

Inhoud | Contents

274	Colofon
275	Redactioneel <i>Derk Pik</i>
276	Agenda
278	Nieuws
281	In memoriam Willem Titus van Est <i>Izak Moerdijk, Jacob P. Murre</i>
284	In memoriam Henry Oedayrajsingh Varma <i>Ton Levelt</i>

Oratie | Inaugural lecture

286	Stromende getallen <i>Barry Koren</i>
-----	---------------------------------------

Onderzoek | Research

294	Politieke macht en onmacht <i>Rob Bosch</i>
-----	---

Onderwijs | Education

302	Het zit hem in de derde klas <i>Rainer Kaenders, Jaap Top</i>
304	Vier decennia wiskundeonderwijs <i>Wim Groen</i>

Geschiedenis | History

309	Sybrandt Hansz Cardinael, meester in de meetkunde <i>Matthijs H. Sitters</i>
-----	--

Cultuur | Culture

317	Bij de bomen van Pythagoras <i>Ankie de Jongh-Vermeulen</i>
-----	---

Recreatieve wiskunde | Recreational mathematics

321	C.J. Bouwkamp en de Squared Squares <i>Jacques Haubrich</i>
-----	---

Interview | Interview

327	Tussen wetenschap en commercie <i>Gerard Alberts, Ger Koole, Hans Melissen</i>
-----	--

Boeken | Books

332	Een wiskundige over geloof, wetenschap en toeval <i>Roger Cooke</i>
334	Boekbesprekingen

Rubrieken | Departments

285	Nieuw-Zeeuwse Kroniek <i>Hans van Ditmarsch</i>
320	Oud Archief <i>Danny Beckers</i>
349	Problemen/UWC

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
<http://www.math.leidenuniv.nl/~naw>

Hoofredactie

Ger Koole (koole@cs.vu.nl)
Jaap Top (top@math.rug.nl)

Eindredactie

Derk Pik (drpik@math.leidenuniv.nl)

Bladmanager/Advertenties

Reinie Ern  (erne@math.leidenuniv.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101

Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@wens.kun.nl)
Rainer Kaenders (r.kaenders@ils.kun.nl)
Hans Melissen (j.b.m.melissen@its.tudelft.nl)
Jaap Molenaar (j.molenaar1@tue.nl)

Bureau redactie

Jos Brakenhoff (naw@math.leidenuniv.nl)
Annelies Hafkenscheid (naw@math.leidenuniv.nl)

Medewerkers

Danny Beckers (KUN), Wieb Bosma (KUN), J.A.W. van Casteren (Univ. Antwerpen), Jan van de Craats (KMA), Hans Cuyper (TUE), Robbert Fokkink (TUD), Michael van Hartskamp, Geertje Hek (UVA), Teun Koetsier (VU), Joop Kolk (UU), Pieter Moree (UVA), Jan van Neerven (TUD), Mark Peletier (CWI), Hans Sterk (TUE), Chris Zaal (FI)

T X-ondersteuning

Marko Boon (marko@win.tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Abonnementenperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEXT)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Giethoorn ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. Het genootschap werd in 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Het is 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap.

Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het KWG bedraagt  70 per jaar. Gepensioneerden betalen  35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor  25 per jaar.

Pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG.

Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van  50.

Members of the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, and South-African Mathematical Societies* pay  50 instead of the full membership fee of  70 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members.

A postage charge of  5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of  7,50 for members living outside of Europe.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor  90 respectievelijk  105.

Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Eduard Looijenga (UU, *voorzitter*), Herman te Riele (CWI, *secretaris*), Fieke Dekkers (UU, *penningmeester*), Geertje Hek (UvA), Metha Kamminga (NHL), Annette Kik (CWI), Vivi Rottschäfer (UL), Michel Vellekoop (UT).

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredacteur Jaap Top (top@math.rug.nl). Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina: <http://www.math.leidenuniv.nl/~naw>

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	uiterste inleverdatum kopij
1	05-03-2004	02-12-2003
2	18-06-2004	16-03-2004
3	03-09-2004	01-06-2004
4	05-12-2004	02-09-2004

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen.



Centrum voor Wiskunde
en Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft

Op het omslag

De Veiligheidsraad bestaat uit vijftien leden, waarvan de vijf permanente leden over het vetorecht beschikken. Hoe beïnvloedt dit vetorecht de machtsverhouding? Zie verder bladzijde 294. (Foto: vergadering van de Veiligheidsraad over Irak, september 2003,   Hollandse Hoogte).

Muziek!

Is door de inpoldering van het IJsselmeer het licht in Nederland veranderd? Dit is het onderwerp van de net uitgebrachte film *Hollands licht* van Pieter-Rim en Maarten de Kroon. Het gaat in de film om het veelgeroemde licht in de schilderijen van de Hollandse meesters zoals Vermeer uit de gouden eeuw en Weissenbruch uit de negentiende eeuw. Volgens de Duitse kunstenaar Joseph Beuys is het Hollands licht halverwege de vorige eeuw verloren gegaan. Allerlei hedendaagse kunstenaars en kunsthistorici komen in de film aan het woord, maar ook vrachtwagenchauffeurs wordt gevraagd om het licht in ons land met elders te vergelijken. Afgezien van deze interviews bestaat de film voor het grootste gedeelte uit opnamen van enorme wolkenpartijen boven Marken. Een van de interessantste momenten in de film is het verschijnen van de astronoom Vincent Icke. Met een groot aquarium waarin een melkachtige substantie wordt gegoten en een spiegel laat hij zien hoe het licht verandert als de bodem reflecterend wordt gemaakt. Zijn experiment is zeer overtuigend en bevestigt de intuïtie van de kunstenaars in de film.

Net als in de wetenschap kent ook de kunst de notie van waarheid. Voert in de wetenschap het objectieve, het controleerbare en reproduceerbare de boventoon, zo heeft de waarheid in de kunst een veel meer persoonlijke en intuïtieve aard. De geschiedenis van de wetenschap en van de kunst lopen parallel en ze hebben elkaar altijd veel beïnvloed. Vincent Icke stelt in de film dat de kunstenaars in de zeventiende eeuw het licht beschreven met hun schilderijen terwijl Huygens in dezelfde periode de fysische eigenschappen van het licht onderzocht. De kunst verbeeldde, en de wetenschap verklaarde later het Hollands licht.

De zogenaamde authentieke uitvoeringspraktijk van oude muziek is een ander voorbeeld van invloed van wetenschap op de kunst. Bestudering van bronmateriaal uit de tijd van het ontstaan van deze muziek heeft de uitvoering ervan fundamenteel beïnvloed. Alweer veertig jaar worden de verschillende historisch verantwoorde stemmingen van muziekinstrumenten behorende bij de verschillende tijdperken toegepast. Over de wiskundige aspecten van deze historische stemmingen kan men lezen in het artikel van Takens en Van de Craats in het Nieuw Archief voor Wiskunde van juni 2001.

De exacte wetenschap vervult in de muziek en beeldende kunst ook vaak een structurerende rol. Daarvan zijn zeer veel voorbeelden te geven. Een goed voorbeeld is de twintigste-eeuwse componist en architect Iannis Xenakis (1922–2001). Hij bouwde als assistent van Le Corbusier het *Philips paviljoen* op

de wereldtentoonstelling in Brussel van 1958.

Als componist structureerde hij zijn composities op verregaande wijze met behulp van wiskundige technieken. Hij realiseerde zich al vroeg dat een twaalftoonsreeks (een vooraf vastgelegde reeks van de twaalf verschillende tonen van de chromatische toonladder, die als basis dient voor veel composities van de tweede Weense school onder leiding van Schönberg) maar een beperkt aantal symmetrieën had. Direct met de komst van de computer begon hij met de simulaties van klankvelden en zocht hij naar interessantere en meer gecompliceerde structuren voor zijn composities. De diepere beweegredenen voor deze op het eerste gezicht artificiële manier van componeren met behulp van de computer is te vinden in zijn serie interviews met Bálint Varga (Faber & Faber 1996). Daarin vertelt hij dat sentimentele melodiën hem diep konden ontroeren; een automatische ontroering die hem met weerzin vervulde en waar hij zich het liefst zo ver mogelijk van wilde verwijderen. Daarom ontwikkelde hij klankvelden door middel van trekkingen uit verzamelingen van tonen, volgens bepaalde kansverdelingen. De simulaties, uitgevoerd vanaf 1962 op een IBM 7090 met programmatuur geschreven in Fortran-code, zijn inmiddels veel simpeler te genereren en daarbij ook meteen hoorbaar te maken op moderne computers. Electronische hedendaagse muziek heeft zich sindsdien enorm ontwikkeld. Toch heeft het boek *Musiques formelles* van de pionier Xenakis, waarin hij zijn wiskundige uitgangspunten heeft beschreven, nog niets aan betekenis verloren.

Wiskunde kan dus een grote rol spelen in de kunst, als toegepaste, verklarende discipline en als bron van structuren.

Op zaterdag 10 januari 2004 organiseert het Wiskundig Genootschap in het Academieggebouw van de Universiteit van Utrecht het Wintersymposium *Wiskunde en Muziek*. Beide aspecten komen uitgebreid aan bod. Jan van de Craats, Rutger Teunissen en Henkjan Honing zullen spreken over de onderwerpen stemming, digitale signaalverwerking en de perceptie van het ritme van muziek. Op de website van het wintersymposium staat informatie over de voordrachten. Het is een mooi programma dat een goed publiek verdient. Ik hoop van harte u daar tegen te komen.

Derk Pik

eindredacteur Nieuw Archief voor Wiskunde

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Postbus 9512, 2300 RA Leiden

drpik@math.leidenuniv.nl

Agenda

Upcoming Events

januari 2004

10 januari

□ Wintersymposium KWG

Thema: Wiskunde en muziek.

plaats Senaatszaal van het academiegebouw van de universiteit te Utrecht

info www.wiskgenoot.nl, www.tech.nhl.nl/~kaminga/wintersymposium

13 januari

□ Systeemtheoriedag

Lezingendag ter ere van het afscheid van Jan C. Willems.

plaats Senaatszaal van het academiegebouw van de Rijksuniversiteit Groningen

info www.math.rug.nl/~trentelman/systday.html

13–15 januari

□ 29-th Conference on the Mathematics of Operations Research.

Organisatoren: Nederlands Genootschap voor Besliskunde (NGB) en Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde (LNMB).

plaats Lunteren

info www.math.leidenuniv.nl/~lnmb/conferences

14–16 januari

□ Panama Conferentie

Conferentie voor het primair in reken- en wiskundeonderwijs. Organisatie: Freudenthal Instituut. Thema: Rekenen — wiskunde als rijke bron.

plaats De Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/panama/conferentie

15 januari

□ 2de Reehorstconferentie wiskunde

Conferentie voor docenten wiskunde voor de basissvorming en het vmbo.

plaats Ede

info <http://www.aps.nl/wiskunde/A1.htm>

19–23 januari

□ PhD course Computational Fluid Dynamics I

Inleidende cursus georganiseerd door het J.M. Burgerscentrum. Docenten: B. Perot, A.E.P. Veldman, P. Wesseling.

plaats Technische Universiteit Delft

info www.burgerscentrum.org

23–24 januari

□ Arithmetic Quantum Chaos

Algebra en topologieseminarium. Introducerende lezingen over arithmetische quantumchaos door J.P. Keating and P. Sarnak.

plaats Montpellier, France

info www.math.univ-montp2.fr/~pev/MAT2004

februari 2004

6–7 februari

□ Nationale Wiskunde Dagen

Bijeenkomst voor wiskundeleraren die lesgeven aan leerlingen van 12 tot 18 jaar van ieder schooltype.

plaats De Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/nwd

13 februari

□ BWI-middag

Bedrijfswiskunde- en Informaticamiddag waarin wiskunde- en informaticatoepassingen in maatschappij en bedrijfsleven centraal staan.

plaats Vrije Universiteit te Amsterdam

info www.cs.vu.nl/bwi/general/bwimiddag.php

16–20 februari

□ Minicourse Iterative Decoding Techniques

Onderwerpen: Turbo Codes en Low Density Parity Check Codes.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.win.tue.nl/math/eidma

maart 2004

8–12 maart

□ Buildings and Groups of Lie-Type

Minisymposium over semi-simpele Liegroepen vanuit combinatorisch perspectief. Docent: Bernhard Mühlherr (Université Libre de Bruxelles).

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.win.tue.nl/math/eidma

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

15–19 maart

Mathematics with Industry

48ste Europese Studiegroep. Bedrijven leveren problemen aan die wiskundigen proberen op te lossen.

plaats Technische Universiteit Delft

info <http://ta.twi.tudelft.nl/swi>

19 maart

Kangoeroe

Wedstrijd voor middelbare scholieren en voor leerlingen van groep 7 en 8 van de basisschool.

info www.math.kun.nl/kangoeroe

23 maart

Johan Bernoulli lezing

Ian Stewart houdt om 19.30 uur zijn Bernoulli lezing *Unexpected Applications of Pure Mathematics*.

plaats Aula Academiegebouw, Rijksuniversiteit Groningen

25–26 maart

Nationale rekendagen

Conferentie, gewijd aan het rekenonderwijs.

plaats De Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/rekenweb/rekendagen

29 maart – 4 april

Workshop Scaling limits and Percolation

Organisatoren: Nina Gantert, Remco van der Hofstad

plaats Eurandom

info www.eurandom.tue.nl

april 2004

16–17 april

Nederlands-Belgisch Mathematisch Congres

Gast sprekers: Neil Sloane (AT&T), Bernard de Baets (Universiteit Gent) en Stef Tijs (Universiteit van Tilburg), Manjul Bhargava (Princeton University).

plaats Universiteit van Tilburg

info www.uvt.nl/nmc2004

19–29 april

Continuous and Discrete Random Spatial Processes

Organisatoren: J. van den Berg (CWI), B. Nienhuis (UvA).

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

mei 2004

10–14 mei

Approximation Algorithms and Games on Networks

Minicursus op de doorsnede van de vakgebieden algoritme-ontwerpen en speltheorie door prof. Éva Tardos (Cornell University, USA).

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info <http://www.win.tue.nl/math/eidma>

15 mei

Symposium X Historische kring reken- en wiskunde onderwijs

Organisatie: Freudenthalinstituut.

plaats Hogeschool Domstad, Utrecht

info www.freudenthal.nl/nl/agenda.nl.shtml

28 mei

Panama voorjaardag

Panama voorjaardag en NVORW-jaarvergadering.

plaats De Uithof, Utrecht

info <http://www.fi.uu.nl/panama/voorjaarsdag>

juni–augustus 2004

3–25 juni

Lie groups in Analysis, Geometry and Mechanics

AiO-cursus van het MRI van drie weken. Sprekers: J.J. Duistermaat, J.A.C. Kolk, R.H. Cushman, G.J. Heckman, E.P. van den Ban.

plaats Universiteit Utrecht

info www.math.uu.nl/people/kolk

14–18 juni

Moda 7

Conferentie over het ontwerpen van statistische experimenten.

plaats Kapellerput, Heeze

info www.eurandom.tue.nl

21–25 juni

13th European Conference for Mathematics in Industry

Internationale conferentie over wiskundig modelleren van industriële processen.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.ecmiz2004.tue.nl

23–25 juni

Workshop HPOPT 2004

Internationale workshop over High Performance Optimization Techniques met thema: Optimization and Polynomials.

plaats CWI, Amsterdam

info www.cwi.nl/~monique/hpopt2004

6–18 juli

Internationale Wiskunde Olympiade

De 45ste versie van het grootste internationale wiskundetoernooi voor middelbare scholieren.

plaats Athene, Griekenland

info <http://olympiads.win.tue.nl/imo/index.html>

15–19 augustus

International Society for Clinical Biostatistics 2004

Internationale conferentie georganiseerd door de afdeling Medische Statistiek van de Leiden University Medical Centre (LUMC).

plaats Leiden

info <http://iscb2004.clinicalresearch.nl>

23–26 augustus

Harmonic Analysis and Homogeneous Spaces

Workshop, gewijd aan harmonische analyse en haar toepassingen in de mathematische fysica, niet-communicatieve meetkunde en getalentheorie.

plaats Lorentz Center, Universiteit Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

30 augustus–3 september

Workshop Algebraic Cycles and Motives

Organisatoren: S.J. Edixhoven, J. Nagel, C. Peters.

plaats Lorentz Center, Universiteit Leiden

info <http://www.lc.leidenuniv.nl>

Nieuws

| News

Plaquette voor Brouwer

Op de namiddag van vrijdag 14 november is op de algemene begraafplaats te Blaricum een plaquette ter ere van L.E.J. Brouwer onthuld door de president van de Koninklijke Academie van Wetenschappen prof.dr. W.J.M. Levelt. Omdat de grafrechten zijn vervallen dreef de ontzuiming van de graven van Brouwer en zijn vrouw. Het KWG en de Universiteit van Amsterdam hebben er bij de gemeente Blaricum met succes voor gepleit om de graven te bewaren, temeer daar het buitenhuis van Brouwer in Blaricum ook al aan een projectontwikkelaar ten prooi is gevallen.

Voorzitter van het KWG Eduard Looijenga sprak een kort welkomstwoord uit en introduceerde de sprekers die voor de onthulling van de plaquette waren uitgenodigd. De eerste spreker was Brouwer-biograaf Dirk van Dalen. Hij vertelde korte anekdotes over Brouwers omzwervingen door de omgeving van Blaricum.

De burgemeester van Blaricum, mevrouw W.H.C. Ton, hield een kort en bevlogen pleidooi voor maatschappelijke betrokkenheid van wetenschappers. Zij was goed geïnformeerd over het Brouwers leven en zijn idealistische visie op de maatschappij. Haar oproep was in ieder geval zeer in Brouwers stijl.

Buiten, bij het graf, onthulde W.J.M. Levelt de plaquette, waarbij hij in een korte toespraak, aan de hand van enkele verhalen uit Brouwers leven, een pleidooi hield voor meer maatschappelijke waardering van en respect voor de zuivere wetenschap.

Daarna viel de duisternis snel in, terwijl de ingetogen plechtigheid werd afgesloten met een receptie.

Derk Pik



foto: Derk Pik

Belangstellenden staan bij het graf van Brouwer. Prof.dr. W.J.M. Levelt spreekt hen toe.

Wintersymposium Wiskunde en Muziek

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap organiseert op 10 januari 2004 het wintersymposium *Wiskunde en Muziek*. Het symposium zal plaats vinden in de senaatszaal van het academiegebouw van de Universiteit Utrecht, van 09:30 tot 15:30 uur.

Er zijn drie voordrachten. De eerste is *De Piano als Muzikale Logarithmetafel* door prof.dr. Jan van de Craats. Hij zal spreken over tonen en boventonen als bouwstenen van de muziek. Met resonantieproeven aan de piano zullen boventonen hoorbaar gemaakt worden. Octaven en kwinten vormen de grondslag van het westerse muziekschrift en de indeling van het klavier bij toetsinstrumenten. Met grafieken en diagrammen zullen we duidelijk maken waarom je een piano kunt be-

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland.

Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien?

Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar naw@math.leidenuniv.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

schouwen als een muzikale logaritmetafel.

Rutger Teunissen, sonoloog, zal spreken over *Muziek, Digitale Signaalverwerking en (School)Wiskunde*. In de relatie tussen muziek en wiskunde is door de komst van de computer radicaal verandering gekomen. Als een componist muzikale klanken en klankstructuren aan de computer wil ontlokken — ook als het gaat om ‘gewone’ instrumentale, tonale muziek — dan bedient hij zich in essentie van de taal van de wiskunde. Vandaar dat inmiddels ook op het conservatorium wiskunde wordt gedoceerd in studierichtingen waarbij de computer een rol speelt, zoals sonologie, muziekregistratie en muziektechnologie.

De derde voordracht door Henkjan Honing, onderzoeker aan de Universiteit van Nijmegen en de Universiteit van Amsterdam. Hij geeft samen met Peter Desain Henkjan Honing leiding aan de *Music, Mind, Machine Groep* (MMM). Zijn voordracht heeft de titel *Een slag in de ritmeruimte: over ritme, timing en tempo in muziek* en gaat over de perceptie van muziek. Luisteraars blijken een gespeeld ritme niet als een continuüm te horen maar als categorieën: klonters in de tijd. Dit werd bestudeerd door luisteraars een groot aantal ritmes te laten horen, een deelverzameling van de verzameling van alle mogelijke ritmes samengesteld uit drie tijdsintervallen: een zogenoemde ritmeruimte. De onderzoeksmethode gebruikt concepten uit de wiskunde en fysica (zoals convexiteit en entropie) die het mogelijk maken de empirische resultaten precies te karakteriseren. Het doel van deze formalisaties is te komen tot een cognitieve theorie van ritme en timing, onderwerp van huidig onderzoek.

Voor meer informatie: webserv.nhl.nl/~kamminga/wintersymposium
Metha Kamminga

Wiskunde leren met behulp van ICT

Op donderdag 25 september promoveerde Paul Drijvers aan de Faculteit Wiskunde en Informatica van de Universiteit Utrecht op het proefschrift *Learning algebra in a computer algebra environment*.

De centrale vraag in het onderzoek van Paul Drijvers is hoe het gebruik van computeralgebra het inzicht kan bevorderen in algebraïsche concepten en bewerkingen. Om deze vraag te onderzoeken is bij het begrip parameter een leergang voor vwo-3 en vwo-4 ontwikkeld, waarin computeralgebra is geïntegreerd. Aan de hand van de analyse van de gegevens concludeert Drijvers dat het gebruik van computeralgebra inderdaad kan bijdragen aan het inzicht in algebraïsche concepten en bewerkingen, maar dat deze bijdrage verre van vanzelfsprekend is.

Een korte samenvatting van het proefschrift is te vinden op: www.fi.uu.nl/nl/nieuws/welcome.html
Bron: Freudenthal instituut

Wiskundige genialiteit versus emotie

In het succesvolle toneelstuk *Het Bewijs* draait het allemaal om een wiskundige formule die baanbrekend is. Vader, hoogleraar wiskunde aan een Amerikaanse universiteit, raakt verstrikt in de gecompliceerdheid van zijn briljante geest.

Zijn jongste dochter is emotioneel even onrijp als onstabiel maar zal de fakkel van zijn genialiteit toch verder dragen. Gevoelens die het daglicht niet kunnen verdragen spelen vader en dochter parten. Afhankelijkheid als schild voor levensangst bindt deze twee. Dochter zorgt voor vader die afglijdt in een wereld vol onbekendheid. En vader houdt willens en wetens zijn dochter als universitaire troef in handen.

Op een dag komt een jonge wiskundestudent het huis binnen waar vader en dochter samenwonen. Hij zoekt iets en stuit op een formule die de wereld van de wiskunde volledig zal kunnen veranderen. Gezien

de reputatie van de vader dicht hij hem het wiskundige bewijs toe. Echter, vader vertoeft al jaren in een grauwe dementie en kan in de laatste jaren van zijn leven geen zinnig woord meer als ‘meesterwerk’ op papier zetten.

Is het dan de dochter die met de geërfde genialiteit van haar vader het wiskundig bewijs op papier heeft gezet? Tegen de achtergrond van de begrafenis van de inmiddels overleden vader moeten de twee dochters het huis opruimen en afsluiten en verder gaan met hun leven. Het is niet zozeer de vraag of vader of zijn jongste dochter *Het Bewijs* heeft geleverd die de toeschouwer met volle aandacht naar dit stuk laat kijken.

Zeker het gegeven is spannend en onalledaags, maar het is de combinatie met de invulling van de acteurs die *Het Bewijs* zo spannend maakt. De oude rot in het vak Jules Hamel speelt de verwarde, briljante, alsmat dementer wordende vader. Zijn triomf, zijn meesterwerk dat niet meer dan een boek vol loze woorden is wordt uitstekend door hem gespeeld. Met als tegenspeelster de uiterst getalenteerde Carice van Houten, die in en uit verleden en heden stapt met volle overtuiging. Of zij nu wel of niet *Het Bewijs* van haar vader heeft opgepakt en op eigen wijze wiskundig heeft gestaafd is de vraag. Of zij in staat zal zijn haar eigen geest te redden en niet zo te eindigen als haar hulpbehoevende vader is de vraag die de toeschouwer met zich mee neemt.

Een interessant stuk bij vlagen briljant gespeeld met uitstekende bijrollen door Sandra Mattie als de zuster en oudste dochter van de professor en Joost Claes in de rol van de jonge student. *Linda Andriesse*



Jules Hamel en Carice van Houten als vader en dochter in *Het Bewijs*.

Lex Schrijver en Bert Gerards winnen internationale prijzen

Op 18 augustus 2003 ontving Lex Schrijver de prestigieuze Dantzig-prijs voor zijn complete werk op het gebied van de optimalisering. Bert Gerards en Lex Schrijver ontvingen diezelfde dag de Fulkerson-prijs voor artikelen in de discrete wiskunde, tijdens het symposium *ISMP 2003* in Kopenhagen. Beide prijzen worden driejaarlijks uitgereikt. Lex Schrijver is verbonden aan het CWI en de Universiteit van Amsterdam; Bert Gerards aan het CWI en de Technische Universiteit Eindhoven.

De Dantzig-prijs is de hoogste erkenning in de mathematische optimalisering, en wordt uitgereikt door de Mathematical Programming Society (MPS) en Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).

Schrijver ontving de prijs voor “deep and fundamental research contributions to discrete optimization”. De Fulkerson-prijs wordt uitgereikt voor ‘outstanding papers in the area of discrete mathematics’, door de MPS en de American Mathematical Society. Bert Gerards won de prijs voor een artikel met Geelen en Kapoor in de *Journal of Combinatorial Theory (B)*; Schrijver voor een artikel in het zelfde tijdschrift. *Bron: CWI*

Compositio Mathematica bij de London Mathematical Society

Vrijdag 7 november werd op het Korteweg-de Vriesinstituut in Amsterdam gevierd, dat per 1 januari aanstaande het tijdschrift *Compositio Mathematica* niet meer door Kluwer, maar door de London Mathematical Society wordt uitgegeven. Eindredacteur Gerard van der Geer presenteerde alvast het eerste nieuwe nummer. Het feit dat de naam "Compositio Mathematica" toebehoort aan een vele jaren lang slapende stichting met dezelfde naam, maakte het mogelijk het tijdschrift elders uit te gaan geven. Naast een iets groter paginaformaat en een prijsafname met maar liefst 33 %, heeft dit geen inhoudelijke consequenties voor het blad.

Compositio werd in 1934 door L.E.J. Brouwer opgericht als reactie op de affaire (1927) waarbij Hilbert hem als redacteur van de *Mathematische Annalen* wilde ontslaan.

Tijdens de feestelijke middag in Amsterdam hield Volker Remmert (Mainz) een lezing over de eerste jaren van het blad; met name de grote omvang van de redactie in die tijd, en de snelle wisselingen vanwege de toenmalige politieke situatie in Duitsland kregen hierbij aandacht.

Vanaf 1 januari 2004 zijn Gerard van der Geer en Bas Edixhoven de eindredacteurs van dit blad.

Jaap Top



Brief Spinozalaureaten in de NRC van 22 oktober

Het profiel Natuur en Techniek in het voorgezet onderwijs mag niet verder worden uitgekleeft, vinden laureaten van de NWO Spinoza-premie. In onderstaande open brief *Laat het bèta-onderwijs intact* spreken zij zich uit over de toestand van het exacte vwo-onderwijs. Uit de brief:

"Het afgelopen jaar is er brede erkenning gekomen van de zorgwekkende achterstand die technologie- en bèta-onderwijs in Nederland hebben opgelopen. De belangstelling van studenten, voor deze vakken is ver beneden de Europese en internationale maat. Dit schaadt het wetenschappelijke en innovatieve klimaat, in ons land."

"Veel van de recente onvrede, geuit vanuit de volle maatschappelijke breedte, is gemobiliseerd door het ongelukkige voorstel het vak natuurkunde te verwijderen uit het Natuur en Gezondheidprofiel van het vwo. Het herziene voorstel van minister Van der Hoeven, dat op dit moment ter behandeling bij de Tweede Kamer ligt, is in een aantal opzichten een grote verbetering. Natuurkunde vormt nu weer een essentieel onderdeel van de bètaprofielen. Helaas is er, nu een nieuw punt van grote zorg, namelijk een aanzienlijke verlichting van het profiel Natuur en Techniek (NT), juist waar het de bètavakken betreft. Hiertegen nemen wij krachtig stelling."

"Er dient een waarborg te zijn dat op alle scholen in heel Nederland volwaardig onderwijs wordt aangeboden, ook in de exacte vakken. Het NT-profiel is bij uitstek de voorbereiding voor verdere studie in deze

richtingen. Het is de levensader voor veel technisch en wetenschappelijk onderzoek."

"Het natuurwetenschappelijke onderzoek in Nederland bevindt zich op dit moment in een kwetsbare toestand. Het zal niet eenvoudig zijn onze positie in de internationale competitie te behouden. Er moet daarom alles op alles gezet worden om serieuze belangstelling bij leerlingen te kweken."

Ondertekenaars zijn de laureaten H.P. Barendregt, C.W.J. Beenaker, J.F.A.K. van Benthem, D.I. Boomsma, R. de Borst, A.L. Bovenberg, E.A. Cutler, C. Dekker, R.H. Dijkgraaf, E.F. van Dishoeck, D. Frenkel, E.J.M. Goulmy, F.G. Grosveld, E.P.J. van den Heuvel, J.H.J. Hoeijmakers, G. 't Hooft, A. Lagendijk, H.W. Lenstra, E.W. Meijer, P.C. Muysken, J. Oerlemans, R.H.A. Plasterk, D.S. Postma, F. Rosendaal en J. L. van Zanden.

Bron: NRC

Overleg minister met commissie OC&W

Op 29 oktober vond het overleg van de minister met de commissie OC&W plaats. Het leek er op dat de Tweede Kamer positief stond ten opzichte van een vierde vak in het NT-profiel. Wel moest eerst onderzocht worden of het mogelijk was en daar zouden dan de profielcommissies voor worden ingesteld. In de tweede termijn toverde de minister echter een nieuw plan uit haar hoed.

