932), p. 545–550.
- 9 met J.A. Schouten, 'Beiträge zur Theorie der Deformation', *Prace Mat.-Fiz.* (41) (1933), p. 1–19.
- 10 'On the fundamental group of an algebraic curve', *Amer. J. Math.* (55) (1933), p. 255–260.
- 11 'On the connection between the fundamental groups of some related spaces', *Amer. J. Math.* (55) (1933), p. 261–267. Het artikel staat integraal in: *Two decades of mathematics in the Netherlands, 1920–1940, A retrospection on the occasion of the bicentennial of the Wiskundig Genootschap*, E. M. J. Bertin, H. J. M. Bos and A. W. Grootendorst, Amsterdam, 1978.
- 12 'On some lemmas in the theory of groups', *Amer. J. Math.* (55) (1933), p. 268–273.
- 13 'Locally compact abelian groups', *Proc. Nat. Acad. Sc.* (1934), p. 434–436.
- 14 'The structure of a compact connected group', *Amer. J. Math.* (57) (1935), p. 301–308.
- 15 'On some characterizations of 2-dimensional manifolds', *Duke Math. Journ.* (1) (1935), p. 74–93.
- 16 'Locally bicomact abelian groups and their character groups', *Annals Math.* (36) (1935), p. 448–463.
- 17 'The topological transformation of a simple closed curve into itself', *Amer. Journ. of Math.* (57) (1935), p. 142–152.
- 18 'On the structure of a compact group', *Rec. math. Moscou* (1) (1936), p. 699–700.
- 19 'Almost periodic functions and compact groups', *Ann. Math.* (2) (37) (1936), p. 78–91.
- 20 'A unicity theorem for ordinary differential equations and a postulate system for Lie groups', *Bull. Amer. Math. Soc.* (42) (1936), p. 330.
- 21 'Note on a theorem of Pontrjagin', *Amer. J. Math.* (58) (1936), p. 177–180.
- 22 'The fundamental theorem for Riemann integrals', *Amer. J. Math.* (58) (1936), p. 847–850.
- 23 met A. Wintner, 'On the canonical transformations of Hamiltonian systems', *Amer. J. Math.* (58) (1936), p. 851–863.
- 24 'On almost periodic functions of constant absolute value', *J. London math. Soc.* (12) (1937), p. 3–6.
- 25 met A. Wintner, 'On bounded convolutions', *Bull. Amer. Math. Soc.* (43) (1937), p. 564–566.
- 26 'On the argument functions of simple closed curves and simple arcs', *Compositio math.* (4) (1937), p. 271–275.
- 27 'Remarks on systems of ordinary differential equations', *Amer. J. Math.* (59) (1937), p. 144–152.
- 28 met A. Wintner, 'On a symmetrical canonical reduction of the problem of three bodies', *Amer. J. of Math.* (59) (1937), p. 153–166.
- 29 met A. Wintner, 'Convolutions of distributions on convex curves and the Riemann zeta function', *Amer. J. Math.* (59) (1937), p. 175–204.
- 30 met P. Hartman en A. Wintner, 'Mean motions and distribution functions', *Amer. J. Math.* (59) (1937), p. 261–269.
- 31 met A. Wintner, 'On an absolute constant in the theory of variational stability', *Amer. J. Math.* (59) (1937) p. 270–274.
- 32 met A. Wintner, 'On divergent infinite convolutions', *Amer. J. Math.* (59) (1937), p. 635–654.
- 33 'On the addition of convex curves and the densities of certain infinite convolutions', *Amer. J. Math.* (59) (1937), p. 679–695.
- 34 met A. Wintner, 'On a singular monotone function', *J. London math. Soc.* (12) (1937), p. 243–244.
- 35 met A. Wintner, 'On the reduction of dynamical systems by means of parametrized invariant relations', *Trans. Amer. Math. Soc.* (44) (1938), no. 2, p. 168–195.
- 36 The theorems of Gauss-Bonnet and Stokes, *Amer. J. Math.* (60) (1938), p. 129–138.
- 37 met P. Hartman en A. Wintner, 'On the distribution functions of almost periodic functions', *Amer. J. Math.* (60) (1938), p. 491–500.
- 38 'Invariants derived from looping coefficients', *Amer. J. Math.* (60) (1938), p. 595–610.
- 39 met A. Wintner, 'On Liouville systems', *Nieuw Arch. Wiskd.* (19) (1938), p. 235–240.
- 40 met P. Hartman en A. Wintner, 'Asymptotic distributions and statistical independence', *Amer. J. Math.* (61) (1939) p. 477–486.
- 41 met M. Kac en A. Wintner, 'On Buffon's problem and its generalizations', *Amer. J. Math.* (61) (1939), p. 672–676.
- 42 met M. Kac, 'Circular equidistributions and statistical independence', *Amer. J. Math.* (61) (1939), p. 677–682.
- 43 'On the asymptotic distribution of a uniformly almost periodic function', *Amer. J. Math.* (61) (1939), p. 729–732.
- 44 met A. Wintner, 'A limit theorem for probability distributions on lattices', *Amer. J. Math.* (61) (1939), 965–973.
- 45 met M. Kac en A. Wintner, 'On the distribution of the values of real almost periodic functions', *Amer. J. Math.* (61) (1939), p. 985–991.
- 46 'A remark on asymptotic curves', *Amer. J. Math.* (61) (1939), p. 992–994.
- 47 met M. Kac en A. Wintner, 'Ramanujan sums and almost periodic functions', *Amer. J. Math.* (62), (1940), p. 107–114.
- 48 met P. Erdős, M. Kac, en A. Wintner, 'Ramanujan sums and almost periodic functions', *Studia Math.* (9), (1940), p. 43–53.
- 49 'Infinite product measures and infinite convolutions', *Amer. J. Math.* (62), (1940), p. 417–448.
- 50 met A. Wintner, 'On the almost periodic behavior of multiplicative number-theoretical functions', *Amer. J. Math.* (62), (1940), p. 613–626.
- 51 'On uniformly almost periodic multiplicative and additive functions', *Amer. J. Math.* (62), (1940), p. 627–634.
- 52 'Elementary proof of a theorem on Lorentz matrices', *Bull. Am. Math. Soc.* (47) (1941), p. 288–290.
- 53 'Remark on the address of S. S. Cairns'. Lectures in Topology, p. 311–313. *University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich.*, 1941.
- 54 'Notes on systems of ordinary differential equations', *Amer. J. Math.* (63), (1941), p. 371–376.
- 55 met A. Wintner, 'On the asymptotic distribution of geodesics on surfaces of revolution', *Cas. Mat. Fys.* (72) (1947), p. 1–6.

Stephan Hußmann

*Pädagogische Hochschule Karlsruhe
Bismarckstraße 10
76133 Karlsruhe
Duitsland
hussmann@ph-karlsruhe.de*

Mathematics as concept-mongering

Off the beaten track

Opvattingen over het leren zijn voortdurend aan veranderingen onderhevig. De in Nederland overheersende leertheorie of – zoals Freudenthal hier gezegd zou hebben – achtergrondfilosofie wordt vaak aangeduid met het woord constructivisme. Veranderingen in ons onderwijs zoals bijvoorbeeld de invoering van het zogenaamde studiehuis zijn vaak terecht of onterecht gemotiveerd door deze eigentijdse opvatting van leren. Deze ontwikkeling is al lang onomkeerbaar en heeft nogal concrete gevolgen voor ons allemaal. Maar wat behelst dit constructivisme eigenlijk en wat betekent het voor ons wiskundeonderwijs?

Stephan Hußmann, die in 2001 is gepromoveerd op een proefschrift over een leeromgeving die recht probeert te doen aan de opvattingen van het constructivisme, licht deze leertheorie en de mogelijke consequenties voor het wiskundeonderwijs toe. Sinds oktober 2003 is Hußmann hoogleraar wiskunde-didactiek in Karlsruhe.

Wittenberg said doing mathematics is ‘Denken in Begriffen’ (‘thinking in concepts’). But ‘Denken in Begriffen’ is nothing special. With every transaction of things in our world, these

get a special meaning for us, in the form of concepts. We are perceivers and not irritable objects in the perceptible environment. Our actions are guided by propositionally contentful intentions with the aim of altering what is going on around us. We are not only behavers, who respond to a stimulus from outside without touch of sense. We use concepts for understanding and structuring what is going on around us. With every act of perception we differentiate the world in a part which carries a meaning for us and the other part which does not. In this sense, wisdom is concept-mongering (Brandom 2001, p. 8).

Therefore structuring the world is an individual act and meaning is attributed by the individual. Things, represented in the mind, do not have an ‘objective reality’.

This understanding is based upon Kant’s overcoming of the separation of mind and body. For Descartes concepts were created in accordance with the properties of things. The mind consequently consisted of representations of representable objects. To this end, the objects are analysed until a clear (*clara*) and distinctive (*distincta*) representation is reached in the mind. The criterion of quality is certainty. Kant contradicted this view by de-

veloping a prescriptive understanding of the usage of concepts. Conceptually structured activity distinguishes itself via its normative character (ibid, p. 9). “His [Kant’s] fundamental insight is that judgements and actions are to be understood to begin within terms of the special way in which we are responsible for them” (ibid, p. 8). We are responsible for with what and how we furnish the mind with concepts. The criterion of quality for concepts is then the accuracy of their practical application. Thus, the mind is not dependent on the properties of things, but things depend on the applied concepts.

Now, when every human being perceives something different, attributes different meanings, how can it be that human beings can understand each other and come to similar conclusions from the observed phenomena? Possibly there is an ideal *a priori-field*, from which similar rules of thinking apply for every person (Leibnitz). This theory was contradicted by Hume who, for example, placed the concept of causality entirely in the habitual fields of human experience. But, even if causality is born out of experience, how is man at all able to combine and classify phenomena from his accessible environ-

ment. How do comparisons originate, how do differentiations originate? Doesn't man need general rules of thinking to reason reliably (for himself and others), and to bring the reasons for his behavioural pattern and attitude into a 'reasonable' order? This question cannot be answered here. Moreover, even when the rules of thinking 'merely' originate from individual fields of experience, they are, because of their abstractness, more reliable indicators of human communication than attributions of meaning to things.

Beside the 'objective' rules of thinking, the processes of negotiating in the socially and culturally shared field of experience also contribute to a convergence of different concepts. Concepts are, so to speak, socially consolidated meanings manifested in linguistic terms. In this respect the question whether things can be represented in the mind as if things have an 'objective reality' is not the focus of our discussion. The aim is to understand ourselves as concept-users and as attributers of meaning (as if things have a 'subjective reality') (Brandom 2001, p. 7).

Experience is the index of meaning. The development of concepts has the aim of enabling the individual to manage the demands of everyday life. This is the source of any attribution of meaning. But every situation is *sui generis*. To overcome difficulties of everyday life situations without having to develop all strategies and concepts anew, we need general concepts which are independent of the concrete situation. The construction of such a concept network rests on experience and is carried out through an abstracting process from the concrete and situational experiences up to the abstracted concepts, with the goal of maintaining the *autopoeisis* of the system, or, biologically expressed, safeguarding the system's ability to survive.

Mathematics as concept-thinking — a subject-specific perspective

Mathematics is a science which, in a special way, prescind concepts from the concrete, with the aim of developing a precise and definite concept network, and tracks down the rules of thinking. Against this background, Wittenberg's statement that mathematics is 'thinking in concepts' is understandable. With mathematics, it is not only possible to structure phenomena in our world with concepts, but also to experience abstracted mathematical objects as 'a deductive regulated world of its own' (Winter 1995). This becomes apparent especially in two characteristic aspects of mathematics that day-to-

day concept development generally does not possess: the precision of the mathematical concepts and the validity of the arguments.

The everyday ability to react is also possible with non-precise concepts. That is really precisely their strength, because a reduction of the meaning of words used in everyday language would imply an exponential rise in necessary new words. The precision, conciseness, and shortness of the language of mathematics contrast with the redundancies and possibilities of an anticipating and hermeneutic understanding of everyday language. Experience with and understanding of the world are hence always *concept-mongering* and mathematics as a science of abstract objects can be described as a special form thereof, as *concept-thinking*.

What does this mean for teaching?

In school mathematics, the perspective of the student, which is moulded by the concrete and comprehensible, is confronted with idealisations and abstractions of scientific mathematics which is detached from this concrete reality. In many cases, the result is the mathematical concept coagulating to algorithms. Not the conceptual 'mongering' with the concept of integral calculus or fractional arithmetic is learned, through which mathematics can be experienced as a deductive orderly world of its own, but the routine processing of derivative rules dominates as primal characteristic in the field of vision onto a much richer and more comprehensive concept. The concrete is sought after in formalised calculating rules, instead of admitting the concreteness of the phenomena in the proper place.

Hence, mathematics in school manoeuvres in a field, which is determined by at least three areas of conflict, that is, those between

- concretising and abstracting,
- singular and consolidated concepts,
- construction and instruction.

To a certain extent, these areas of conflict interact intensively. The last aspect concerns, in *epistemological view*, the issue of subject-dependent existence of the things reflected in our mind and, therefore, the issue of objectivism or constructivism. Constructivism is currently enjoying popularity as a 'new theory' in education. The traces of its roots go back to Xenophanes. He studied the question whether we can describe the 'world-in-itself'. But our knowledge of the world is derived from our experience. Therefore we have no way of checking the truth of our knowledge with the world, because every access to the world involves our experience. Kant (1787)

suggested that the concepts of space and time were the necessary forms of human experience, rather than characteristics of the world. This implies that we cannot imagine what the structure of the real world might be like, only what the structure of our cognition is. Our ideas adjust to their practical application. This thought is, in biological respect, close to the concept of assimilation in Darwin's evolution theory: only *those* life-forms can survive which are capable of adapting to the given environmental conditions. This does not mean survival of the fittest; instead, adaptation can take place in many different ways. Piaget carried this theory over to the field of cognition and explained knowledge to be tied to target-orientated acting, with the knowledge of an object being its assimilation and accommodation in one's own knowledge structures (Piaget, 1977, p. 74). The objective is to achieve a balance between experienced reality (substantiveness) and cognitive structures. The quality of learning and knowledge is thus not determined by the quality of mapping of reality, but by the function in reality. The nature of learning is hence explicitly instrumental (von Glasersfeld, 1995): 1. "Knowledge is not passively received either through the senses or by way of communication"; 2. "Knowledge is actively built up by the cognizing subject"; 3. "The function of cognition is adaptive in the biological sense of the term, tending towards fit and viability"; 4. "Cognition serves the subject's organization of the experiential world, not the discovery of an objective ontological reality." (von Glasersfeld, 1995, p. 51).