Om tegemoet te komen aan een aantal bezwaren stelde ze voor om in elk profiel een vierde vak te plaatsen waar dan gekozen kan worden uit een beperkt aantal vakken. Dat betekent echter dat natuurkunde weer uit het NG-profiel gaat en de concurrentie moet aangaan met een stuk of vier andere vakken waaronder informatica en wellicht ook economie. Alle inhoudelijke argumenten voor natuurkunde in NG werden dus overboord gegooid. Bovendien blijft de enorme teruggang in uren voor wiskunde voorlopig overeind.

Het is lastig om een mening te vormen over de consequenties voor de twee Natuurprofielen, omdat de definitieve voorstellen er nog niet zijn. Die komen binnen veertien dagen, zo beloofde de minister.

De plannen die de bèta's de maand oktober zo massaal richting de politiek hebben gestuurd lijken niet al teveel effect te hebben gehad.

Bron: Boze Bèta's

Erratum septembernummer 2003

Onder de bespreking van het boek *Introduction to the Mori program* van Kenji Matsuki (pagina 260-261 van het septembernummer) is abusievelijk als reviewer de naam W. Pelham opgenomen. Dat had P. Wilson moeten zijn.

De eindredactie

Verhoging portokosten buitenlandse abonnementen

De algemene ledenvergadering van het KWG heeft op 2 mei 2003 besloten om aan leden die het Nieuw Archief voor Wiskunde in het buitenland ontvangen de werkelijke meerkosten van buitenlandse versturing in rekening te brengen. Daarom zullen vanaf 2004 de volgende verzendingstoelagen bovenop het geldende binnenlands tarief c.q. het lidmaatschap van het KWG gerekend worden: €5,- voor leden buiten Nederland maar binnen Europa en €7,50 voor leden buiten Europa. Voor leden binnen Europa verandert hiermee niets, leden buiten Europa betalen vanaf 2004 €2,50 meer.

Bestuur KWG

Izak Moerdijk

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Postbus 80010
3508 TA Utrecht
moerdijk@math.uu.nl

Jacob P. Murre

Prins van Wiedlaan 11
2242 CC Wassenaar
murre@math.leidenuniv.nl

In memoriam

Willem Titus van Est (1921–2002)

In maart 2002 is in dit blad, naar aanleiding van zijn tachtigste verjaardag in december 2001, een interview met Van Est gepubliceerd. Nog geen half jaar later, in de zomer van het jaar 2002, is hij overleden. Dit In Memoriam is geschreven voor de Levensberichten (2003) van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. De auteurs, Moerdijk en Murre, zijn beide meetkundigen. Voor een lange periode waren Murre en Van Est tegelijkertijd hoogleraar meetkunde in Leiden. Moerdijk, ooit student bij Van Est, is nu hoogleraar topologie in Utrecht en pleitbezorger van het werk van Van Est in Nederland.

Na een kortstondig ziekbed overleed op 30 juli 2002, op tachtigjarige leeftijd, Willem Titus van Est. Wil van Est was tot een week voor zijn overlijden in uitstekende fysieke en mentale conditie, en het bericht van zijn overlijden kwam geheel onverwacht.

Wil van Est, geboren op 12 december 1921, groeide op in Indonesië, in Batavia (het hui-

dige Jakarta), waar zijn vader als functionaris bij de politie werkzaam was. Hij bezocht daar de lagere school en de bekende Koning Willem III HBS, voordat hij in 1938 naar Nederland kwam om zijn studie in de wis- en natuurkunde aan te vangen aan de Universiteit van Amsterdam.

Hier volgde hij onder meer natuurkunde-colleges van C.J. Gorter, en wiskunde-colleges van L.E.J. Brouwer (niet-euclidische meetkunde, analytische mechanica) en van A. Heyting ('moderne' algebra, in de zin van Van der Waerden). Maar het waren vooral de colleges in de analyse van H. Freudenthal waarvan Van Est later altijd zei dat ze voor hem buitengewoon stimulerend waren.

Na zijn kandidaatsexamen in 1942 moest Van Est zijn studie vanwege de oorlog onderbreken, en kon hij deze pas in 1945 weer hervatten. Hoewel zijn eerste belangstelling op dat moment uitging naar de theoretische natuurkunde, zag hij op tegen het langdurig laboratoriumwerk dat hem nog restte voor een doctoraal examen natuurkunde, en studeerde

hij uiteindelijk in 1948 af in de wiskunde.

Tijdens de eerste oorlogsjaren werd Freudenthal, net als alle joodse werknemers van de Nederlandse Universiteiten, op non-actief gesteld. Van Est hield contact met hem, en na de oorlog heeft hij met onder anderen J. Hemelrijk (later hoogleraar statistiek aan de UvA) een 'studentenactie' ondernomen om Freudenthal voor Amsterdam te behouden. Dit idee vond echter geen steun bij L.E.J. Brouwer die in deze zaak een belangrijke stem had. Kort hierna werd Freudenthal tot hoogleraar in Utrecht benoemd en in 1947 volgde Van Est zijn leermeester daarheen als zijn assistent.

Promotie

In de periode direct na de oorlog trouwde Wil van Est met Trijntje (Truus) Sargentini en kregen zij een zoon, Jan. Later, in 1960, volgde er nog een dochter, Annemarie. Om in het onderhoud van zijn jonge gezin te voorzien gaf Van Est enkele jaren les aan het Stedelijk (Murmellius) Gymnasium te Alkmaar. In deze

jaren werkte hij tevens aan een proefschrift, getiteld *On a Generalization of a Theorem of J. Nielsen*, waarop hij in 1950 cum laude bij Freudenthal promoveerde.

De stelling van Nielsen uit 1940 zegt dat een niet-commutatieve groep van hyperbolische translaties in het hyperbolische vlak noodzakelijk discreet is. In het proefschrift wordt deze stelling in een algemenere context geplaatst, waarin het hyperbolische vlak wordt vervangen door de symmetrische ruimte van een halfenkelvoudige reële Lie-groep. De door Van Est bewezen generalisatie berust op een algebraïsch resultaat over de Lie-algebra van zo'n groep. Uit het proefschrift blijkt dat Van Est toen al een grondige kennis had van het fundamentele werk van de Franse wiskundige Elie Cartan (1869–1951). Het werk van Cartan zou voor Van Est altijd een belangrijke leidraad en bron van inspiratie blijven.

Utrecht: het isomorfisme van Van Est

Na zijn promotie werd van Est in 1951 aan de Universiteit Utrecht aangesteld als wetenschappelijk ambtenaar; kort daarna, in 1953,

werd hij aan dezelfde universiteit benoemd tot lector, en vervolgens in 1955 tot buitengewoon hoogleraar. In deze 'Utrechtse periode' verrichtte Van Est belangrijk werk, waarmee hij zich internationale bekendheid verwierf.

In het begin van de vijftiger jaren werden methoden uit de algebraïsche topologie, met name de homologie- en cohomologietheorie, toegepast in de studie van andere objecten dan topologische ruimten. Er ontstond een algemene *homologische algebra*, waarin cohomologietheorie werd gebruikt voor de studie van zuiver algebraïsche objecten (zoals groepen en ringen), en ook van objecten met zowel meetkundige als algebraïsche structuur, zoals Lie-algebra's en Lie-groepen. Een van de eerste boeken waarin dergelijke zaken systematisch uiteen werden gezet is dat van H. Cartan en S. Eilenberg (*Homological Algebra*, Princeton 1956).

Van Est bestudeerde deze homologische algebra in de context van de Lie-theorie: hij ontdekte een bijzondere relatie tussen de cohomologie van Lie-groepen (gedefinieerd in termen van algebra alsmede differentieer-

baarheid) en cohomologie van Lie-algebra's (gedefinieerd in alleen algebraïsche termen). Het infinitesimale substraat van een Lie-groep is een Lie-algebra, en Van Est bewees dat de genoemde *globale* cohomologie van de Lie-groep beschreven kan worden in termen van de infinitesimale Lie-algebra. Deze relatie wordt uitgedrukt door wat nu in de literatuur het *isomorfisme van Van Est* heet. Van Est publiceerde zijn resultaten in de *Proceedings* van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.

In deze periode waren de Amerikaanse topologen Ralph Fox en Robert Hermann bij Freudenthal in Utrecht te gast. Hermann reisde regelmatig naar Parijs om het befaamde Séminaire Bourbaki bij te wonen, en was zodoende vertrouwd met de laatste ontwikkelingen voortkomend uit het werk van Henri Cartan, de zoon van de eerder genoemde Elie. Via Hermann hoorde Van Est over de toen nieuwe methode van *spectraalrijen*. Coriféeën als J.P. Serre en A. Borel hadden aangetoond dat er prachtige resultaten behaald



Het symposium 'Van Est 80' in het Korteweg de Vries Instituut te Amsterdam. In het midden Willem Van Est en om hem heen, met de klok mee: Jan van de Craats, Aida Paalman, Tjepke Blanksma en Klaas Landsman.

konden worden met de methode van spectraalrijen. Van Est wist zich als een van de weinigen in Nederland (in die tijd) deze methode eigen te maken. Dit stelde hem in staat om, terwijl hij in 1953–1954 op uitnodiging van Fox een jaar aan de Universiteit van Princeton verbleef, zijn eerdere resultaten op een elegantere manier af te leiden en aan te scherpen. Deze verbeterde versie van het *isomorfisme van Van Est* verscheen eveneens in de *Proceedings* van de Akademie (*Une application d'une méthode de Cartan-Leray*, 1955), en bevatte wat nu bekend staat als *de spectraalrij van Van Est*.

Leiden

In 1956 werd Van Est benoemd tot hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Leiden. Hij volgde de vroegtijdig overleden J. Haantjes op als bezetter van de leerstoel 'meetkunde'. Van Est zou tot 1972 in Leiden blijven.

In deze Leidse periode trad Van Est op als promotor van een aantal promovendi, waaronder de latere hoogleraren A. van de Ven, F. Oort en H. Singh Varma. Het onderzoek van Van Est concentreerde zich in die tijd onder meer op het integreerbaarheidsprobleem voor Lie-algebra's. Een klassieke stelling van E. Cartan (die overigens bekend staat als *het derde theorema van Lie*) zegt dat elke eindig-dimensionale Lie-algebra 'geïntegreerd' kan worden tot een Lie groep (in de zin dat de gegeven Lie-algebra het infinitesimale substraat is van de Lie-groep). Van Est ontdekte in samenwerking met Th.J. Korthagen dat deze stelling niet opgaat voor een natuurlijke klasse van oneindig-dimensionale Lie-algebra's, de Banach-Lie-algebra's. Deze ontdekking gaf aanleiding tot verder onderzoek naar deze oneindig-dimensionale Lie-algebra's, en zou later op natuurlijke wijze leiden tot de bijdragen van Van Est aan de theorie van foliaties. In de jaren tachtig inspireerde dit werk nog een andere toepassing: het was toen al lange tijd bekend dat de lussengroep van een compacte enkelvoudige Lie-groep een univer-

sele centrale uitbreiding heeft door een cirkel, maar een concrete beschrijving was niet voorhanden. Het artikel met Korthagen leidde echter tot een verrassend eenvoudige expliciete constructie hiervan.

Amsterdam: S-atlassen

In 1972 keerde Van Est terug naar de Universiteit van Amsterdam, zijn Alma Mater waaraan hij altijd gehecht was gebleven, en waar hij tot zijn emeritaat in 1986 zou blijven. Hij werd de opvolger van N. Kuiper, die een benoeming had aanvaard tot directeur van het *Institut des Hautes Études Scientifiques* te Bures-sur-Yvettes, bij Parijs. Kort na zijn overgang naar Amsterdam, in 1973, werd Van Est benoemd tot lid van de Akademie.

In deze Amsterdamse periode ontstond het tweede hoofdthema in het werk van Van Est. Zoekend naar een algemener begrip *variëteit* waarvoor de integratie van genoemde Banach-Lie-algebra's *wel* mogelijk zou zijn, ontwikkelde hij het begrip *S-atlas*. Gewone variëteiten worden beschreven in termen van atlassen, dat wil zeggen via lokale open delen die gezien kunnen worden als *kaarten* en die voor de globale beschrijving dan samengevoegd moeten worden tot een atlas. De algemenere S-atlassen bleken gebruikt te kunnen worden in de beschrijving van zogenaamde variëteiten van Satake, vanwaar de "S" in de naamgeving. Deze S-atlassen bleken ook nauw verbonden aan de *orbifolds* van Thurston, en de *pseudogroepen* die door Haefliger en anderen zeer succesvol waren gebruikt in de studie van foliaties. Van Est ontwikkelde de theorie van deze S-atlassen, en dit stelde hem in staat om een aantal klassieke resultaten uit de foliatietheorie op zeer natuurlijke wijze af te leiden. Dit betrof bijvoorbeeld Haefligers bekende stelling over het niet bestaan van analytische foliaties op het drie-dimensionale boloppervlak. Hij bestudeerde in het bijzonder de zogenaamde fundamentealgroep van een S-atlas, en wist op die manier natuurlijke generalisaties af te

leiden van stellingen over de meetkunde van een torusoppervlak van onder andere Kneser, Siegel en Denjoy.

Van Est had zijn belangstelling voor de theoretische natuurkunde en de mathematische fysica nooit verloren. Deze belangstelling bloeide weer op in zijn Amsterdamse periode. Er ontstond een actieve samenwerking met de toegepast wiskundige Eduard de Jager, en met Gijs Tuynman die door Van Est begeleid werd bij het werk aan een proefschrift over quantisatietheorie.

Het lag niet in de aard van Van Est om als bestuurder op de voorgrond te treden, maar hij heeft zich op dit terrein wel degelijk verdienstelijk gemaakt. Zo was hij jaren lang curator van het Centrum voor Wiskunde en Informatica (voorheen Mathematisch Centrum), en was hij een aantal jaren ondervoorzitter van de Sectie Natuurkunde van de Akademie.

Na zijn emeritaat kon Van Est meer tijd besteden aan zijn hobby, de Franse en vooral de Spaanse taal. Hij bleef echter ook actief allerlei seminaria bezoeken en stimuleerde jongere wiskundigen. In 1987 ontving Van Est een eredoctoraat van de Universiteit van Toulouse.

Van Est was een wiskundige van groot formaat, wiens werk een brede internationale erkenning vond. Hij werkte vanuit een meetkundige intuïtie, en vanuit een Platonistische kijk op de wiskunde, waarbij men op zoek is naar een a priori bepaalde maar onbekende harmonie en orde. Hij publiceerde niet veel, maar zijn werk was van hoge kwaliteit, en speelt nog steeds een belangrijke rol, ook in de meest recente ontwikkelingen op zijn werkterrein. Bovendien was Wil van Est een buitengewoon vriendelijk en bescheiden persoon met een brede kennis van wiskunde en natuurkunde — een kennis die ver buiten zijn eigen onderzoeksterrein ging.

Zijn familie en vrienden zullen hem node missen.



Ton Levelt

Mathematisch Instituut
Katholieke Universiteit Nijmegen
Postbus 9010, 6500 GL Nijmegen
ahml@math.kun.nl

In memoriam

Henry Oedayrajsingh Varma (1930–2003)

Op tweeënzeventigjarige leeftijd is Henry Oedayrajsingh Varma in Nijmegen overleden. Na een lectoraat van vijf jaren aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit van Nijmegen, werd hij in 1970 benoemd tot hoogleraar in de zuivere wiskunde aan dit instituut. De auteur van dit In Memoriam is emeritus hoogleraar aan hetzelfde instituut.

Op 23 februari 2003 overleed te Nijmegen Henry Alphonsus Maria Jagdischandre Oedayrajsingh Varma, ongeveer zeven maanden na de dood van zijn bewonderde en geliefde leermeester Prof.dr. W.T. van Est. Henry Varma, zoals hij door vrienden en collega's meestal genoemd werd, werd geboren in Suriname op 5 augustus 1930. Na een jaar studie voor civiel ingenieur aan de T.H. Delft stapte hij in 1950 over naar de studie wiskunde aan de Rijksuniversiteit Leiden, waar hij in 1956 het doctoraal examen aflegde. Vervolgens was hij twee jaar werkzaam als leraar bij het middelbaar onderwijs en de kweekschool in Suriname. In 1960 trad hij in dienst van de juist gestarte wiskundeopleiding aan de Katholieke Universi-

teit Nijmegen. In maart 1961 promoveerde hij in Leiden op het proefschrift *On the theory of covering groups*. Promotor was Prof.dr. W.T. van Est. De periode 1963–1965 bracht hij door als research fellow aan de Harvard universiteit. Bij zijn terugkeer naar Nijmegen werd hij benoemd tot lector. Vijf jaar later volgde zijn benoeming tot gewoon hoogleraar. Hij legde zijn functie neer eind 1988.

Achter deze korte opsomming van biografische data gaat een intens leven schuil, getekend door de wiskunde. Die wiskunde was voor Henry Varma een heilige zaak, een beleving van inzicht en esthetiek, gekenmerkt door gedrevenheid. Verbaal begaafd, speels en met een groot gevoel voor humor heeft hij de jaren door studenten en collega's weten te boeien. Met de studenten had hij een bijzondere verhouding; hij gaf om ze en kon heel open en persoonlijk met ze omgaan, vaak met iets vaderlijks. Maar hij kon ook heel streng zijn. Als hij voorvoelde dat het tentamen slecht zou uitpakken, dan laste hij extra avondcolleges in om de studenten bij te spijkeren. Niemand durfde daarbij weg te blijven. Hij had de wind eronder. Beroemd was zijn college op 6 december; dat ging geheel op rijm en eindigde met speculaas! Generaties van studenten zullen zijn kleurrijke persoonlijkheid niet licht vergeten. Zeker niet de studenten uit de revolutiejaren. In tegenstelling tot vele professoren schuwde hij het contact met de "revolutionairen" niet, maar hij bespaarde hun evenmin zijn kritiek. Zij moesten gevoeld hebben dat hij ze au sérieux nam en dat hij hun afwijzing van het onrecht in de wereld begreep. Begrijpelijkerswijs lag Henry's hart bij de noden van de derde wereld. Hij gaf daaraan gevolg door een jaar (1972/73) bijscholing te geven aan de docenten van de San Marcos universiteit in Lima.

Henry Varma's wiskundige interesse betrof de algebraïsche topologie, differentiaalmeetkunde en topologie van Liegroepen waarin hij een diep inzicht had. Zijn wetenschappelij-

ke output wordt gekenmerkt door kwaliteit, meer dan door kwantiteit. Het paste in zijn filosofie om zijn promovendi in verschillende gebieden van de meetkunde aan het werk te zetten. Zijn nieuwsgierigheid werd steeds weer geprikkeld door nieuwe ontwikkelingen en uitdagingen. Zo raakte hij gefascineerd door computers en programmeren. Nooit te bang om vergaande standpunten in te nemen probeerde hij toen iedereen te overtuigen dat er maar één werkelijk goede programmeertaal bestond: APL.

Henry heeft een grote bestuurlijke last gedragen. Hij was voorzitter van de Sectie Wiskunde gedurende twee perioden: 1975–1980 en 1984–1986. In de eerstgenoemde periode heeft hij een dynamisch bewind gevoerd waarin veel tot stand is gebracht. Belangrijke vacatures werden opgevuld, procedures vastgesteld, extra middelen verworven uit de universitaire onderzoekspool, computers werden geïntroduceerd in het Mathematisch Instituut en steun werd verleend aan de komst van de informatica. Het waren geen gemakkelijke jaren; resultaten konden slechts bereikt worden met veel politiek vernuft en fikse strijd. Ook daarna werd op hem een beroep gedaan voor lastige bestuurszaken. In zijn tweede bestuursperiode, 1984–1986, wilde het niet goed meer lukken. Zeker heeft hij zich ook toen ingezet voor enkele belangrijke zaken, zoals de oprichting van een faculteit wiskunde en informatica. Maar het leek of hij zijn plezier erin verloren had. Hij werd somber over de ontwikkelingen in de Nederlandse universiteiten, die zover afgleden van het niveau van de Leidse alma mater dat hij kende uit zijn studententijd. Zijn meningen stak hij nooit onder stoelen of banken, maar nu raakte hij echt in conflict met bestuurders en medewerkers. Uiteindelijk legde Henry zijn functie neer eind 1988. Hoewel zijn contacten met het Mathematisch Instituut sporadisch werden, zal Henry, die niemand onbewogen liet, in onze herinnering sterk blijven voortleven. 



Hans van Ditmarsch

Computer Science Department, University of Otago

PO Box 56, Dunedin 9015

Nieuw-Zeeland

hans@cs.otago.ac.nz

Column Wiskundigen in den vreemde

Nieuw-Zeeuwse Kroniek

In november 2000 promoveerde Hans van Ditmarsch aan de Rijksuniversiteit Groningen. Een jaar later stapte hij op het vliegtuig naar de andere kant van de wereld en begon een nieuwe carrière aan de University of Otago in Dunedin, Nieuw-Zeeland. Hij doet verslag van zijn ervaringen als Nieuw-Zeeuws immigrant.

De wiskundige Alexander Aitken (1895–1967) is een van de illustere zonen van Dunedin. Een uitvoerige biografie van zijn jeugd staat als fraaie inleiding bij een uitgave van zijn — eigenlijk niet zo memorabele — dagboek-memoires *To Catch the Spirit* (Otago University Press, 1995). Aitken werd geboren in Dunedin. Hij groeide daar ook op; zijn vader was er groenteboer. Zijn moeder overleed al op jonge leeftijd. Veel familie van vaderskant woonde in Pukehiki, ergens halverwege op de Peninsula, een wat ruig zeewaarts gekeerd schiereiland met woeste stranden, vooral bekend vanwege de albatroskolonie. Op diezelfde eenzame stranden waar ik in het weekend graag rondwandelen en pinguïns ga kijken, ravotte hij vroeger met zijn neefjes en nichtjes. Pukehiki bestaat nog steeds, maar is inmiddels, zoals zoveel plaatsen hier, ontvolkt. Er staan drie huizen, een houten kerkgebouw en een verenigingsgebouw (gebouwd door zijn oom). Ik fiets er vaak langs. Het adres in Dunedin van Aitken's familie is inmiddels opgeslokt door uitdijende universiteitsgebouwen, het is zo'n beetje naast het café waar ik dagelijks koffie drink. Zijn middelbare school was de Otago Boys High School, nog steeds een instituut. Daarna studeerde hij enige jaren aan Otago University. Zijn studie werd in 1915 onderbroken voor het vervullen van de militaire dienst, aan het front in Europa. Hierover straks meer. Daarna maakte hij zijn studie aan Otago University af, werd enige jaren wiskundeleraar aan de Otago Boys High School — hij heette een slappe docent te zijn, omdat hij geen lijfstraffen uitdeelde — en vertrok in 1922 naar Edinburgh University, waar hij student van Whittaker werd. Hij is nooit meer in Dunedin teruggeweest. Uiteindelijk werd hij een beroemd en bekend hoogleraar wiskunde aan Edinburgh University, gespecialiseerd in statistiek, matrixrekening en actuariële wiskunde.

Aitken stond bekend als rekenwonder — 'the human computer'. Hij had een enorme vaardigheid in hoofdrekenen, en een fantastisch geheugen. Het verhaal doet de ronde dat hij de eerste 2000 decimalen van het getal π uit het hoofd kende, of, afhankelijk van de bron, de eerste 700. Daarmee wordt misschien bedoeld dat hij dit uit het hoofd wist te berekenen. Zijn colleges verlevendigde hij door de studenten uit te dagen hem grote getallen op te geven, die hij

dan binnen enkele seconden vermenigvuldigde. In de jaren twintig werd experimenteel psychologisch onderzoek gedaan naar zijn bijzondere capaciteiten: 30 seconden voor het vermenigvuldigen van 987654321 met 123456789.

Zijn oorlogsherinneringen staan in het verpletterende *Gallipoli to the Somme* (Oxford University Press, 1963) — pas veel later in zijn leven gepubliceerd. Het merendeel van deze memoires speelt zich af in Armentières, nabij Ieper in België, aan het loopgravenfront van de Eerste Wereldoorlog. Aitken diende daar onder meer in de 10th Otago Company. Wat valt een Nieuw-Zeelander op in België? Dat daar bijvoorbeeld *echte* koekoeken te horen zijn, waarvan de Westerse literatuur en muziek doordrenkt is, maar die in Nieuw-Zeeland niet voorkomen. Zijn fotografisch geheugen voor tekst en getallen bewees ook zijn dienst in de oorlog. Na een offensief was het logboek (roll-book) van 'Platoon 10' verloren gegaan. Onder de overlevenden was precieze informatie over de slachtoffers natuurlijk urgent. Aitken, toevallig aanwezig bij deze consternatie in het militair hoofdkwartier, had ooit in dat peloton gediend, dit boek onder ogen gehad, en wist daarom uit het hoofd alle namen, rangen, affiliaties, enzovoorts op te dreunen: "I had no difficulty, [...] brought by stress into a condition almost of hypernesia, in bringing the lost roll-book before me, almost, as it were, floating." Ook onderwees hij in de loopgraven zijn landgenoten over de sterrenhemel aan het noorderfirmament. Dankbare kameraden vertellen hem later dat dit hun leven gered heeft. Na een sortie, 's nachts verdwaald tussen de linies, konden ze, geleid door de poolster, vermijden stekeblind de Duitse linies in te lopen en door mitrailleurs neergemaaid te worden.

Fantastisch zijn de wederwaardigheden van Alexander Aitken's viool. Deze smokkelde hij illegaal aan de frontlinies steeds weer mee met hulp van kameraden — alleen standaarduitrusting, geweren en zo, zijn kennelijk toegestaan. Kapotte vioolsnaren werden vervangen door delen van telefoonkabels — dat moet geklonken hebben! In Frankrijk, bij de Somme, werd een hele zoektocht naar een nieuwe strijkstok ondernomen, omdat overleven zonder Bach, Grieg en Dvořák nog veel moeilijker is dan mét.

Die viool heb ik nu net bewonderd in het schoolmuseum van de Otago Boys High School, na een afspraak met curator David Billing. Daar is de viool namelijk in 1953 uiteindelijk terechtgekomen. In het vilt van de vioolkist staat het allemaal netjes gegrift: 'Gallipoli', 'Suez', 'Armentières', enzovoort. De stok is er niet meer bij. Ik stap weer op de fiets, de heuvel af, terug naar het werk.

Barry Koren

Faculteit Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek

Technische Universiteit Delft

Postbus 5058, 2600 GB Delft

Barry.Koren@cwj.nl

Inaugurele rede

Stromende ge

Dit jaar is het honderd jaar geleden dat de eerste bemande vlucht met een motorvliegtuig werd uitgevoerd, en ook honderd jaar geleden dat John von Neumann werd geboren. In dit artikel wordt, in een historisch perspectief, aandacht besteed aan het grote belang van beide gebeurtenissen voor de numerieke stromingsleer in het algemeen, en voor de numerieke aërodynamica in het bijzonder. Barry Koren gaat in zijn op 23 mei van dit jaar uitgesproken inaugurele rede in op de geschiedenis van de numerieke stromingsleer. Hij is deeltijdhoogleraar in het vakgebied Computational Fluid Dynamics aan de Faculteit Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek van de Technische Universiteit Delft.

Overall stromen gassen en vloeistoffen. Lucht stroomt om de aarde, om vliegtuigen, raketten en windmolens, en door onze longen. Water stroomt om de aarde en om schepen, benzine door motoren, en bloed door ons hart. De wetenschap die zich bezighoudt met de bestudering van de stroming van gassen en vloeistoffen heet stromingsleer, in het Engels *fluid dynamics*. Stromingsleer is een onderdeel van de natuurkunde. In het natuurkundeonderwijs op middelbare scholen wordt in het algemeen geen les gegeven in stromingsleer. Stromingsleer vereist daarvoor te veel voorkennis van vooral wiskunde. Op universiteiten wordt er wel onderwijs in gegeven, op technische universiteiten zelfs heel veel. Wil je bijvoorbeeld een vliegtuig, raket, ben-

zinemotor of kunsthart ontwerpen, dan kun je niet om stromingsleer heen.

Met name voor het ontwerpen van vliegtuigen is kennis en begrip van stromingsleer, aërodynamica in dit geval, van groot belang. Met uitzondering van de gevaarlijke zwaartekracht zijn alle krachten die in de vlucht op een vliegtuig werken, luchtkrachten. Het veilig door de lucht laten bewegen, over onze hoofden heen (figuur 1), van een vliegtuig, afgetankt met tonnen brandstof en aan boord een paar honderd passagiers, maakt een precieze kennis, begrip en ook beheersing van deze luchtkrachten van cruciaal belang, van *levensbelang*! Vliegen moet bovendien niet alleen veilig, maar ook nog eens zuinig en stil. Voor de luchtvaart- en ruimtevaarttechniek is aërodynamica echt onontbeerlijk.

Experiment en theorie

Voor het onderzoeken van stromingen staan vandaag de dag zowel experimentele als theoretische middelen ter beschikking. Bij experimentele middelen kan in geval van aërodynamica worden gedacht aan windtunnels. De gebroeders Wright, die de eerste bemande motorvlucht uitvoerden (dit jaar precies honderd jaar geleden, figuur 2), hadden al de beschikking over een windtunnel, een zelfgemaakte. Windtunnelwerk heeft veel bezwaren die ik hier niet ga opnoemen, maar het geniet vertrouwen omdat het met echte luchtstromingen werkt en niet met denkbeeldige, zoals de theoretische aërodynamica. Ikzelf

heb destijds voor theoretische aërodynamica gekozen; experimentele aërodynamica is mij te moeilijk.

Geschiedenis

Tegenwoordig wordt het technologische belang van theoretische aërodynamica, van theoretische stromingsleer in het algemeen, alom erkend. Vroeger echter was het voornamelijk een academische aangelegenheid, met resultaten die sterk afweken van experimentele waarnemingen. Technische toepassingen van stromingsleer ontwikkelden zich dan ook eerst vrijwel onafhankelijk van de theorie. Theoretische en technologische doorbraken hebben de kloof tussen theorie en experiment echter gedicht en er is nu sprake van een vruchtbare wisselwerking tussen beide.



Figuur 1 Boeing Sonic Cruiser boven de TU Delft.

foto: Multimedia Services TU Delft



Barry Koren

tallen

Het vliegtuig heeft hierbij een sterk stimulerende rol gespeeld.

Ik ga nu — met persoonlijk gekleurde zevenmijlslaarzen — door de geschiedenis van de theoretische stromingsleer lopen, richting mijn vakgebied.

Hooggegrepen vernieuwingen

Theoretische stromingsleer heeft een roemrijke geschiedenis (zie bijvoorbeeld [1–3]). Vele grote geesten hebben in de loop der eeuwen hun tanden gezet in de bestudering van stromingen en daarmee stap voor stap het vak opgebouwd. Theoretische stromingsleer begint al bij Aristoteles (384–322 voor Christus), die de begrippen continuüm en luchtweerstand invoerde. Het *echte* begin is mijns inziens pas ruim 2000 jaar later, als de Zwitserse wiskundige Leonhard Euler zijn bewegingsvergelijkingen voor de stroming van gassen en vloeistoffen publiceert [4], uitgaande van de Tweede Wet van Newton ($\text{massa} \times \text{versnelling} = \text{som van krachten werkend op die massa}$).

Eulers idee om de stroming van gassen en vloeistoffen te beschrijven in de vorm van partiële differentiaalvergelijkingen was een revolutionaire vernieuwing. (Een beknopte beschrijving van Eulers theoretische stromingsleerwerk is te vinden in [5].) Voor praktische toepassing waren deze vergelijkingen, thans bekend onder de naam Eulervergelijkingen, echter nog ongeschikt. Ze houden namelijk geen rekening met wrijvingskrach-

ten, maar alleen met drukkrachten. Pas ongeveer een eeuw later, in 1845, stelde de Ier George Stokes stromingsvergelijkingen op die ook rekening houden met wrijving [6], vergelijkingen die voor het geval van een niet-samendrukbaar medium al in 1822 waren gevonden door de Fransman Claude Navier [7], en nu bekend staan onder de naam Navier-Stokesvergelijkingen.

Met de introductie van de Navier-Stokesvergelijkingen leek het probleem van het begrijpen en beheersen van een grote klasse stromingen onder handbereik. Het probleem was immers teruggebracht tot het wiskundig oplossen van een handvol fundamentele differentiaalvergelijkingen.

Hoewel de Navier-Stokesvergelijkingen grote vooruitgang brachten, bleek de analytische oplossing van de complete vergelijkingen, de ‘oplossing met potlood en papier’, te hooggegrepen. Het gevolg was het ontstaan van een groot aantal van Navier-Stokes afgeleide, vereenvoudigde vergelijkingen voor speciale gevallen die *wel* analytisch waren aan te pakken. Bovendien bleef een verschil bestaan tussen experimentele en theoretische stromingsleer. De eerste ontwikkelde zich sterk en onafhankelijk tijdens de industriële revolutie.

Het was paradoxaal om te zien dat de invoering van de Navier-Stokesvergelijkingen leidde tot een steeds grotere fragmentatie in verschillende stromingsmodellen, die *allemaal* de stroming beschreven van hetzelfde medium (in ons geval lucht); een the-

oretisch hoogst ongewenste situatie. Theoretische stromingsleer stagneerde langs een front van niet-lineaire problemen. Het doorbreken daarvan zou uiteindelijk pas in de tweede helft van de twintigste eeuw gebeuren, met numeriek-wiskundige methoden: met getallen, bij benadering, en ten koste van veel, vaak heel veel rekenwerk. Een sleutelrol hierbij zou worden gespeeld door een uit Hongarije afkomstige wiskundige.

Baanbrekende ideeën uit Princeton

Budapest was in de jaren tien en twintig van de vorige eeuw een vruchtbare voedingsbodem voor wetenschappelijk talent. Dit jaar ook precies honderd jaar geleden stond er de



Figuur 2 Glasplaatfoto van de eerste bemande motorvlucht (vliegafstand: 37 meter, vluchtduur: 12 seconden), Kitty Hawk, North Carolina, 10.35 u., 17 december 1903. Vooroverliggend op de onderste vleugel: Orville Wright. Meelappend om het vliegtuig zo nodig met de hand in evenwicht te houden: Wilbur Wright. Zichtbaar op de voorgrond onder andere: de rail waarop het vliegtuig is gestart en het bankje waarop de vleugel heeft gesteund. Dezelfde dag nog voerden de gebroeders Wright al een vlucht uit van 260 meter en 59 seconden!



Figuur 3 In 1954 vond het Internationaal Mathematisch Congres in Nederland plaats. Een delegatie van internationaal gerenommeerde wiskundigen bezocht koningin Juliana (zie Nieuw Archief voor Wiskunde, juni 2003, pagina 117). Een gedeelte van deze groep werd daarna uitgenodigd voor de thee in de paleistuin: Von Neumann zit geheel links.

foto: CWI

wieg van John von Neumann (figuur 4).

Als klein kind kreeg Von Neumann privé-onderwijs. Op zijn tiende ging hij voor het eerst naar school, naar het gymnasium, waar zijn talent voor wiskunde werd ontdekt. Hij kreeg er extra wiskundeonderwijs van wiskundigen van de Universiteit van Budapest, waaronder Fekete, een later bekend geworden zuiver wiskundige met wie Von Neumann zijn eerste wiskundeartikel schreef, op achttienjarige leeftijd. Hij was toen in feite al professioneel wiskundige. Von Neumann studeerde aan de Eidgenössische Technische Hochschule Zürich en de Universiteit van Budapest en promoveerde op tweeëntwintigjarige leeftijd. Aansluitend toog hij naar Duitsland waar hij doceerde aan universiteiten in Berlijn en Hamburg. Hij was daarbij vooral actief in de zuivere wiskunde: in de verzamelingenleer, algebra, maattheorie, topologie en groepentheorie. Hij droeg bij aan bestaand werk, de manier van werken om snel erkenning te verkrijgen. Vanaf het midden van de jaren dertig koos Von Neumann echter vooral voor de meer riskante manier van werken: geheel nieuwe wegen inslaan. Hij koos daarbij voor toegepaste wiskunde in de zin van wiskundigen als Hilbert en Courant. Dat wil zeggen: niet wiskunde toegepast op allerlei ad hoc problemen, maar de gerichte toepassing van wiskunde op andere wetenschappen, met name natuurkunde met zijn deelgebieden zoals de

aërodynamica. De snel verslechterende politieke situatie in Europa, van waaruit Von Neumann begin jaren dertig al was geëmigreerd naar Princeton, heeft een rol gespeeld bij deze keuze. Er was oorlogsdreiging; er ontstond een steeds grotere behoefte aan antwoorden op concrete vragen vanuit met name de ingenieurspraktijk; van wiskunst naar wiskunde.

Von Neumann was niet de enige die begin jaren dertig uit Europa vertrok. Göttingen hield vanaf 1933 definitief op met haar bestaan als wereldcentrum van de wiskunde, nadat de Naziregering sterke beroepsbeperkingen had opgelegd aan wetenschappers van joodse komaf. Princeton werd het nieuwe Mekka. (Voor een gedetailleerde beschrijving van deze teloorgang van Göttingen, zie Richard Courants biografie [8].)

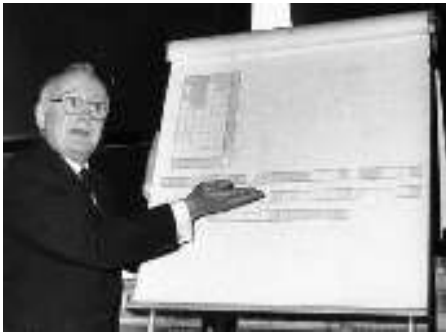
Werkte Von Neumann voor de oorlog nog aan een wiskundige basis voor de vergelijkingen van de statistische mechanica, de Boltzmannvergelijkingen, in de oorlog 'verlaagde' hij zich zelfs tot het ontwikkelen van numeriek-wiskundige oplosmethoden voor de Eulervergelijkingen. Heel origineel was hierbij zijn idee om mogelijke discontinuïteiten in de Euleroplossingen uit te rekenen zonder daarbij expliciet sprongrelaties op te leggen. In plaats daarvan stelde Von Neumann voor om kunstmatige (numerieke) viscositeit te introduceren, zodanig dat de sprongen op fysisch correcte wijze vanzelf

te voorschijn komen: *shock capturing*, tegenwoordig een standaardtechniek. En passant kwam hij ook met een originele methode voor het analyseren van de stabiliteit van numerieke berekeningen, een Fouriermethode, nu ook een standaardtechniek.

In 1944 ontstond de dringende noodzaak om de numeriek-wiskundige methoden, die Von Neumann inmiddels op papier had ontwikkeld, daadwerkelijk toe te passen; op automatische rekenmachines, *computers*, apparaten die nog niet bestonden. Deze noodzaak deed Von Neumann besluiten om ook te gaan werken aan de ontwikkeling van de computer. In 1944 en 1945 verrichtte hij baanbrekend werk door zijn numerieke wiskundemethoden voor het oplossen van een stromingsprobleem te vertalen in een verzameling instructies voor een nog denkbeeldige computer. Deze instructies zouden niet aan de computer moeten worden doorgegeven door iets in de *opbouw* (zeg de bedrading) van de computer aan te passen. Von Neumann stelde voor om computers te voorzien van een zo algemeen mogelijke opbouw. Ook stelde hij voor om rekeninstructies in hun totaliteit op te slaan in het geheugen van de computer, bij de andere voor de berekening relevante gegevens (invoergegevens, tussenresultaten en eindresultaten). Twee nog steeds algemeen gehanteerde principes. In 1949 werd de eerste computer gerealiseerd die geheel voldeed aan Von Neumanns interne programmeer- en geheugenprincipes: de EDSAC (Electronic Delay Storage Automatic Calculator), overi-



Figuur 4 John von Neumann, 1903–1957, Hongaars-Amerikaans wiskundige, grondlegger van Computational Fluid Dynamics.



Figuur 5 Aad van Wijngaarden, 1916–1987, Delfts werktuigbouwkundig ingenieur, hoofd Rekenafdeling en oud-directeur van het CWI, Nederlands computerpionier.

gens in Europa, aan Cambridge University.

Vóór Von Neumann combineerden Richardson, en Courant en collega's al theoretische stromingsleer en numerieke wiskunde [9–10], maar nog zonder ideeën over computers; zonder informatica. Numerieke stromingsleer, in het Engels *Computational Fluid Dynamics* — onder vakgenoten kortweg *CFD* — is een combinatie van drie vakken: theoretische stromingsleer, numerieke wiskunde en informatica. Von Neumann haalde dit derde vak, de informatica, erbij en kan daarom met recht de vader van *CFD* worden genoemd.

Een gedetailleerde beschrijving van Von Neumanns bijdragen aan het wetenschappelijk rekenen met computers wordt gegeven door Aspray [11]. Von Neumann heeft in zijn wetenschappelijke carrière nog meer baanbrekend werk verricht: details kunnen worden gevonden in de overzichtelijke wetenschappelijke biografie van de hand van Ulam [12].

Als gevierd wiskundige jarenlang van de ene naar de andere wetenschappelijke plek reizend, met bijbehorende sociale en politieke verplichtingen, had Von Neumann nauwelijks tijd om zijn ideeën eens goed op te schrijven. Over shock capturing en de hiervoor genoemde stabiliteitsanalyse werd verlaat en in slechts één artikel gepubliceerd [13]. Op zijn vele reizen deed Von Neumann ook Nederland aan. In 1954 was hij gastspreker tijdens het in Amsterdam gehouden *International Congress of Mathematicians*. Verbonden aan dit congres was, voor een select groepje deelnemers waaronder Von Neumann, een theevisitatie bij koningin Juliana (figuur 3).

Pionierswerk in Amsterdam

Informatica kwam opzetten als nieuw vak. Nederland heeft bij de ontwikkeling van informatica aanvankelijk geen leidende rol kunnen spelen, maar volgde wel op de voet en werd al snel mede-toonaangevend. In 1946 werd te Amsterdam opgericht: het Mathematisch Centrum. Doel van dit nieuwe instituut was

de beoefening van zuivere en toegepaste wiskunde te bevorderen teneinde te verhogen, ik citeer, “het welvaarts- en beschavingspeil in Nederland en de bijdragen van Nederland aan de internationale cultuur”. Geen pure ivoren toren.

Het Mathematisch Centrum heet nu Centrum voor Wiskunde en Informatica: het CWI. Het is mijn Amsterdamse werkplek en volgens één van m'n kinderen het “Circus van Wereldvreemde Ingenieurs”.

De oprichting van het CWI, zo noem ik het vanaf hiervoor het gemak, is niet zonder strijd verlopen. De meest prominente Nederlandse wiskundige in die tijd, L.E.J. Brouwer, huldigde het standpunt dat wiskunde onverschillig staat tegenover natuurwetenschappen en zelfs afwijzend tegenover techniek; een achterhaald standpunt sinds het werk van wiskundigen als Hilbert, Courant en Von Neumann. Brouwer wilde met het op te richten CWI Amsterdam het nieuwe Göttingen op het gebied van de zuivere wiskunde laten worden. Het is er niet van gekomen. Brouwer is opgeofferd aan de oprichting van het CWI, aldus zijn biograaf [14].

De oprichters van het CWI hadden gehoord over Von Neumanns ideeën voor apparaten die zo zelfstandig mogelijk een serie berekeningen zouden moeten kunnen uitvoeren. Zij wilden bij het CWI een rekenafdeling met als twee taken: het ontwikkelen van een grote rekenmachine en het uitvoeren van geavanceerd rekenwerk. Voor het op poten zetten van zo'n afdeling werden de oprichters geattendeerd op Aad van Wijngaarden, afgestudeerd en gepromoveerd in Delft, in de school van Burgers en Biezeno. Van Wijngaarden (figuur 5) is de eerste wetenschappelijk medewerker die bij het CWI wordt aangesteld, in 1947.

In hetzelfde jaar gaat hij op studiereis en bezoekt daarbij onder andere Von Neumann in Princeton. Van Wijngaarden en zijn medewerkers ontwerpen en bouwen vervolgens de eerste Nederlandse computer: de *Automatische Relais Rekenmachine Amsterdam I* (de ARRA I).

Nieuwe computers worden ontwikkeld en gebouwd, in enkelvoud, in 1955 exclusief voor Fokker: de *Fokker Elektronische Rekenmachine Type ARRA* (FERTA). Bij het uitvoeren van rekenwerk op deze eerste computers is nog veel mensenwerk vereist. Op het CWI gebeurt dat door jonge vrouwen, die door Van Wijngaarden wiskundig zijn geschoold.

Een rekentechnisch hoogtepunt is een grote opdracht van het Nationaal Luchtvaartlaboratorium in Amsterdam ten behoeve van de

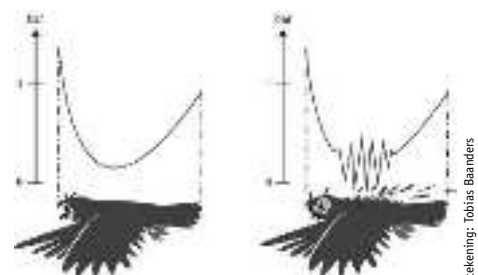
ontwikkeling van de Fokker Friendship, een rekenopdracht waaraan door Van Wijngaarden van 1949 tot 1951 met zijn rekenaars wordt gewerkt. Het rekenprobleem betreft trillingen van een vliegtuigvleugel in subsonische stroming: *flutter*. Het eerste rekenwerk is nog erg machinegebonden; voor iedere berekening moeten in de computer nog kabeltjes in pluggen worden gestoken. Met de realisatie van de door Von Neumann voorgestelde interne programmering richt de aandacht zich echter helemaal op het bedenken van algoritmen en het omzetten daarvan in computerprogrammatuur. Edsger Dijkstra, de latere Turing Award winnaar, treedt in dienst bij het CWI als Nederlands eerste computerprogrammeur. Van Wijngaarden en Dijkstra drukken internationaal hun stempel op de informatica met hun bijdragen aan de ontwikkeling van de programmeertaal *Algol 60*, Van Wijngaarden later nog eens met *Algol 68*. Voor zijn pionierswerk ontvangt Van Wijngaarden in 1979 een eredoctoraat aan de TU Delft. Een boeiende beschrijving van de ontwikkeling van het wetenschappelijk rekenen in het naoorlogse Nederland, in het bijzonder bij het CWI en aan de TU Delft, is te vinden in het proefschrift van Gerard Alberts [15].

CFD-onderzoek op basis van de Euler- of Navier-Stokesvergelijkingen, en van hetzelfde fundamentele karakter als dat van Von Neumann, wordt in de periode 1945–1960 in Nederland echter nog niet gedaan. Voor dat soort werk moeten we naar de Sovjet Unie van de jaren vijftig.

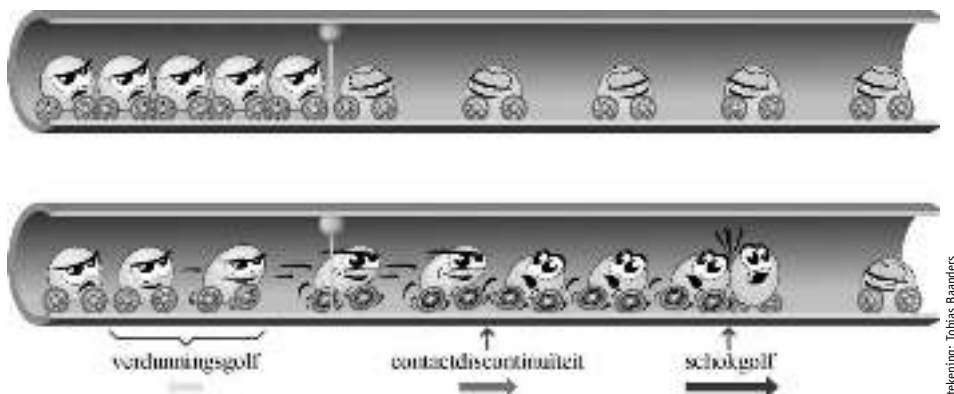
Een briljant idee uit Moskou

Een flink deel van de wereldwijd gebruikte Euler- en Navier-Stokesprogrammatuur is mede gebaseerd op één tijdschriftartikel [16], door de toen nog jonge Russische wiskundige Sergei Konstantinovich Godunov gedestilleerd uit zijn proefschrift.

Godunov heeft het volgende voorgesteld. Stel je hebt een buis met daarin een wandje dat een linker gas, dat een constante druk heeft, scheidt van een rechter gas met bijvoorbeeld een lagere, eveneens constante druk



Figuur 6 Goed en fout drukverloop. Links: zonder wiggles. Rechts: met wiggles.



Figuur 7 'Schokbuis'. Boven: rusttoestand met in linker en rechter gedeelte: hoge respectievelijk lage druk en dichtheid. Onder: bewegingstoestand met naar rechts lopende schokgolf en contactdiscontinuïteit en naar links lopende verdunningsgolf.

(figuur 7, boven). Als het wandje plotseling wordt weggehaald, dan zal het linker gas het rechter gas naar rechts duwen; het scheidingsvlak tussen de twee gassen, de contactdiscontinuïteit, loopt naar rechts. Twee andere golven die door de buis gaan lopen zijn twee drukgolven: een voor de contactdiscontinuïteit uitlopende schokgolf en een naar links lopende verdunningsgolf (figuur 7, onder).

De Eulerstroming in deze buis, een zogenaamde schokbuis, is al in de negentiende eeuw door de Duitse wiskundige Riemann exact uitgerekend, met potlood en papier [17]. (Gilbert Duivesteijn, een afstudeerder van me, heeft op basis van Riemanns werk een exacte, interactieve Java applet geschreven voor schokbuisproblemen, te downloaden via www.hsa.lr.tudelft.nl/~gilbert.) Godunov heeft nu voorgesteld om ter berekening van een buisstroming met meer in de ruimte uitgestrekte variatie in de beginoplossing, de buis te verdelen in denkbeeldige hokjes — celletjes — met per celletje een bij goede benadering constante stromingsoplossing en met elk afzonderlijk celwandje op te vatten als het ene wandje uit de schokbuis van zojuist. Wil je de interactie weten tussen de stromingsoplossingen in twee naburige cellen, dan denk je het denkbeeldige celwandje tussen de twee cellen weg en berekent daar ter plekke de Riemannoplossing en daarmee het lokale transport van massa, impuls en energie.

Je doet dit op alle celwandjes. Het netto transport in ieder celletje is daarmee bekend, een tijdstap kan worden gemaakt. Een doodgewone methode en een erg simpel stromingsprobleem denkt u misschien. Wel, dat lijkt maar zo! Kun je dit goed, dan ben je al een heel eind op weg om de stroming om een vliegtuig of raket uit te rekenen. Het ongewone en slimme van de methode is namelijk dat op het laagste discrete niveau, dat van cel-

wandjes, zo veel mogelijk natuurkunde in de methode is gebouwd, niet slechts numerieke wiskunde.

Hoe meer celletjes, hoe beter de nauwkeurigheid, echter ook hoe duurder de som. Godunov had nog geen computers ter beschikking, wel rekenmeisjes die Godunov en collega-promovendi maar rare jongens vonden, en die werden beloond voor de hoeveelheid berekeningen die ze uitvoerden, *goed of fout*. Ook nog geen echte CFD dus!

In 1997 ontving Godunov een eredoctoraat van de University of Michigan en was er op het Department of Aerospace Engineering een symposium te zijner ere. In een anderhalf uur durende voordracht gaf Godunov hierbij een kijkje in de keuken van zijn onderzoek van toen, werk waarvan men het strategisch belang destijds in de Sovjet Unie niet heeft onderkend. De voordracht, een historische gebeurtenis, is gepubliceerd in de *Journal of Computational Physics* [18–19].

Een tweede belangrijk resultaat in Godunovs klassieke artikel uit 1959 is zijn bewijs dat het onmogelijk is om een lineaire, nauwkeuriger dan eerste-orde methode te maken zonder last te krijgen van fysisch onjuiste 'wiebels' in de oplossing: *wiggles* (figuur 6). In een zogenaamde eerste-orde nauwkeurige methode wordt de oplossing *twee keer* zo nauwkeurig en blijft *vrij* van wiggles, als de celletjes twee keer zo klein worden genomen. Bij een tweede-orde nauwkeurige methode wordt de oplossing dan maar liefst *vier keer* zo nauwkeurig, maar mogelijk helaas wel behept met wiggles.

Wiggles kunnen in de praktijk heel vervelend zijn. Een geluidssnelheidsberekening bijvoorbeeld in één enkel celletje waarin de druk negatief is ten gevolge van een wiggle, kan de hele stromingsberekening doen stuklopen. Het wiggleprobleem bestaat niet alleen voor Godunovs methode: het is algemeen. Wel eigen voor Godunovs methode is

dat deze rekenintensief is; op ieder celwandje wordt het ingewikkelde Riemannprobleem exact opgelost.

Technology pushes uit Leiden

Het heeft zo'n twee decennia geduurd eer er goede remedies werden gevonden tegen wiggles en tegen de hoge kosten van het Godunov-algoritme. De hulp kwam van een Nederlandse sterrenkundige.

In het heelal bevinden zich grote waterstofwolken. Simulatie van de stroming van deze waterstof levert informatie op over het ontstaan van sterrenstelsels. De letterlijk astronomische snelheden en drukken die bij deze berekeningen kunnen optreden stellen hoge eisen aan de nauwkeurigheid en vooral aan de robuustheid van de te gebruiken rekenmethoden. In een reeks van publicaties in de jaren zeventig zijn door de toen Leidse sterrenkundige Bram van Leer (figuur 8) methoden voorgesteld die tweede-orde nauwkeurig zijn en geen wiggles toelaten. Vijfde en laatste artikel in deze reeks is [20].

Bovendien introduceerde Van Leer een rekenefficiënt alternatief voor het dure Godunov-algoritme [21]. Twee echte *technology pushes*, niet alleen voor de sterrenkunde maar ook voor de luchtvaart- en ruimtevaarttechniek, en voor andere disciplines. In 1990 ontving Van Leer aan de Vrije Universiteit Brussel een eredoctoraat voor dit werk.

Efficiënte oplossingsalgoritmen uit Delft en Amsterdam

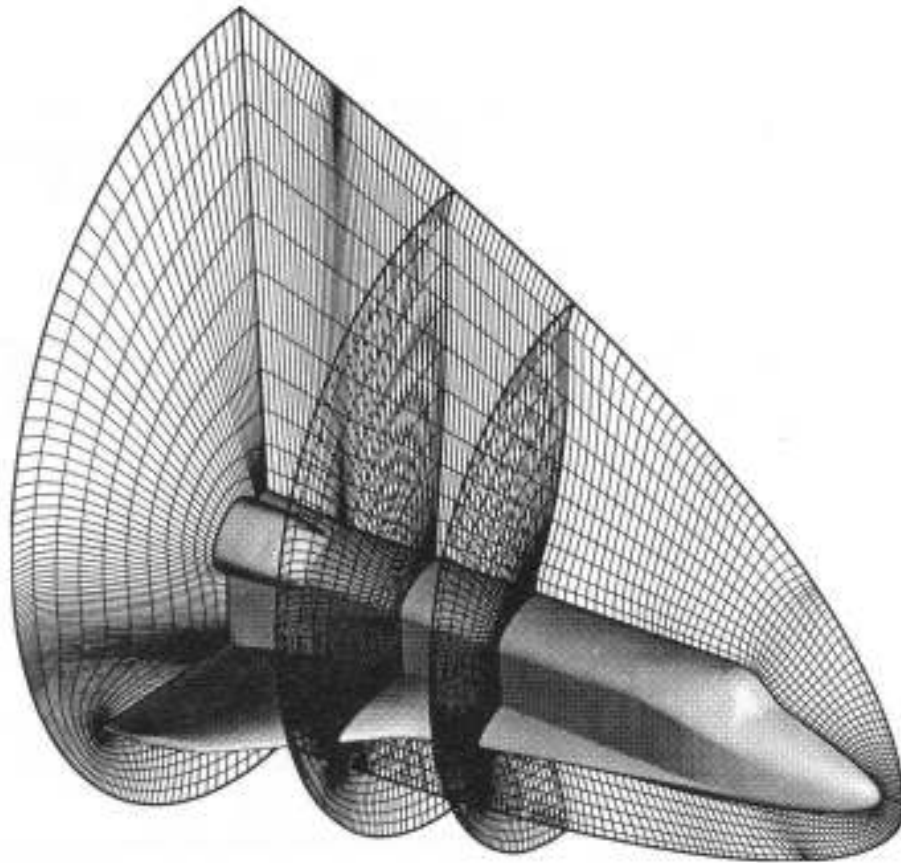
Hoe gaat dat nu in grote lijnen, een Euler- of Navier-Stokesberekening voor een vliegtuig? Wel, het denkbeeldige luchtruim rondom het eveneens denkbeeldige vliegtuig wordt tot op grote afstand van het vliegtuig opgedeeld in bijvoorbeeld tegen elkaar liggende zesvlakjes, 3D celletjes. Per celletje kan dan, net als in het 1D schokbuisvoorbeeld, worden berekend wat de netto instroom is van massa, impuls en energie (op ieder celwandje gebruikmakend van bijvoorbeeld het Godunov-alternatief à la Van Leer). Hoe fijner het brei-



Figuur 8 Bram van Leer

tekening: Tobias Baanders

foto: Michigan Engineering



Figuur 9 Doorsneden van een uit zesvlakjes opgebouwd rooster om de Space Shuttle.

werk van cellen om het vliegtuig — het rooster noemen we dat (figuur 9) — hoe nauwkeuriger dus de oplossing, maar ook hoe hoger de rekenkosten.

Een rooster van zo'n miljoen cellen voor een Euler- of Navier-Stokessom om een vliegtuig of raket heen is niet overdreven. Stel dat we een stationaire vlucht willen simuleren, dan hebben we per celletje op te lossen: vijf onderling gekoppelde, niet-lineaire, algebraïsche vergelijkingen. De verschillende celletjes zijn zelf ook onderling gekoppeld; wat een celletje uitstroomt, stroomt een buurcelletje in. Bij Navier-Stokes kan de stromingsoplossing in één celletje die in *alle* andere celletjes beïnvloeden. We kunnen in ons bescheiden voorbeeld te maken hebben met een stelsel van zo'n vijf miljoen gekoppelde, niet-lineaire, algebraïsche vergelijkingen. Het efficiënt oplossen van deze miljoenen vergelijkingen is een kunst apart. Vele efficiënte oplossingsalgoritmen zijn ontwikkeld. De meest efficiënte zijn de zogenaamde multiroosteralgoritmen. Multiroosteralgoritmen hebben een lineaire toename van de rekentijd met het aantal cellen. Dat is duur zult u misschien denken: 2, 3 of 4 keer zo veel rekenkosten voor een rooster met 2, 3 respectievelijk 4

keer zo veel cellen. U verwacht misschien kwantumkorting. Wel, die wordt in de numerieke wiskunde niet gegeven. Voor veel algoritmen geldt maar liefst: $2^2, 3^2, 4^2, \dots$ keer zo veel rekenkosten voor een rooster met 2, 3, 4, ... keer zo veel cellen!

In Nederland is en wordt toonaangevend onderzoek gedaan aan multiroostermethoden; aan de TU Delft door Piet Wesseling en zijn groep, op het CWI door mijn leermeester Piet Hemker [33]. Zelf heb ik als promovendus ook bijdragen aan dit onderzoek kunnen leveren [34].

Het ontbreekt me aan ruimte om multiroostermethoden uit te leggen. Hier volgt slechts een hele korte schets, een gedegen uitleg wordt gegeven in [22–23]. Zij gegeven een fijn rooster waarop men een stroming wil uitrekenen. Een multiroostermethode maakt dan gebruik van een beperkt aantal grove hulproosters waarop de stromingsberekening niet nauwkeurig maar wel snel kan worden uitgevoerd; hoe grover, hoe sneller. Als analogon kunt u denken aan een schilder die, om een beetje op te schieten, een groot schilderij niet met één fijn penseeltje schildert maar ook met grove kwasten; de grofste, een brede kwast, voor bijvoorbeeld het opzetten van de

achtergrondkleur, de op-één-na grofste voor de eerste grote vlakken, ..., en het fijnste penseeltje voor alleen de kleinste details.