In didactic-methodical respect the relationship of self-regulated learning and guidance provided by the teacher in mathematics lessons finds consideration in the third field of conflict. The following metaphor is to explain this and other actions of the three areas of conflict in their didactic-methodical dimensions.

Walks through the woods

Imagine that mathematics lessons had the task of making a certain closed-in area of woodland passable for the students. The elements of the wood present the mathematical content and mathematical phenomena of a well-defined mathematical area. The ways through the wood are the different ways through the content area and thereby also describe different modes of dealing with mathematics. In the wooded areas there exist well-trodden ways, on which passage is relatively easy and no special techniques have to be



applied. However, on the small paths, which wind their way through the wood, one has to be skillful or seek knowledge for one's wanderings.

The different accesses and passages through the wood can be reduced to two main types. On the one side there is the guided tour on well-developed tracks and on the other side there is the individual access, maybe even without the usage of paths. The diagram indicates these two possibilities.

Access under guidance (of the teacher) has the advantage that the directional learning of the students is prepared in such a way that they are lead past the special attractions of the area. The ways are well constructed, so that the progression is not hindered by unnecessary barriers and the area can be explored unhindered. Care is taken to ensure that the distances covered do not over-tax the learners, that is, they are reasonably short and easy ones are covered before more difficult ones are tackled. The knowledge-controlling orientation is the deductive structure of mathematics. But guided tours do not only have advantages. Foreign control conduces all too quickly to no more paying attention to the way. So there is the danger that one loses the orientation, as a result of which the overall context remains inaccessible. The hiker will notice this at the latest when he is supposed to or wants to walk down the way again on his own. The short distances — easy ones first and then more difficult ones, without any considerable barriers — do not enable the hiker to also make use of the acquired competence in other situations, for example, if he hikes in 'rough' landscapes.

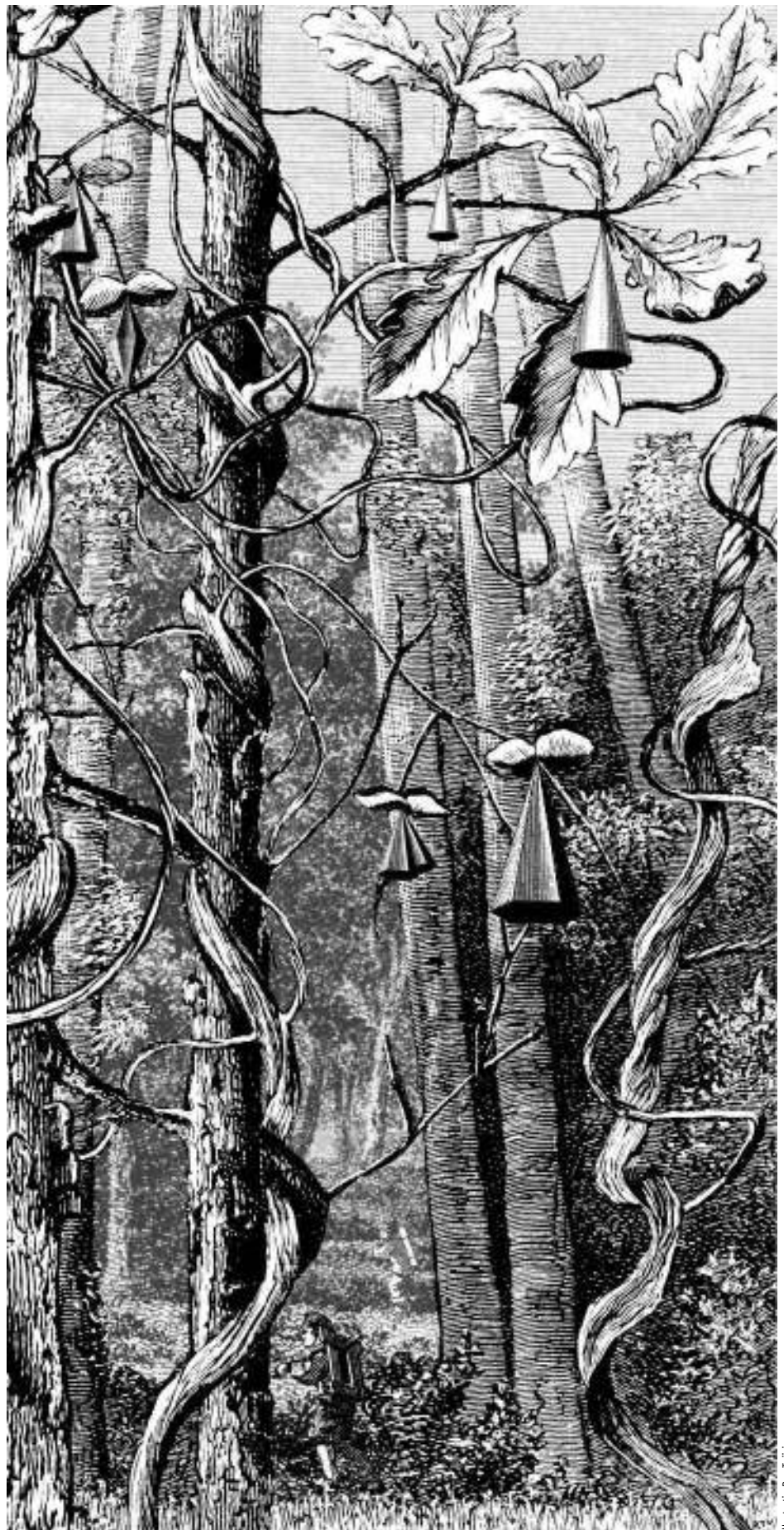
An alternative is offered by reconnaissance on own paths. The originality of the wood itself demands its reconnaissance. Not the well-developed ways, but tracks and own fire-breaks step by step formulate the groundwork for the knowledge of the wood. In one stroke it is just the barriers which characterise the forest area in its speciality. Every overcome hindrance and every aha experience creates a tie between learners and mathematics — something a pre-structured way could never manage. The phenomena can be selected and examined in detail. But also here the hiker can lose the orientation: barriers can turn out to be too large and dead-end roads too long, and the hiker might overestimate his abilities to find a way through the bushes. Here, too, a teacher is needed, not in the role of a guide but in the function of an adviser. Depending on the specific situation of the individual student, he has to determine

which support he or she requires to draw up new perspectives when one errs; he has to confirm that the way is suitable and promising for the student. And he has to show the learners the area as a whole to ensure they do not get lost on their own ways.

While one can describe the first approach as *routine-orientated concept-mongering*, the second approach is characterised through *problem-orientated concept-mongering*. Both activities encompass concrete and situationally placed objects of the experience world. While in the first case the objects could be unambiguously allocated to the consolidated concepts through demonstration and the attributions of meaning through the learner play a secondary role only, the learners have to monger with concepts to actually master the second approach. They themselves have to ask questions to define their singular access, make differentiations, develop processes, construct meanings and develop concepts based on their subjective experience field. The experience of individually steered concept forming strengthens the consolidated meaning which was obtained in the social negotiation process with the individually attributed meanings.

The process of concept-thinking as it is presented above begins with the reflection of the concept building process. In this process, similar structures in individual networks are compared with one another. The concrete problem situations are taken away and the used concepts in these situations are compared for structural similarity, so that an abstract concept, which is detached from the concrete, can emerge. To remain in our picture: step by step, the concrete wood was transposed into a map. The concrete tree, that is to say, the phenomenon containing the mathematics, still only appears as a symbol. Similar trees are given the same symbol. Whole wood segments are represented by higher-ranking symbols. The focus is only on the discovered mathematical phenomena and on the road and path network, the concept network that connects the phenomena with each other. This is described as *structure-orientated concept-mongering*.

Subsequently or simultaneously, the individual maps are compared, with the goal of checking the individual constructions for their suitability in the social context. From this comparison consolidated concepts originate in the school class, which generally stand up to comparison with the social consolidated concepts. That is, they can be matched with them, as concept development is subject to



the same rules of thinking and the concepts are related to similar contexts of experience.

How can this be accomplished in mathematics lessons?

What would learning arrangements look like, in which the students actually go their own way in learning mathematics? How can an area of woodland be enclosed suitably for students, so that, simultaneously, the intended mathematics is acquired as new knowledge at the end of the learning process? How can students be motivated, to actually think in concepts? As an example of a possible teaching/learning-environment, let us present a problem situation from the project *Discovering and Researching Mathematics – constructive learning with intentional problems* (cf. Hußmann 2002, 2003). Starting point and basis for these teaching/learning arrangements are *Intentional Problems*. These are complex, open, internal and external mathematical problem situations, which open the access to a theme area and should carry on far into the theme. The concepts and methods necessary for problem solving are developed by the students on their own and woven into a mathematical theory. For this purpose, the problems are conceived such that they require the discovery or invention of fundamental concepts of a theme area. In this process, the concept terms originate from the interplay of the reference context of the problem situation and the models developed by the learners to attribute meaning to the situation.

A very meaningful property of intentional problems is their difference in structure. Intentional problems are not a consecutive row

of interesting problems for accessing a mathematical theme area, but they are related to one another in view of the central concept of the content area. As single problems they show the different facets of a concept or indicate special aspects. Overcoming the difference in structure, that is, the abstraction from the concrete through recognising the similarities and differences, leads the students to generally acceptable concepts.

An example of an access to integral calculus is given by the following problem situation (This is one of three problem situations (Hußmann 2003)).

Ms. Grat finds herself on the way from Munich into the Ruhr area with her lorry. At a routine motorway police control point her tachograph is checked. It is found out, that there is no trace between 8:00 a.m. and 9:00 a.m. When questioned Ms. Grat says that she had a long break at a motorway service station.

To begin the problem-orientated phase, the students formulate their own questions about the problem and are confronted with their individual access to the problem situation:

- Did Ms. Grat lie?
- How can the distance covered be determined?

To solve the problem the students need the tool of integral calculus, which, however they do not yet have at their disposal at this point in time. Consequently they have to develop the necessary mathematics themselves and they apply their already acquired skills. If the students hereby discover knowledge gaps, they will themselves recognise the necessity to fill these gaps individually. Because of this, the problem situation should

contain enough knowledge already acquired to ensure that the learners can tie up to their previous knowledge and enough unknown to ensure that new knowledge can be built up. In the example, the students activate their previous knowledge, in which they approach the area under the curve with rectangles, trapezoids and triangles. They develop new concepts, for example by making use of still more and smaller areas, to be able to determine the distance as a whole. For this purpose, lower, upper, right or left sums, or more general Riemann sums, can be used. The problem-orientated phase is brought to an end, when the problem is solved.

Upon completion of the problem-orientated phase, the structure-orientated phase is initiated. Own approaches to the solution are considered and compared with other ways. Making reference to the work done on other problems, it is possible to recognise similar strategies which are independent of the specific problem situation, for example:

- the solution can be generated through cumulation of different products or areas;
- the result is more exact if more sub-products are used;
- the result thereby is invariant, irrespective of the choice of geometric figures or the type of totals formation.

This example makes quite clear how the mongering with concepts abstracts from the concrete situation. As learners proceed, mathematical objects themselves will be used as reference context and concept-mongering will be specified to concept-thinking. 

References

- 1 R.B. Brandom, *Making it Explicit*, Harvard University Press, London, 1994.
- 2 S. Hußmann, *Mathematik entdecken und erforschen. Theorie und Praxis des Selbstlernens*, Cornelsen, Berlin, 2003.
- 3 I. Kant, 'Kritik der reinen Vernunft' in: *Kants Werke* IV, Berlin, 1787.
- 4 N. Luhmann, *Die Gesellschaft der Gesellschaft*, Suhrkamp, Frankfurt a.M., 1997.
- 5 H.R. Maturana, *Was ist Erkennen?* Piper, München, 1994.
- 6 J. Piaget, *Recherches sur l'abstraction réfléchissante*, Paris, 1977.
- 7 E. von Glasersfeld, *Radical constructivism: A way of knowing and learning*, Falmer, London, 1995.
- 8 H. Winter, 'Mathematikunterricht und Allgemeinbildung', *Mitteilungen der Ges. f. Didaktik der Mathematik* 61 (1995), p 37–46.

Pieter Moree

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde

Universiteit van Amsterdam

Plantage Muidersgracht 24, 1018 TV Amsterdam

moree@science.uva.nl

Boekbespreking Pasta all'infinito

Italienische Reise

Wiskunde en reizen hebben niets met elkaar te maken. Hoewel... Hoe vaak gaat een research-wiskundige niet naar plaatsen waar hij als toerist nooit naar toe zou zijn gegaan. Albrecht Beutelspracher, hoogleraar meetkunde en discrete wiskunde aan de Universiteit te Giessen (Duitsland) reisde meerdere keren als wiskundige naar Italië; een land dat wel een uitgesproken toeristisch karakter heeft. In het boek *Pasta all'infinito* doet hij verslag van zijn ervaringen. Pieter Moree, verbonden aan de Universiteit van Amsterdam, bespreekt het boek.

This book describes a six week stay of the author (who is also the main character of the book) in Italy as guest of a couple of Italian mathematicians by the names of Franco and Luigia at the University of L'Aquila (just east of Rome in the Abruzzi). This stay took place in the 80's as is apparent at various places in the book (E.T., Ronald Reagan).

The initial contact between the Italian mathematicians and Albrecht was rather indirect and as a consequence Albrecht is in for a few surprises as he arrives at the University of L'Aquila. First of all, this university turns

out to be high up in the mountains and as a consequence temperature plays an important role in the book, in particular as there are problems with the heating (the ominous sentence 'Il riscaldamento é rotto' falls a few times) and the author arrives underdressed at L'Aquila. Secondly, the hosts turn out to essentially speak only Italian, a language not mastered by Albrecht. This then leads to the first of the many cleverly cooked up excuses to do some mathematics, as it is decided that Albrecht will learn some Italian, starting with words for mathematical objects such as line, point, intersection. Thus, the reader's memory of some very elementary geometry is refreshed and he learns, or is reminded, that doing mathematics does not require a large vocabulary. Once Albrecht masters some Italian, he keeps using it; as a consequence, one can learn some Italian from this book as well. Personally I enjoyed this aspect (but see [1]) and it helps create an Italian atmosphere.

The running theme of the book is the research question Albrecht and his hosts occupy themselves with. It arises during a meal with spaghetti Albrecht has with his hosts and their two teenage children Diana and Luca. Al-

brecht explains to the children that he is interested in blocking sets. Franco demonstrates this concept using the spaghetti with minced meat they are eating. Each piece of spaghetti should have at least one piece of minced meat stuck on it and no piece of spaghetti should be completely covered with minced meat. Or, more conventionally, a set B of points of a geometry is called a *blocking set* if every line contains at least one point from B and, moreover, no line is fully contained in B . Diana responds by saying that the most beautiful situation is where each piece of spaghetti has one piece of minced meat stuck to it. Albrecht explains to the children that this is not possible. Luca then asks whether one can be replaced by two. By counting points and lines it is seen that in case of a finite geometry there are no blocking sets such that each line contains precisely two points from B . They then wonder what happens in case of an infinite quantity of spaghetti. This explains the title of the book. The title also beautifully encapsulates the two main subjects of the book: the Italians and mathematics (moreover, these topics are interwoven in the book just as the strands in a solid helping of spaghetti are...).



Spaghetti alla bolognese

In many popular books on mathematics, the popular and the mathematics do not mix well. Here they do. The reason is that math is always done in company (for example, over dinner in the previous paragraph). It is always an interaction, where one participant knows something and tries to explain it to the other(s). Sometimes this is to Diana and Luca, sometimes it is to students (when Albrecht gives a guest lecture). Socrates would have been delighted to see his method so charmingly used. There is a lot of variation in the social settings where mathematics is being discussed in this book. Usually the starting point is something practical. For example, in order for Albrecht to receive some money he needs a Sofi-number ('codice fiscale'). This then leads to a discussion on error-correcting codes. Moreover, these mathematical discussions are interwoven quite naturally into the story and hardly ever work disruptively. Sometimes there is a recurrence of an earlier subject, but in that case the level of difficulty is slightly raised. This is a natural learning process in mathematics, which Beutelspacher organically splices into the book. For example, when he lectures to the students he

returns to the error-correcting codes, but discusses it at a higher level of sophistication. Beutelspacher likes daily life experiences that lend themselves to mathematical evaluation. He prefers the bottom-up approach to math, as opposed to a top-down (Bourbaki) style, cf. [8]. This has the advantage that everybody can learn something, but the disadvantage that there is less sense of overview.

The research problem that Albrecht and his Italian hosts work on involves infinity and so naturally various concepts related to infinity play a big role in this book. This allows Beutelspacher to home in on infinity, one of the most important concepts of mathematics (indeed, some people have described mathematics as the study of the infinite). For example, the fact that the rationals are countable is discussed (Farey fractions) as is the fact that the reals are not (Cantor's diagonal argument). That there are infinitely many primes is proved and primes later resurface as the RSA cryptosystem is being discussed. Even Diana's kefir making attempts naturally lead to a discussion of exponential growth and Fibonacci numbers (in this respect I enjoyed the observa-

tion that $Eva: Braun=3:5$, $Erich: Honecker=5:8$, $Albrecht: Beutelspacher=8:13$).

The author has a very honest, open, and direct style of writing. For example, he is quite candid about the negative aspects of being a (budding) research mathematician. His observations about the Italians display an open and curious mindset and cover many aspects of Italian life (including a few negative ones). The fact that Beutelspacher chose to make himself (a married man) the main character, however, perhaps prevented him from discussing that great Italian asset: 'le belle donne'. Also rather absent is: 'natura'. Albrecht is close to beautiful mountains and somehow he does not go out into them. For me one of the greatest charms of Italy is the wonderful combination of nature and culture it provides.

Beutelspacher has no literary pretensions, no urges to make things more beautiful than they are. His enthusiasm for Italy and in communicating mathematics is obvious and it made me curious about his further writings. On googling 'Beutelspacher' one finds he has written several other books on mathematics (both popular and technical), the most popular of which went through several editions, for example [2–5]. Franco and Luigia are also easily identifiable (their surnames are not given in the book). It is also quite apparent that the love affair of the author with Italy continues to this day. For example, some of his papers are even in Italian.

The impressive mathematical communication skills of Beutelspacher have been noticed by others as well. In the year 2000, he was the recipient of the first Communication prize. This prize, some DM 100,000, was awarded to him in recognition of his outstanding achievements in communicating his discipline to the public (he was selected from amongst roughly 200 applications from all subject areas). The prize is symbolically represented by a hologram which is not only aimed at emphasizing the notion of transparency in science but also demonstrates that it is worthwhile to show certain things in their 'true light'. For it is only in the right light that the hologram will develop its splendour to the fullest.

Albrecht Beutelspacher (1950) is professor of geometry and discrete mathematics at the University of Giessen. His special research interests are cryptography and projective geometry. After studying mathematics and the subsidiary subjects physics and philosophy at Tübingen University, he first worked at Mainz University. There he did his doctorate and qualified as an university lecturer (habilita-

tion). From 1986 to 1988, he worked at the research department of the Siemens AG company in Munich. He has been teaching at Giessen University since 1988. He has often gone abroad for research (to the USA, Canada, and Belgium, and, not surprisingly, to Italy).

Beutelspacher truly reached a large audience with his exhibition *Mathematik zum Anfassen* (hands-on mathematics), in which models and brainteasers play an important part. This exhibition (which first moved around) attracted tens of thousands of visitors and has been turned into the world's first active museum dedicated to mathematics. It is based in Giessen and is named 'Mathematikum' [6]. Beutelspacher has used part of his prize money to extend this exhibition further and keep it running. Indeed, he spends much time keeping the momentum of the Mathematikum going.

On the whole this book is excellent to give a high school pupil or a beginning student

an idea of what it is to be a research mathematician (though a trifle too romantic, I suppose). The more mathematically educated will admire the author's ability to popularise mathematics and presumably find some unknown mathematics. For example, I had not heard of blocking sets (a concept that arose in game theory, in the study of coalitions that can block decisions), nor of Sylvester's conjecture before. To sum up I enjoyed the book highly, among other things, because of its originality.

The reader who argues that (s)he also wants the opinion of a non-mathematician on this book has a good point, since after all this book is written for non-mathematicians. For several of their opinions the reader can visit the site [1].

Sofar this book has only appeared in German, Italian and Korean. I for one am convinced it deserves a wider audience. $\leftarrow$



References

- 1 Amazon.de, <http://www.amazon.de>, Reader's opinions on Pasta all'infinito
- 2 Albrecht Beutelspacher, *"In Mathe war ich immer schlecht..."*, *Berichte und Bilder von Mathematik und Mathematikern, Problemen und Witzen, Unendlichkeit und Verständlichkeit, reiner und angewandter, heiterer und ernster Mathematik*, Third edition, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2001. xii+151 p. ISBN 3-528-26783-6
- 3 Albrecht Beutelspacher, *"Das ist o.B.d.A. trivial!"*. Eine Gebrauchsanleitung zur Formulierung mathematischer Gedanken mit vielen praktischen Tips für Studierende der Mathematik und Informatik, Fourth edition, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997. iv+96 p. ISBN 3-528-36442-4
- 4 Albrecht Beutelspacher, *Mathematik für die Westentasche, Von Abakus bis Zufall*, Second edition, Piper Verlag, ISBN 3-492-04353-4
- 5 Albrecht Beutelspacher, *Kryptologie. Eine Einführung in die Wissenschaft vom Verschlüsseln, Verbergen und Verheimlichen, [Ohne alle Geheimniskrämerei, aber nicht ohne hinterlistigen Schalk, dargestellt zum Nutzen und Ergötzen des allgemeinen Publikums]*, Sixth edition, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2002. xii+152 p. ISBN: 3-528-58990-6
- 6 Mathematikum, <http://www.mathematikum.de>
- 7 Vasco A. Schmidt, *Eröffnung des Mathematikums*, DMV-Mitteilungen 1 (2000), p. 53–54
- 8 Vasco A. Schmidt, *Interview mit Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher*, DMV-Mitteilungen 1 (2000), p. 54–57

Boekbesprekingen

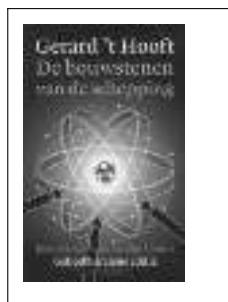
| Book Reviews

Alle in de vijfde serie van het NAW verschenen boekbesprekingen zijn te vinden op onze webpagina.

Tevens staat daar een lijst met ter recensie aangeboden congresverslagen en eventueel andere boeken.

Indien u er prijs op stelt een van deze verslagen te bespreken, meld dit dan binnen een maand na verschijnen van dit nummer (bij voorkeur per e-mail) op onderstaand adres.

*Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.10
Dept. of Math. and Computer Science
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
Webpagina: www.math.rug.nl/revwg/
e-mail: wgreview.win@tue.nl*



G. 't Hooft

Bouwstenen van de Schepping. Een Zoektocht naar het Allerkleinste

(6e, herziene en bijgewerkte druk)

Amsterdam: Prometheus Books, 2002

268 p., prijs €20,35

ISBN 90-446-0145-8

Gerard 't Hooft, theoretisch fysicus, Nobelprijswinnaar, en onder dezen een van degenen met de meeste affiniteit voor wiskunde, heeft in dit boek geprobeerd te schetsen wat de 'elementaire-deeltjes'-fysica is en ook hoe deze zich heeft ontwikkeld. Zijn boek is bedoeld voor een algemeen — Nederlands — publiek. Dit is al weer de 6e druk, 10 jaar nadat het uitkwam, en een aantal zeer recente ontwikkelingen zijn toegevoegd.

Het is te prijzen dat iemand van zijn kaliber aan het populariseren gaat, maar vaak vond ik de stof zonder de technische achtergrond toch nogal mysterieus blijven, en het boek leest niet altijd even soepel.

Hoewel 't Hooft veel wiskunde aanroept en ook allerlei wiskunde heeft geïnspireerd, is zijn houding die van de theoretisch fysicus, pragmatisch, zoniet opportunistisch als het om rigoreusheid gaat, en zeker niet die van een wiskundige die alleen maar bewijsbare resultaten accepteert.

Voor wiskundigen is in het bijzonder behartenswaard hoe hij herhaaldelijk waarschuwt om bij toepassing op de kleine lettertjes (de precieze condities van een wiskundige stelling) te letten bij toepassingen in de natuurkunde. Regelmatig blijkt het daarvoor mogelijk om stellingen te omzeilen, en blijken beweringen die op wiskundige gronden voor onmogelijk gehouden werden toch waar.

Er komen vrij veel onderwerpen aan de orde, maar eigenlijk is de functie van dit boek meer om inspiratie voor verder studie op te doen, dan dat het een toegankelijke inleiding tot het vakgebied biedt. Vooral de beschrijving van de ontwikkelingen begin jaren zeventig, waar 't Hooft zijn belangrijkste bijdragen leverde, is instructief. De beschrijving van het 'standaardmodel' dat toen ontwikkeld werd, en dat alle krachten behalve de zwaartekracht goed beschrijft, vond ik het meest waardevolle gedeelte.

Ook de beschrijving van zijn eigen rol en bijdragen biedt hier iets extra's: hoe in Yang-Mills-theorieën het Higgsmechanisme massa aan deeltjes geeft, de 't Hooft-Polyakov monopool, asymptotische vrijheid — op korte afstand oefenen quarks slechts weinig invloed op elkaar uit. De laatste observatie was door 't Hooft gedaan op een conferentie, en korte tijd later door anderen gepubliceerd, wat een interessante prioriteitskwestie opleverde.

Latere ontwikkelingen zoals supersymmetrie, snaartheorie, M-theorie, en wat dies meer zij worden genoemd, maar daarvoor kan men eigenlijk beter terecht bij Brian Greene's *The elegant universe*. Deze theorieën worden vooral aangedreven door consistentie-eisen, niet door observaties. Daardoor is het karakter van de elementaire-deeltjesfysica nogal veranderd, en voor buitenstaanders ziet een en ander er steeds speculatiever uit. De onzekerheid omtrent een aantal fundamentele noties komt duidelijk naar voren. Ondanks sombere profetieën is de theorie van de *Bouwstenen der Schepping* nog lang niet af.

A. van Enter

Recent Trends in Combinatorics

Cambridge: Cambridge University Press, 2001

212 p., prijs £40,-

ISBN 0-521-80170-2

This is a collection of surveys and research papers on combinatorics and additive number theory, presented at a conference in Mátraháza, Hungary. The book is dedicated to the memory of the brilliant and versatile mathematician Paul Erdős.

The foreword gives a flavour of Paul Erdős' somewhat unusual lifestyle and an outline of the importance of his work in combinatorics and other related fields.

The first article is a selection of some old and new problems and results written by Erdős which, in his opinion, have been undeservedly forgotten or neglected.

There is a very interesting paper by Noga Alon on the Combinatorial Nullstellensatz. Numerous applications in additive number theory and in graph theory are discussed and unified proofs are presented. As an example we mention the following theorem: for any prime p , any loopless graph G with average degree bigger than $2p - 2$ and maximum degree at most $2p - 1$ contains a p -regular subgraph.