Huidige stand van zaken in CFD

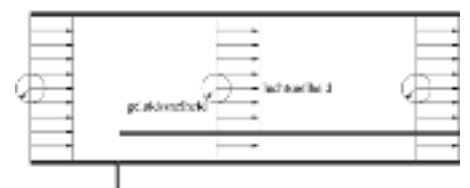
Ik wil u nu aan de hand van een voorbeeldje laten zien wat met CFD mogelijk is. Het betreft werk van Jeroen Wackers, een afstudeerder van me. Jeroen heeft 2D Eulerprogramma's ontwikkeld waarbij het rooster zich automatisch aan de stroming aanpast. Hier één van zijn resultaten van negen maanden hard werken. Beschouw het in figuur 10 gegeven kanaaltje met daarin, van links naar rechts stromend, een uniforme supersone luchtstroming met een snelheid van drie maal de geluidssnelheid. U kunt hier denken aan bijvoorbeeld een gestileerde motorinlaat van een supersoon vliegtuig. In feite betreft het hier een standaardtestgeval. We laten het verticale klepje in de bodem van het kanaal (figuur 10) nu plotseling omhoog springen zodanig dat het tezamen met de in de stroming geplaatste horizontale plaat een drempel vormt die het kanaaltje plotseling gedeeltelijk afsluit.

In figuur 11 is een rekenresultaat van Jeroen gegeven; u ziet hoe de aanvankelijk uniform constante luchtdichtheid zich tezamen met het rooster tot een bepaald tijdstip heeft ontwikkeld.

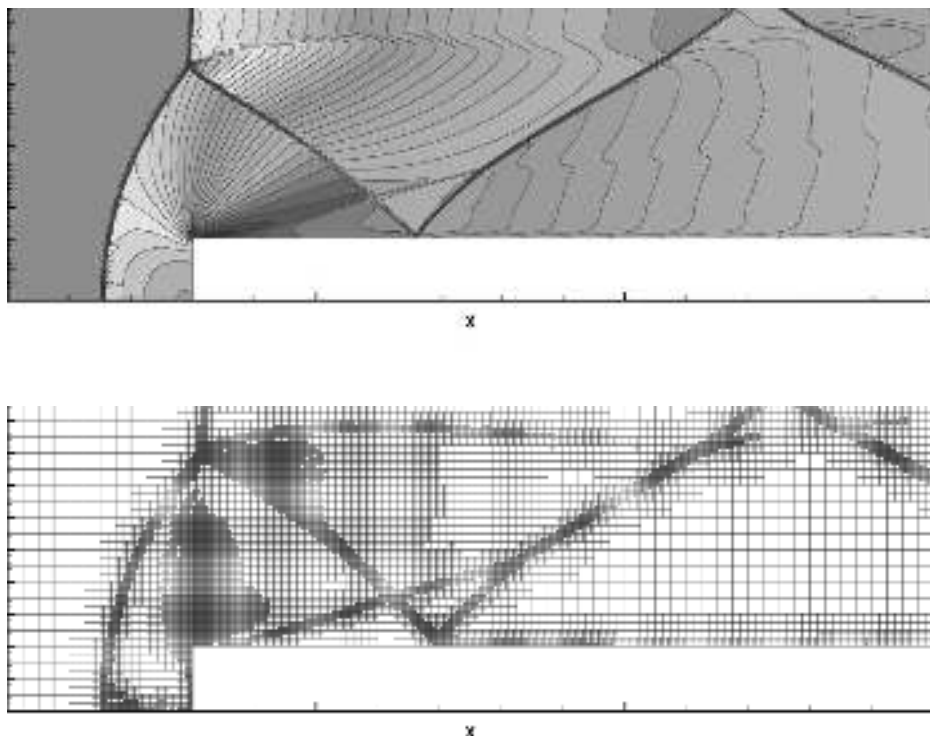
Jeroen heeft zijn rekenmethode zo goed mogelijk laten voldoen aan de vaak onderling strijdige eisen ten aanzien van numerieke stabiliteit, nauwkeurigheid, monotoniciteit, en reken- en geheugenefficiëntie. Zijn resultaten zijn onlangs gepresenteerd op een CFD-congres in Amerika [24].

Boeken, tijdschriften en software

Twintig jaar geleden waren studieboeken over CFD nog witte raven. Tegenwoordig zijn er vele beschikbaar. Ook zijn er meerdere wetenschappelijke tijdschriften geheel of gedeeltelijk gewijd aan CFD. Bovendien is er vandaag de dag steeds meer kant-en-klare CFD-software te koop. Iedere editie van het maandblad *Aerospace America* bevat wel enige kleurige, paginavullende advertenties daarvoor. Een aardig overzicht over bijvoor-



Figuur 10 2D, Parallel kanaaltje met daarin een parallelle plaat en een nog openstaand verticaal klepje.



Figuur 11 Rekenresultaat enige tijd na instantaan afsluiten van onderste deel van kanaaltje. *Boven:* isolijnen van luchtdichtheid. Als het verticale klepje nog openstaat is de luchtdichtheid in het hele kanaaltje constant. *Onder:* automatisch aan stroming aangepast rooster.

beeld CFD-literatuur, -software en -vacatures is te vinden op www.cfd-online.com. CFD neemt vandaag de dag een mijns inziens minstens gelijkwaardige plaats in naast experimentele stromingsleer.

En CFD groeit nog steeds. Het wordt nog voortdurend gevoed door verbeteringen in zowel informatica (goedkopere en snellere computers bijvoorbeeld) als numerieke wiskunde (efficiëntere algoritmen bijvoorbeeld). CFD zelf stimuleert ook weer verder onderzoek in informatica en numerieke wiskunde, een vruchtbare wisselwerking. CFD gaat momenteel ook volop de samenwerking aan met andere vakgebieden, zoals bijvoorbeeld sterkteleer (*computational fluid-structure interactions*) en elektromagnetisme (*computational magnetohydrodynamics*). Aan de TU Delft is het onderzoeksverband *Computational Science and Engineering* opgericht. Achttien verschillende rekgroepen uit vijf faculteiten doen hieraan mee, de Faculteit Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek met de Leerstoel Engineering Mechanics en de Leerstoel Aërodynamica. Deze samenwerking gaat hopelijk *nog* meer opleveren dan de opstelsom van de delen.

Visie op onderwijs en onderzoek

Voor wat de toekomst van CFD betreft heb ik geen bezonken, allesomvattend oordeel, maar een aantal losse, tijdgebonden menin-

gen en voornemens, waarvan ik er nu enige met u wil delen.

Het feit dat commerciële CFD-software een succes is, vormt een onomstotelijk bewijs voor het praktische belang van het theoretische stromingsleerwerk sinds Euler. Het steeds meer beschikbaar komen van CFD-software als klant-en-klaar gereedschap lijkt op het eerste gezicht een bedreiging voor CFD-onderzoek en CFD-ontwikkeling. CFD-onderzoekers en CFD-ontwikkelaars lijken zichzelf werkloos te maken met hun eigen succesvolle werk.

Ik vind de steeds grotere beschikbaarheid van CFD-gereedschap echter een goede ontwikkeling. We moeten vermijden dat iedereen zijn eigen Euler- of Navier-Stokesprogramma schrijft. Het zelf van de grond af aan schrijven en aan de praat brengen van zulke programmatuur geeft het beste inzicht en is prachtig werk, maar kan gemakkelijk te veel tijd kosten.

Onderwijs

Hoe onderwijs te geven in CFD nu het als gemakkelijk beschikbaar, automatisch stuk gereedschap steeds belangrijker wordt? De vraag is niet nieuw. Ze wordt ook gesteld in het voorwoord van de recente CFD-boeken van Wesseling [25] en Roache [26], en heel expliciet in de volgende twee artikelen [27–28]. Mijns inziens is en *blijft* onmisbaar: niet al-

leen feitenkennis maar ook en vooral *inzicht* in de wiskunde- en natuurkundeprincipes van CFD, niet alleen bij het bedrijven van CFD als wetenschap, maar ook bij het gebruiken van CFD als gereedschap. De CFD-gebruiker zal deze principes goed moeten kennen en begrijpen bij het opstellen van zijn rekenprobleem, bij het kiezen van de numerieke methode om dat probleem op te lossen en — niet in de minste plaats — bij het interpreteren van de rekenresultaten. Beoordeeld moet namelijk achteraf kunnen worden of de resultaten wel of niet aan de verwachtingen voldoen. Indien niet, dan moet begrepen kunnen worden waarom niet. CFD is niet het met grof getallengeweld, bij blinde benadering oplossen van stromingsproblemen, integendeel! Gestimuleerd door de groeiende mogelijkheden van CFD zullen steeds ingewikkelder stromingsproblemen worden beschouwd, problemen die zelfs nog *meer* kennis en begrip van stromingsfysica en numerieke wiskunde zullen eisen. In het onderwijs dat ik geef (het vierdejaars college *Numerical Aircraft Aerodynamics II* en, samen met een zestal jonge TU Delft-collega's, het caput college *Advanced Numerical Techniques for Fluid Flow and Structural Engineering*), wordt groot belang gehecht aan de wiskunde- en natuurkundeprincipes van CFD-methoden, en daarmee aan de mogelijkheden en beperkingen van deze methoden.

Onderzoek

Nu CFD steeds meer volwassen wordt denk ik dat het steeds moeilijker wordt om fundamentele onderzoeksbijdragen aan het vak te leveren. Er is de afgelopen decennia al veel gras voor de voeten weggemaaid. Denk aan het fundamentele werk dat Godunov als promovendus nog betrekkelijk gemakkelijk heeft kunnen doen. (Alhoewel?) CFD-studenten zullen zich een steeds grotere hoeveelheid kennis en inzicht eigen moeten maken alvorens ze zelf aan de slag kunnen. Anderzijds, dankzij de beschikbaarheid van CFD-gereedschap, zijn de toepassingsmogelijkheden nu veel groter dan in Godunovs tijd.

Hoe CFD zich precies zal ontwikkelen, waar en wanneer welke vooruitgang te verwachten is, is niet goed te voorspellen. Dat maakt het vak juist zo spannend en aantrekkelijk.

Het CFD-onderzoek waarbij ik op het CWI betrokken ben, betreft gasstromingen met snelheden van de orde van grootte van de lichtsnelheid, relativistische gasdynamica. Dit onderzoek, in samenwerking met astrofysici van de Universiteit Utrecht, heeft een hoog sciencefictiongehalte als het om

luchtvaart- en ruimtevaarttoepassingen gaat. Onderzoek dat wel realistische toepassingen heeft, is het ontwikkelen van 'vrijoppervlak' Navier-Stokesprogrammatuur. Bij het CWI voor waterstromingen om schepen (het Maritiem Research Instituut Nederland is hierin geïnteresseerd), en aan de TU Delft mogelijk voor gasstralen uit raketmotoren. Bij het CWI is de afgelopen drie jaar al met enig succes gewerkt aan vrijoppervlak stromingen [29–31]. Mogelijk nieuw vrijoppervlak werk is het ontwikkelen van een rekenmethode voor het simuleren van de thermische interactie tussen een gekoelde ruimtevaartconstructie en de hypersonische luchtstroming daar omheen.

Twee promovendi aan de TU Delft, die ik mede begeleid, werken momenteel ook aan een zogenaamde geadjungeerde-vergelijking-methode voor de compressibele Navier-Stokesvergelijkingen. Zo'n methode maakt

het onder andere mogelijk om heel efficiënt de verandering van bijvoorbeeld de draagkracht van een vliegtuigvleugel uit te rekenen bij een klepuitslag. Of om in plaats van wat meestal gedaan wordt — een stroming uitrekenen om bijvoorbeeld een gegeven vliegtuigvleugel — ook andersom te doen: de vorm van de vliegtuigvleugel uitrekenen, waarvoor onder gegeven aanstroombcondities bijvoorbeeld de verhouding draagkracht/luchtweerstand maximaal is: ontwerpen in plaats van simuleren, een unieke mogelijkheid van theoretische stromingsleer. Voor dit andersom rekenen zijn ook interessant: de zogenaamde genetische algoritmen. Hiermee kunnen globale optima worden gevonden. Een nog te verbeteren eigenschap van genetische algoritmen voor aerodynamisch ontwerpen is hun hoge rekenkosten.

Een klassiek onderzoeksgebied binnen

de stromingsleer waar grote bescheidenheid past, maar dat mijns inziens niet helemaal uit de weg kan worden gegaan, is turbulentie. Mijn voorganger Joop Slooff heeft duidelijk het nog tekortschieten van CFD geïllustreerd bij het berekenen van stromingen om vliegtuigen onder grote invalshoek, stromingen waar bij turbulentie een belangrijke rol speelt [32].

Tegenover het zojuist genoemde, enigszins sombere vooruitzicht dat fundamenteel CFD-onderzoek steeds moeilijker wordt, staat het wenkende perspectief dat er in de CFD nog volop onderzoeksvragen zijn. Er zullen altijd stromingsleervragen blijven en er zullen ongetwijfeld nog gelegenheden komen waarop met Orville Wright gesproken kan worden: "Isn't it astonishing that all these secrets have been preserved for so many years just so that we could discover them!"

Referenties

- 1 T. von Kármán, *Aerodynamics*, McGraw-Hill, New York (1963).
- 2 H. Rouse and S. Ince, *History of Hydraulics*, Dover, New York (1963).
- 3 J.D. Anderson, *A History of Aerodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- 4 L. Euler, 'Principes généraux du mouvement des fluides', *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, **11**, p. 274–315 (1755).
- 5 M.D. Salas, 'Leonhard Euler and his contributions to fluid mechanics', *AIAA-paper 88-3564*, American Institute of Aeronautics and Astronautics (1988).
- 6 G.G. Stokes, 'On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids', *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, **8**, p. 287 (1845).
- 7 C.L.M.H. Navier, 'Mémoire sur les lois du mouvement des fluides', *Mémoires de l'Académie des Sciences*, **6**, p. 389–440 (1822).
- 8 C. Reid, *Courant in Göttingen and New York. The Story of an Improbable Mathematician*, Springer, New York (1976).
- 9 L.F. Richardson, *Weather Prediction by Numerical Process*, Cambridge University Press, Cambridge (1922).
- 10 R. Courant, K.O. Friedrichs and H. Lewy, 'Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik', *Mathematische Annalen*, **100**, p. 32–74 (1928).
- 11 W. Aspray, *John von Neumann and the Origins of Modern Computing*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts (1990).
- 12 S. Ulam, 'John von Neumann, 1903–1957', *Bulletin of the American Mathematical Society*, **64**, p. 1–49 (1958).
- 13 J. von Neumann and R.D. Richtmyer, 'A method for the numerical calculation of shocks', *Journal of Applied Physics*, **21**, p. 232–237 (1950).
- 14 p. 479 in D. van Dalen, *L.E.J. Brouwer, 1881–1966, Het Helder Licht van de Wiskunde*, Bert Bakker, Amsterdam (2002).
- 15 G. Alberts, *Jaren van Berekening, Toepassingsgerichte Initiatieven in de Nederlandse Wiskundebeoefening, 1945–1960*, Amsterdam University Press, Amsterdam (1998).
- 16 S.K. Godunov, 'Finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics', *Matematicheskii Sbornik*, **47**, p. 271–306 (1959). Uit het Russisch vertaald bij het Cornell Aeronautical Laboratory.
- 17 G.F.B. Riemann, 'Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite', in: *Gesammelte Werke*, Leipzig (1876). Herdruk: Dover, New York (1953).
- 18 B. van Leer, 'An introduction to the article "Reminiscences about difference schemes", by S.K. Godunov', *Journal of Computational Physics*, **153**, p. 1–5 (1999).
- 19 S.K. Godunov, 'Reminiscences about difference schemes', *Journal of Computational Physics*, **153**, p. 6–25 (1999).
- 20 B. van Leer, 'Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method', *Journal of Computational Physics*, **32**, p. 101–136 (1979). Herdruk: *Journal of Computational Physics*, **135**, p. 229–248 (1997).
- 21 B. van Leer, 'Flux-vector splitting for the Euler equations', *Lecture Notes in Physics*, **170**, p. 507–512, Springer, Berlin (1982).
- 22 P. Wesseling, *An Introduction to Multigrid Methods*, Wiley, Chichester (1992).
- 23 U. Trottenberg, C.W. Oosterlee and A. Schüller, *Multigrid*, Academic Press, New York (2001).
- 24 J. Wackers and B. Koren, 'A simple and efficient space-time adaptive grid technique for unsteady compressible flows', *AIAA-paper 2003-3825*, American Institute of Aeronautics and Astronautics (2003).
- 25 P. Wesseling, *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*, Springer, Berlin (2001).
- 26 P.J. Roache, *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*, Hermosa, Albuquerque, NM (1998).
- 27 D. Pelletier, 'Should we still teach CFD to our students?', *AIAA-paper 98-0824*, American Institute of Aeronautics and Astronautics (1998).
- 28 B. van Leer, 'CFD education: past, present, future', *AIAA-paper 99-0910*, American Institute of Aeronautics and Astronautics (1999).
- 29 E.H. van Brummelen, H.C. Raven and B. Koren, 'Efficient solution of steady free-surface Navier-Stokes flow', *Journal of Computational Physics*, **174**, p. 120–137 (2001).
- 30 B. Koren, M.R. Lewis, E.H. van Brummelen and B. van Leer, 'Riemann-problem and level-set approaches for homentropic two-fluid flow computations', *Journal of Computational Physics*, **181**, p. 654–674 (2002).
- 31 E.H. van Brummelen and B. Koren, 'A pressure-invariant conservative Godunov-type method for barotropic two-fluid flows', *Journal of Computational Physics*, **185**, p. 289–308 (2003).
- 32 J.W. Slooff, *Spelen met lucht en water, 35 jaar toegepaste numerieke stromingsleer*, afscheidsrede, Technische Universiteit Delft (2002).
- 33 homepages.cwi.nl/~pieth
- 34 homepages.cwi.nl/~barry

Rob Bosch

Koninklijke Militaire Academie
Kasteelplein 10
4811 XC Breda
r.bosch2@mindef.nl

Vakantiecursus 2003

Politieke macht en onmacht

In de wereldpolitiek werken landen op allerlei gebieden samen. Ze moeten wel, in hun strijd om zoveel mogelijk invloed. Het ene land heeft daarbij meer succes dan het andere. Hoe komt dit? En hoe eerlijk is eigenlijk een eerlijke verdeling naar bijvoorbeeld grootte? Rob Bosch, docent wiskunde aan de Koninklijke Militaire Academie, legt uit dat de machtsverdeling op een onverwachte manier afhangt van het totaal aantal stemmen, van het aantal stemmen dat nodig is opdat een besluit wordt aangenomen en van het eventuele vetorecht. Deze tekst verscheen afgelopen jaar in de syllabus van de vakantiecursus voor wiskundeleraren georganiseerd door het CWI.

In de politiek gaat het om *macht*. Politieke macht kan worden uitgeoefend op basis van bijvoorbeeld het aantal zetels in een parlement, het aantal stemmen in een raad met een gewogen stemsysteem of door het gebruiken van een vetorecht. Het ligt voor de hand te denken dat een groter aantal zetels of een groter aantal stemmen ook een toename van de politieke macht betekent. Dit hoeft echter niet altijd het geval te zijn. Ja sterker nog, een toename van het aantal zetels of stemmen kan zelfs gepaard gaan met een dalende politiek invloed.

In dit artikel zullen we de relatie tussen zetelaantal of stemmenaantal en de politieke macht die op basis van dit aantal kan worden uitgeoefend, bespreken. Hiertoe introduceren we voor gewogen stelsystemen de zogenaamde *Shapley-Shubik-index* die als een maat voor de politieke macht kan worden opgevat. Tevens zullen we laten zien dat een systeem waarbij één of meer

partijen over een vetorecht beschikken altijd kan worden opgevat als een gewogen stelsysteem zonder vetorecht. We zullen het bovenstaande illustreren aan de hand van de situatie in de Europese Unie en de Veiligheidsraad van de Verenigde Naties.

Een unie van drie landen

In deze paragraaf bekijken we de machtstructuur binnen een unie van drie landen. In deze unie geven we de landen aan met *A*, *B* en *C*. In de unieraad bestaande uit drie vertegenwoordigers van de aangesloten landen wordt over zaken van gemeenschappelijke belang gestemd. Op basis van het aantal inwoners krijgt land *A* in deze raad 6 stemmen toegewezen, voor land *B* zijn dat er 4 en het kleinste land *C* krijgt 1 stem. In het totaal worden er dus 11 stemmen uitgebracht. In de raad worden de besluiten met meerderheid van stemmen genomen. Omdat het aantal uitgebrachte stemmen oneven is hoeft er geen extra regel te worden opgesteld voor het geval de stemmen staken. De vraag die we hier zullen beantwoorden is hoe op basis van deze stemmenverhouding de machtsverhoudingen liggen binnen de unie.

Een oppervlakkige beschouwing zou kunnen leiden tot het idee dat land *A* anderhalf keer zoveel invloed heeft als land *B*, immers *A* heeft anderhalf keer zoveel stemmen als *B*. Land *B* heeft vier keer zoveel stemmen als land *C* en zou derhalve vier keer zoveel invloed hebben als *C*. Dit is inderdaad een nogal oppervlakkige beschouwing want de besluiten worden immers met meerderheid van stemmen genomen. Er zijn derhalve minstens 6 stem-

men nodig om een voorstel aangenomen te krijgen en 6 stemmen zijn ook voldoende om een voorstel te blokkeren. Aangezien A over 6 stemmen beschikt kan hij ieder voorstel dat hem niet zint, blokkeren. De 6 stemmen van A zijn ook voldoende om een voorstel aan te nemen. De landen B en C hebben samen niet genoeg stemmen om een voorstel aan te nemen noch is hun gezamenlijk stemmenaantal voldoende om voorstellen te blokkeren. Land A bepaalt dus welke voorstellen wel of niet worden aangenomen. Met andere woorden A heeft met zijn absolute meerderheid in de raad alle macht.

Als we de macht van een land in een getal willen uitdrukken dan ligt het voor de hand land A honderd procent van de macht toe te kennen. Het is gebruikelijk om als maat voor de macht een index te kiezen, dat wil zeggen een getal tussen 0 en 1. Hierbij geeft 0 aan dat een partij geen enkele macht kan uitoefenen en betekent een 1 dat een partij alle macht heeft. Een dergelijke index wordt *machtsindex* (power index) genoemd. In het bovenstaande voorbeeld wordt de verdeling van de macht dan als volgt:

	A	B	C	totaal
aantal stemmen	6	4	1	11
machtsindex	1	0	0	1

Zolang land A 6 stemmen houdt, is de verdeling van de overblijvende 5 stemmen tussen B en C voor de verdeling van de macht niet interessant. Land A houdt alle macht en de machtsindices van B en C blijven 0. Een land met een machtsindex van 0 wordt ook wel een *dummy* genoemd.

Het is duidelijk dat de stemmenverdeling (6, 4, 1) voor de landen B en C niet aanvaardbaar is. Het is in dit geval dus onwenselijk de stemmen te verdelen naar evenredigheid van de inwoneraantallen. In de volgende paragraaf bekijken we daarom andere stemmenverhoudingen.

Verschuiving van de macht

De landen van de unie besluiten nu tot de volgende verdeling van de stemmen: land A en land B krijgen beide 5 stemmen en land C krijgt 1 stem. Bij deze verdeling wordt nog enigszins rekening gehouden met de grootte van de lidstaten. Hoe veranderen de machtsindices van de landen in dit geval? Het is duidelijk dat land A die zijn absolute meerderheid kwijt is, macht zal inleveren. Land B zal met de extra stem aan invloed winnen en dezelfde invloed krijgen als land A . Voor land C dat nog steeds maar 1 stem heeft, verandert er ogenschijnlijk weinig of niets.

Nu geen enkel land meer een absolute meerderheid heeft, kan een voorstel slechts worden aangenomen of verworpen door een coalitie van tenminste twee landen. We merken op dat elk tweetal landen over een meerderheid van minstens 6 stemmen beschikt. Ieder tweetal landen kan derhalve een voorstel aannemen of de aanname ervan blokkeren. De meerderheidscoalities of winnende coalities zijn bij deze stemverdeling:

$$\begin{array}{ccc} AB & AC & BC \\ & ABC & \end{array}$$

Uit de bovenstaande lijst van winnende coalities blijkt dat ieder

land dezelfde rol speelt. Op grond van deze symmetrie kennen we dan ook aan ieder land dezelfde macht toe. De machtsverdeling binnen de unie wordt bij deze stemmenverhouding gegeven door

	A	B	C	totaal
aantal stemmen	5	5	1	11
machtsindex	1/3	1/3	1/3	1

Merk op dat alhoewel aan C geen extra stem is toegekend dit land toch aanzienlijk aan invloed gewonnen heeft. Als kleinste lidstaat met slechts 1 stem heeft het dezelfde invloed als de twee grote lidstaten! Een dergelijke verdeling zal waarschijnlijk op verzet stuiten van de grote landen. Immers, hoe maakt men het de eigen bevolking duidelijk dat de 12 miljoen inwoners van land A dezelfde invloed hebben als de 2 miljoen inwoners van land C ? We proberen daarom nog enige andere stemmenverdelingen om zo tot een voor alle partijen aanvaardbare machtsverhouding te komen. We beginnen we met de verdeling van de macht om er vervolgens de stemmenverhouding bij te vinden. Stel dat de landen een machtsverhouding van $m(A) = 1/2$, $m(B) = 1/3$ en $m(C) = 1/6$ allerzins redelijk vinden. Welke stemmenverhouding bewerkstelligt dit? Met andere woorden: welke getallen moeten we in de onderstaande tabel invullen?

	A	B	C	totaal
aantal stemmen	?	?	?	11
machtsindex	1/2	1/3	1/6	1

Al snel blijkt dat het niet lukt de stemmen zo te verdelen dat de gevraagde machtsstructuur verkregen wordt. De reden hiervoor is de volgende. Bij 3 landen heeft of een land de absolute meerderheid of ieder tweetal landen vormt een winnende coalitie. In het eerste geval levert dat een machtsvector $[1, 0, 0]$ op en het tweede geval geeft weer de egalitaire verdeling $[1/3, 1/3, 1/3]$. In de unie moet men dus kiezen voor een dictatoriaal systeem waarbij een land het voor het zeggen heeft of voor een gelijkwaardigheid van de landen ongeacht de grootte van het land. Zolang men een oneven aantal stemmen verdeelt en bij meerderheid besluiten neemt geldt het bovengenoemde argument.

In een unie van 3 landen waarin bij meerderheid wordt beslist, kan een oneven aantal stemmen alleen zo worden verdeeld dat er of een dictatoriale machtsstructuur of een egalitaire machtsstructuur ontstaat.

Aangezien de twee bovengenoemde machtsstructuren onbevredigend zijn, gaan we in de volgende paragraaf op zoek naar mogelijkheden om een structuur te vinden die meer recht doet aan de grootte van de lidstaten.

Het quotum

Daar het bij meerderheid besluiten nemen tot de twee onbevredigende structuren aanleiding geeft, verlaten we dit principe. Behalve een stemmenverdeling stellen we een aantal stemmen vast dat nodig is voor aanname van een voorstel. Dit aantal stemmen, dat we aangeven met q , heet het *quotum*. Uitgaande van de oor-

spronkelijke verdeling van $(6, 4, 1)$ kunnen we dit quotum op 6 tot en met 11 stemmen vaststellen. Een quotum van minder dan 6 stemmen levert meerdere disjuncte winnende coalities op, bijvoorbeeld A en BC hetgeen een tegenstrijdigheid in de besluitvorming geeft. We gaan nu de consequenties van de verschillende quota na.

Quotum $q = 11$

In dit geval wordt er besloten bij unanimiteit. Elke lidstaat kan hier een voorstel blokkeren en alleen de *grand coalition* ABC is winnend. Dit geeft uiteraard weer de egalitaire machtsverdeling.

	A	B	C
aantal stemmen	6	4	1
machtsindex	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Tabel 1 quotum=11

Quotum $q = 8, 9, 10$

In deze gevallen hebben A en B het voor het zeggen. Behalve de *grand coalition* is alleen de coalitie AB winnend. Voor de aanneme van een voorstel heeft A de steun van B nodig en andersom. De eventuele steun van C is hierbij niet van belang. Beide landen kunnen ook op eigen kracht een voorstel blokkeren. Ook in dit geval is het irrelevant wat C doet. De macht wordt hier dus verdeeld tussen A en B . Land C is bij deze quota een dummy.

	A	B	C
aantal stemmen	6	4	1
machtsindex	$1/2$	$1/2$	0

Tabel 2 quotum=8, 9, 10

Quotum $q = 6$

Dit is het geval van stemmen bij meerderheid waarbij land A alle macht bezat.

	A	B	C
aantal stemmen	6	4	1
machtsindex	1	0	0

Tabel 3 quotum=6

Quotum $q = 7$

Dit is het meest interessante geval. Land A kan met behulp van B een voorstel doen aannemen. Dit is ook mogelijk als A zich verzekerd weet van de steun van C . A heeft dus de keuze uit twee mogelijke coalitiepartners. Aangezien B en C samen geen meerderheid hebben, is voor hen de enige mogelijkheid A als coalitiepartner te strikken. De landen B en C zijn in deze situatie vergelijkbaar en hebben derhalve dezelfde macht. Op grond van het feit dat A een twee keer zo grote keuze heeft in coalitiepartners als B en C zou men misschien de machtsverhouding $[1/2, 1/4, 1/4]$

verwachten. De machtsindices zoals we die verderop zullen berekenen geven echter het volgende resultaat.

	A	B	C
aantal stemmen	6	4	1
machtsindex	$2/3$	$1/6$	$1/6$

Tabel 4 quotum=7

Land A blijkt hier dus over vier keer zoveel macht te beschikken als B en C . Vanwaar dit grote verschil? Wel, men kan twee soorten macht onderscheiden; ten eerste de macht om alleen of met anderen een voorstel aangenomen te krijgen en ten tweede de macht om een onwelgevallig voorstel te blokkeren. Alhoewel land A niet op eigen kracht een voorstel kan doen aannemen, beschikt het wel over de macht om voorstellen te blokkeren, de zogenaamde *blocking power*. Geen enkel voorstel dat A niet zint, wordt aangenomen. Anders gezegd: land A heeft hier een vetorecht hetgeen A een sterke machtsbasis garandeert. De landen B en C missen deze *blocking power*. In het vervolg zullen we op een formele wijze de bovenstaande machtsstructuur berekenen.