An article by Peter Cameron and Paul Erdős on sum-free sets also deserves special attention. For any irrational real number α the set $S_\alpha := \{k \in \mathbb{N} : \frac{1}{3} < \{k\alpha\} < \frac{2}{3}\}$ is introduced. The set S_α is sumfree, has density $\frac{1}{3}$ and is also maximal. Furthermore the sets $S_\alpha(n) := S_\alpha \cap \{1, 2, \dots, n\}$ are investigated regarding the length of arithmetic progressions in them. B. Bollobás and O. Riordan wrote a long article on the Tutte polynomial for coloured graphs. Results on knots, links and Reidemeister moves are presented. At the end there is a collection of some challenging problems.

This book can be recommended to all those interested in combinatorics and cognate fields.

C. de Vreugd

S. Hawking

Het Universum

(Vertaling door R. Jonkers van 'The Universe in A Nutshell')

Amsterdam : Bakker, 2001

223 p., prijs €27,20

ISBN 90-3512-364-6

In *Het Universum* behandelt Stephen Hawking de nieuwste inzichten in de kosmologie, de fysica van het ontstaan en de evolutie van het heelal. Het boek is geschreven voor leken, en is uitbundig geïllustreerd.

In de kosmologie wordt een belangrijke plaats ingenomen door de algemene relativiteitstheorie, die beschrijft hoe de zwaartekracht de ruimte en de tijd kromt. Als gevolg van deze vervorming kan men beredeneren dat het heelal ooit ontstaan moet zijn in één punt, de Big Bang. Dat is ook precies waar de problemen ontstaan: door quantumeffecten is de relativiteitstheorie niet geldig voor kleine afstanden. Het grootste deel van het boek gaat over de verschillende, tot nog toe niet geheel succesvolle pogingen om tot een theorie te komen waarin quantummechanica en relativiteitstheorie verenigd worden.

In het eerste hoofdstuk wordt een overzicht gegeven van de algemene relativiteitstheorie. Vervolgens komen verschillende mo-

gelijkheden voor een verenigde theorie aan bod, zoals supersymmetrie, snaartheorie, p -branes en M -theorie. Veel van deze ideeën veronderstellen dat ons heelal eigenlijk is ingebed in een hogerdimensionale ruimte, die wij niet kunnen waarnemen. Ook 'imaginaire tijd' speelt daarbij een rol, overigens zonder dat het erg duidelijk wordt wat hieronder moet worden verstaan. Daarnaast is er veel aandacht voor experimenten, die vaak verhelderend werken.

De kromming van de tijdruimte leidt tot fascinerende vraagstukken over causaliteit en de richting van de tijd, waarop het antwoord vaak nog onbekend is. Het boek bespreekt enkele van die problemen, bijvoorbeeld of we de toekomst kunnen voorspellen (misschien, volgens Hawking, als er maar geen informatie verdwijnt in zwarte gaten), en of we terug kunnen naar het verleden en dat kunnen veranderen (ja, maar de kans is buitengewoon klein).

De auteur weet het onderwerp vlot te presenteren en is er in geslaagd het toegankelijk te maken voor een breed publiek. Dat brengt onvermijdelijk een zekere vaagheid met zich mee, waarbij de behandelde theorieën oppervlakkig beschreven worden zonder veel uitleg of argumentatie. Daardoor wordt de tekst helaas hier en daar moeilijk te begrijpen, en blijft de lezer achter met vragen omtrent de precieze betekenis van de gedane beweringen. Dit wordt verergerd door een aantal storende fouten en onnauwkeurigheden, die overigens voor een substantieel deel te wijten zijn aan de vertaling.

M. van Noort

A.W. Grootendorst

Jan de Witt: Elementa Curvarum Linearum Liber Secundus

Amsterdam: CWI, 2003

313 p., prijs €17,50

ISBN 90-6196-514-4

In 1997 publiceerde het CWI het eerste boek van de *Elementa Curvarum Linearum* van Jan de Witt (1625–1672). Het was vertaald en van inleiding en commentaar voorzien door Albert Grootendorst. Nu is ook het tweede boek van de *Elementa* beschikbaar.

De *Elementa* werden geschreven in de periode van de opkomst van de Cartesiaanse meetkunde. Het eerste deel van het werk van De Witt betrof een meer klassieke meetkundige verhandeling. In dit tweede deel laat de auteur zien wat hij van Descartes heeft opgestoken. Dat betekent veel formules. Van diverse formules toont De Witt aan dat ze overeenkomen met de 'klassieke' rechte lijn, parabool, ellips en hyperbool. Enerzijds maken de formules de tekst van dit tweede boek 'herkenbaarder' voor de hedendaagse lezer dan het eerste boek was. Anderzijds blijft het een tekst die onmiskenbaar het stempel van de zeventiende eeuw draagt. Dat blijkt bijvoorbeeld uit de vele woorden en schijnbaar node-loze gevalsonderscheidingen, de typografische afwijkingen (zoals het gelijktken en aa in plaats van a^2), of de bijzondere wijze waarop factoren 'buiten haakjes' worden gehaald. In de inleiding komt de wiskundig-historische context uitvoerig aan bod. Zo wordt bijvoorbeeld duidelijk dat de gevalsonderscheidingen bij ons vreemd overkomen omdat wij — in tegenstelling tot De Witt — negatieve getallen gebruiken. Tevens wordt aandacht besteed aan het probleem van Pappus, de zeventiende-eeuwse populariteit van reconstructie van antieke teksten en hoe een beperkt aantal wiskundigen daarop voortborduurd en aldus (in

retrospectief) het vakgebied van de analytische meetkunde ontwikkelden. De boeken van De Witt vormen een bijzondere link tussen de antieke teksten en de meer moderne (Cartesiaanse) aanpak. Een cultuurhistorische context ontbreekt. Waarom de reconstructie van antieke traktaten tot de tijdsbesteding behoorde van Viète, Fermat, Snellius en Van Schooten wordt bijvoorbeeld niet duidelijk.

Voor teksten met het historisch belang van de boeken van De Witt is het een goede zaak dat ze op eenvoudige wijze beschikbaar zijn voor iedere geïnteresseerde. De toegankelijkheid is met de vertaling, inleiding en toelichting van Grootendorst aanzienlijk vergroot. Middelbare scholieren in de bovenbouw van het gymnasium, studenten wiskunde en studenten van de lerarenopleiding wiskunde kunnen (delen van) deze tekst nu — onder begeleiding — bestuderen. Daarmee lijkt me winst geboekt. Het boek van De Witt illustreert dat de hedendaagse wiskunde niet vanzelf spreekt, maar dat ze het resultaat is van een eeuwenlang ontwikkelingsproces.

Er zat een flinke tijdspanne tussen het verschijnen van het eerste deel in 1997 en het tweede deel. Het moge duidelijk zijn dat wat mij betreft het resultaat het wachten waard was. Het is bijna jammer dat de *Elementa* geen derde deel heeft! Grootendorst heeft de Nederlandse wiskundige gemeenschap een geweldige dienst bewezen.

D. Beckers



Algebraic Combinatorics and Computer Science.

A tribute to Gian-Carlo Rota

Berlin: Springer-Verlag, 2001

546 p., prijs \$ 70,-

ISBN 88-470-0078-5

Gian-Carlo Rota was één van de meest veelzijdige wiskundigen van de twintigste eeuw. Hij begon zijn carrière in de operatortheorie, maar heeft vooral naam gemaakt binnen de discrete wiskunde (denk aan de *Umbral Calculus* en de reeks artikelen *On the Foundations of Combinatorial Theory*). Ook had hij uitgebreide kennis van en interesse op het gebied van algebra (met name invariantentheorie) en kansrekening. Rota kon zeer goed schrijven, zie bijvoorbeeld zijn beruchte vlijmscherpe en erudiete boekrecensies in *Advances in Mathematics* of zijn fraaie overzichtsartikelen. Naast zijn aanstelling als hoogleraar wiskunde aan de MIT was hij ook hoogleraar filosofie aan dezelfde instelling. Hij was zeer trots op deze tweede aanstelling.

Naast zijn grote visie op de wiskunde in het algemeen, was Rota bij velen bekend om zijn warme persoonlijkheid en generositeit in samenwerkingsverbanden met andere wiskundigen. Hij wist feilloos zijn manier van samenwerken aan te passen aan het niveau van de ander (of die nu AIO was of zeer ervaren onderzoeker). Daarnaast kon hij ook zeer scherp de waarheid zien en zonder terughoudendheid vertellen, wat hem natuurlijk niet altijd in dank werd afgenomen. Een aardige website waar de vele aspecten van Rota goed naar voren komen is www.rota.org.

Het is gezien het bovenstaande niet verwonderlijk dat, na het plotselinge overlijden van Rota in 1999, verscheidene boeken en

speciale afleveringen van tijdschriften aan hem gewijd zijn. Het boek waaraan deze recensie gewijd is, is daar één van. De titel is enigszins misleidend, omdat het boek artikelen bevat over allerlei wiskundige onderwerpen en geen artikelen over informatica. Het boek begint met een artikel van Crapo over verscheidene onderwerpen die Rota had gesuggereerd. Daarna komt Rota zelf aan het woord met zijn vier Fubinilezingen, die zeer de moeite waard zijn en stof tot nadenken geven. Geheel in de stijl van Rota, die veel belang hechtte aan overzichtsartikelen (zie bijvoorbeeld onderdeel 4 van Rota's *Ten Lessons I wish I Had Been Taught*, te vinden op www.rota.org onder het kopje *Hotair enterprises*), bevat het boek overzichtsartikelen van Aigner over Catalangetallen en van Perrin over de combinatoriek van woorden. Vanzelfsprekend bevat het boek de nodige artikelen over *Umbral Calculus*, zowel toepassingen (circulante recursieve matrices (Barnabei en Montefusco), het oplossen van recursies (Soto, Koelemeijer en Uw recensent) en invariantentheorie (Brini, Regonati en Teolis)) als verbanden van *Umbral Calculus* (Poisson kansverdelingen (Senato en Di Nardo) en het splijten van alfabetten (Lascoux)). Van de overige artikelen noem ik slechts het artikel van Buchsbaum over Weyl modules, dat naast de nodige fraaie wiskunde ook aardige informatie geeft over de persoonlijke samenwerking met Rota.

Gezien de grote verscheidenheid aan artikelen (zowel qua onderwerp als qua niveau) is het moeilijk dit boek onder een bepaalde noemer te vangen of er een algeheel oordeel over te vellen. Voor de liefhebber van zuivere wiskunde zijn er in ieder geval allerlei interessante zaken te vinden.

A. Di Bucchianico



R.J. Nowakowski

More Games of No Chance

Cambridge: Cambridge University Press, 2003

535 p., prijs £40,-

ISBN 0-521-80832-4

In juli 2000 werd de tweede *Combinatorial Games Theory Workshop* gehouden. De proceedings van deze workshop werden gepubliceerd als boek met de titel *More Games of No Chance*, als opvolger van *Games of No Chance* bij de eerste workshop in de serie. De bijdragen in het boek houden zich bezig met abstracte combinatorische spelen: strategische spelen voor twee spelers, waarbij steeds de spelers volledige informatie over de stelling hebben en kans geen rol speelt. Er zijn artikelen over bekende spelen als Schaken of Go, over minder bekende moderne spelen zoals Phutball en Amazons, en over spelen die louter interessant zijn om te analyseren maar niet snel door mensen gespeeld zullen worden, zoals multi-dimensionaal boter, kaas en eieren. Een interessante vraag bij dit soort spellen is bijvoorbeeld: gegeven een stand gedurende het spel, heeft de speler aan zet een winnende strategie? Er zijn verschillende manieren om naar zo'n vraag te kijken: een analyse volgens de methodologie zoals in het klassieke boek *Winning Ways* van Berlecamp, Conway en Guy, een analyse van de computationele complexiteit van het probleem, of analyse en het doorrekenen van posities met behulp van een computer. In de ruim dertig artikelen in het boek komt elk van deze manieren om naar het

probleem te kijken naar voren. De artikelen in de *Winning Ways*-stijl zijn vooral aardig voor degenen die met deze stijl van denken vertrouwd zijn.

Een paar voorbeelden van andere artikelen: het verslag van het aanleggen van een database voor eindspelen van Chinees schaak (Xiangqi, een vorm van schaken gespeeld in China); een bewijs dat laat zien dat het PSPACE-moeilijk is om te beslissen of een Go eindspel gewonnen is, waarbij in het eindspel een aantal locale gebieden zijn waar nog wat 'kan gebeuren', elk met een spelboom van polynomiaal formaat.

Twee artikelen gaan niet over spelen, maar puzzels, en een-tje over *Life*: het verslag van een boeiende zoektocht naar 'spaceships' in cellulaire automaten zoals *Life*. Het boek sluit af met een lijst open problemen in combinatorische speltheorie en een bibliografie met ruim negenhonderd referenties. Sommige van de artikelen vragen voorkennis (zoals complexiteitstheorie of de 'Winning Ways'-terminologie) van de lezer; andere vragen alleen wat wiskundige vaardigheid. Voor wiskundigen en informatici die van de wiskundige analyse van abstracte spelen houden is dit een leuk boek om eens te lezen ('voor op het nachtkastje'); sommige van de bijdragen maken het ook nuttig voor een bibliotheek op het gebied van de Artificial Intelligence. H. Bodlaender

A.A. Ivanov, S.V. Shpectorov

Geometry of Sporadic Groups II: Representations and Amalgams

(*Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*)

Cambridge: Cambridge University Press, 2002

286 p., prijs £55,-

ISBN 0-521-62349-9

Het boek *Geometry of sporadic groups II, representations and amalgams* is het tweede deel van de tweedelige reeks over het bewijs van de classificatie van de vlag-transitieve P - en T -meetkundes. De auteurs A.A. Ivanov en S.V. Shpectorov richten zich met deze reeks tot een publiek van onderzoekers in de theorie van meetkundes en eindige groepentheorie. De genoemde classificatie van vlag-transitieve P - en T -meetkundes is onder andere van belang omdat deze meetkundes afkomstig zijn van de sporadische simpele groepen. Hierdoor is dit boek niet alleen van belang voor de theorie van meetkundes, maar ook voor de theorie van eindige simpele groepen.

Na een inleidend eerste hoofdstuk, waarin enkele begrippen betreffende meetkundes en amalgamen worden vastgelegd en een aantal eigenschappen hiervan wordt gegeven, volgen zes hoofdstukken over representaties van meetkundes. Het tweede hoofdstuk geeft enkele algemene eigenschappen, terwijl het derde hoofdstuk representaties van klassieke meetkundes beschrijft. In de hoofdstukken 4 en 5 worden representaties van meetkundes afkomstig van de Mathieu, Held en Conway groepen uitgerekend, terwijl hoofdstuk 6 en 7 de representaties van involutiemetkundes en meetkundes afkomstig van grote sporadische groepen behandelen. Volgend op deze hoofdstukken komen vijf hoofdstukken over groep-amalgamen. De laatste twee hiervan geven de link met meetkundes door amalgamen van P - en T -meetkundes te beschrijven. Tenslotte wordt in het dertiende en laatste hoofdstuk een aantal verdere ontwikkelingen en projecten geschetst.

De onderwerpen die in het boek behandeld worden, zijn relatief technisch van aard. De auteurs hebben de daardoor optredende moeilijkheden wat betreft helderheid en inzichtelijkheid opgevangen door een helder Engels taalgebruik en door korte samenvattingen aan het begin van elk hoofdstuk te geven. Verder wordt de leesbaarheid van het boek vergroot door een korte index. Al met al is dit een boek dat voor een ieder geïnteresseerd in de theorie van meetkundes en eindige simpele groepen, zeer aan te raden is.

P. Beelen

R. Miron, D. Hrimiuc, H. Shimada, S.V. Sabau

The Geometry of Hamilton and Lagrange Spaces

(*Fundamental Theories of Physics*)

Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001

338 p., prijs €142,-

ISBN 0-7923-6926-2

According to the preface, this monograph is a continuation of the books by R. Miron, *The geometry of higher-order Lagrange spaces. Applications to Mechanics and Physics*, Kluwer (1997) and R. Miron and M. Anastasei, *The geometry of Lagrange spaces. Theory and applications*, Kluwer (1994), emphasizing Hamiltonian geometry. It can be considered as a very deep study of the tangent bundle to a manifold, the Lagrangian aspect, and its cotangent bundle, the Hamiltonian aspect and the Legendre duality connecting the two. Very general Lagrange functions on the tangent bundle are allowed, the only condition apart from continuity being, that when restricted to a single tangent space, its Hessian at any tangent vector different from zero is nondegenerate. In case the Lagrangian is positive, satisfies an appropriate homogeneity condition, and the above Hessians are positive definite, the square root of the Lagrangian defines a Finsler structure. Finsler structures by themselves are already a surprisingly rich generalization of Riemannian structures.

Lagrange spaces of higher order also exist, using jet bundles of the underlying manifold (configuration space). It is a difficulty to define a dual to this in such a way that a reasonable Hamiltonian version exists, but R. Miron found a solution in the product over the base space of the jet bundle of one lower order with the cotangent space. The study of these higher order Hamilton spaces occupies about 100 pages.

The reader is assumed to have a good background in differential geometry. The notation switches between the 'physics' notation in terms of local coordinates and the abstract notation from differential geometry. I was very surprised by the richness of the subject, and I think the book is an important reference work for researchers who are interested in Analytical Mechanics and more generally in Lagrangians and Hamiltonians occurring anywhere in Physics. It is an inspiration to students and researchers in differential geometry.

Somewhat striking is the use of the English. An interesting example is that when symmetric matrices are assumed to be positively defined they had better be positive definite as well. Moreover there are many typographical errors. In some instances they make a definition unintelligible, and only thorough reading of the context can help the reader out.

The book has a short but effective index and an extensive bibliography.

H. Hendriks

Z. Kamont

Hyperbolic Functional Differential Inequalities and Applications*(Mathematics and its Applications, Volume 486)*

Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999

320 p., prijs €139,-

ISBN 0-7923-5791-4

The author presents an exposition of hyperbolic functional differential equations. Here 'hyperbolic' has to be understood in the context of partial differential equations and not in the sense of dynamical systems. The book deals with initial problems for functional differential equations of the Hamilton-Jacobi type on the Haar pyramid. The results are based on the method of bicharacteristics and on theorems on integral functional inequalities. The main interest of the author, however, is numerical methods for functional differential equations. Here, functional difference inequalities play a crucial role to establish error bounds and convergence results. The point of view of the author is that these functional difference inequalities are nothing else than recurrent inequalities for an associated monotone operator.

Unfortunately the approach by the author is very theoretical with many assumptions and therefore not easy to read. Although the author mentions some motivating examples in the preface, he does not return to these examples to illustrate the usage of the methods and schemes developed in the book. Despite the great effort of the author to write a complete and precise book, it is basically impossible to learn from the present text the methods and techniques the author is so fond of.

S.M. Verduyn Lunel

K. Fritzsche, H. Grauert

From Holomorphic Functions to Complex Manifolds*(Graduate Texts in Mathematics, Volume 213)*

New York: Springer-Verlag, 2002

392 p., prijs €69,50

ISBN 0-387-95395-7

Hans Grauert wordt algemeen erkend als een van de grondleggers van de moderne theorie van meerdere complexe variabelen. Een inleiding in de theorie van de hand van de meester zelf trekt dan vanzelf de belangstelling. Al lezende blijkt dat het resultaat alle complimenten verdient. De presentatie is helder, stap-voor-stap, veronderstelt niet meer dan wat standaard algebra, topologie en een eerste kennismaking met de theorie van één complexe variabele. Over de structuur van de presentatie is zeer goed nagedacht, wat men ook mag verwachten gezien het feit dat dit boek een herziene uitgave is van het eerdere boek *Several Complex Variables* (Graduate Texts in Mathematics 38, Springer-Verlag, 1976) van dezelfde auteurs. Het eerste hoofdstuk behandelt holomorfe functies in een open deelverzameling van $\mathbb{C}^n$. Het tweede hoofdstuk behandelt domeinen van holomorfie. In de hoofdstukken III en IV wordt de theorie van analytische verzamelingen, complexe variëteiten en holomorfe vezelbundels uiteengezet. Daarna gaan de auteurs over op wat geavanceerdere onderwerpen: Steintheorie, Kählervariëteiten en randgedrag van holomorfe afbeeldingen. Zelf heb ik met name plezier beleefd aan de hoofdstukken over complexe variëteiten en Kählervariëteiten. Ik vind de presentatie hier inzichtelijker dan in bijvoorbeeld het

standaardwerk over complexe algebraïsche meetkunde 'Principles of Algebraic Geometry' van P. Griffiths en J. Harris (John Wiley and Sons, New York, 1978). Om een voorbeeld te geven, in het boek van Griffiths en Harris worden de Laplacianen en harmonische vormen al vrij vroeg ingevoerd, en wordt ook al vroeg de Hodge Stelling voor compacte complexe variëteiten bewezen. De hiervoor benodigde hoeveelheid functionaalanalyse leidt de lezer echter mijns inziens af van de essentie van de theorie. In het boek van Fritzsche en Grauert worden na de gebruikelijke differentiaaloperatoren voor complexe variëteiten de operatoren L en Λ ingevoerd voor Kählervariëteiten. Voor deze operatoren worden dan de commutatorrelaties bewezen die essentieel zijn voor de Hodge-theorie op Kähler variëteiten. Pas tegen het eind van de presentatie worden dan harmonische vormen en Laplacianen gedefinieerd (voor algemene compacte complexe variëteiten), en wordt onmiddellijk daarna de Hodge-decompositie voor Kählervariëteiten afgeleid. Zodoende krijgt men eerder een gevoel voor de Kählervoorwaarde en voor de rijke theorie die daar een gevolg van is dan in het boek van Griffiths en Harris. De theorie is uitgebreid gelardeerd met opgaven, voorbeelden en toepassingen. Verder gaat het boek nergens diep in op hoger-dimensionale cohomologie, laat staan op hypercohomologie of spectraalrijen. Door de presentatie elementair te houden levert het boek een aangename kennismaking met de theorie van meerdere complexe variabelen. Ondanks dat zware methoden worden vermeden, kunnen toch aardig diepgaande resultaten bewezen worden, zoals de oplossing van het Levi probleem en de uitbreidingsstelling van Remmert-Stein (voor de laatste zie R. Remmert en K. Stein, *Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen*. Math. Ann. 126, 263–306 (1953)). Dit boek is een aanrader voor iedereen die met elementaire middelen door de theorie van meerdere complexe variabelen heen geleid wil worden.

R. de Jong

M. van Frankenhuysen, M.L. Lapidus

**Fractal Geometry and Number Theory
Complex Dimensions of Fractal Strings and Zeros of Zeta Functions**

Basel: Birkhäuser, 1999

280 p., prijs €83,-

ISBN 0-8176-4098-3

Welke verbanden er zijn tussen de twee in de titel genoemde onderwerpen, fractale meetkunde en getallentheorie, wordt in dit boek uiteengezet. Een centrale rol speelt het begrip complexe dimensies van een fractale snaar. Een fractale snaar is een begrensde open verzameling in de reële rechte. Zij is de vereniging van een rij paarsgewijs disjuncte intervallen met lengten $l_1, l_2, l_3, \dots$. Aangenomen wordt dat de verzameling L van lengten oneindig is. Bij een fractale snaar wordt een zeta-functie gedefinieerd door $\zeta_L(s) = \sum_{j=1}^{\infty} l_j^s$. De polen van de analytische voortzetting van ζ_L worden de complexe dimensies genoemd. Voor de fractale snaar die bestaat uit de open verzamelingen die bij de constructie van de gewone Cantor-verzameling worden verwijderd uit het eenheidsinterval liggen de complexe functies met gelijke afstand tussen elk tweetal opeenvolgende op de lijn $\text{Re } z = D$, waarin D de Minkowski-dimensie van het Cantor-discontinuüm is. Het spectrum van een fractale snaar is de rij van de frequenties $f = kl_j^{-1}$ en de spectrale zeta-functie ζ_v kan gedefinieerd wor-

den door $\zeta_v(s) = \zeta_L(s)\zeta(s)$, waarin ζ de (gewone) zeta-functie van Riemann is. Ook generalisaties van de fractale snaar, onder andere naar hogere dimensies, bijvoorbeeld fractale drums, komen aan de orde. Het hoofdonderwerp van het boek is het zogenaamde inverse probleem: kan men de dimensies van een fractale snaar horen? Met andere woorden, welke informatie betreffende de ligging van de complexe dimensies kan verkregen worden uit het frequentie-spectrum? En meer in het bijzonder, heeft de afwezigheid van periodiek gedrag in het frequentie-spectrum een onregelmatige ligging van de complexe dimensies tot gevolg? De reikwijdte van de theorie blijkt uit een van de hoofdresultaten: een positief antwoord op het inverse probleem is equivalent met de Riemann-hypothese. Het boek is een helder geschreven verslag van recent onderzoek en bevat vele nieuwe resultaten. De presentatie van de theorie wordt ondersteund door goed gekozen voorbeelden. De uitvoering van het boek is in één woord voortreffelijk.

J.M. Aarts



J. Kigami

Analysis on Fractals

(Cambridge Tracks in Mathematics 143)

Cambridge: Cambridge University Press, 2001

226 p., prijs £40,-

ISBN 0-521-79321-1

Er valt meer te doen met fractals dan de Hausdorffdimensie uitrekenen. Bijvoorbeeld harmonische analyse bedrijven, met behulp van de Laplace-operator. Dus waarom niet warmte- en potentiaalvergelijkingen onderzocht op fractale verzamelingen? Mandelbrot verzekert dat fractalen de natuur representeren, en allerlei natuur- en scheikundigen en biologen vallen hem bij, dus zal het wel zo wezen.

Dit boek beoogt een uiteenzetting te geven van de opbouw en eigenschappen van Laplace-operatoren, en Laplace- en warmtevergelijkingen op fractale verzamelingen. Bij fractalen moet men hier denken aan Sierpinski-zeven, aan Koch-curves (de sneeuwvlok), of tenminste verzamelingen die 'self-similar' zijn, of preciezer gezegd: zijn voortgebracht door een 'iterated function system' (het boek gebruikt andere terminologie). Algemener fractalen komen vooralsnog niet aan bod, omdat men dit veld nog aan het ontginnen is.

Fractale Brownse bewegingen hebben bijgedragen aan de ontwikkeling van Laplace-operatoren op fractalen. Dit boek gebruikt een benadering van de fractaal met eindige verzamelingen, waarop een discrete versie van de Laplace-operator genomen wordt. Hierbij is de analogie met elektrische netwerken en effectieve weerstanden van belang, een analogie die in nogal summere voorbeelden wordt uitgelegd.

Een en ander levert een goed afgewerkte, maar niet eenvoudige onderzoeksmonografie, die de soms lastig te krijgen Japanse literatuur meeneemt. Vandaar duiken penta- en hexakuns op, en lezen we over Hata-bomen in plaats van Barnsley-varens. Ieder hoofdstuk wordt voorafgegaan door een korte vooruitblik en afgesloten met een paragraaf *Notes and references* (naar de research-literatuur) en met een set oefeningen, die doorgaans wel te doen

zijn. In de vijf hoofdstukken komen onder meer het maximum-principe, Dirichletvormen, Greense functies, eigenwaardeproblemen en heat kernels aan de orde. Tenslotte twee appendices die bepaalde onderwerpen uit de tekst verder verklaren en/of uitdiepen.