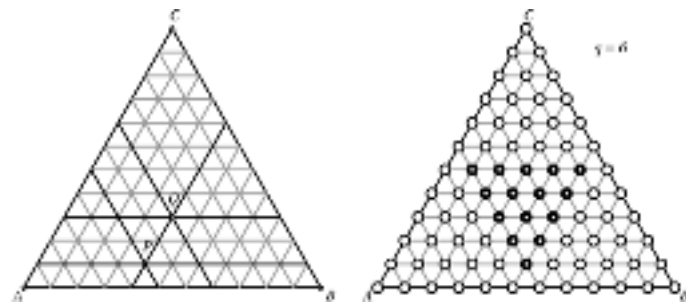
Bij de stemmenverdeling $(6, 4, 1)$ geldt voor $q = 6, 8, 9, 10$ dat een of meer landen een dummy zijn. Dit is zeker geen goede basis voor het vormen van een unie. Blijft over de egalitaire machtsverdeling bij het besluiten bij meerderheid of unanimiteit en de verdeling $[2/3, 1/6, 1/6]$ bij $q = 7$. Geen van deze verdelingen doet volledig recht aan de grootte van de landen zodat we kunnen concluderen dat er geen machtsstructuur bestaat die een goede afspiegeling is van de relatieve grootte van de lidstaten.

Machtsdriehoeken

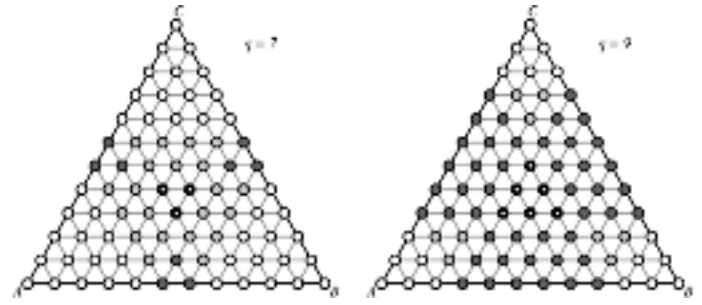
De machtsstructuren die voortvloeien uit de stemmenverdelingen en het quotum kunnen overzichtelijk in een driehoek worden weergegeven. In de driehoek ABC in figuur 1 is de situatie weergegeven van een verdeling van 11 stemmen over drie landen A, B en C . Ieder roosterpunt in de driehoek heeft hier drie coördinaten. Zo zijn de coördinaten van punt $A = (11, 0, 0)$, hetgeen hoort bij een verdeling van 11 stemmen voor A en geen voor B en C . Bij de punten B en C horen respectievelijk de coördinaten $(0, 11, 0)$ en $(0, 0, 11)$. De punten P en Q hebben respectievelijk de coördinaten $(6, 4, 1)$ en $(4, 4, 3)$. De coördinaten van deze punten geven ook hier weer de stemmenverdeling aan. Iedere stemmenverdeling correspondeert met een roosterpunt in de driehoek en ieder roosterpunt in de driehoek geeft een mogelijke stemmenverdeling aan. Merk op dat op lijnen evenwijdig aan de basis AB de C -coördinaat constant is. Evenzo is op lijnen evenwijdig aan de lijn AC de B -coördinaat constant.

Bij ieder punt hoort ook een machtsstructuur. In het geval van stemmen bij meerderheid (quotum=6) krijgen we de machtsstructuur uit figuur 1. De witte punten zijn de punten waarbij de stemmenverdeling resulteert in de dictatoriale machtsstructuur $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ of $[0, 0, 1]$, terwijl de zwarte punten horen bij stemmenverdelingen die leiden tot de egalitaire machtsstructuur $[1/3, 1/3, 1/3]$. Kortom, in deze driehoek geven punten van gelijke kleur eenzelfde machtsstructuur aan.

In figuur 2 zijn voor diverse quota de machtsstructuren weer-



Figuur 1 Links: $\triangle ABC$ met $P(6, 4, 1)$ en $Q(4, 4, 3)$; rechts: de machtsverdeling bij $q = 6$.



Figuur 2 Machtsverdeling bij $q = 7$ en $q = 9$.

gegeven. De witte punten geven weer een dictatoriale structuur aan, terwijl de zwarte punten horen bij een egalitaire machtsstructuur. De donkergrijze punten geven de machtsstructuur $[1/2, 1/2, 0]$, $[1/2, 0, 1/2]$ of $[0, 1/2, 1/2]$ aan. Tenslotte hoort bij de lichtgrijze punten de structuur $[2/3, 1/6, 1/6]$, $[1/6, 2/3, 1/6]$ of $[1/6, 1/6, 2/3]$.

Twee paradoxale voorbeelden

Bij een unie van drie landen zijn de in de vorige paragraaf besproken vier machtsverdelingen de enig mogelijke verdelingen. De volgende twee voorbeelden laten zien dat de combinatie van de stemmenverdeling en het quotum tot paradoxale situaties kan leiden.

	A	B	C	totaal
aantal stemmen	49	49	1	99
machtsindex	1/3	1/3	1/3	1

Tabel 5 quotum=50

	A	B	C	totaal
aantal stemmen	8	8	7	23
machtsindex	1/2	1/2	0	1

Tabel 6 quotum=16

In het eerste voorbeeld hebben A en B bijna 50 keer zoveel stemmen als C. Bij een besluitvorming bij meerderheid hebben de drie partijen echter alle evenveel macht.

In het tweede voorbeeld hebben de drie landen alle bijna evenveel stemmen. Het quotum van 16 zorgt er echter voor dat C een dummy wordt.

Alvorens de situatie te bekijken voor 4 of meer landen besteden we nog even aandacht aan de blocking power of vetomacht. Wellicht is het mogelijk andere machtsstructuren te krijgen door een of meer landen een vetorecht te geven.

Vetomacht

Het toekennen van een vetorecht aan een of meer leden kan wellicht tot machtsstructuren aanleiding geven die bij een stemmenverdeling met quotum niet kunnen worden verkregen. Stel we geven de drie landen allemaal 5 stemmen en kennen bovendien aan het grootste land A een vetorecht toe. Tot welke machtsstructuur leidt dit bij een quotum van 9?

	A	B	C	totaal
	veto			
aantal stemmen	5	5	5	15
machtsindex	?	?	?	1

Tabel 7 quotum=9

Vanwege het vetorecht is voor de aanname van een voorstel altijd de steun van A nodig. De winnende coalities zijn hier derhalve AB, AC en ABC. Alhoewel B en C samen meer stemmen hebben dan het vereiste quotum is hun samenwerking vanwege het vetorecht van A niet voldoende om een voorstel te doen aannemen. Wel kunnen zij samen de aanname van een voorstel blokkeren. Bovendien heeft A de steun van minstens een van de andere partijen nodig. Men gaat gemakkelijk na dat dezelfde machtsstructuur ook opgaat voor de volgende stemmenverdeling zonder vetorecht.

	A	B	C	totaal
aantal stemmen	3	1	1	5
machtsindex	2/3	1/6	1/6	1

Tabel 8 quotum=4

Bovendien zijn B en C samen in staat een voorstel te blokkeren en heeft A minstens een van de andere partijen nodig om een voorstel aangenomen te krijgen. Het systeem met vetorecht geeft dus dezelfde machtsstructuur als de bovenstaande verdeling. We vinden derhalve niets nieuws. De bovenstaande stemmenverdeling kunnen we op de volgende wijze vinden. Ken aan B en C 1 stem toe. Stel het quotum op q en geef A x stemmen. Aangezien de coalitie BC niet winnend is moet gelden $q > 2$. De coalities AB en AC zijn winnend en derhalve geldt $x + 1 \geq q$. Tenslotte heeft A een van de partijen B of C nodig voor een winnende coalitie waaruit volgt $x < q$. We zoeken nu gehele waarden van x en q die voldoen aan de bovenstaande ongelijkheden. Een van de mogelijke oplossingen wordt gegeven door $x = 3$ en $q = 4$.

Op deze wijze kunnen we elk systeem met vetorecht vertalen naar een zogenaamd gewogen stemreglement. In de veiligheidsraad van de Verenigde Naties hanteert men een reglement met vetorecht. De Veiligheidsraad van de VN bestaat uit 15 leden. China, Engeland, Frankrijk, Rusland en de Verenigde Staten zijn de zogenaamde permanente leden van de raad. De andere 10 leden hebben slechts gedurende een beperkte periode zitting in de raad.

Voor de aanname van een voorstel zijn 9 van de 15 stemmen nodig. De vijf permanente leden hebben echter een vetorecht. Een tegenstem van één van deze leden blokkeert de aanname van een voorstel. Om dit systeem te vertalen naar een gewogenstemreglement gaan we weer als volgt te werk. Ken aan de tien niet permanente leden een gewicht van 1 toe. Stel het gewicht van de permanente leden op x en het quotum op q . De vijf permanente leden tezamen met vier niet permanente leden vormen een winnende coalitie. Er geldt dus $5x + 4 \geq q$. Anderzijds is een coalitie met minder dan 4 niet-permanente leden niet winnend dus geldt: $5x + 3 < q$. Conclusie: $q = 5x + 4$. Als één van de permanente geen deel uitmaakt van de coalitie is deze niet winnend, zelfs niet als alle niet permanente leden tot de coalitie behoren. Daaruit volgt dat $4x + 10 < q = 5x + 4$, dus $x > 6$. De kleinste gehele waarden voor x en q die hieraan voldoen zijn $x=7$ en $q=39$. Het is niet moeilijk om na te gaan dat het reglement met vetorecht gelijkwaardig is met het op deze manier gevonden gewogen stemreglement.

Voor de machtsverdeling binnen de veiligheidsraad mogen we dus uitgaan van een stemmenverdeling $(7, 7, \dots, 7, 1, 1, \dots, 1)$ en een quotum van 39.

Iedere gewogen systeem waarbij bovendien een aantal leden een vetorecht hebben, kan worden vertaald naar een simpel gewogen systeem. Zo kunnen we een vergadering van n personen waarvan k personen een vetorecht hebben en waarbij p stemmen nodig zijn voor de aanname van een voorstel, opvatten als een gewogen systeem. Ken aan de leden met vetorecht het gewicht $n + 1$ en aan de andere leden een gewicht van 1 toe en stel het aantal stemmen nodig voor een geldige meerderheid op $kn + p$.

Een systeem met vetorecht geeft, zoals we hebben gezien, geen andere machtsstructuren dan gewogen stemreglementen.

De Shapley-Shubik-index

Bij een unie van drie landen geven de diverse stemmenverdelingen aanleiding tot 4 verschillende machtsstructuren, waarvan slechts 2 zonder dummy's. Als we het aantal landen in de unie uitbreiden, neemt ook het aantal mogelijke machtsstructuren toe. De volgende voorbeelden geven een aantal mogelijke machtsstructuren.

quotum=9	A	B	C	D	totaal
aantal stemmen	9	4	3	1	17
machtsindex	1	0	0	0	1

quotum=13	A	B	C	D	totaal
aantal stemmen	7	6	3	1	17
machtsindex	1/2	1/2	0	0	1

quotum=10	A	B	C	D	totaal
aantal stemmen	5	4	4	2	15
machtsindex	1/4	1/4	1/4	1/4	1

Tabel 9 Machtsstructuren met 4 landen

De bovenstaande voorbeelden leveren weinig problemen op,

maar hoe bepalen we de machtsstructuur in het volgende voorbeeld?

	A	B	C	D	totaal
aantal stemmen	7	4	3	1	15
machtsindex	?	?	?	?	1

Tabel 10 quotum=11

Om hier de machtsstructuur te vinden, introduceren we het begrip van de *spil* of *pivot*. Stel dat de coalitie ACB wordt gevormd in de aangegeven volgorde, dat wil zeggen C sluit zich aan bij A waarna B toetreedt tot de inmiddels gevormde coalitie AC. De aansluiting van C bij A geeft de coalitie AC weliswaar een sterkere positie maar winnend is ze nog niet, dat wil zeggen de coalitie heeft nog geen gekwalificeerde meerderheid. Pas na het toetreden van B wordt de coalitie winnend. In die zin is B de belangrijkste partij. Zo'n partij wordt de *spil* genoemd. Als we de coalitie vormen in de volgorde BCA dan wordt de coalitie pas winnend na de toetreding van partij A. In dit geval is partij A de *spil*. De macht van een partij wordt nu bepaald door de mogelijkheid om als *spil*partij op te treden. Een *dummy* is in dit verband een partij die nooit een *spil*functie heeft. Voor het berekenen van de machtsindex schrijven we alle permutaties van de partijen of landen op. Vervolgens gaan we na hoe vaak een partij als *spil* optreedt. De index wordt dan berekend door het aantal malen dat een partij de *spil* is te delen door het totaal aantal permutaties van de partijen. Dat we de berekening uitvoeren over alle mogelijke permutaties reflecteert het feit dat we alle mogelijke coalities even waarschijnlijk achten. De op de bovenstaande wijze berekende index wordt de *Shapley-Shubik-index* genoemd [1]. De berekening van de index voor ons voorbeeld gaat als volgt.

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB	BDCA	CDBA	DCBA

In bovenstaande lijst hebben we alle vierentwintig permutaties opgeschreven. Het vetgedrukte land is in de volgorde de *spil*. Zoals uit de bovenstaande tabel is af te lezen is A 14 keer de *spil* terwijl dat aantal voor B gelijk is aan 6. C en D treden beide 2 keer als *spil* op. De Shapley-Shubik-indices zijn dus

$$m(A) = \frac{7}{12} \quad m(B) = \frac{3}{12} \quad m(C) = m(D) = \frac{1}{12}.$$

We zien dat de hier berekende machtsverhoudingen beduidend anders liggen dan de stemmenverhoudingen. De ene stem die B meer heeft dan C levert hem 3 keer zoveel macht op.

Een verandering van het quotum geeft ook hier weer een verschuiving van de macht. Als we besluiten bij meerderheid te stemmen geeft dat de volgende situatie.

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB	BDCA	CDBA	DCBA

De Shapley-Shubik-indices zijn nu gelijk aan

$$m(A) = \frac{12}{24} = \frac{3}{6}$$

$$m(B) = m(C) = m(D) = 4/24 = \frac{1}{6}.$$

In dit geval zijn de drie kleine partijen dus gelijkwaardig. De lezer kan gemakkelijk nagaan dat de machtsindices die we tot nu toe zijn tegengekomen overeenkomen met de Shapley-Shubik-index.

De Europese Gemeenschap

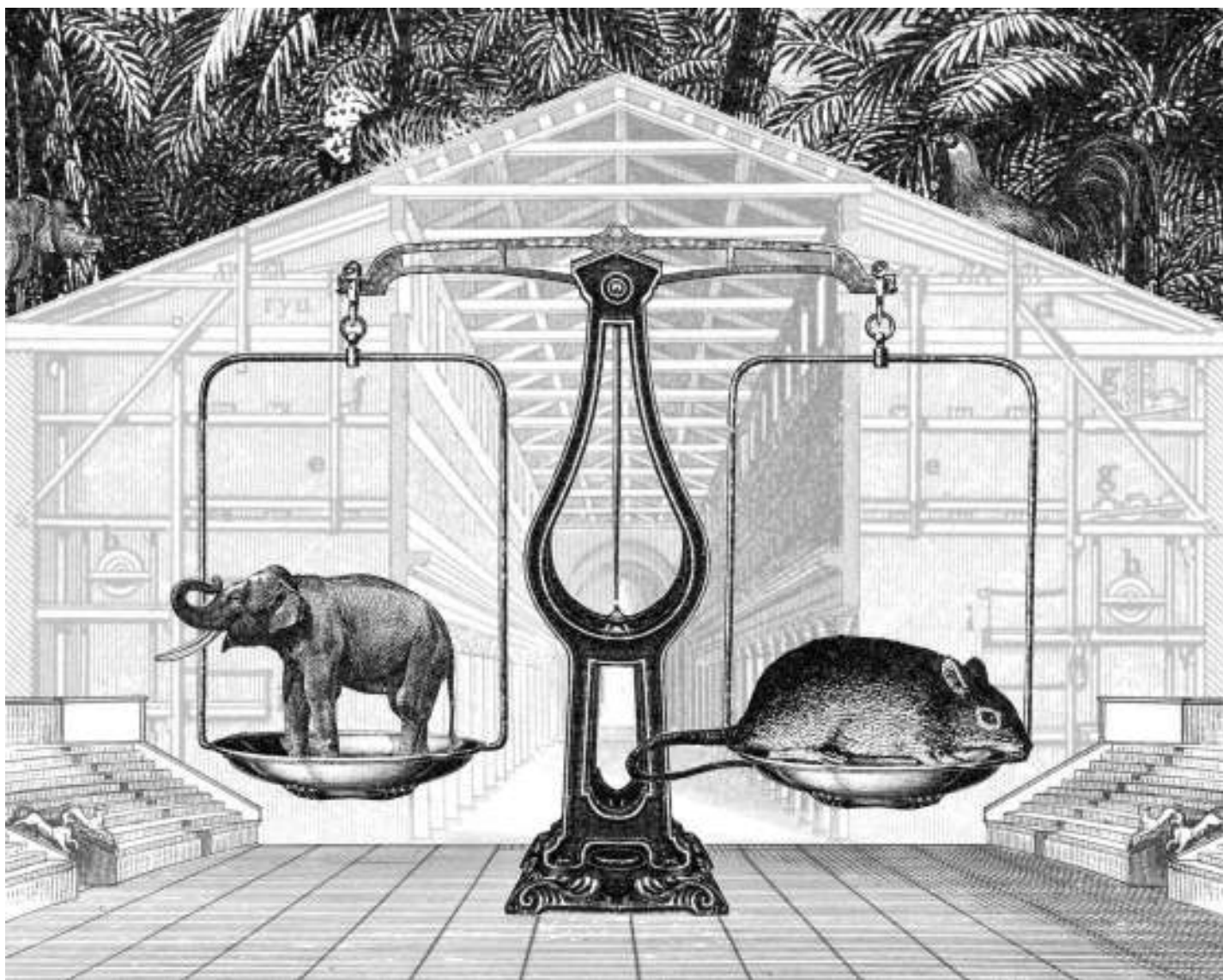
Bij de oprichting van de voorloper van de Europese Unie in 1958 werd in het verdrag van Rome de stemmenverdeling binnen de unie vastgelegd (zie tabel 11). Het quotum werd vastgesteld op 12 van de 17 stemmen.

Italië	4	Nederland	2
Frankrijk	4	België	2
Duitsland	4	Luxemburg	1

Tabel 11 Europese Unie 1958

Hoe groot is de Shapley-Shubik-index van Nederland bij deze verdeling? Nederland vervult een spilfunctie in een volgorde van landen als in die volgorde 10 of 11 stemmen aan Nederland voorafgaan.

In een volgorde met 10 voorafgaande stemmen staan België en twee van de grote lidstaten voor Nederland, en Luxemburg en de resterende grote staat achter ons land. Het totaal aantal permuta-



ties dat hieraan voldoet, is $\binom{3}{2} \cdot 3! \cdot 2! = 36$. In een volgorde waarin 11 stemmen aan Nederland vooraf gaan, komt alleen een van de drie grote lidstaten na ons land. Dit levert $\binom{3}{2} \cdot 4! = 72$ mogelijke permutaties. In totaal is Nederland de spil in $36 + 72 = 108$ volgordes.

De Shapley-Shubik-index van Nederland is derhalve $108/720 = 3/20$. Uiteraard geldt hetzelfde voor België. Luxemburg kan in een volgorde alleen dan een spilfunctie vervullen als de aan Luxemburg voorafgaande landen tezamen precies 11 stemmen hebben. Daar alle landen behalve Luxemburg een even aantal stemmen hebben is dit onmogelijk. Met andere woorden, Luxemburg vervult nooit een spilfunctie en de Shapley-Shubik-index van Luxemburg is derhalve gelijk aan 0. De index voor de grote landen kan nu eenvoudig berekend worden als $(1 - 2 \cdot 6/20)/3 = 14/60$. In overzicht van de machtstructuur vindt men in tabel 12.

Land	Stemmen		Index	Percentage van de macht
Italië	4	23,5%	14/60	23,3
Frankrijk	4	23,5%	14/60	23,3
Duitsland	4	23,5%	14/60	23,3
Nederland	2	11,8%	9/60	15,0
België	2	11,8%	9/60	15,0
Luxemburg	1	5,9%	0	0

Tabel 12 Europese Unie 1958

Zoals uit tabel 12 blijkt, geeft de stemmenverdeling een redelijk beeld van de machtstructuur.

Bij de eerste uitbreiding van de Europese Unie in 1973 met drie landen besloot men tot de volgende stemmenverdeling.

Frankrijk	10	Nederland	5	Engeland	10
Italië	10	België	5	Denemarken	3
Duitsland	10	Luxemburg	2	Ierland	3

Tabel 13 Europese Unie 1973

Het quotum werd vastgesteld op 41 van de 58 stemmen. We merken op dat het aantal stemmen van de oorspronkelijke leden van de Unie met $2\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd is behalve voor Luxemburg dat slechts 2 keer zoveel stemmen kreeg toebedeeld. De onderlinge verhoudingen bleven dus gelijk met uitzondering van Luxemburg dat er wat op achteruitgaat. In 1973 werd het quotum gesteld op 70,7% van de stemmen hetgeen ongeveer gelijk is aan het quotum van 1958 dat uitkomt op 70,6% van de stemmen. Men mag verwachten dat door de toetreding van drie landen de macht van de oorspronkelijke leden enigszins verwatert. De berekening van de diverse indices is hier een tijdrovende bezigheid vandaar dat tabel 14 met behulp van een computer tot stand gekomen is [2].

In tabel 14 valt op dat de macht van Luxemburg, zoals gemeten door de Shapley-Shubik-index, is toegenomen. Dit komt omdat er in de nieuwe situatie minstens één volgorde van de landen is waarvoor Luxemburg de spil is. De macht van Luxemburg is toegenomen ondanks het feit dat Luxemburg er qua stemmenaantal

Land	Stemmen		Index
Frankrijk	10	17,9%	0,178571
Duitsland	10	17,9%	0,178571
Italië	10	17,9%	0,178571
Engeland	10	17,2%	0,178571
Nederland	5	8,6%	0,080952
België	5	8,6%	0,080952
Denemarken	3	5,2%	0,057143
Ierland	3	5,2%	0,057143
Luxemburg	2	3,4%	0,009524

Tabel 14 Europese Unie 1973

relatief op achteruitgegaan is. Dit fenomeen staat in de literatuur bekend als de *nieuwe-ledenparadox*.

Machtsblokken

Met de uitbreidingen van de EU verwatert de macht van de individuele lidstaten. Hierdoor wordt het met name voor de kleine lidstaten aantrekkelijk om als één blok te opereren. Een dergelijke blokvorming heeft uiteraard gevolgen voor de machtsposities binnen de EU. We illustreren dit aan de hand van de situatie in 1973. Stel dat de Beneluxlanden een onderlinge afspraak maken om in de vergaderingen van de Unie als één blok te stemmen. Hoe verandert hierdoor de machtspositie van de drie Beneluxlanden? De situatie zou in dit geval worden als in tabel 15.

Land	Stemmen		Index	Percentage van de macht
Benelux	12	20,7%	88/420	21,0
Italië	10	17,2%	81/420	19,3
Frankrijk	10	17,2%	81/420	19,3
Duitsland	10	17,2%	81/420	19,3
Engeland	10	17,2%	81/420	19,3
Denemarken	3	5,2%	4/420	1,0
Ierland	3	5,2%	4/420	1,0

Tabel 15 Europese Unie 1973

De bundeling van de krachten van de Beneluxlanden leidt tot een gezamenlijke macht van 21% terwijl de landen tezamen een macht van 17% hadden. Zoals uit de tabel is af te leiden, gaat de samenwerking tussen de Beneluxlanden vooral ten koste van Denemarken en Ierland.

De Veiligheidsraad

Bij de oprichting van de Verenigde Naties en de instelling van de Veiligheidsraad in 1945 kwam men de volgende verdeling overeen. De raad zou bestaan uit vijf permanente leden met een veto-

recht en zes niet permanente leden. Voor de aanname van een motie waren de vijf permanente leden en minstens twee niet permanente leden nodig. Een niet permanent lid kan derhalve alleen dan als spil optreden als het wordt voorafgegaan door de vijf permanente leden en één niet permanent lid. Een niet permanent is dus de spil in $\binom{5}{1} \cdot 6! \cdot 4! = 86400$ permutaties. Daar er $11!$ permutaties van de landen zijn, is de machtsindex van een niet permanent lid gelijk aan $(5 \cdot 6! \cdot 4!) / (11!) = 0,0022$. De totale macht van de niet permanente leden was in 1945 dus gelijk aan $6 \cdot 0,0022 = 0,0132$ terwijl de gezamenlijke macht van de permanente leden gelijk was aan 0,9868.

Leden	Permanent lid	Tijdelijke leden
index	0,1974	0,0022

Tabel 16 Veiligheidsraad 1945

Om aan deze wel erg scheve verhouding een einde te maken, besloot de raad in 1965 op voorstel van een hervormingscommissie meer invloed toe te kennen aan de tijdelijke leden. Hiertoe werd het aantal niet permanente leden uitgebreid met vier leden. Voor de aanname van een motie waren nu behalve de vijf permanente leden minstens vier niet permanente leden nodig. De nieuwe samenstelling levert de volgende machtsverhoudingen op.

Leden	Permanent lid	Tijdelijke leden
index	0,196	0,0018

Tabel 17 Veiligheidsraad 1965

De totale macht van de niet permanente leden is van 0,0132 gestegen tot $10 \cdot 0,0018 = 0,018$. De leden van de Algemene Vergadering waren zeer ingenomen met het voorstel van de hervormingscommissie!

Slotopmerkingen

In dit artikel hebben we een vaak gebruikte machtsindex besproken. Deze index kwantificeert op een formele wijze de macht die een partij kan uitoefenen. In de literatuur komen behalve de Shapley-Shubik-index nog enkele andere indices voor. Bekende indices zijn onder andere de Banzhaf-index, de Johnston-index en de Deegan-Packel-index. Welke van deze indices het beste de werkelijke macht van een partij reflecteert is niet zo eenvoudig te zeggen. Bij het onderzoek met betrekking tot machtsindices stelt men vaak vooraf een aantal eisen of axioma's op waaraan een goede index moet voldoen. Vervolgens gaan we na welke index aan de axioma's voldoet. Het blijkt echter dat zelfs een gering aantal voor de hand liggende axioma's tot een onmogelijkheid leidt. Deze situatie is vergelijkbaar met de onmogelijkheidsstelling van Arrow[7] uit 1951. 

Noten en referenties

- Martin Shubik en Lloyd Shapley zijn beide wiskundigen en economen met een grote verdienste op het gebied van de speltheorie.
- Een programma voor het berekenen van diverse powerindices kan gevonden worden op www.uni-konstanz.de/FuF/Verwiss/koenig.
- R.Bosch, 'Gewogen stelsystemen', *Euclides* 73-6, 1997/98
- P.C. Ordeshook, *Game Theory and Political Theory*, Cambridge University Press, 1986
- A. Rapoport, *N-person Game Theory*, Dover Publications Inc, 2001
- D.G. Saari, *Chaotic Elections*, American Mathematical Society, 2001
- J.W.S. Cassels, *Economics for mathematicians*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 62. Cambridge University Press, 1981.

Rainer Kaenders

Instituut voor Leraar en School
Katholieke Universiteit Nijmegen
Postbus 38250, 6503 AG Nijmegen
r.kaenders@ils.kun.nl

Jaap Top

Vakgroep Wiskunde
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 800, 9700 AV Groningen
top@math.rug.nl

Enquête

Het zit hem in de derde klas

Er worden heel wat activiteiten ontplooid om in de hoogste klassen van het vwo het beeld van wiskunde en andere bètawetenschappen te verbeteren. Naast de maatschappelijke relevantie en idealistische beweegredenen is hier het verlangen om toch vooral de studentenaantallen op peil te houden of zelfs te vergroten een belangrijke drijfveer. Maar vissen we hier niet in de verkeerde vijver? Immers, deze doelgroep heeft de keuze van hun uiteindelijke examenpakket, de profielkeuze, allang achter zich liggen. Welke beweegredenen leiden leerlingen van de onderbouw van het middelbaar onderwijs tot hun profielkeuze? Om daar achter te komen hielden Jaap Top en Rainer Kaenders een kleine enquête op drie scholen.

Ben je voor Ajax of Feyenoord? Zit je op voetbal of hockey? Begin je met roken of niet? Om hun persoonlijkheid te ontwikkelen nemen middelbare scholieren heel wat beslissingen. En dat gebeurt vaak op grond van zeer irrationele invloeden. Ben je bèta of alfa? Ook al voelen veel leerlingen slechts weinig betrokkenheid met deze vraag, toch vragen de meeste scholen al in de derde klas hier een antwoord op. Dit antwoord heeft directe gevolgen voor latere beroepskeuzemogelijkheden en het heeft zeker invloed op de persoonlijkheidsontwikkeling van de leerlingen. Al deze beslissingen van leerlingen rond de derde klas zijn cruciaal voor de rol, de beeldvorming en niet in het geringste ook voor de vruchtbaarheid van de wiskunde in onze cultuur.

Hoe komt het dat in Nederland zo betrekkelijk weinig mensen wiskundige willen worden terwijl de omstandigheden ervoor zeker niet ongunstig zijn? Het antwoord op deze vraag moet op verschillende plekken worden gezocht: de universitaire opleidingen, de hogescholen, maatschappelijke stemmingen en

zeker ook bij het secundaire onderwijs waar de meeste mensen voor het eerst in aanraking komen met wiskunde als wetenschap. In de zoektocht naar antwoorden wordt vanuit de universiteit de aandacht veelal gevestigd op de bovenbouw van de middelbare school, en dan voornamelijk op wiskunde B.

Natuurlijk, Freudenthal en de zijnen wisten al lang veel beter en hebben hun aandacht zelfs sterk gericht op de basisschool. Het is bekend dat leerlingen in het begin van de middelbare school al uitgesproken ideeën hebben over wat wiskunde is.