Hoofdstuk 1 geeft een *crash course* in fractalen, met een symbolische 'iterated function system' aanpak. Wie echter van tevoren niet enthousiast is voor fractalen, wordt het ook niet. De weinige voorbeelden vereisen soms wel erg veel zelfwerkzaamheid om de behandelde begrippen te snappen. Verbanden met andere theorie over fractalen worden nauwelijks gelegd: geen verwijzing naar bijvoorbeeld Barnsley, of Pesin, alleen Falconer en Moran worden vluchtig genoemd. De verwijzing naar Milnor & Thurston, omdat ze ook 'aan symbolische dynamica doen' is nogal vergezocht. Zo krijg je de indruk dat een fractal een mysterieus gegeven is, en niet als bijvoorbeeld een groeiend kristal, of als Juliaverzameling bij complexe functie-iteratie, natuurlijk optreedt. Ik had graag gezien wat een 'postcritically finite fractal' te maken heeft met Juliaverzamelingen van 'postcritically finite' polynomen.

Dat het onderwerp nauwelijks in een kader van de bestaande wiskunde wordt geplaatst vind ik de voornaamste tekortkoming van het boek. Is de crash course over fractalen nogal steriel, de crash-course over het gebruik van Laplace-operatoren ontbreekt geheel. Niettemin wordt hierover beslist wel wat meer voorondersteld dan 'only a basic knowledge of advanced analysis', en zo ontbreekt ook de mogelijkheid de voor fractalen opnieuw ingevoerde begrippen te vergelijken met de klassieke. Had de klassieke Laplace-operator dan iets te maken met elektrische circuits? en met Brownse beweging? Als student van dit boek kun je dit maar beter van tevoren te weten.

Voor wie genoeg wiskundige bagage en interesse in het vak heeft, kan dit boek zeer van nut zijn. Anderen (en ook de gemiddelde 'graduate student') zullen er weinig aan hebben. H. Bruin



M. Chipot

Elements of Nonlinear Analysis

(Birkhäuser Advanced Texts)

Basel: Birkhäuser, 2000

259 p., prijs €49,50

ISBN 3-7643-6406-8

This book is an introduction to the variational analysis of nonlinear elliptic and parabolic partial differential equations. The presentation is attractive; in the first chapter two examples from physics and from biology are worked out in detail. The first example discusses the deformation of an elastic membrane when a force is exercised on it; after many simplifications one obtains the standard Dirichlet problem. In the second example the growth of a population of bacteria in a Petri dish is modelled, which leads in one case to a linear parabolic partial differential equation, and, when using more realistic assumptions, to a non-linear parabolic system.

The book is aimed at graduate students; it contains many interesting exercises, and it is reasonably self contained. In the second chapter an exposition is given of relevant theorems from function-

al analysis used throughout the book. This chapter suffers from a lack of precision. Quite a few times the notion 'boundedness' is omitted in definitions and theorems. One has to understand it from a picture or from the proof of a theorem. For instance, the definition of the space $L^\infty(\Gamma)$ given on page 19 makes no sense when Γ is unbounded. The construction of the partition of unity is not correct; the proof of the divergence theorem suffers from this imprecise definition. Sobolev spaces are introduced, also for $p = \infty$. Immediately after this definition the case $p = \infty$ is forgotten in the proofs of the subsequent theorems. After this introductory chapter the text becomes much more precise; I encountered only a few trivial misprints.

The central theme of the book is the calculus of variations. The elliptic problems are first analysed with the Lax-Milgram theorem, which is generalized to a non-linear version. Very nice is the section on the numerical method of finite elements. The problem of the existence of a minimizer is treated; and, when no minimizer exists, a construction of a minimizing sequence is given. The developed techniques are demonstrated by the numerical analysis of oscillations of a surface.

In the third section of the book, parabolic partial differential equations are analysed using variational techniques. Semi-group theory is not treated at all. The book ends with a small chapter on asymptotic analysis: what is the behavior of solutions of parabolic equations when the time variable tends to infinity.

The best aspect of this book is the explicitness of the proofs, of the examples and counterexamples. The author does not shy away from giving helpful simplifying and heuristic interpretations of the more involved mathematical notions. It is a good introduction to the variational approach of elliptic and parabolic equations, which could serve well for a one semester course for fourth year master or first year graduate students. *D.R. Pik*

A. Böttcher, S.M. Grudsky

**Toeplitz Matrices,
Asymptotic Linear Algebra and Functional Analysis**

Basel: Birkhäuser, 2000

124 p., prijs €31,-

ISBN 3-7643-6290-1

Het boekje is een inleiding over de relatie tussen oneindige scalaire Toeplitzmatrices $A = [a_{j-k}]_{j,k=0}^\infty$ en grote eindige deelmatrices $A_n = [a_{j-k}]_{j,k=0}^n$. De tekst is ontstaan uit een cursus die de eerste auteur heeft gegeven in 2000. Centraal staan de singuliere waarden van de (deel)matrices en het gedrag daarvan voor groeiende afmetingen van de deelmatrices. Bij de beschrijving van dat gedrag spelen (numerieke) lineaire algebra en methoden uit de functionaalanalyse (C^* -algebra's en Fredholmindex-theorie) een belangrijke rol.

Het eerste hoofdstuk bevat klassieke resultaten als de relatie tussen de eigenschappen van de Toeplitzmatrix en zijn symbool a , de functie op de eenheidscirkel waarvan de Fourier-coëfficiënten de rij getallen $(a_k)_{k=-\infty}^\infty$ vormen. Ook benodigde feiten over de C^* -algebra's en Fredholmindex-theorie vinden daar een plaats. Een eerste resultaat in Hoofdstuk 2 is dat als voor alle y de vergelijking $Ax = y$ oplosbaar is, dan is voor alle y en $n \geq n_0$ de bijbehorende vergelijking $A_n x^{(n)} = y^{(n)}$ oplosbaar en convergeert de oplossing naar y als en slechts als de rij $(\|A_n^{-1}\|)$ begrensd

is. Verder bevat dit hoofdstuk toepassingen van C^* -algebra's en eerste resultaten over bijvoorbeeld de begrensdsheid van $\|A_n^{-1}\|$. Hoofdstuk 3 behandelt resultaten over de asymptotiek van de normen voor het geval A niet inverteerbaar is. Een mooi voorbeeld is de volgende stelling. Zij $a \in L^\infty$ op de eenheidscirkel en neem aan dat er een getal $e^{i\theta_0}$ en een getal $\alpha > 0$ bestaan zo dat $|a(e^{i\theta_0})| = O(|\theta - \theta_0|^\alpha)$ voor $\theta \rightarrow \theta_0$. Dan is er een constante $C > 0$ zo dat $\|A_n^{-1}\| \geq Cn^\alpha$ voor alle $n \geq 1$.

Hoofdstuk 4 gaat over de conditiegetallen van de matrices A_n en de asymptotiek daarvan. Hoofdstuk 5 behandelt de groei van de grootste en de kleinste singuliere waarden. Een fraai voorbeeld is hier: Neem aan dat het symbool a van de Toeplitzmatrix A een rationale functie op de eenheidscirkel is en neem aan dat A een Fredholmoperator van index k is. Dan dalen de eerste $|k|$ singuliere waarden van A_n exponentieel snel naar nul, en de overgebleven $n - |k|$ blijven van nul wegbeğrensd.

Van veel van de besproken resultaten bestaan generalisaties naar bijvoorbeeld blok-Toeplitzmatrices.

Het boekje is helder en zorgvuldig geschreven en het is een plezier om het te bestuderen, ook vanwege de mooie vermenging van harde analyse met meer abstracte methoden. Er zijn opvallend weinig drukfouten, wat gezien de korte productietijd ook een vermelding waard is.

F. van Schagen

Y. Yang

Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis

(Springer Monographs in Mathematics)

New York: Springer-Verlag, 2001

553 p., prijs €90,90

ISBN 0-387-95242-X

Dit is een boek over solitonen en instantonen in de context van klassieke veldentheorie. Kwantummechanische aspecten van solitonen en instantonen komen hier niet aan de orde. Er is een sterke nadruk op het gebruik van niet-lineair functionaalanalyse en er is dan ook ruime aandacht voor existentietheorema's voor solitonoplossingen van veldvergelijkingen. Op het eerste hoofdstuk na eindigen alle hoofdstukken met enkele open problemen. Er is een lijst met 358 referenties. Yang is soloauteur van 19 en coauteur van ongeveer tien van deze referenties.

In het eerste hoofdstuk getiteld *Primer of Field Theory* wordt getracht in 41 bladzijden o.a. de volgende onderwerpen te behandelen: actieprincipe van Hamilton, Schrödinger vergelijking, relativistische dynamica en elektromagnetisme, theorema van Noether, ijkveldentheorie, spontane symmetriebreking, Higgsmechanisme, algemene relativiteitstheorie en kosmologie. De behandeling is (uiteraard) summier en er wordt weinig uitgelegd. Zowel voor de nieuwkomers als de kenners lijkt het nut van dit hoofdstuk mij uiterst beperkt.

Hoofdstuk 2 begint met de Belavin-Polyakov oplossing van een sigmamodel en vervolgt met een ijktheoretische uitbreiding van een sigmamodel en existentietheorema's voor multisolitonoplossingen hiervan. Hoofdstuk 3 behandelt instantonen in de setting van nietabelse ijktheorie in $4m$ dimensies. In hoofdstuk 4 worden (non)existentietheorema's besproken van een generalisatie van een abels Higgsmodel. In de hoofdstukken 5 en 6 komen opvolgend het abelse en het nietabelse Chern-Simonsstelsel aan de orde waarbij hoofdstuk 6 begint met een spoedcursus com-

plexe halfenkelvoudige Lie algebra's. Daarna worden oplossingen van het zelfduale nietabelse Chern-Simonsveld minimaal gekoppeld aan een (niet)relativistisch scalarveld besproken. Hoofdstuk 7 gaat onder andere over een existentiële theorema voor multivortexoplossingen in de Glashow-Weinberg-Salamtheorie van de elektrozwakke wisselwerking en een generalisatie hiervan. Dyonen, dat zijn deeltjes met zowel elektrische als magnetische lading, vormen het onderwerp van hoofdstuk 8. Dit hoofdstuk start met de magnetische monopool van Dirac en het vervolgt met Schwinger's theorie van dyonen, Julia-Zee dyonen, Weinberg-Salam-elektrozwakke dyonen, enzovoort. Hoofdstuk 9 houdt zich bezig met rotatiesymmetrische oplossingen van een scalarveld in twee dimensies. Hoofdstuk 10 begint met een tijdonafhankelijke metriek van een N -tal rechte evenwijdige kosmische snaren in te voeren. In de rest van dit hoofdstuk worden kosmische snaren als topologische defecten van Higgsmodellen beschouwd met wederom een sterke nadruk op existentiële theorema's. In hoofdstuk 11 wordt een model beschouwd waarin een scalarveld is gekoppeld aan een abels veld en het gravitatieveld. Ook hierin weer menig existentiële theorema voor oplossingen met zowel vortices als antivortices. Hoofdstuk 12 gaat over de niet-lineaire modificatie van de Maxwelltheorie van Born en Infeld, die ingevoerd werd om de korte-afstands divergenties van de Maxwelltheorie te elimineren. Na een lange winterslaap is de Born-Infeldtheorie ontwaakt in de setting van snaartheorie (D -branes). Ook hier weer slechts aandacht voor existentie- en eenduidigheidstheorema's van oplossingen.

Men vindt in dit boek een grote verscheidenheid aan veldentheoretische modellen. Aan de fysische achtergrond van een en ander wordt nauwelijks aandacht besteed. Daarentegen komen de toepassingen van de hulpmiddelen uit de niet-lineaire analyse bij het bewijzen van existentiële theorema's van oplossingen van partiële differentiaalvergelijkingen uitvoerig ter sprake. Een bruikbaar boek voor onderzoekers op dit beperkte deelgebied van de mathematische fysica.

G.G.A. Bauerle

K. Atkinson, W. Han

Theoretical Numerical Analysis A Functional Analysis Framework

(*Texts in Applied Mathematics, Volume 39*)

Berlijn: Springer-Verlag, 2001.

450 p., prijs €80,20

ISBN 0-387-95142-3

This is a wonderful book on Numerical Analysis. The authors themselves chose to add the prefix 'theoretical', but my opinion is that Numerical Analysis is in fact the theoretical studies of numerical or computational methods. Indeed, the book succeeds very well in identifying the central concepts in Numerical Analysis and also in presenting them to the reader in a mathematically correct but also lively fashion.

The authors' point of view, although not explicitly stated, seems to be that Numerical Analysis is the mathematical studies of the approximation of non-linear operator equations by means of (linear) fixed point iteration, functional analytic studies of the linear operator equation, discretization of the linear operator equation and solution of the discrete linear problem.

The book does not treat the latter point as a separate chapter,

although it does derive some linear algebra methods as special cases from iterations on spaces of infinite dimension. For instance, the Newton method and the Conjugate Gradient method are, respectively, treated as iterations on infinite dimensional Banach and Hilbert spaces. As an example of the consequence, super-linear convergence of the Conjugate Gradient method applied to a linear system $Ax = b$ or to $(I - K)u = f$ with K a compact integral operator, share the same proof.

The heart of the book is formed by Chapter 3 on Approximation Theory, together with the preceding chapters on Linear Spaces and Linear Operators on Normed Spaces, and Chapter 6 on Sobolev Spaces. These four chapters do not involve numerical methods, but discuss in which functional analytic framework a problem can be posed most naturally, and moreover to which extend arbitrary elements from certain function spaces can be approximated in a given discrete (i.e., finite dimensional) (sub)space. These questions are essential in a solid treatment of numerical schemes. In examples and exercises, both (partial) differential operators and integral operators figure, as well as abstract operators. The four chapters just mentioned treat a number of basic concepts, like linear functionals, Riesz representation theorem, Fredholm alternative, resolvent operators, best approximation in Banach and Hilbert spaces, (interpolatory) projections, orthogonal polynomials, Sobolev trace and embedding theorems. Contrary to some textbooks, theoretical results are often given a direct application. For instance, the Banach-Steinhaus Theorem (principle of uniform boundedness) is applied directly by proving the convergence of a sequence of certain numerical integration (quadrature) rules, by interpreting them as a sequence of linear functionals on $C([0, 1])$, and proving those to be uniformly bounded, which results in a necessary condition on the quadrature weights.

Chapter 4 is on Nonlinear equations and Their Solution by Iteration, and it provides a link between well-developed but mostly linear theory and the inherent non-linearity of many relevant problems. As already hinted at, iterations mostly take place on Banach spaces, and occasionally for the special cases of a Hilbert space and the finite dimensional space. The Banach fixed point theorem together with Fréchet and Gateaux derivatives form the central tools in this chapter.

Chapter 5 is on the Finite Difference Method, and in particular on its use in the discretization of parabolic partial differential equations. For a parabolic model problem, the Lax equivalence theorem is proved ('consistency + stability = convergence'). This relatively small chapter treats some of the essentials of the method, but if I would be forced to write down one negative point of criticism for this book, it would be that somehow this chapter seems a bit out of place, in comparison to the rest of the topics.

The rest of the book consists in fact of two main themes, which are the analysis and numerical approximation of elliptic boundary value problems and variational inequalities and of integral equations of the second kind. Although the first item is omnipresent in textbooks on numerical analysis, the latter (which is in Chapter 11) is not. Nicely embedded in the theory of the earlier chapters, collocation and Galerkin methods are treated as interpolatory and orthogonal projections respectively. Both piecewise polynomial and trigonometric polynomial subspaces are considered, and ('Sloan') iterated projection is considered in each case. Naturally, the Nyström method is analyzed. Chapter 12 concen-

trates on the formulation of some well-known boundary value problems into boundary integral equations, to which the methods may be applied.

Chapters 7–9 give a treatment of elliptic boundary value problems, their weak, dual, and mixed formulations, and their discretization with the finite element method. Topics included are the fairly standard: Lax-Milgram lemma and Nečas' generalization of it, incorporating various boundary conditions in weak formulations, spaces of piecewise polynomials and their properties. Less standard but in my opinion very important is the separate treatment of the Galerkin and Petrov-Galerkin method in Chapter 8, together with Céa's Lemma in the abstract setting (although the authors miss the golden opportunity to derive the Conjugate Gradient method and its error bounds via Céa's Lemma and the Krylov-Galerkin subspace). Unusual but illustrative is the treatment of non-linear elliptic problem using material from Chapter 4.

Finally, the book contains a list of references containing both contemporary books and classics, and a useful keyword/symbol index.

My advice would be to buy this book. It is very well written, touches the right topics, goes in depth without exaggeration, and provides numerous examples of the use of abstract mathematics in an applied setting. A must for the PhD student in Numerical Analysis. Kendall Atkinson confirms his reputation, and Weimin Han is giving his a solid ground with this book. *J. Brandts*

Mathematical Olympiads 1998–1999 and 1999–2000, Problems and Solutions from Around the World

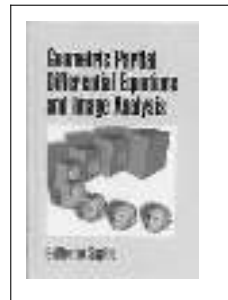
The Mathematical Association of America, 2003

282 p. 290 p., prijs \$ 28,50 per deel

ISBN 0-88385-642-5, 0-88385-805-3

Deze boeken bevatten opgaven van wiskunde-olympiades van over de hele wereld uit het jaar in de titel. De samenstellers zijn als trainers betrokken bij het Amerikaanse wiskunde-olympiade programma. De boeken zijn dan ook vooral bedoeld ter voorbereiding op het deelnemen aan een olympiade. Ieder jaar verschijnt er een nieuw deeltje in de serie. Elk boekje valt uiteen in twee stukken, namelijk de oplossingen van de opgaven die in het vorige deel verschenen en de opgaven uit het nieuwe jaar. De opgaven worden verder verdeeld in twee categorieën: afkomstig van nationale olympiades en afkomstig van regionale olympiades. (Regionaal betekent hier meestal: een paar landen.) Er is gekozen voor ongeveer twintig nationale olympiades. Over het algemeen gaat het hier om de moeilijkste olympiades, de Nederlandse wiskunde olympiade ontbreekt dan ook. Onder de regionale olympiades in de boeken zijn de meest bekende: *Asian Pacific Mathematical Olympiad* en *Balkan Mathematical Olympiad*. Je zou kunnen zeggen dat vrijwel alle problemen van belangrijke wiskunde olympiades hier zijn opgenomen met een belangrijke uitzondering: de internationale olympiade ontbreekt. De boeken zijn zeer aan te raden aan de mensen die trainen voor deelname aan de internationale olympiade. Verder zijn ze natuurlijk aan te bevelen aan iedereen die van problemen van het olympiade type houdt. Er moet wel opgemerkt worden dat de boeken echt alleen maar problemen en oplossingen bevatten, en geen aandacht besteden aan bijvoorbeeld

strategieën. Wel wordt er achterin het boekje een (zeer beknopte) samenvatting gegeven van stellingen die nodig zijn bij het oplossen van veel olympiade problemen. Het is moeilijk de opgaven te typeren, door hun veelzijdigheid. Voor wie er een idee van wil krijgen is er op het web van alles te vinden. Op de website van de Amerikaanse wiskunde olympiade (www.unl.edu/amc) kan men bijvoorbeeld de delen 96/97 en 97/98 uit de serie als ps-files vinden. *J. Tuitman*



G. Sapiro

Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis

Cambridge: Cambridge University Press,

2001,

440 p., prijs £45,-

ISBN 0-521-79075-1

Dit boek geeft een inleiding in het gebruik van partiële differentiaalvergelijkingen in beeldbewerking en computer vision. Deze aanpak wordt gekenmerkt door een sterk wiskundige benadering van oude en nieuwe problemen in het vakgebied. Eén van de centrale begrippen is de notie van 'scale space', dat wil zeggen, een multischaalrepresentatie van beelden. Een dergelijke representatie kan worden gegenereerd door herhaaldelijk filteren van het beeld. Dit is equivalent met een evolutie van het oorspronkelijke beeld die wordt beschreven door een partiële differentiaalvergelijking. In het eenvoudigste geval van Gaussisch filteren is de bijbehorende vergelijking de warmtevergelijking, die een isotrope diffusie beschrijft. Ook andere, niet-lineaire, filters vallen in het kader, waarbij de partiële differentiaalvergelijkingen niet-lineair zijn. Men spreekt hierbij van 'geometrische' diffusie.

Naast vergelijkingen die een directe verandering van de grijswaarden van beelden bewerkstelligen, zijn er de zogenaamde evolutievergelijkingen die de deformatie van krommen en oppervlakken beschrijven, waarbij de snelheid van de deformatie in het algemeen een functie van de lokale kromming is. De basisgedachte is om de zich ontwikkelende krommen of oppervlakken voor te stellen als de niveauverzamelingen ('level sets') van een hoger-dimensionaal hyperoppervlak. Deze techniek lost een aantal topologische problemen op die met eerdere methoden moeilijk aan te pakken waren, en levert tevens een nauwkeurige numerieke implementatie. Men kan verschillende typen evolutievergelijkingen afleiden, afhankelijk van de gewenste invariantie-eigenschappen (Euclidisch, affien, enzovoort).

Het boek bevat een uitgebreide wiskundige inleiding in de benodigde differentiaalmeetkunde, met name de theorie van differentiaal invarianten. Een aantal toepassingen wordt besproken, zoals beeldsegmentatie, vormanalyse, beeldverbetering, en tracking.

Enkele punten van kritiek zijn te noemen. De nadruk op de wiskunde is dermate groot dat de bespreking van de toepassing van de theorie er wat bekaaid afkomt. Veel figuren die ter illustratie zijn opgenomen worden nauwelijks besproken, zodat conclusies over het succes van de betreffende methode geheel aan de lezer worden overgelaten. Erg storend is dat op veel plaatsen in de tekst naar kleuren in figuren wordt verwezen, hoewel deze in

zwart-wit zijn afgedrukt. Het Engels laat af en toe te wensen over, en het aantal spelfouten is erg groot. Niettemin is het boek een degelijke inleiding in dit fascinerende vakgebied.

J. Roerdink

Foundations of Image Understanding

(Kluwer International Series in Engineering and Computer Science)

Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001

492 p., prijs €119,-

ISBN 0-7923-74-576

Dit werk bestaat uit een collectie van artikelen bijeengebracht en geredigeerd door Larry S. Davis ter gelegenheid van de zeventigste verjaardag van Azriel Rosenfeld. Rosenfeld is één van de grondleggers van de digitale beeldbewerking. De auteurs hebben allen een relatie (voormalig student, postdoc of collega) tot Rosenfeld. Het openingsartikel is een historisch overzicht geschreven door Rosenfeld zelf.

Door het karakter vertoont het boek, buiten het onderwerp en de uniforme karig in zwart-wit geïllustreerde lay-out, nauwelijks interne samenhang. De artikelen variëren van stelling-bewijs stijl tot nagenoeg formulevrije artikelen. De enorme variëteit aan artikelen is een aangename verrassing. In tegenstelling tot tijdschriftpublicaties is er voor iedere auteur royaal de ruimte, rond de dertig pagina's, om zijn of haar onderwerp voldoende uitgebreid te presenteren. Vrijwel alle artikelen zijn overzichtsartikelen, rijkelijk voorzien van literatuurverwijzingen. Voor insiders is het een monumentaal werk en voor outsiders een goed leesbare toegangspoort tot het vakgebied.

Een vrij willekeurige greep uit de artikelen: *Digital Geometry — The Birth of a New Discipline*, Reinhardt Klette; *Parallel Image Processing*, Angela Y. Wu; *Texture Classification and Segmentation*, Rama Chellappa and B.S. Manjunath; *Statistics Explains Geometrical Optical Illusions*, Cornelia Fernmüller and Yiannis Aloimonos; *Optics for OmniStereo Imaging*, Yael Pritch, Moshe Ben-Ezra and Shmuel Peleg.

Veel van de artikelen zijn bij de auteurs direct downloadbaar.

R. Moddemeyer

B.S. Everitt

The Cambridge Dictionary of Statistics

(2nd edition)

Cambridge: Cambridge University Press, 2002

410 p., prijs £32,50

ISBN 0-521-81099-X

De auteur, Brian Everitt, geeft in ongeveer 400 bladzijden korte beschrijvingen van circa 3500 statistische termen en 100 korte biografieën. De beschrijvingen omvatten begrippen uit de wiskundige en toegepaste statistiek, alsmede enkele algemene wetenschappelijke begrippen. De toegepaste begrippen komen voornamelijk uit de medische, biostatistische en psychologische hoek. Waar nodig zijn begrippen uitgelegd met figuren en grafieken. Ik krijg de indruk dat de auteur heeft geprobeerd zowel 'alle' statistische begrippen uit te leggen als het boek van hanteerbare omvang te houden. Dit heeft als gevolg dat de uitleg regelmatig onvoldoende is om geen andere bronnen meer te hoeven raadplegen. Bij alle

termen staan echter wel verwijzingen naar uitgebreidere statistische naslagwerken (zoals Kendall's *Advanced Theory of Statistics*) en een scala van overzichtsartikelen. Hierdoor is een voldoende gespecificeerde uitleg doorgaans zonder te veel moeite te vinden (mits de gebruiker gemakkelijk toegang heeft tot een uitgebreide statistische bibliotheek).

Dit woordenboek is mijns inziens zeer nuttig om een globaal begrip te krijgen van voor de gebruiker onbekende termen, of om de specifieke formulering van bijvoorbeeld een kansdichtheid op te zoeken. Gebruikers die echter meer gedetailleerde omschrijvingen wensen, of meer dan 3500 begrippen uitgelegd willen zien, kunnen beter direct een uitgebreidere statistische encyclopedie (zoals O.P. Gupta's *Encyclopaedic Dictionary of Statistics*) raadplegen.

C. Albers

S.H. Davis

Theory of Solidification

(Cambridge Monographs on Mechanics)

Cambridge: Cambridge University Press, 2001

400 p., prijs £57,50

ISBN 0-521-65080-1

This book contains a study of liquid-solid transformations of atomically rough materials: metals or semiconductors, including model organics like plastic crystals. A large part of the book is devoted to the instability analysis of the interface as a means of understanding those processes that ultimately determine the microstructure of a crystalline solid. The fundamental building block of this study is the Mullins-Sekerka instability of a front, which gives conditions for the growth of infinitesimal disturbances of a liquid-solid front. This tool is generalized in many ways. The emphasis is on dynamic phenomena rather than equilibria. The book is meant for applied mathematicians, engineers and physicists.

The first three chapters of this book form an introduction on the field of continuum solidification theory. This begins with the primitive field equations for diffusion and the derivation of appropriate jump conditions on the interface between the solid and liquid. This leads to Stefan problems. In the following chapters sophisticated mathematical concepts are used to study nonlinear theories of morphological change with the use of bifurcation theory for wave number and pattern selection and longwave theories in the strongly nonlinear range. Thereafter two chapters are devoted to solidification combined with fluid flow on micro- and mesoscale. The book ends with a chapter on phase-field models. The author notes that the phase-field approach is in its infancy but can be used for 'model building' and 'simulation building'.

Every chapter ends with remarks and a large number of references. What I miss is an author index and/or a total list of references. The first chapters are easy to understand. The other chapters are more difficult to read. For a good understanding it is necessary to also study the original research papers. The book gives an up to date overview of the literature concerning instability of solidification interfaces.