We hebben gepoogd een indicatie te verkrijgen, wat leerlingen in de derde klas van het vwo beweegt bij de voor hen zo belangrijke profielkeuze en met name hoe zij aankijken tegen het vak wiskunde. Daartoe zijn enquêtes afgenomen bij 127 leerlingen van 3 vwo op drie verschillende scholen; het Canisius College te Nijmegen, het Elzendaal College te Boxmeer en het Lindenholt College te Nijmegen. 60 leerlingen hiervan kozen voor een maatschappijprofiel (Economie en Maatschappij of Cultuur en Maatschappij) en 67 leerlingen voor een natuurprofiel (Natuur en Gezondheid of Natuur en Techniek). Hier volgt een toelichting op de uitkomsten van deze enquête. Om een beeld te krijgen van mogelijke motieven van leerlingen noemen we daarbij alle uitspraken, ook al zijn enkele ervan slechts door weinigen of zelfs maar een enkele leerling gedaan.

Wat was het meest belangrijk in deze (profiel-)keuze voor jou?

Verreweg de meeste leerlingen kruisen hier hun eigen interesses (68) of de mogelijke beroepskeuze (53) aan. Slechts 17 leerlingen geven aan dat de moeilijkheidsgraad van het profiel bepalend was en een enkeling noemt dat het hem/haar aan alternatieven ontbrak.

Wie heeft je het meest bij deze beslissing

kunnen helpen?

De ouders (61) spelen hier de belangrijkste rol; dicht gevolgd door de verwijzing naar het eigen oordeel (55). Soms hielpen vrienden (9) en af en toe werd ook de inspirerende leraar voor het vak wiskunde (2), natuurkunde (2), tekenen (2), aardrijkskunde (1), talen (1) of Grieks (1) genoemd. Ook het tegenovergestelde komt voor: een leraar economie (1) of Duits (1) leveren een reden om niet voor een bepaalde richting te kiezen. Verder worden nog mentor (1), broer of zus (2) en boeken over beroepskeuze (2) genoemd.

Heeft het vak wiskunde in deze keuze een bijzondere rol gespeeld?

De meerderheid van de leerlingen ontkent dit en geeft aan naar alle profielvakken te hebben gekeken (84). Voor 32 leerlingen heeft wiskunde wél een bijzondere rol gespeeld waarvan er 19 zo snel mogelijk van het vak af wilden terwijl 13 leerlingen het hun favoriete vak noemden. Ook andere vakken hebben in sommige gevallen een bijzondere rol gespeeld: biologie (6), economie (4), natuurkunde (3) of aardrijkskunde (1).

Heb je een idee wat iemand die wiskundige wil worden moet leren? Kun je enkele dingen noemen?

Op deze open vraag werden de volgende antwoorden gegeven: nee (29), wiskunde (37), formules (27), logisch nadenken (11), meetkunde (9), vergelijkingen oplossen (8), berekeningen (7), grafieken (6), hoofdrekenen (5), wiskunde A en B (4), lesgeven/uitleggen (4), met rekenmachine omgaan (4), natuurkunde (4), stellingen (4), algebra (3), sommen oplossen (3), nauwkeurig zijn (3), heel abstract naar dingen kijken (2), scheikunde (2), wiskundig inzicht (2), in stappen werken (2), functies (2), kansberekening (1), cijfertjes (1), tafels (1), Engels (1), economie (1), doorzettingsvermogen (1), meten (1), vaste regels (1),



Figuur 1 De derde klas van het Canisius College

Veel! Ik wil er niet aan denken (1).

Heb jij een idee welke beroepen wiskundigen na hun opleiding uit kunnen oefenen? Kun je een paar van die beroepen noemen?

De antwoorden op deze vraag geven een duidelijk beeld. Afgezien van 11 leerlingen die geen idee van wiskundige beroepen blijken te hebben geeft het overgrote deel van de leerlingen hier aan: wiskundeleraar (105). Pas ver daarachter komen nog andere beroepen: architect (22), wiskundeprofessor (12), wetenschappelijk onderzoeker (7), wiskundige (4), (school)boekauteur (4), ingenieur (4), technisch tekenaar (4), piloot (3), bedrijfsleven (3), boekhouder (3), econoom (2), programmeur/ICT (2), sterrenkundige (1), arts (1), 'bij de NASA' (1), natuurkundige (1), 'belastingen' (1), bruggenbouwer (1), technicus (1), vuilnisman (1), putjesschepper (1), veel beroepen (1).

Lijkt het je leuk om wiskundige te zijn? Leg 's uit.

Deze vraag beantwoorden 13 leerlingen positief; ja (7), "en ik kan dat ook" (3), leuk (2), "je kunt dan veel" (1). Naast de antwoorden misschien (5) en weet niet (4) geven 105 leerlingen duidelijk te kennen het niet leuk te vinden later wiskundige te zijn. Dit gaat vergezeld met een of meerdere van de volgende associaties: gewoon nee (33), saai (21), ben er niet zo goed in (15), niet leuk (10), geen interesse (8), ben liever sociaal (8), te moeilijk (6), hekel aan (6), de hele dag hetzelfde (4), liever combinatie (1), wil met mijn gevoel werken (1),

"meest grote nachtmerrie" (1), "ben niet zo'n cijfertjesmens" (1). "Nee, je kan je creativiteit er niet in kwijt." en "Nee, maar als je het al bent is het wel cool." zijn twee verdere antwoorden.

Wiskunde is een wetenschap die ook op universiteiten wordt bedreven. Heb jij enig idee wat daar gebeurt? Kun je ongeveer iets noemen?

Interessant voor ons is dat de meerderheid van de leerlingen hierop ontkennend (72) antwoordt. Leerlingen die wél iets kunnen noemen komen met: wiskundecolleges (8), stellingen bewijzen (6), formules onderzoeken (5), berekenen (5), opdrachten maken (5), wiskunde doen/leren (4), oplossen (4), veel ingewikkelde sommen oplossen (4), uitleg over wiskunde (3), onderzoek (3), dingen onderzoeken (2), redentie (2), lesgeven (2), nutteloze voorbeeldsommen (1), iets met scheikunde (1), Pythagoras leren (1), "de hele dag bezig zijn met cijfers" (1), "nog moeilijke wiskundige dingen leren" (1), "héél ingewikkelde zooi" (1), "hetzelfde als hier, maar dan lastiger" (1), slimmer worden (1), ontwerpen (1), proeven met berekeningen (1). "Ze zitten de hele dag met hun neus in de boeken." en "de hele dag rekenen en formules maken" zijn twee typische antwoorden.

Ken je namen van beroemde wiskundigen? Zou je enkele kunnen noemen?

34 leerlingen antwoorden hier met nee. Meer dan de helft van de leerlingen kent Pythagoras (77). Verder worden genoemd: Thales (25),

de eigen wiskundeleraar (18), Einstein (15), Newton (4), Turing (2), Pick (2), Bosma (1), Dalton (1), Darwin (1), Dexter (1), Escher (1), Fibonacci (1), Leonardo da Vinci (1), Huygens (1), de Witt (1).

Wat zou je de Nederlandse wiskundigen aanraden om meer leerlingen voor wiskunde aan te trekken?

Wie is er geschikter dan de leerling zelf om ons hierbij te adviseren? Op 17 na blijken de geënquêteerden gaarne bereid ons te helpen. Het blijkt dat een aantal van hun voorstellen al eerder door professionele adviseurs onder woorden zijn gebracht — meestal minder kleurrijk. De antwoorden bevatten de associaties: leuker (18), gemakkelijker (16), promoten/reclame (15), niets; gewoon doorgaan (10), meer info geven (8), uitleggen wat je ermee kunt (6), leukere, betere schoolboeken (5), meer praktijkgericht (5), niet te saai (5), goed uitleggen (4), verbinden met het dagelijks leven (4), minder huiswerk (3), aantrekkelijker (3), interessanter (3), uitdagender (2), activerender (2), leuke leraren (2), raadseltjes/spelletjes (2), helpt niet (2), meer nuttige dingen (2), leuke dingen onderzoeken (1), spannender (1), meer richten op beroepen (1), richten op actualiteiten (1), wiskunde is nodig voor de toekomst (1), "laten zien hoe de wereld zonder wiskunde in elkaar zou zitten" (1), onnodige stof afschaffen (1), folders/internetsite (1), "van het nerd-imago afkomen" (1), "voor elke goeie opdracht een snoepje" (1), "Start een reclamecampagne met reclamespotjes: red de wiskunde" (1), uitleggen wat een wiskundige is (1), "Hef het beeld dat wiskunde moeilijk is, op" (1), "Laat zien dat je ervan geniet om het vak te geven" (1), "Meer reclame maken en koppelen aan jonge frisse mensen in plaats van die oude mensen met brillen" (1).

We onthouden ons van verder commentaar op de specifieke antwoorden. Opvallend is wel dat juist onder de mensen met een natuurprofiel een uitgesproken negatieve beeldvorming over het vak wiskunde regelmatig blijkt voor te komen. Dit is heel jammer en het vraagt om onze aandacht — vooral omdat uit de enquête blijkt dat gebaseerd op kennis en beeldvorming van het vak wiskunde en ervaring van leerlingen nauwelijks een afgewogen beslissing mogelijk is. En zoals al gezegd, toch is deze ingrijpende keuze medebepalend voor bijvoorbeeld de vraag of iemand wiskunde kan studeren. De weg naar het beroep van wiskundige is kennelijk grillig. Om met het positieve beeld van een van de leerlingen te eindigen: "maar als je het al bent is het wel cool."

Wim Groen

Faculteit der Exacte Wetenschappen

Vrije Universiteit

De Boelelaan 1083a

1081 HV Amsterdam

we.groen@few.vu.nl

Onderwijs

Vier decennia wiskundeonderwijs

Op vrijdag 28 maart heeft de afdeling Wiskunde van de Vrije Universiteit een symposium georganiseerd ter ere van het afscheid van Wim Groen, vakdidacticus wiskunde. Het was gewijd aan de nieuwste ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs op het vwo. Dit onderwijs is vanaf de zestiger jaren fors opgeschoven in de richting van het modelleren. Hoe ging deze verandering in zijn werk? Wat zijn de gevolgen voor het niveau van de wiskundebeoefening in Nederland? Wim Groen gaat op deze vragen in.

Het thema van deze middag is: Wiskunde op het vwo, waarom doen we daar eigenlijk aan? Het is mijn bedoeling u tijdens een korte tocht langs ruim veertig jaar wiskundeonderwijs te laten zien hoe het antwoord op die vraag veranderd is.

Een tweede vraag waar ik een voorzichtig antwoord op wil geven, is: Is het wiskundige niveau van de vwo-leerlingen in de afgelopen veertig jaar aanwijsbaar gedaald?

Uit het Paroolartikel 'Van vijfhonderd naar honderd' van 15 maart 2003 ontleen ik het volgende citaat: "Eens stond de Nederlandse

wiskunde aan de internationale top. Maar die tijd is voorbij. Haakjes wegwerken, breuken onder een noemer brengen: vwo-scholieren kunnen het niet meer. [...] Abstract denken komt steeds minder aan bod op het vwo. Het middelbare schoolonderwijs is ook te veel versnipperd in kleine onderwerpjes. Een andere grote boosdoener is de rekenmachine. Scholieren zijn gewend dat ding overal voor te pakken, kunnen heel weinig nog uit het hoofd."

De hoogleraar wiskunde die de journalist deze woorden in de pen geeft, heeft over het antwoord op de niveauvraag een duidelijke mening. Ik zal proberen na te gaan of de feiten hem gelijk geven.

Idealen in de jaren zestig

Ik begin bij 1961 het jaar waarin ik als schuchtere jonge man de eerste stappen op het leerarspad zette. Naast mijn benoeming tot leeraar deed zich in het wiskundeonderwijs in 1961 nog iets belangrijks voor. De staatssecretaris van onderwijs installeerde op 19 juli 1961 de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) die de opdracht kreeg het

wiskunde onderwijs grondig op de schop te nemen; Stubenrouch, de staatssecretaris, zei in zijn installatierede onder andere: "Allerwegen wordt het standpunt ingenomen dat in de westelijke landen het onderwijs in de wiskunde is achtergebleven bij de ontwikkeling van de wetenschappelijke beoefening van de stof. De kloof tussen de wiskundeleerstof van de scholen voor het VMO [voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs] en de universitaire wiskunde is hierdoor in de laatste decennien steeds groter geworden, zulks ten nadele van de opleiding van de voor de maatschappij noodzakelijke wiskundigen." [1]

De voorzitter van de commissie, de wiskundige prof Leeman, merkt in zijn antwoord aan de staatssecretaris op: "Iemand die zich in deze snel veranderende wereld enigszins thuis wil voelen en die de hem toegemeten taak in de maatschappij op een voor hem en zijn medemensen bevredigende wijze wil vervullen, zal ongetwijfeld enig begrip van die wetenschap moeten hebben, waarvan de technische resultaten hem, bijna dagelijks in verbazing brengen." [2]

Even verder: "Veelal wordt de noodzaak

tot modernisering gebaseerd op het argument dat in onze maatschappij een steeds groeiende behoefte aan wiskundig geschoolden valt te constateren. Als men hiermee wil zeggen dat de wiskunde een steeds belangrijker deel van de westerse cultuur is gaan vormen en dat dus ieder die aan deze cultuur deel wenst te hebben zich enig begrip van de moderne wiskunde moet eigen maken, dan kan ik het daarmee volledig eens zijn. [...]

Bedoelt men echter met wiskundige geschoolden universitair opgeleide specialisten, zoals steeds meer gevraagd worden door allerlei instanties, dan meen ik dat we voorzichtig moeten zijn. Bij de opleiding van jonge mensen tot wiskundigen gaat het immers om hen die voor dit vak een bijzondere aanleg bezitten en het lijkt me toe dat hun aantal op een bevolking van 11.000.000 zielen niet zo bijzonder groot kan zijn. We zullen er rekening mee moeten houden, dat in ons land het aantal wiskundige specialisten, dat zijn dus zij die aan een universiteit met hoofdvak wiskunde afstuderen, aan natuurlijke grenzen gebonden is.

Of het tegenwoordige aantal van ongeveer een vijftiental per jaar belangrijk kan worden opgevoerd, als we door een doelmatiger leerplan op de middelbare school meer jongelieden dan tot nog toe kunnen animeren om in wiskunde door te gaan, zal de tijd moeten leren." [3]

Opvallend vind ik drie dingen:

1. De staatssecretaris baseert de noodzaak tot vernieuwing vooral op de kloof tussen de schoolwiskunde en de universitaire wiskunde;
2. De voorzitter van de commissie benadrukt dat kennis van de wiskunde nodig is om je in de maatschappij te kunnen thuisvoelen en je rol naar behoren te kunnen spelen;
3. De scepsis van Leeman over de mogelijke aantallen professionele wiskundigen.

U moet bedenken dat op het moment dat deze woorden worden uitgesproken zojuist de eerste eindexamens volgens de nieuwe examenprogramma's van 1958 waren afgenomen. Er was dus, na jarenlange discussies, nog maar net een vernieuwd curriculum in gebruik.

Het werk van de CMLW heeft uiteindelijk geleid tot de programma's van 1968, die vooral bekend zijn geworden door de introductie in de schoolwiskunde van de verzamelingen-taal, de teloorgang van de euclidische meetkunde en de opkomst van de vectormeetkunde. Van de tweeledige opdracht aan de commissie, namelijk zowel de kloof tussen de schoolwiskunde en de wetenschappelijke

wiskunde verkleinen als de maatschappelijke relevantie van de schoolwiskunde vergroten, is niet zo veel terecht gekomen.

Het eindexamen van 1962

Het wordt tijd om wat concreter te worden. Wat werd er aan de eindexamenkandidaten van 1962 gevraagd? Ik heb voor u enkele examenopgaven algebra uit de periode 1961 tot heden verzameld. En om een beetje te kunnen vergelijken, neem ik steeds, indien mogelijk, de opgave die over functies en grafieken gaat.

Examen Algebra Gymnasium 1962, opgave 2: Gegeven zijn de functies $f(x) = px^2$ en $g(x) = (p+1)x$, waarin $p > 0$.

- a. Druk de abscissen van de snijpunten van de grafiek van $f(x)$ en $g(x)$ in p uit.
- b. Bewijs, dat de oppervlakte van de door de grafieken van $f(x)$ en $g(x)$ begrensde figuur gelijk is aan $\frac{(p+1)^3}{6p^2}$.
- c. Bereken de waarde van p , waarvoor de onder b genoemde oppervlakte een uiterste waarde aanneemt, als p veranderlijk is. Bereken deze uiterste waarde, en onderzoek of de uiterste waarde een maximum of een minimum is. [4]

Welke vaardigheden werden er in 1962 van de kandidaat blijkbaar verwacht?

Bij vraag a het oplossen in x van de vergelijking $px^2 = (p+1)x$. Bekende fout is natuurlijk het vergeten van de oplossing $x = 0$. Maar als je een plaatje maakt, p is positief dus het schetsje is eenvoudig, kan er eigenlijk weinig misgaan. Bij vraag b moet je de integraal

$$\int_0^{\frac{p+1}{p}} ((p+1)x - px^2) dx$$

opstellen en berekenen. Je moet de grenzen goed kiezen en de volgorde van de functies in de integrand is natuurlijk ook van belang. Om te voorkomen dat een kandidaat die in vraag a een foutje heeft gemaakt ook bij vraag b de mist in gaat, is het antwoord al gegeven en moet je alleen maar laten zien dat het klopt.

Bij vraag c ten slotte moet je de functie $O(p) = \frac{(p+1)^3}{6p^2}$ differentiëren, een tekenverloop van de afgeleide maken, vaststellen dat er tekenwisseling is bij en daaruit concluderen dat er een minimum is ter grootte $9/8$.

Wat het rekenwerk betreft: er waren geen hulpmiddelen dan de logaritmetafel. Je moest het dus allemaal met de hand kunnen. De vragen a en b zou je ook nu nog aan eindexamenkandidaten kunnen stellen, maar uit de resultaten van onze instaptoetsen, waarmee we proberen na te gaan welk rekenwerk onze aankomende studenten nog met de hand

kunnen uitvoeren, trek ik de conclusie dat het gereken met de quotiëntregel dat je in vraag c nodig hebt, tegenwoordig maar door weinigen tot een goed einde wordt gebracht.

U zult misschien vinden dat deze opgave wel erg gemakkelijk is. Laat ik u direct geruuststellen: er werd nog meer gevraagd in 1962. Van de goniometrie bijvoorbeeld moest je aardig op de hoogte zijn. Dat kun je zien aan een van de vragen uit dat jaar: Gegeven $\cos x = \frac{3}{5}$; bereken zonder een tafel te gebruiken: $9 \tan x + 16 \tan \frac{x}{2}$. En ook je formulevaardigheden moesten op peil zijn, anders kwam je niet ver met de vraag: Voor welke waarden van x in het interval $0 \leq x \leq 2\pi$ is $\sqrt{2} \cos x + 1 < \sin x$?

Met de grafische rekenmachine is de laatste opgave natuurlijk makkelijk. Als je tenminste genoeg neemt met benaderende antwoorden. Maar met de hand is het een heel werk dit tot een goed einde te brengen.

Het eindexamen van 1982

We nemen nu een stap van twintig jaar en komen bij het eindexamen vwo van 1982. In die twintig jaar is heel wat gebeurd:

- HBS en Gymnasium zijn als schooltypen verdwenen en vervangen door het vwo.
- De vaste lijst van vakken voor het examen is vervangen door een systeem van vakkenpakketten.
- Het werk van de CMLW heeft in het vwo geleid tot twee wiskundevakken: wiskunde I en wiskunde II.

Wiskunde I wordt voor bijna alle studies geëist. In wiskunde I zit in het examenprogramma geen meetkunde, wel kansrekening en statistiek. Over de invoering van dit vak is naar schatting een kleine twintig jaar gediscussieerd.

Wiskunde II is vooral bedoeld als vooropleiding voor een exacte studie. Onder invloed van moderne wiskundigen als Dieudonné en diens profeet in Nederland Piet Vredenduin is de klassieke meetkunde als context voor het leren wiskundig redeneren vervangen door de lineaire algebra. De leerlingenaantallen die dat vak kiezen zijn klein. In de wandelgangen van de exacte faculteiten is men niet enthousiast voor Wiskunde II. "Ze kunnen beter een extra moderne taal leren" zo wordt gezegd. "Dat beetje lineaire algebra van het vwo leren we ze in twee middagen wel zelf."

De verzamelingentaal is ingevoerd en de wiskundige smaakmakers gaan ervan uit dat je de kloof tussen school en wetenschap onder andere verkleint door de notaties wat formeler te maken. Aan de examenopgaven is dat goed te zien.

Examen wiskunde I voor het vwo in 1982, 12 mei, 9.00–12.00 uur.

Voor elke $p \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ is met domein $\mathbf{R}^+$ gegeven de functie $f_p: x \rightarrow 2\ln^2 - 2p \ln x$

- Onderzoek f_1 . Bereken de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van f_1 . Teken de grafiek van f_1 ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel Oxy .
- Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f_1 en de x -as.
- De grafiek van de functie f_p snijdt de x -as in de punten A_p en B_p . De raaklijn in A_p en de raaklijn in B_p aan de grafiek van f_p snijden elkaar in het punt C_p . Voor welke p geldt: de x -coördinaat van C_p is kleiner dan 2?

Laten we eens nagaan wat er allemaal moet worden gedaan om de beschikbare punten te kunnen scoren: Vraag a is een standaardvraag. Voor de leerlingen in die tijd een bekende rituele dans. Je moest de nulpunten en het tekenverloop van de functie berekenen, de afgeleide, het tekenverloop daarvan, de uiterste waarden, de asymptoten van de grafiek en als dat allemaal was volbracht, kon je de grafiek tekenen. Die grafiek was de apotheose van de rituele functiedans.

Nu vraag b: Je moet de integraal

$$\int_1^e (2 \ln x - 2 \ln^2 x) dx$$

opstellen en berekenen. Dat betekent: de nulpunten gebruiken die je bij vraag a hebt gevonden en ook nog inzien dat je $-f_1$ in de integrand moet zetten. Maar als je dat niet had gedaan, merkte je bij het antwoord wel dat er iets mis was gegaan. Om de integraal te berekenen, kon je natuurlijk niet om partiële integratie heen, ook al kende je de primitieve van $\ln x$ uit het hoofd. Ten slotte vraag c: voor de twee raaklijnen vind je $y = -2px + 2p$ en $y = \frac{2px}{e^p} - 2p$. Voor de x -coördinaat van het snijpunt $x = \frac{2e^p}{1+e^p}$. Voor welke waarde van p is die breuk kleiner dan 2?

Wie 'gewoon' schrijft $\frac{2e^p}{1+e^p} < 2$ en (de noemer is steeds positief) vermenigvuldigt met $1 + e^p$ vindt $0 < 2$ en moet vaststellen dat het antwoord moet zijn: "voor elke waarde van p ."

Als ik deze twee opgaven met elkaar vergeleek, heb ik de indruk dat de vader die mij nog onlangs zei dat zijn zoon al in de vroege jaren tachtig op het vwo bijna niets meer aan wiskunde had geleerd er goed aan zou doen de eindexamens van enkele decennia nog eens te bekijken.

De opgave van 1982 is duidelijk moeilijker dan die van 1962; al moeten we direct er bij

zeggen dat die grotere diepgang wel ten koste was gegaan van de breedte. De goniometrie was verdwenen en ook van stereometrie en analytische meetkunde wisten de vwo-ers in 1982 bijna niets.

De examenkandidaat van 1982 had intussen ook een rekenmachine. Hij kon daarmee logaritmen en sinussen en cosinussen opzoeken en daarmee de gewone bewerkingen uitvoeren, maar geen integralen (numeriek) berekenen. Er werd in 1982 aan handmatige algebraïsche vaardigheden behoorlijk wat geëist; dat kunt u zelf vaststellen.

Vaardigheden als probleemoplosser heb je voor deze opgave eigenlijk niet zo nodig. Als je altijd netjes je werk had gedaan, wist je wat er moest gebeuren. Je kon wel stuklopen op een gebrek aan techniek.

De examenkandidaat van 1962 zou de opgave van 1982 niet hebben kunnen maken; simpelweg omdat de natuurlijke logaritme en het partieel integreren in 1962 nog niet in het programma zaten. Omgekeerd zou de kandidaat van 1982 met de opgave van 1962 geen moeite hebben gehad.

De huidige vwo-leerling beschikt over een grafische rekenmachine (GR). Hij zou de vragen a en b van 1982 grotendeels fluitend hebben kunnen oplossen. Alleen met dat buigpunt bij vraag a zou hij moeilijkheden hebben, daarvoor kan hij niet vaardig genoeg met formules overweg. Met vraag c zou niemand uit de voeten kunnen; daar helpt je GR je niet. Met een computerprogramma als VuDif zou je daar wel geholpen zijn. Met de schuifparameter kun je het patroon van grafieken laten bewegen, zodat je ziet dat, hoe je p ook kiest, het snijpunt C altijd links van de lijn $x = 2$ ligt.

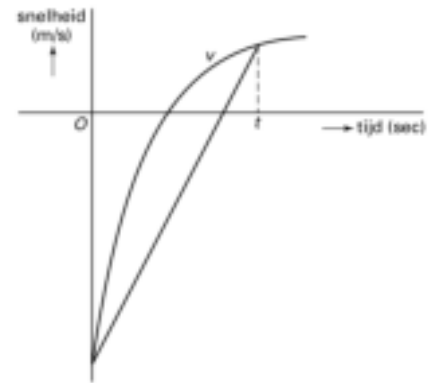
Het eindexamen van 2002

We gaan weer twintig jaar verder; naar het examen van 2002.

Eindexamen wiskunde B1,2 vwo 2002-I

Een bal valt van enige hoogte in het water. Vanaf het moment dat de bal het wateroppervlak raakt, wordt hij afgeremd. Door zijn snelheid zal hij nog een stuk onder het wateroppervlak komen. Vervolgens zal de bal weer opstijgen naar het wateroppervlak. Voor de snelheid v , in meters per seconde, van een bepaalde bal die in het water valt, geldt de formule: $v(t) = 2 - 8e^{-2t}$

Hierbij is t de tijd in seconden vanaf het moment dat de bal in het water komt; v is positief als de bal omhoog gaat. Deze formule geldt alleen zolang de bal onder water is. Ter vereenvoudiging verwaarlozen we de diameter van de bal. In figuur 1 staat de grafiek van v



Figuur 1 De periode dat de bal onder water is

voor de periode dat de bal onder water is.

De gemiddelde versnelling (in m/sec^2) van de bal tijdens de eerste t seconden dat hij onder water is, is gelijk aan de helling van het verbindingslijnstuk tussen de punten op de grafiek van v die horen bij de tijdstippen 0 en t . In figuur 1 is dit lijnstuk voor een waarde van t getekend.

- Bereken de gemiddelde versnelling in m/sec^2 gedurende de eerste 2 seconden. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

De bal bereikt het diepste punt na ongeveer 0,7 seconden.

- Bereken het exacte tijdstip waarop de bal op het diepste punt is.

Het aantal meters dat de bal zich op een bepaald tijdstip onder het wateroppervlak bevindt, kun je berekenen door de snelheid te integreren,

- Bereken de grootste diepte die de bal bereikt. Geef je antwoord in centimeters nauwkeurig.

Het eerste wat opvalt, is natuurlijk de hoeveelheid inleidende tekst. Maar nu de wiskunde: Om de eerste vraag te beantwoorden moet je $v(2) - v(0)$ delen door 2. Met je rekenmachine een eenvoudige zaak.

Voor het antwoord op de tweede vraag moet je inzien dat de bal op zijn diepste punt is als v gelijk is aan 0. Ook eenvoudig.

En de derde vraag leidt tot de integraal van 0 naar $\ln 2$ over de snelheidsfunctie. Dat kan lastig zijn om dat in te zien, maar dat word je voorgezegd.

Conclusie: wiskundig een zeer eenvoudige opgave; er kunnen zich alleen interpretatieproblemen voordoen, maar die krijg je cadeau.

De niveauvraag

Het wordt tijd terug te keren naar de vraag van het begin: Is het wiskundige niveau van

de vwo-leerlingen in de afgelopen veertig jaar aanwijsbaar gedaald?

In de vwo-eindexamens voor wiskunde I of wiskunde B kun je tot 1998 geen aanwijzingen vinden dat het wiskundige niveau van de vragen steeds maar daalt. Wel zie je in de profielexamens tot nu toe het niveau van het gevraagde wiskundige handwerk teruglopen en problemen verschijnen die met het model leren te maken hebben. Ik kom daar straks op terug.

Van 1968 tot 1998 zijn de programma's minder breed dan in de jaren zestig, maar wat er aan de orde kwam (de analyse, kansrekening, ruimtemeetkunde) is steeds van een behoorlijk niveau gebleven en ook voor de academische wiskundige herkenbaar als wiskunde. Wel zie je dat de opdracht "Bewijs..." gaandeweg minder in de examens voorkomt. Telde ik tussen 1975 en 1982 op 45 berekenvragen nog 17 bewijsvragen. Tussen 1986 en 1995 waren er op 65 berekenvragen nog maar 13 bewijsvragen.

Rekenmachine

De invloed van de gewone rekenmachine, die sinds circa 1980 beschikbaar is op de examens, is tot aan de profi-examens (de proefexamens van de profielexamens) niet zo groot. De aard van de gestelde vragen is er nauwelijks door beïnvloed. Je kunt een rekenmachine beschouwen als een *black box*. In de afgelopen veertig jaar heb ik leerlingen vaak met *black boxes* van allerlei soort zien werken. Er is geen principieel verschil tussen het onbegrepen toepassen van de *abc*-formule of de kettingregel en het klakkeloze gebruik van een rekenmachine. Ook het werken met de logaritmetafel was vaak een onbegrepen kunstje. Noodzakelijke verkortingen in het handelen kunnen er voor zorgen dat wat eerst begrepen is, na enige tijd verwordt tot een onbegrepen handeling. U weet misschien dat Dijksterhuis al in de jaren dertig van de vorige eeuw pleitte voor epistemisch wiskundeonderwijs, waarmee hij bedoelde dat leerlingen wel verkortingen mogen gebruiken, maar steeds in staat moeten zijn op afroep een dergelijke verkorting toe te lichten. Ik denk dat die eis voor grote groepen leerlingen ook toen al onhaalbaar was. De signalen daarvoor kun je in de leraarsbladen van de vorige eeuw op diverse plaatsen vinden.