C. Vuik

R.J. Stroeker, J.F. Kaashoek

Discovering Mathematics with Maple
An Interactive Exploration for Mathematicians, Engineers
and Econometricians

(met CD-rom)

Basel: Birkhäuser, 1999

227 p., prijs €41,-

ISBN 3-7643-6091-7

Het boek begint met *A Tour of Maple V*, een inleiding in het gebruik van Maple V. Inmiddels zijn nieuwere versies van dit programma verschenen, maar dat is geen probleem. In de vijf hoofdstukken die daar op volgen wordt een aantal wiskundige onderwerpen aan de orde gesteld, achtereenvolgens *Functions and Sequences*, *Matrices and Vectors*, *Counting and Summation*, *Derivative and Integral*, *Vector Spaces and Linear Mappings*. Het boek is niet bedoeld als leerboek voor de genoemde onderwerpen. De basis-kennis hiervoor wordt bekend verondersteld. En om niet te veel terug te hoeven grijpen naar boeken over analyse of lineaire algebra begint elk hoofdstuk met een korte samenvatting van de relevante begrippen. De genoemde onderwerpen kunnen vervolgens verder met behulp van Maple onderzocht worden. Dit kan zowel aan de hand van de opdrachten uit het boek, als interactief met behulp van worksheets en assignments die op een bijgeleverde CD-ROM staan. En elk hoofdstuk wordt afgesloten met een paragraaf *Exercises*, oefeningen die met behulp van Maple uitgevoerd kunnen worden. In het voorwoord melden de auteurs dat het boek is voortgekomen uit een cursus voor econometriestudenten, bedoeld als kennismaking met de mogelijkheden van een computer algebra systeem. Verder wordt er ook uitgelegd waarom de voorkeur aan Maple boven bijvoorbeeld Mathematica gegeven werd, maar dat is meer het soort rechtvaardiging dat elke fervente aanhanger van welk computer algebra systeem dan ook meent te moeten geven. Het niveau van de opdrachten is niet al te hoog en sluit wel aan bij doorsnee eerstejaars analyse en lineaire-algebracursussen. Het is een zorgvuldig samengesteld boek, en als aanvulling op bovengenoemd onderwijs zeker de moeite waard.

A.G. van Asch

Large Numbers and Sums of Independent Random Variables; 8. Convergence in Distribution; 9. Characteristic functions and the Central Limit Theorem; 10. Martingales. This list of key words suggests a standard first course in probability, and, in a way, that is what the book is. But, apart from the style and the emphasis on applications the book has the following special features. The necessary measure theory is not given in a separate section of the book but is mixed in with the probability concepts; the final chapter contains an extensive section on the popular subject of financial mathematics; every chapter ends with a large number of (good) exercises, about three hundred in all. There is no room for an introduction to stochastic processes. A few curiosities: in Section 8.3.1, the 'Delta Method' is introduced, but it is quite unclear why it is called so; the preface ends with the mystical message "Harry is on vacation"; on page 330 in Problem 37 it says 'the hypothesis that boys and girls are equally likely to be born' — probability one? All in all, a solid and entertaining book, covering maybe too much ground for a one-semester-plus course, and a welcome addition to the set of 'good current probability books'.

F.W. Steutel

Mathematics and Music.
A Diderot Mathematical Forum

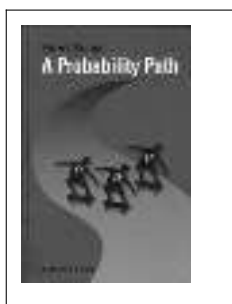
Berlin: Springer-Verlag, 2002

288 p., prijs €69,50

ISBN 3-540-43727-4

De band tussen wiskunde en muziek is al oud. Veel bekende wiskundigen hebben zich met de combinatie wiskunde en muziek beziggehouden; te noemen vallen bijvoorbeeld Pythagoras, Mersenne, Kircher en Leibniz. In deze bundel komen naast de historie van deze combinatie, ook moderne onderwerpen voor het voetlicht. Zestien bijdragen geven zeer gevarieerde invalshoeken, zowel wat betreft het muzikale aspect van de bijdragen als ook het wiskundige. Naast historisch getinte bijdragen, zijn er ook die zich bezighouden met moderne wiskundige methoden, terwijl er zelfs bij één bijdrage Mathematica-procedures gegeven worden om op de eigen personal computer geluidsillustraties te genereren. De benodigde voorkennis om de bijdragen te kunnen lezen is wisselend, maar een aantal bijdragen zijn niet al te veeleisend, noch op wiskundig gebied, noch op het gebied van de muziek. Hierdoor biedt deze bundel voor iedere geïnteresseerde voldoende te lezen en bestuderen. Een bijdrage over muzikale patronen is zelfs grotendeels te volgen met als enige muzikale kennis die van het liedje *Frère Jacques* (Vader Jacob)! Voor zover niemand over het hoofd is gezien, zijn er geen Nederlanders betrokken bij de bundel, noch bij de vele aanwezige verwijzingen. Hopelijk kan de bundel in Nederland belangstelling kweken voor dit intrigerende grensgebied van de wiskunde.

A. Volgenant



S.I. Resnick

A Probability Path

(2nd printing with corrections)

Basel: Birkhäuser, 2001

466 p., prijs €90,-

ISBN 0-8176-4055-X

'There are several good current probability books', is the first sentence of the Preface. This book is intended to provide 'a deep understanding of measure theoretic probability theory' to applicants of the theory, not in the first place to mathematicians. The author has written two other books, more or less in the same style: informal, enthusiastic, mathematically rigorous, and with flair. The chapters are 1. Sets and Events; 2. Probability Spaces; 3. Random Variables, Elements and Measurable Maps; 4. Independence; 5. Integration and Expectation; 6. Convergence Concepts; 7. Laws of

Problemen/UWC

Universitaire Wiskunde Competitie

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina <http://academics.its.tudelft.nl/uwc>

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Er worden drie editieprijszen toegekend, van 100, 50, en 25 euro. De puntentotalen van winnaars tellen voor 0, 50, en 75 procent mee in de laddercompetitie. De aanvoerder van de ladder ontvangt een prijs van 100 euro en begint daarna weer onderaan. Daarnaast wordt twee maal per jaar een ster-opgave aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 euro toegekend.

Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in $\text{\LaTeX}$ wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 mei 2004. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.



Opgave A

For every integer $n > 2$ prove that

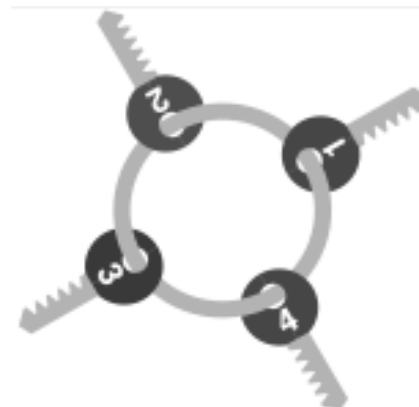
$$\sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n-j} \sum_{k=j}^{n-1} 1/k \right) < \pi^2/6.$$

Opgave B

Consider the first digits of the numbers 2^n : 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, ... Does the digit 7 appear in this sequence? Which digit appears more often, 7 or 8? How many times more often?

Opgave C

We have a circular key chain and we want to colour the keys, using as few colours as possible, so that each key can be identified by the colour pattern — that is, by looking at the key's colour and neighboring colours as far away as needed. Let $f(n)$ be the minimal number of colours required to uniquely disambiguate a circular key chain of n keys in this way. Determine $f(n)$ for all positive integers n .



Ster-opgave

For $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ and $x \in \mathbb{R}$ define

$$P_n(x) := n^n x((x+1)^{n+1} - 1)^{n-1} - (n+1)^{n-1}((x+1)^n - 1)^n.$$

For $n \geq 2$, is it true that this polynomial is of the form

$$P_n(x) = \sum_{k=n+2}^{n^2} c_{n,k} x^k$$

with $c_{n,k} > 0$ for $n+2 \leq k \leq n^2$?

Editie 2003/3

Op de ronde 2003/3 van de Universitaire Wiskunde Competitie ontvingen we inzendingen van Filip Cools, Kenny De Commer, Syb Botma, Sven Vanhoecke, Hendrik Hubrechts en Roelof Oosterhuis.

Opgave 2003/3-A

Let $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ be a non-decreasing sequence of real numbers such that $(n-1)a_n = na_{n-2}$ for $n = 2, 3, \dots$ with initial value $a_0 = 2$. Compute a_1 .

Oplossing Several people let us know that they enjoyed this problem, which is due to Alexandre Lupasz. We received hors concours solutions from Klaas Pieter Hart, Alex Heinis, Edward van Kervel, Ton Kool, Jack van Lint, Ludolf Meester, Jaap Spies and Vincent de Valk. Some use the gamma function and others use Wallis's product. Here is Edward van Kervel's solution. With induction, using the fact that the a_n are non-decreasing, we obtain

$$2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{2n}{2n-1} \leq a_1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{2n+1}{2n} \leq 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n+2}{2n+1}$$

which can be rewritten as

$$2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n+1}{2n} \leq a_1 \leq 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n+2}{2n+1}.$$

The left-hand product and the right-hand side converge to the same infinite product as $n \rightarrow \infty$. This is Wallis's product, which is equal to π .

Opgave 2003/3-B

Let $S(n)$ be the sum of the remainders on division of the natural number n by $2, 3, \dots, n-1$. Show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{n^2}$$

exists and compute its value.

Oplossing Klaas Pieter Hart has sent us a self contained solution, which is similar to the solution by Roelof Oosterhuis that is given below. Jaap Spies uses a shortcut by invoking a result from Hardy and Wright. Let

$$S(n) = \sum_{i=2}^n (n \bmod i) = \sum_{i=2}^n n - i \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor.$$

Notice that $0 \leq (n \bmod i) \leq i-1$. We write $S(n) = T(n) + U(n)$, where

$$T(n) = \sum_{i=2}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} (n \bmod i), \quad U(n) = \sum_{i=\lfloor \sqrt{n} \rfloor+1}^n (n \bmod i).$$

By our choice of $T(n)$ we can estimate $T(n)$ by

$$0 \leq T(n) \leq \sum_{i=2}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} (i-1) = \frac{1}{2}(\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1)\lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq \frac{1}{2}n$$

which implies that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(n)}{n^2} = 0.$$

In order to estimate $U(n)$, we denote by $\alpha_k = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. For $\alpha_{k+1} < i \leq \alpha_k$ we have $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor = k$. Let

$$L_k = \sum_{i=\alpha_{k+1}+1}^{\alpha_k} n \bmod i.$$

We can write $U(n)$ as a sum of L_k by

$$U(n) = \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} L_k.$$

We calculate

$$L_k = \sum_{i=\alpha_{k+1}+1}^{\alpha_k} n - ik = (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \left(n - \frac{k}{2}(\alpha_k + \alpha_{k+1} + 1) \right).$$

Now we can estimate L_k by

$$\left(\frac{n}{k(k+1)} - 1 \right) \left(\frac{n}{2(k+1)} - \frac{k}{2} \right) < L_k < \left(\frac{n}{k(k+1)} + 1 \right) \left(\frac{n}{2(k+1)} + \frac{k}{2} \right).$$

Notice that we are able to bound $\frac{L_k}{n^2}$ by

$$\left| \frac{L_k}{n^2} - \frac{1}{2k(k+1)^2} \right| < \frac{1}{n(k+1)} + \frac{k}{2n^2}.$$

Since

$$\sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{n(k+1)} + \frac{k}{2n^2} < \frac{\log(\sqrt{n})}{n} + \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{n}-1)\sqrt{n}}{n^2},$$

which will vanish as $n \rightarrow \infty$, we find that the limit for $\frac{L_k}{n^2}$ exists. Finally we conclude that

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U(n)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{L_k}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{2k(k+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{(k+1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) \right) = 1 - \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

Opgave 2003/3-C

Consider four distinct points A, B, C, D in the plane such that the line segments AB, BC, CD, DA do not intersect. Let Z_1, Z_2, Z_3 be the centers of gravity of:

1. the four point masses in A, B, C, D .
2. the wire frame with vertices A, B, C, D .
3. the plate with corners A, B, C, D .

If A, B, C, D form a parallelogram then Z_1, Z_2, Z_3 coincide. Does the converse hold?

Oplossing This problem was proposed by Karel Post. It has been solved by Jaap Spies and by Roelof Oosterhuis. The elegant solution of Oosterhuis is as follows.

Define a coordinate system whose origin is at the middle of A and C , and let $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$. We may assume that the line segment AC lies inside the quadrangle $ABCD$ (if this is initially not the case we can rename the points).

Assume that $Z_1 = Z_3$. We have to prove that $ABCD$ is a parallelogram, or equivalently, that $B + D = A + C$ which is, by definition, zero.

We have

$$Z_1 = \frac{B + D}{4}$$

The center of mass of the plate lies between the centers of mass of the triangles ABC and ACD (respectively $B/3$ and $D/3$) and its location depends linearly on their areas. Hence,

$$Z_3 = \frac{1}{3} \frac{Br + Ds}{r + s}$$

where r denotes the distance between B and the line through AC , and s the distance between D and that line. We know $Z_3 - Z_1 = 0$ and therefore

$$(r - 3s)B + (-3r + s)D = 0 \quad (1)$$

which means that B and D are linearly dependent (the coefficients can not be both zero for nonzero areas), hence $D = \lambda B$ for some $\lambda < 0$ (since AC lies inside $ABCD$) and therefore $s = -\lambda r$. Substituting this into (1) we obtain

$$(1 - \lambda^2)rB = (1 - \lambda)r(B + D) = 0$$

which proves that $B + D = 0 = A + C$.

We did not need the center of gravity of the frame!

Uitslag Editie 2003/2

De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

<i>Naam</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>Totaal</i>
1. Roelof Oosterhuis (Groningen)	10	8	10	112
2. Kenny De Commer (Leuven)	10	8	0	62
3. Syb Botsma (Utrecht)	8	7	-	52
4. Hendrik Hubrechts (Leuven)	10	5	-	50
Filip Cools (Leuven)	10	5	-	50
5. Sven Vanhoecke (Brussel)	6	0	-	18

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie

We vermelden alleen de top 3. Voor de complete ladderstand verwijzen we naar de UWC-website.

<i>Naam</i>	<i>Punten</i>
1. Filip Cools	249
2. Syb Botsma	140
3. Tom Claeys	138