De Oostenrijkse wiskundige Kutzler [5] vergelijkt hoofdrekenen met wandelen of lopen, rekenen met behulp van pen en papier met fietsen en rekenen met behulp van een rekenmachine met autorijden. Wie $e^{\ln 4}$ intikt op zijn machine is te vergelijken met iemand die naar

zijn schuurtje wil gaan met de auto. Nog meer dan nu het geval is, zou in de wiskundeles het gebruik van de rekenmachine specifiek op de situatie moeten worden toegesneden. Niet alleen, zoals nu vaak gebeurt, door bij een opgave te schrijven "zonder rekenmachine", maar ook door de vragen verstandig te kiezen. Zo zou je de opgave: 'Gegeven $\cos x = 0,6$; bereken $\sin x$ ', moeten laten volgen door de opgave 'Gegeven $\cos x = p$; druk $\sin x$ in p uit'. Bij de eerste vraag kan iemand nog eerst met de rekenmachine x bepalen en daarna $\sin x$. Bij de tweede vraag lukt dat niet meer.

Van geheel andere orde is de introductie van de grafische rekenmachine. Die levert wel een verschuiving op van probleemstellingen. Was in 1982 het tekenen van de grafiek nog de apotheose van de rituele functiedans, nu is de grafiek het uitgangspunt dat gebruikt kan worden om verder de functie te bestuderen.

Wiskunde op het vwo; waarom eigenlijk?

Het antwoord op die vraag verschuift met de tijd. Tussen 1961 en 2002 hebben zich drie omwentelingen voorgedaan: in 1968 kregen we een door *new-math* geïnspireerd programma, in 1985 de HEWET en in 1998/1999 het nieuwe programma van de profielstructuur.

Het programma van 1968 zocht aansluiting bij de ontwikkelingen van de wiskundige wetenschap. Het was de opstellers ervan vooral te doen om de wiskundige correctheid en om het bevorderen van het leren denken van de leerlingen.

HEWET (1985) gaf ons de wiskunde A en wiskunde B. Wiskunde A was bedoeld als voorbereiding voor gammastudies en ter bevordering van de maatschappelijke gecijferdheid. Wiskunde B probeerde meer aan te sluiten bij technische studies. Deze hervervorming van wiskunde I en wiskunde II was een serieuze poging de schoolprogramma's beter af te stemmen op wat er later mee moet of kan worden gedaan. Door wiskunde A te ontdoen van datgene wat altijd centraal had gestaan in de schoolwiskunde, bewijzen en omgaan met algoritmen, en te richten op modelvorming en gebruik van wiskunde in andere vakken, deed men een serieuze poging de leerlingen een maatschappelijk bruikbaar vak aan te bieden. Alle mooie woorden over de maatschappelijke relevantie van de wiskunde kregen eigenlijk pas in 1985 een eerste echte concretisering. Tot die tijd was de wiskunde in het voortgezet onderwijs het domein van de academische wiskundigen. Het schoolprogramma was vooral bedoeld als voorbereiding op een exacte studie. En wie geen exact vak ging studeren, kon zijn voordeel doen met de zegenende

invloed van het exacte denken.

Door de afsplitsing van wiskunde A kon je in wiskunde B grondig werk maken van een goede voorbereiding op exacte studies. De in 1968 binnengehaalde lineaire algebra verdween weer van het toneel en de stereometrie (nu ruimtemeetkunde genoemd) keerde terug. Twee doelen werden genoemd: ruimtelijk inzicht bevorderen en kennis maken met een deductief systeem. Erg veel succes heeft die ruimtemeetkunde niet gehad. En van de kennismaking met een deductief systeem kwam ook lang niet altijd veel terecht.

De profielprogramma's die in 1998 werden ingevoerd, probeerden de in 1985 ingeslagen weg te vervolgen. Er kwamen vier verschillende programma's voor de vier profielen. Een van de ideeën was dat je dan in het profiel Natuur & Techniek ook echt kon voorbereiden op een exacte studie. Dat het daarmee ook niet goed is afgelopen, is de meeste van u bekend. De noeste arbeid van de studietoetscommissie wiskunde B in de vroege jaren negentig kon niet verhinderen dat de schoolwiskunde steeds verder kwam af te staan van de wiskunde als academische discipline.

Onderwijsdoelen

Denkend over de doelstellingen van het wiskundeonderwijs is het goed op te merken dat de algemene onderwijsdoelen nu anders zijn dan in 1961 toen ik aan mijn leraarswerk begon. Zeker tot 1968 waren 'kennismaken met je cultuur, vorming' en het 'verkennen van je grenzen' (wat kan ik wel en wat kan ik niet?) geaccepteerde doelstellingen van het onderwijs. Wat je leerde was minder belangrijk dan dat je liet zien dat je kon leren en dat je kon doorzetten. Wiskunde paste uitstekend in die cultuur. Zelfs als er ogenschijnlijk toepassingen aan de orde kwamen, dan speelden die toch eigenlijk alleen maar de rol van uitdaging. Zo citeren Davis en Hersh de econoom John Kennis Galbraith, die over wiskundige modellen in de economie zegt: "[...] al hebben ze geen praktische waarde, ze vervullen een nuttige academische functie. Een van de oudste problemen bij de opleiding economie is hoe je de ongeschikte mensen moet weren. De eis van vaardigheid om met ingewikkelde modellen om te gaan, waaronder die waarvoor wiskundige begaafdheid nodig is, is een buitengewoon nuttig selectiemiddel." [6]

In de laatste decennia is de roep dat onderwijs direct toepasbare en bruikbare kennis moet bieden steeds luider geworden. Het economische nut als de maat van alle dingen is onomstreden. Het spreken over producten in situaties waarin dat vroeger nooit gebeur-

de (de afgestudeerden van een universiteit, de trainenloop van de NS, een geneeskundige behandeling, een overnachting in een hotel) vinden alleen wereldvreemde onaanpaste oude stakkers nog vreemd. Dat heeft zijn weerslag gehad op de wiskundeprogramma's. Namen we vroeger genoeg met de bewering dat wiskundeonderwijs een grote vormende waarde had zonder dat we de effecten van die vormende waarde concreet konden aangeven, tegenwoordig willen we die vormende waarde aangeduid zien in herkenbare, winstgevendende toepassingen. Dat heeft er ook toe geleid dat de nadruk die vroeger al direct vanaf de eerste klas van het Lyceum in de wiskunde werd gelegd op stellingen, definities en bewijzen nu grotendeels verdwenen is en is vervangen door quasi maatschappelijk relevant gereken over gasrekeningen en zichthoeken. De terugkeer van de vlakke euclidische meetkunde als context voor het oefenen van bewijsopgaven is een poging daar weer wat aan te doen, maar dat begint dan pas in de bovenbouw. Voor het ontwikkelen van de gewenste redeneervaardigheden lijkt me dat gevaarlijk laat.

Het is wel frustrerend op te merken dat zeker al sinds 1961 geroepen wordt dat de kloof tussen de schoolwiskunde en de academische wiskunde kleiner moet worden en dat nog onlangs door een oud-medewerker van het Philips Natlab in *Trouw* werd geschreven: "Het probleem is namelijk dat de middelbare-schoolwiskunde nauwelijks iets met professionele wiskunde te maken heeft. Wie wiskun-

de wil studeren en alleen middelbare schoolkennis heeft opgedaan, begint op de universiteit op niveau nul, plus een klein beetje." [7]

Dat we ook in het vwo leerlingen zo lang mogelijk de kans willen geven mee te komen, heeft tot gevolg dat vooral in de onderbouw veel te lang op een te eenvoudig niveau wordt gewerkt, dat er te veel aandacht is voor echte of vermeende toepassingen en dat er te laat aandacht is voor het ontwikkelen van het abstracte denken. Daardoor moet er in de bovenbouw te veel aandacht worden gegeven aan elementaire zaken die al in de onderbouw afgehandeld hadden moeten zijn. Het is mijn stellige overtuiging dat er voldoende leerlingen zijn die al op zeer jeugdige leeftijd met abstracties en wiskundige redeneringen kunnen omgaan en dat deze leerlingen nu ernstig tekort komen. Nu scholen er langzamerhand weer toe overgaan ook in de brugklassen de betere leerlingen bij elkaar in de klas te zetten, zou er voor die leerlingen ook een aparte leerlijn moeten worden ontworpen. Zo zouden die leerlingen de kans krijgen de gewenste redeneer- en formulevaardigheden te ontwikkelen zonder daarbij voor anderen onnodige blokkades op te werpen.

Anderzijds stel ik vast dat er ook beweging zit in het front van de academische wiskunde. Werd vroeger in het universitaire curriculum sterk de nadruk gelegd op het structuurkarakter van de wiskunde, tegenwoordig zijn er ook hoogleraren die verder kijken dan de wiskunde zelf. Onlangs kreeg ik een briefje van Ger Koole (hoogleraar Optimalisatie van bedrijfs-

processen), waaruit ik citeer: "Wat ik *modelleren* zou noemen is te weinig aandachtspunt van wiskundigen en daardoor loopt de communicatie met niet-wiskundigen moeizaam: wiskundigen lossen vaak perfect het verkeerde probleem op. Als het studiehuis ertoe bijdraagt dat de link tussen wiskunde en maatschappij wordt versterkt lijkt me dat een belangrijke stap vooruit, en van groot belang voor de wiskunde. Dat we eventueel in de opleiding wiskunde op een iets lager niveau moeten beginnen moeten we dan maar op de koop toenemen."

Leerlingenaantallen in het vwo

Nog even terug naar het artikel in *Het Parool* en de rede die Leeman in 1961 hield bij de installatie van de CMLW. Hij stelde daarin dat er in 1961 in Nederland circa vijftien wiskundigen per jaar zouden afstuderen. Laat ik een klein sommetje maken: In 1961 had Nederland elf miljoen inwoners. Volgens Douwe Kok (docent aan de lerarenopleiding van de VU) is het percentage leerlingen dat in het algemeen vormend onderwijs een exacte richting kiest sinds 1961 toegenomen van circa 6% naar circa 13%. De bevolking is gegroeid van elf naar zestien miljoen. We kunnen nu dus in Nederland $\frac{13 \times 16}{6 \times 11} \approx 48$ afgestudeerde zuivere wiskundigen per jaar verwachten. Bedenken we daarbij dat we tegenwoordig ook nog studies als informatica en bedrijfswiskunde hebben, dan staat de Nederlandse wiskunde er misschien toch niet zo gek voor. 

Noten en referenties

- 1 Installatierede Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, 19 juli 1961, p. 3.
- 2 Installatierede Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, 19 juli 1961, p. 7.
- 3 Installatierede Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, 19 juli 1961, p. 10.
- 4 S.J. Richter, *Eindexamens der gymnasia*, WN 1969, p. 218.
- 5 Zie op www.kutzler.com het artikel *Algebraic calculators as a pedagogical tool for teaching mathematics*.
- 6 Zie P.J. Davis en R. Hersh, *Descartes' droom*, Contact, 1987, ISBN 90-254-6734-2, p. 120.
- 7 Henk Kuiken, 'Wiskunde sterft in Nederland', *Trouw* 19 februari 2003.

Matthijs H. Sitters

Valeriusstraat 62 boven
1071 ML Amsterdam
mhsitters@zonnet.nl

Sybrandt Hansz Cardinael (1578–1647)

Meester in de meetkunde

In het Nieuw Archief van maart 2003 construeerde Jan van Maanen uit zeventiende-eeuwse geschriften een portret van de meetkundige Sybrandt Hansz Cardinael. Het onderstaande artikel, dat zich meer richt op de betekenis van het werk van Cardinael, is in het kader van het NWO-programma 'Leraar in Onderzoek' geschreven. M.H. Sitters is leraar wiskunde aan het Montessori Lyceum te Amsterdam.

Sybrandt Hansz Cardinael, wiens leven bijna de gehele periode van de tachtigjarige oorlog bestrijkt, was een gerenommeerd rekenmeester en wiskundige uit de eerste helft van de zeventiende eeuw. Hij was afkomstig uit doopsgezinde kringen in Harlingen. Vanaf 1605 woonde hij te Amsterdam en in ieder geval was hij vanaf 1623 werkzaam als vrijgevestigd rekenmeester aldaar. Hoewel hij in zijn tijd de nodige bekendheid genoot, is zijn naam in de vergetelheid geraakt onder meer door de enorme uitstraling van grote geleerden uit zijn tijd zoals Stevin en Huygens. Hernieuwde belangstelling voor zijn werk vinden we in de negentiende eeuw bij Vorsterman van Oijen[1], Bierens de Haan[2] en later in de twintigste eeuw bij Burger[3], Wijnman[4] en Thijssen-Schoute[5]. Tenslotte was het Van Maanen die in zijn proefschrift[6] een lans brak voor nader onderzoek van het werk en leven van deze onderbelichte rekenmeester, meetkundige en tevens zeevaartkundige en sterrenkundige. Deze studie is een poging om de originaliteit van het meetkundig werk van Cardinael te tonen en tevens zijn plaats te bepalen in het culturele en wetenschappelijke leven van zijn tijd.

Cardinael bewoog zich voornamelijk binnen een netwerk van doopsgezinde relaties; de doopsgezinden namen een opmerkelijk prominente plaats in binnen de culturele en

economische elite van de Republiek. Wat zijn meetkundig werk betreft valt Cardinael op door zijn afwijzing van algebraïsche methoden in de meetkunde. In plaats daarvan houdt hij vast aan de zuivere meetkunde waaronder de klassieke oppervlakterekening (geometrische algebra), hetgeen vaak leidt tot overtuigender bewijzen en berekeningen dan het domweg oplossen van vergelijkingen met behulp van standaard technieken uit de algebra.

De wiskunde tussen 1550 en 1650

Cardinael leefde in een tijd waarin politieke, staatkundige, godsdienstige, maatschappelijke en wetenschappelijke veranderingen hand in hand gingen. Ontdekkingsreizen en toename van de handel leidden tot nieuwe beroepen en vernieuwing van het onderwijs.

De grote veranderingen op wetenschappelijk gebied, waarbij gebroken werd met de klassieke scholastiek en waarbij het vrije onbelemmerde wetenschappelijke onderzoek het heersende paradigma werd, kunnen we met een beetje goede wil afgespiegeld zien in de wiskunde. Daar vond tijdens het leven van Cardinael een complete Umwertung van waarden plaats, eindigend met Descartes die meetkunde en algebra van rol verwisselde: tot ongeveer 1600 had de meetkunde het laatste woord en werd daarmee de algebra gerechtvaardigd, vanaf ongeveer 1650 is het juist de algebra en later de analyse die dient om nieuwe meetkundige verbanden te ontwikkelen en te bewijzen.

Kort samengevat zou de zeventiende eeuwse wiskundebeoefening gezien kunnen worden als de periode waarin de aanvankelijke schroom om algebraïsche methoden te gebruiken, hetzij als doel op zich (oplossen van vergelijkingen), hetzij als hulpmiddel bij de meetkunde, volledig werd overwonnen. Men werkte aan het eind van die eeuw vrijelijk met

formules waarin letters voorkomen voor onbekenden ($x, y, z, \dots$) en ook voor bekenden ($a, b, c, \dots$) en waarbij de rekenregels toegepast werden die van oudsher golden voor het rekenen met natuurlijke getallen en breuken.

De enige rechtvaardiging was dat deze werkwijze bruikbare resultaten opleverde, want dat woog zwaar in dit tijdperk van ontdekkingsreizen en economische expansie: rekenkunde, Italiaans boekhouden, landmeetkunde, navigatiekunde en sterrenkunde waren de opkomende vakken. Het bleef echter aan het geweten van de meer consciëntieuze wiskundigen knagen dat er voor deze algebra nauwelijks een logische fundering bestond.

Cardinael behoorde ongetwijfeld tot de categorie van wiskundigen, voor wie de meetkunde, die sinds Euclides in hun ogen wel streng gefundeerd was, de ultieme rechtvaardiging moest blijven. De algebra, in die tijd meestal aangeduid als *Regel Coss*, moest daarbij zoveel mogelijk vermeden worden. Met de term "coss", afgeleid van het Italiaans *cosa* (= zaak, ding) werd in die tijd de onbekende (namelijk: zaak) aangeduid, waarvoor wij tegenwoordig doorgaans de letter x gebruiken. We danken aan zijn meetkundige benadering en in het bijzonder aan de oppervlakterekening een aantal vindingrijke bewij-



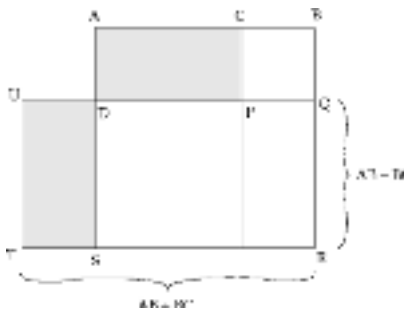
Figuur 1 De door Samuel Coster in 1617 opgerichte Nederlandse Academie, gezien vanuit de Keizersgracht.

Meetkundige identiteiten I

Uit de tekening blijkt:

$$\begin{aligned} AB^2 - CB^2 &= \text{gnomon } ACPQRSA \\ &= \text{rechthoek } UQRT \\ &= (AB - CB) \cdot (AB + CB). \end{aligned}$$

Deze identiteit kan meetkundig geïnterpreteerd worden als het roteren en daarna translateren van rechthoek DPCA tot rechthoek SDUT, waarmee het gnomon is getransformeerd tot een rechthoek. In Questie 1 uit de HGQ wordt dit toegepast.



zen die via algebra tot wanstaltige oplossingen zouden hebben geleid

Cardinael als rekenmeester en wiskundige

Nadat Cardinael in 1605 van Harlingen naar Amsterdam was verhuisd en daar in 1607 getrouwd was met Levijntje Panten, dochter van de schoolmeester Lieven Panten, verscheen in 1612 reeds zijn *Hondert Geometrische questien met hare solutiën* (HGQ), het werk waarmee in één klap zijn naam gevestigd was. Deze HGQ vormde een aanhangsel van 127 pagina's bij het standaardwerk voor de landmeter, de *Practijck des Landmetens* van Sems en Dou. De faam verspreidde zich kennelijk zo snel dat reeds in 1617 een door Kurz (Curtium) gemaakte Duitse vertaling verscheen[7].

Ook het feit dat hij in de jaren 1612 tot 1614, op verzoek van de Admiraliteit van Amsterdam, zitting nam in de commissie met onder andere P. Plancius, W.J. Blaeu en later nog aangevuld met S. Stevin, W. Snellius en J.P. Dou ter beoordeling van 'de generale regel' van Jarichs van der Ley[8], wijst op een reeds gevestigde reputatie.

Nog grotere eer viel Cardinael in 1617 ten deel bij zijn benoeming als professor in de Arithmetica aan Coster's Academie, zij het dat de vreugde maar van korte duur was. In 1618 werd deze leerstoel al weer opgeheven. Dit lag niet zozeer aan het onderwijs van Cardi-

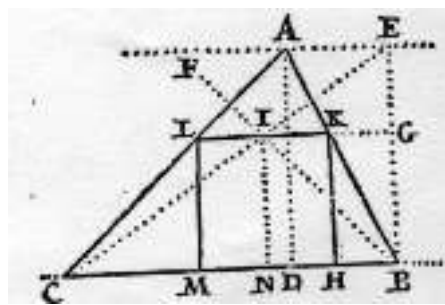
nael, want hij schijnt een groot publiek getrokken te hebben. Beslissend was het verzet van de gereformeerde predikanten, voor wie een doopsgezinde professor een doorn in het oog was.

Geruime tijd later, pas in 1635, verscheint opnieuw een boek van zijn hand: *Mathematische ofte Wisconstige bewijs-redenen, waer mede bewesen wordt, dat de Aerdcloot stil staet. En de Sonne daghelijcx en jaerlijcx sijnen loop doet; naer de leeringhe van Ptolemaeus. Teghens het ghevoelen van N. Copernicus, dat den Aerdcloot sijnen daghelijcschen en jaerlijcschen loop soude doen, en de Sonne stil staen in 't midden vande vaste Sterren-Hemel*.

Deze titel laat geen twijfel bestaan over de mening van Cardinael in het dispuut over het geocentrisch of heliocentrisch wereldbeeld. Zijn (ook in die tijd reeds) afwijkend standpunt is kennelijk belangwekkend genoeg om iemand als Descartes te bewegen (tussen 1635 en 1647) in verband hiermee een bezoek aan hem te brengen. We weten dit van D. Rembrandtsz. van Nierop[9], net zoals Cardinael doopsgezind wiskundige en sterrenkundige. Van Nierop schrijft over dit bezoek: "... heeft mij de heer Des Kartes self geseyt, als dat hij bij desen Syb. Hanssen gegaen was, om met hem van wegen dit Boeckjen te spreekken, maer hij sulcks niet van sinne wesende, gaf tot antwoordt, dat hij om seeckere oorsaecke alsoo gestelt hadde." Volgens Descartes houdt Cardinael de boot dus af en wordt hij door hem met enkele gemeenplaatsen afgescheept.

Ook zijn rekenboeken die vanaf 1639 met regelmatige tussenpozen verschijnen en tot ver na zijn dood vele heruitgaven beleven getuigen van zijn bekendheid en invloed als rekenmeester.

Maar zijn belangrijkste werk was de HGQ. Zo bestaat er een brief uit 1645 van J.J. Stampioen de Jonge[10] aan Christiaan Huygens. Sinds 1644 was Stampioen op verzoek van Constantijn Huygens wiskunde leraar van diens zoon Christiaan. In de brief staat de

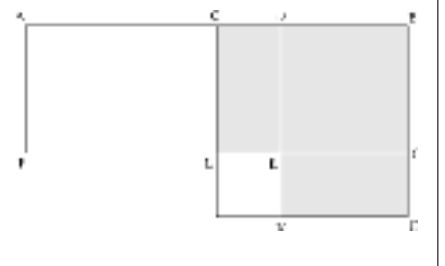


Figuur 2 Questie 89

Meetkundige identiteiten II

Elliptische aanpassing van oppervlak met een kwadratisch defect: AB wordt door C in gelijke delen verdeeld en door D in ongelijke delen. Dan geldt volgens *Elementen* boek II prop.5 de gelijkheid: $AD \cdot DB + CD^2 = CB^2$ waaruit de identiteit volgt: $CB^2 - CD^2 = AD \cdot DB$ of ook: $CB^2 - CD^2 = (CB + CD) \cdot (CB - CD)$. Hier is rechthoek $ADEF$ aangepast aan de gegeven AB met kwadratisch tekort DB^2 (*Elementen* boek II prop. 5). De meetkundige interpretatie van de identiteit is weer als een combinatie van een rotatie en translatie van rechthoek $DBHK$ tot rechthoek $ACLF$, dus van gnomon $CBHKL$ tot rechthoek $ADEF$. Zie kader IV voor de constructie van D indien:

$$\begin{cases} AD \cdot DB = q^2 \\ AD + DB = p \end{cases}$$



aanbeveling tot verdere studie in de wiskunde enige geometrische questien te maken "daer toe heel bequam zijn De hondert geometrische quaestien van meester Sibrant hanssen". Van Christiaan Huygens zijn inderdaad verschillende uitwerkingen uit 1645 van vraagstukken uit de HGQ bewaard gebleven[11]. Daaruit blijkt de dan zestienjarige Huygens reeds volledig vertrouwd met de algebra. Mogelijk was de moeilijke Questie 92 nog iets te hoog gegrepen want daarvan ontbreekt de oplossing. De drie andere Questien die Huygens gekozen heeft worden door hem vakkundig opgelost maar missen de charme van de soms verrassende oplossingen van Cardinael. Zo is Questie 48 een mooi voorbeeld van een hyperbolische aanpassing (zie kader III).

Het commentaar in de *Oeuvres complètes* bij Huygens' oplossing van Questie 89 (zie figuur 2), het beschrijven van een vierkant met maximale grootte binnen een driehoek noemt de meetkundige oplossing van Cardinael "minder simpel en minder elegant". Dat valt niet goed te begrijpen aangezien diens oplossing juist verrassend is in zijn eenvoud. Hij maakt daarbij gebruik, zoals zo vaak

Meetkundige identiteiten III

Hyperbolische aanpassing van oppervlak met een kwadratisch exces: AB wordt door C weer verdeeld in twee gelijke delen maar D ligt nu op het verlengde van AB . In dat geval geldt de gelijkheid

$$AD \cdot BD + CB^2 = CD^2.$$

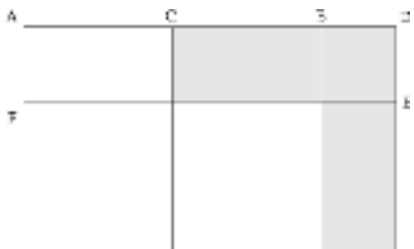
Deze identiteit is equivalent met

$$CD^2 - CB^2 = AD \cdot BD,$$

die weer equivalent is met

$$CD^2 - CB^2 = (CD + CB) \cdot (CD - CB).$$

De rechthoek $ADEF$ is aangepast aan AB met kwadratisch exces BD^2 hetgeen betekent dat de lichtgrijze rechthoek rechts onder bij E verplaatst is naar A en het gnomon getransformeerd is tot een rechthoek. (*Elementen* boek II prop. 6) Zie voor een toepassing hiervan de HGQ Questie 48.



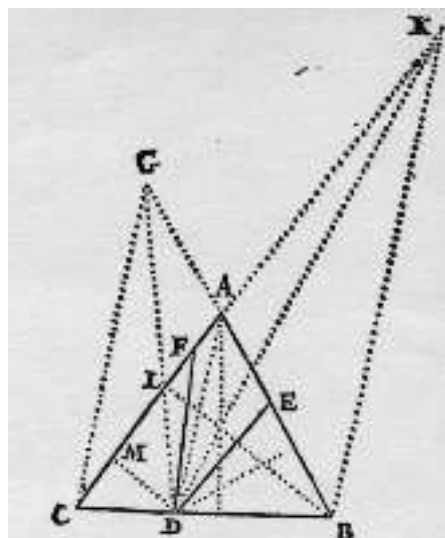
(zie ook Questie o), van de transformatie van figuren met behoud van hun oppervlakte. De oplossingsmethode ligt dan zo voor de hand dat reeds de aanschouwing van de bijbehorende tekening volstaat om de oplossing te begrijpen (zie figuur 2): eerst wordt driehoek ABC getransformeerd tot rechthoekige driehoek EBC , daarin wordt vierkant $GBNI$ geconstrueerd en de inverse transformatie daarvan geeft het gevraagde vierkant $KHML$. Ook Cardinael's oplossing van Questie 77 (verdeling van een driehoek in drie gelijke delen door middel van rechte lijnen getrokken vanuit een punt D gelegen op een zijde van de driehoek), eveneens met behulp van transformatie van figuren bij gelijkblijvende oppervlakte, spreekt veel meer tot de verbeelding dan de algebraïsche manier van Huygens, en wederom geldt: de tekening alleen maakt het reeds mogelijk de stappen van de constructie te volgen (zie figuur 3): door het trekken van de lijnen CG en BK evenwijdig aan DA ontstaan de beide driehoeken KDC en GBD met gelijke oppervlakte als driehoek ABC . De

gezochte lijnen zijn nu DF en DE met F en E zodanig dat CF en BE gelijk zijn aan een derde deel van respectievelijk CK en BG . De oplossing is bovendien eenvoudig te generaliseren tot een verdeling in een willekeurig aantal gelijke delen.

Ook na zijn dood blijft Cardinael nog geruime tijd de aandacht trekken. In 1915 bespreekt R.C. Archibald[12] een boek van Thomas Rudd[13] (1584–1656), bestaande uit twee delen, waarvan in de hoofdtitel aan het begin van het boek het tweede deel wordt aangekondigd als: "... The second containing A Hundred Geometrical Questions with their Solutions and Demonstrations, some of them being performed Arithmetically, and others geometrically, yet all without the help of Algebra. ... By Captaine Thomas Ruddy, ... London, 1650". Archibald toont aan dat 77 van de "Questions" die Rudd geeft woordelijk met oplossingen en al zijn overgenomen uit de HGQ van Cardinael zonder dat diens naam vermeld wordt.

Ook in de negentiende eeuw doet Cardinael van zich spreken: in 1868 komen we zeven van zijn vraagstukken tegen in een selectie van 144 Vraagstukken van Nederlandse wiskundigen der XVIIe de eeuw[14], temidden van vraagstukken van onder andere Van Ceulen, Dou, Anhaltin, Van Leeuwen, De Graaf, Gietermaker en Van Schooten.

Maar paradoxaal genoeg is de grootste erkenning die hij tenslotte krijgt er een die door slechts weinigen als zodanig herkend is: in een uitvoerig gedocumenteerd artikel uit 1928 van Kokomoor (University of Florida)[15] over het meetkunde-onderwijs in de zeventiende eeuw is het hierboven besproken meetkundeboek van Thomas Rudd uit 1650 opgenomen in de verzameling van de vijftig



Figuur 3 Questie 77

Meetkundige identiteiten IV

Het oplossen van een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden met behulp van oppervlakterekening, dat wil zeggen de oplossing wordt berekend en daadwerkelijk op zuiver meetkundige wijze geconstrueerd. Stel gegeven het stelsel

$$\text{stelsel } \begin{cases} AD \cdot DB = q^2 \\ AD + DB = p \end{cases}$$

dan wordt gevraagd naar de positie van punt D op AB . Door dit stelsel op te vatten als een elliptische aanpassing van oppervlakte aan AB met kwadratisch tekort DB^2 is een meetkundige oplossing direct voor handen. Uit de identiteit van kader II volgt: $AD \cdot DB = CB^2 - CD^2$. Indien we nu stellen: $DB = x$ en $AC = CB = \frac{1}{2}p$ dan is het stelsel

$$\begin{cases} AD \cdot DB = q^2 \\ AD \cdot DB = CB^2 - CD^2 \end{cases}$$

equivalent met

$$\begin{cases} x(p - x) = q^2 \\ x(p - x) = \left(\frac{1}{2}p\right)^2 - \left(\frac{1}{2}p - x\right)^2 \end{cases}$$



Met S zo gekozen dat $CS = q$ en met behulp van een cirkel met S als middelpunt en $\frac{1}{2}p$ als straal kan D op AB gevonden worden. Zie voor de toepassing hiervan de HGQ Questie 5: met

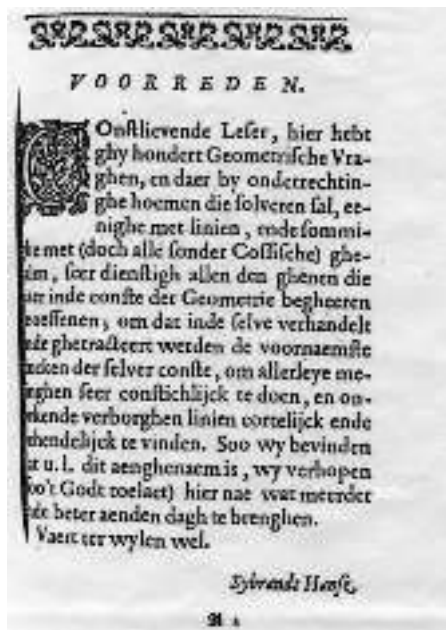
$$\begin{cases} CD + DA = 50 \\ CD \cdot DA = 576 \end{cases}$$

meest invloedrijke en gezichtsbepalende werken uit die tijd. In een vervolgartikel worden met name een aantal smaakmakende opgaven expliciet genoemd om een juiste indruk van deze stijl van meetkunde-onderwijs te geven. Het artikel van Archibald uit 1914 moet Kokomoor ontgaan zijn want anders zou toch zeker Cardinael's HGQ de plaats van Rudd's

Practical Geometry op zijn lijst van meest toonaangevende meetkundeboeken hebben ingenomen.

Enkele algemene kenmerken van de HGQ

De *Hondert Geometrische Questien* bestaat uit honderd uitgewerkte opgaven. Alle behalve de laatste hebben een meetkundig karakter. Hoewel ook zijn rekenboeken gezien de vele herdrukken, zelfs nog tot dertig jaar na zijn dood, tot de bestsellers van die tijd gerekend mogen worden, onderscheidde deze zich qua diepgang, keuze en behandeling van de stof nauwelijks van andere rekenboeken uit die periode. Voor de HGQ ligt dat anders. Behalve de *Hutspot der Geometrya*, een handschrift uit 1600 van J.P. Dou[16] en de *Wisconstighe gedachtenissen* van Simon Stevin uit 1605–08, zijn er nauwelijks boeken uit die tijd bekend die de vlakke meetkunde op een gevorderd niveau aanbieden.



Figuur 4 De inleiding van *Hondert Geometrische Questien*

Wat de HGQ tot een uniek boek maakt is de uitgebreidheid en tevens grote toegankelijkheid van het materiaal, de oorspronkelijkheid en elegantie van vele oplossingen en daarnaast de toepasbaarheid van het merendeel der “Questien”. Daar komt nog bij de speciale charme van menige oplossing als gevolg van Cardinael’s wens de Regel Coss (algebra) te vermijden (zie de afgebeelde voorrede bij de HGQ, figuur 4) hetgeen de meetkundige vindingrijkheid ten goede is gekomen en waardoor het boek ook een staalkaart is van de methoden die de oppervlakterekening te bieden heeft. Bij het honderdste vraagstuk gaat hij in zijn voorliefde voor de meetkunde wel

erg ver en keert hij de zaken om; een betrekkelijk eenvoudig arithmetisch vraagstuk wordt geforceerd meetkundig (maar wel ingenieus) opgelost. Met trots vermeldt hij: “Volgt noch een Arithmetische Questie, om dese hier mede te besluyten, die ick seer konstelijck sonder Cossische ghetalen maecke”.

Cardinael baseert zijn bewijzen in principe op de *Elementen* van Euclides en hij verwijst regelmatig naar proposities uit dat werk waarbij opvalt dat hij niet moe wordt te verwijzen naar *Elementen* boek I prop. 47 (Stelling van Pythagoras), maar regelmatig nalaat dit te doen met belangrijke toepassingen van minder bekende proposities uit de *Elementen*. De oppervlakterekening zoals Cardinael die toepast is duidelijk gebaseerd op Euclides’ *Elementen* boek II prop. 1–11. In plaats van de daarin beschreven identiteiten rechtstreeks te gebruiken geeft hij echter vaak zelf de afleiding van een persoonlijke variant. Omdat Cardinael geen letters gebruikt voor de bekende grootheden mist hij de mogelijkheid om met behulp daarvan algemeen geldende uitspraken af te leiden. Dat Cardinael zich hier tegen verzet heeft valt goed te begrijpen gezien zijn aversie tegen moderne methoden zoals de Regel Coss. Viète (1540–1603) was de eerste die deze letterssubstitutie in de plaats van concrete getallen toegepast heeft en Cardinael kon hiervan op de hoogte zijn geweest maar zijn behoudende instelling zou hem waarschijnlijk belet hebben van dit soort nieuwigheden gebruik te maken. De consequentie daarvan is dat al zijn oplossingen slechts geldigheid bezitten voor dat éne geval hoewel het algemene bereken- of bewijs-schema daaruit direct volgt. Een ander aspect is het optreden van een vermenigvuldigingsfactor. Dit is het gevolg van een verkapt toepassing van de Regula Falsi en de Regel Coss: de onbekende grootheid wordt voorlopig gelijk aan 1 of 2 gesteld waar wij tegenwoordig de letter x zouden gebruiken (zie Questie 68).

Oppervlakterekening

Cardinael moet veelvuldig gebruik maken van meetkundige technieken omdat hij consequent de algebra wil vermijden bij het oplossen van meetkundige vraagstukken. Dat lijkt in moderne ogen omslachtig en onnodig ingewikkeld maar vindt zijn oorzaak in de Griekse ontdekking van onmeetbare grootheden (in de tijd van Pythagoras). De meetkunde bleef over als enige betrouwbare basis voor wiskundige zekerheid. Lijnstukken waarvan bewezen kon worden dat hun lengte niet rationaal in een gekozen eenheid van lengte uit te drukken is (men kende slechts rationale getal-

len) konden namelijk meetkundig moeiteloos geconstrueerd worden (de hypotenusa van een gelijkbenige rechthoekige driehoek is het bekendste voorbeeld) en daarmee werd vanaf dat moment de meetkunde gezien als een betrouwbaarder grondslag dan de rekenkunde of de algebra. Vanaf de klassieke oudheid is zo de traditie ontstaan om de meetkunde te gebruiken als grondslag voor het geven van bewijzen en berekeningen (zie ook [17]).

Hoewel zich in de tijd van Cardinael in dat opzicht een ommekeer begon te voltrekken bleef de meetkundige traditie nog geruime tijd doorwerken en voelden zelfs ‘bekeerden’, die zonder enige reserve gebruik maakten van algebraïsche methoden, zich toch nog moreel verplicht hun op algebra gebaseerde bewijzen of berekeningen te rechtvaardigen door een zuiver meetkundige versie van de oplossing toe te voegen. Simon Stevin is hiervan een typisch voorbeeld. Zijn *Arithmétique* uit 1585 zit vol algebraïsche afleidingen die vervolgens, in onze ogen volkomen overbodig, meetkundig gerechtvaardigd worden.

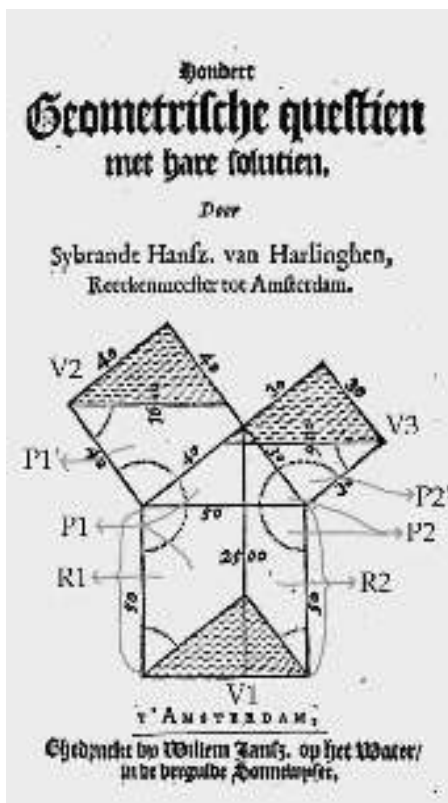
Analyse van de HGQ leidt tot de conclusie dat Cardinael een beperkte serie meetkundige identiteiten hanteerde waarmee de bedoelde transformaties mogelijk zijn. Vier daarvan zijn beschreven in de kaders *Meetkundige identiteiten*.

Enige Questien uit de editie 1614

De volgende selectie is gemaakt om een idee van de HGQ te geven. De oppervlakterekening krijgt er een plaats in en ook komen belangrijke thema’s als Koordenvierhoek, Stelling van Ptolemaeus en de Verdeling van de Driehoek aan de orde. De Questies 12 en 23 zijn opgenomen omdat het meten van onbereikbare punten behoort tot de klassieke problemen van de landmeetkunde en ook omdat Cardinael voor Questie 12 door het gebruik van de spiegel in C en de hulplijn EG wel een zeer originele oplossing heeft gevonden.

De Questie 0 komt in de HGQ niet voor, deze begint met Questie 1; maar de illustratie op de titelpagina (figuur 5) kan opgevat worden als het eerste probleem uit het werk. Het bewijs voor de Stelling van Pythagoras dat door de tekening uitgebeeld wordt was te mooi om niet ook (als Questie 0) hier op te nemen. De in figuur 5 aangebrachte pijlen dienen het commentaar.

We zullen de selectie Questien als volgt presenteren: eerst geven we een beschrijving van de Questie, waarbij de tekst van Cardinael zoveel mogelijk wordt gevolgd. Spelling, grammatica en notatie zijn aangepast aan het moderne taalgebruik, maar de tekeningen



Figuur 5 De Questie op het titelblad: questie 0

(behalve die bij het commentaar) zijn copieën uit het oorspronkelijk werk.

Daarnaast is door de auteur bij alle Questien commentaar toegevoegd om het werk van Cardinael te verduidelijken of in een groter verband te plaatsen (vaak is dat de relevante plaats in de *Elementen* van Euclides).

Questie 0: de Stelling van Pythagoras

Commentaar: gegeven een driehoek ABC met hoek C een rechte hoek (zie figuur 5). Op AB , BC en AC zijn beschreven de vierkanten $V1$, $V3$ en $V2$. Gevraagd te bewijzen: vierkant $V1$ = vierkant $V2$ + vierkant $V3$

Bewijs: $V1$ wordt gesplitst in de beide rechthoeken $R1$ en $R2$, dus $V1 = R1 + R2$ en vervolgens toont Cardinael aan dat $R1 = V2$ en dat $R2 = V3$ waarmee het bewijs geleverd is. Daartoe worden $R1$ en $R2$ eerst vervormd tot de beide parallelogrammen $P1$ en $P2$ waarvoor geldt: $R1 = P1$ en $R2 = P2$. Op hun beurt worden $P1$ en $P2$ gedraaid (over 90°) tot $P1'$ en $P2'$ zodat ook nu weer geldt: $P1 = P1'$ en $P2 = P2'$. Tot zover is het bewijs volledig symmetrisch ten opzichte van de rechthoekszijden AC en BC . Deze symmetrie gaat ogenschijnlijk verloren in de laatste stap waarbij aangetoond moet worden dat: $P1' = V2$ en $P2' = V3$. Vooral deze laatste stap is verrassend in zijn eenvoud en vindingrijkheid.

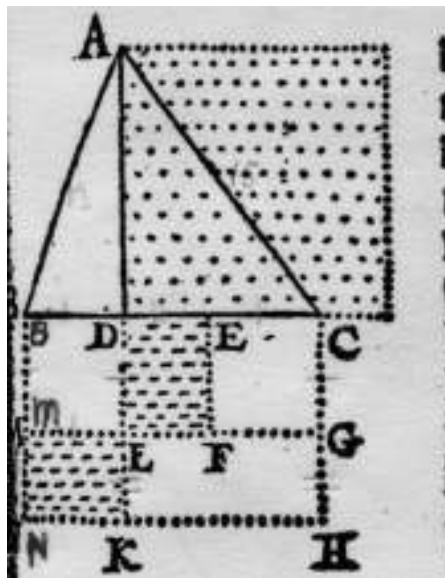
Beschrijving in woorden van het bewijs:

De rechthoeken $R1$ en $R2$ worden door middel van vervorming en draaiing over 90° in twee stappen naar boven geschoven met behoud van oppervlakte. In de derde en laatste stap wordt aan deze zo ontstane parallelogrammen aan de bovenkant de driehoek ABC vastgeplakt en aan de onderkant er afgehaald waardoor de vierkanten $V2$ en $V3$ ontstaan met dezelfde oppervlakte als $R1$ en $R2$.

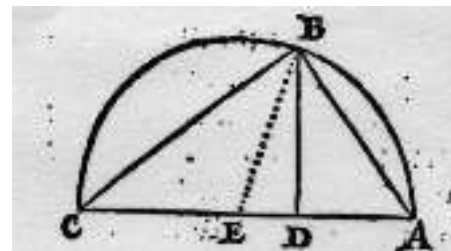
Questie 1: hoogtelijn in een driehoek

Gegeven: de driehoek ABC met $AB = 13$, $AC = 15$ en $BC = 14$ (zie figuur 6). Gevraagd: de lengte van de hoogtelijn AD . Berekening: Kies de punten E, M, L, F, G, N, K , en H zó dat $KHCD$ en $FGCE$ vierkanten zijn en $BD = EC$. Uit Pythagoras volgt: $AC^2 - AB^2 = 225 - 169 = 56 = DC^2 - BD^2$. Indien men nu deze beide laatste kwadraten opvat als de oppervlakten van vierkanten $KHCD$ en $FGCE$ dan volgt hieruit: dat gnomon $KHGFEDK$ oppervlakte 56 heeft, maar omdat ook $LFED = NKLM$ geldt: $NHGM = 56 = NH \times HG = 14 \times DE$, en dus $DE = 4$, waaruit volgt: $2 \times BD = 14 - 4 \Rightarrow BD = 5$. Pythagoras toegepast in $\triangle BDA$ geeft: $AD = 12$.

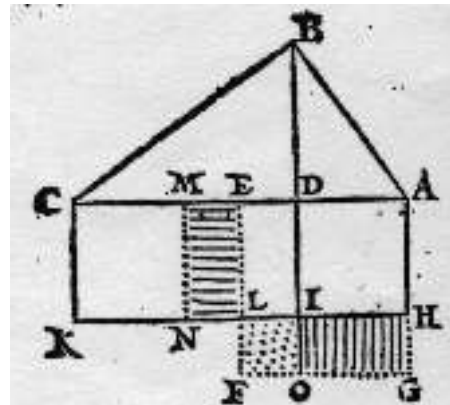
Commentaar: De berekening is karakteristiek voor de geometrische algebra (zie kader I): het verschil van twee kwadraten (meetkundig voorgesteld als vierkanten) geeft altijd een gnomon, hier de figuur $KHGFEDK$, en zo'n gnomon kan door verplaatsing van één van de beide samenstellende rechthoeken getransformeerd worden tot een rechthoek met dezelfde oppervlakte, hetgeen neerkomt op de meetkundige vertaling van de identiteit: $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$.



Figuur 6 Questie 1



Figuur 7 Questie 5: eerste methode



Figuur 8 Questie 5: tweede methode

Questie 5: het berekenen van stukken waarin bij een rechthoekige driehoek de basis verdeeld wordt door de hoogtelijn uit de top

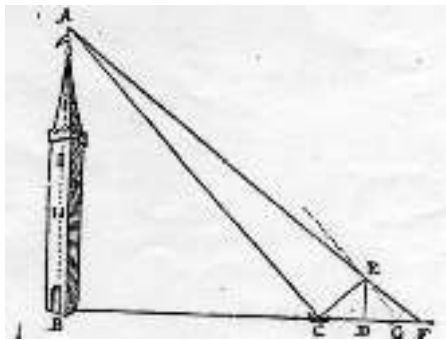
Van de rechthoekige driehoek BAC is gegeven dat hoek B recht is, basis $AC = 50$ en de hoogtelijn BD uit B op AC is 24 (zie figuur 7). Gevraagd: de stukken AD en DC .

Berekening, eerste manier: kies E als midden van AC , dan geldt: $BE = AE = CE = 25$. Met behulp van *Elementen*, boek I, propos. 47 in driehoek BED volgt dan $DE = 7$ en vervolgens $AD = 25 - 7 = 18$ en $DC = 25 + 7 = 32$.

Anders, tweede manier (zie figuur 8): in de rechthoekige driehoek ABC geldt: $DB^2 = AD \cdot DC \Leftrightarrow AD \cdot DC = 576$. Uit $AE = 25$ volgt: kwadraat $AEFG = 625$. Daarvan afgetrokken $DIK = 576$ geeft 49 voor kwadraat $ILFO$ omdat $HIOG$ gelijk gemaakt is aan $LEMN$ en dus de gnomon $AGOILEA$ gelijk is aan $DIK = 576$. Gevolg: $OF = DE = 7$ en dus $AD = 18$ en $DC = 32$.

Commentaar op eerste manier: Cardinael maakt gebruik van *Elementen* boek III proposities 22 en 31.

Commentaar op tweede manier: De geometrische algebra die hier gebruikt wordt komt neer op een elliptische aanpassing aan AC met kwadratisch defect AD^2 : lijnstuk AC wordt verdeeld in ongelijke delen AD en DC met $AC = 50$ en $AD \cdot DC = 576$. Volgens *Elementen* boek II propos. 5 geldt dan de identiteit: $AD \cdot DC + DE^2 = AE^2 \Leftrightarrow DE^2 = 49 \Leftrightarrow ED = 7$ waaruit AD en DC volgen. Cardinael



Figuur 9 Questie 12

heeft van deze identiteit niet zonder meer gebruik willen maken maar leidt deze eerst zelf af.

Questie 12: de hoogte van een toren

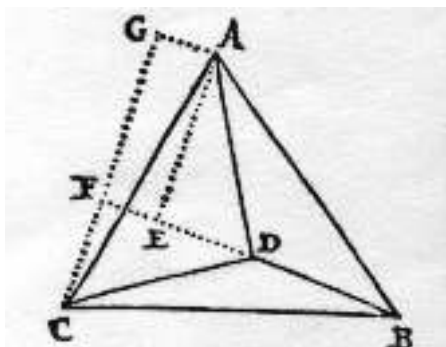
Gegeven: toren AB , spiegel in C , op verlengde van BC ligt D zodat $CD = 8$ en ligt F zodat $DF = 9$ (zie figuur 9). In D staat een verticale stok DE met hoogte 6 zodanig dat de top A van de toren in de spiegel gezien kan worden vanuit E . F is zo gelegen dat vanuit F de top A juist boven de stok DE in het verlengde van FE gezien kan worden. Te berekenen: de hoogte van de toren AB .

Berekening: kies punt G op DF zodanig dat $DG = DC = 8$. Nu geldt: $GF = 1$ geeft voor ED de hoogte 6, en: $FC = 17$ geeft voor AB hoogte 102. Dit is een gevolg van de gelijkvormigheid van de beide driehoeken FGE en FCA .

Commentaar: een zeer geraffineerde manier om de hoogte van een toren te meten indien om praktische redenen de voet van de toren niet bereikbaar is, terwijl er bovendien niet één enkele hoek gemeten hoeft te worden. Vooral de keuze van GE als hulplijn is een vondst.

Questie 23: driehoek met onbekende zijde

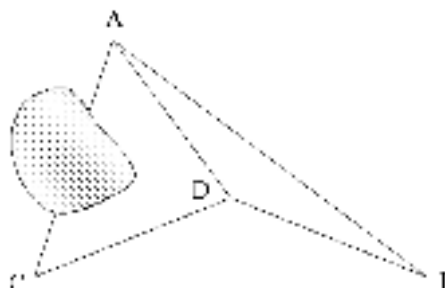
Gegeven: driehoek ABC met $AB = 14$, $BC = 15$ die opgedeeld is door de lijnen DA , DB en DC , zodat $DA = \sqrt{101\frac{1}{4}}$, $DB = \sqrt{45\frac{1}{4}}$ en



Figuur 10 Questie 23

$DC = 8\frac{1}{2}$ (zie figuur 10). Gevraagd: de lengte van AC .

Berekening: volgens Questie 2 kunnen BE en AE berekend worden met als resultaat: $BE = \sqrt{108\frac{52}{181}}$ en $AE = \sqrt{87\frac{129}{181}}$. Op dezelfde manier: $BF = \sqrt{216\frac{108}{181}}$ en $CF = \sqrt{8\frac{73}{181}}$. Telt men nu FG , die even groot is als AE , op bij FC dan volgt daaruit: $GC = \sqrt{150\frac{75}{181}}$. Verder geldt ook: $AG = EF = BF - BE = \sqrt{216\frac{108}{181}} - \sqrt{108\frac{52}{181}} = \sqrt{18\frac{106}{181}}$. In driehoek ACG volgt dan volgens Pythagoras: $AC = \sqrt{150\frac{75}{181} + 18\frac{106}{181}} = 13$.



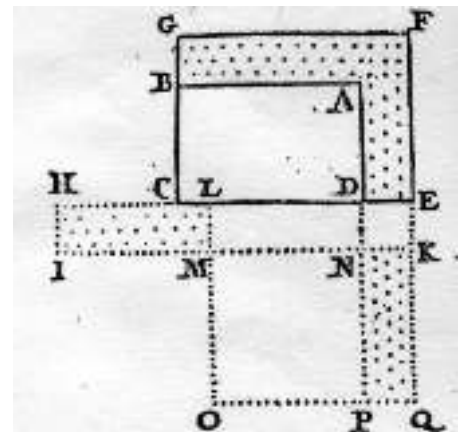
Figuur 11 Het meten van de afstand tussen twee punten als deze gescheiden zijn door een of ander obstakel

Commentaar: een bijzonder praktische toepassing hiervan in de landmeetkunde is het meten van de afstand van twee punten A en C indien deze gescheiden zijn door water of een of ander obstakel (zie figuur 11). Meting van AB , BC , AD , BD en CD maakt het mogelijk op eenvoudige wijze toch de afstand AC te kunnen bepalen. Opm.: Een slimme landmeter zou natuurlijk in een dergelijk geval punt D gekozen hebben op AB of op BC !

Questie 48: een tuin met een gracht van voorgeschreven oppervlakte

Gegeven: rechthoekig stuk land $ABCD$ met $BC = 10$ en $AB = 16$ (zie figuur 12). Gevraagd: indien de gracht $GFEDAB$ een oppervlakte moet hebben van 120, hoe groot moet $BG = DE$, de breedte van de gracht dan zijn indien EF parallel loopt met DA en FG parallel met AB .

Berekening: verleng DC met CH ter lengte AD zodat $DH = 26$ en stel bovendien $ED = EK$, het parallelogram $EHIK$ is dan gelijk aan de gracht $EDABGFE$ en dus is $EHIK$ gelijk aan 120. Verdeel nu $DHIN$ in twee gelijke delen door middel van de lijn LM , dan zijn LD en LH elk 13. Maak nu de rechthoek $KNPQ$ gelijk aan $LHIM$ dan is de gnomon $QPNMLDEKQ$ ook gelijk aan 120 en omdat QK gelijk is aan $LH = 13$ is het kwadraat $NPOM$ gelijk aan 169. Dit opgeteld bij 120 van de gnomon geeft 289 voor de grootte van het kwadraat $ELOQ$, waaruit voor de zijde EQ



Figuur 12 Questie 48

volgt $\sqrt{289} = 17$. Indien de zijde KQ daarvan wordt afgetrokken blijft over $EK = 17 - 13 = 4$ en dus ook $ED = BG = 4$.

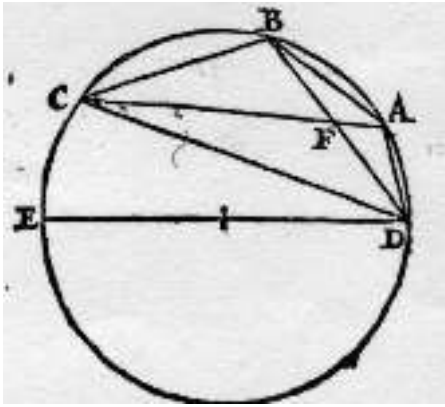
Commentaar: de oplossing van dit vraagstuk kan prachtig geformuleerd worden in termen van aanpassing van een rechthoek met voorgeschreven oppervlakte van 120 aan de zijde $HD = 10 + 16 = 26$, met kwadratisch exces gelijk aan $DEKN$. (dat wil zeggen een hyperbolische aanpassing aan HD) Indien L het midden is van HD dan geldt volgens *Elementen* boek II prop.6: $LE^2 - LD^2 = EHIK \Leftrightarrow LE^2 - LD^2 = 120 \Leftrightarrow LE^2 - 169 = 120 \Leftrightarrow LE^2 = 289 \Leftrightarrow LE = 17$. Gevolg: $DE = 17 - 13 = 4$

Deze opgave is bijna een schoolvoorbeeld voor het gebruik van hyperbolische oppervlakte aanpassing met een kwadratisch exces en toont goed de kracht van deze meetkundige methode.

Cardinael baseert zijn oplossing in essentie hier ook op maar maakt daarbij niet direct gebruik van de voor het grijpen liggende meetkundige identiteiten van *Elementen* boek II prop.6. In plaats hiervan werkt hij een eigen variant daarvan uit.

Questie 68: Gegeven een zijden koordenvierhoek; daaruit te berekenen de beide diagonalen en de diameter van de omschreven cirkel

Gegeven: van de koordenvierhoek $ABCD$ zijn bekend de zijden $AB = 25$, $BC = 33$, $DC = 60$ en $AD = 16$ (zie figuur 13). Gevraagd: de lengten der beide diagonalen AC en BD en ook de diameter van de omschreven cirkel. Oplossing: Uit Euclides boek III prop 21 volgt dat $DAC = DBC$ en ook dat $ADB = ACB$ en dus zijn de driehoeken AFD en BFC gelijkvormig. Gevolg: $FA : FD = FB : FC$ of ook: $FA : FB = FD : FC$. Daarom, als we stellen $FA = 1$, volgt daaruit $FB = 2\frac{1}{6}$, $FD = 2\frac{1}{16}$



Figuur 13 Questie 68

en $FC = 4$ zodat $AC = 5\frac{19}{20}$ en $BD = 4\frac{37}{80}$. Volgens de stelling van Ptolemeus is het product van deze diagonalen AC en BD moet nu gelijk aan de som der producten $AD \cdot BC$ en $AB \cdot DC$ van de overstaande zijden. Vanwege de aanname $AF = 1$ geldt nu echter dat: $AC \cdot BD = 5\frac{19}{20} \cdot 4\frac{37}{80} = 26\frac{883}{1600}$ en $AD \cdot BC + AB \cdot DC = 528 + 1500 = 2028$. De vermenigvuldigingsfactor waarmee AF en daarmee alle berekende lengten vermenigvuldigd moeten worden is daarom $\sqrt{\frac{2028}{26\frac{883}{1600}}} = \frac{1040}{119} = 8\frac{88}{119}$ en dus geldt: $AF = 8\frac{88}{119}$ waaruit tevens volgt: de diagonaal AC is 52 en de diagonaal $DB = 39$.

Met de diagonalen bekend geldt nu bijvoorbeeld in driehoek ABC : $AB = 25$, $BC = 33$ en $AC = 52$. Met behulp van Questie 65 volgt daaruit: $DE = 65$.

Deze diagonalen kunnen ook berekend worden met behulp van de Questies 33 en 34 alwaar in een driehoek ABC waarvan de zijden AB en BC bekend zijn evenals de verhouding van BF tot de stukken AF en FC waarin F de zijde AC verdeelt, de lengte van AC en vervolgens de lengten van AF en FC gevonden werden. Als AC bekend is volgt daaruit met behulp van Questie 65 de lengte van de diameter DE van de omgeschreven cirkel en vervolgens kan dan ook de diagonaal DB berekend worden evenals de stukken DF en FB .

Commentaar: door $FA = 1$ te stellen berekent Cardinael met gebruikmaking van de gelijkvormigheid van de driehoeken AFD en BFC en ook van de driehoeken BFA en CFD de lengten van de diagonalen AC en BD . Met behulp van de Stelling van Ptolemeus wordt dan de vermenigvuldigingsfactor berekend.

Indien op deze wijze AC en BD berekend zijn kan de straal van de omgeschreven cirkel berekend worden met behulp van Questie 65 die het verband geeft tussen de zijden van een driehoek en de straal van zijn om-

geschreven cirkel.

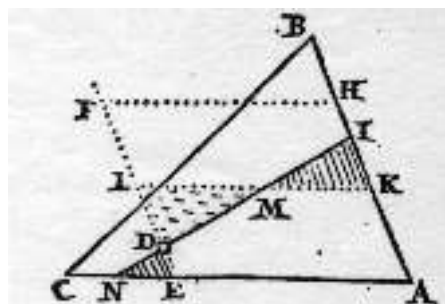
In het bewijs geeft Cardinael ook nog een alternatief voor het gebruik van de Stelling van Ptolemeus.

De Stelling van Ptolemeus wordt door Cardinael tenslotte ook nog eens volledig bewezen[18]. Het bewijs van deze stelling is in de meer eigentijdse literatuur te vinden in het mooie *Leerboek der vlakke meetkunde* van P. Molenbroek[19].

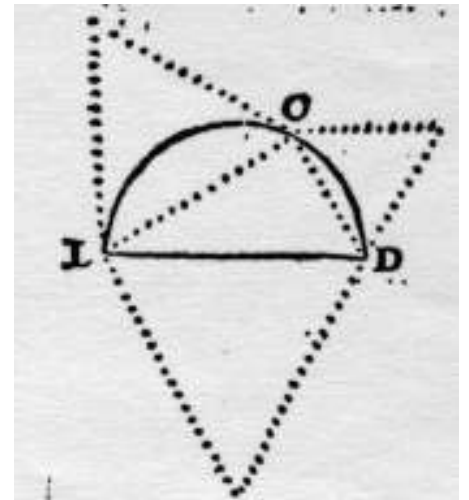
Questie 92: het verdelen van een driehoek in twee gelijke delen vanuit een punt binnen de driehoek

Gegeven: een driehoek ABC met ongelijke zijden en hoeken en met daarbinnen een punt D waardoor men een lijn wenst te trekken die de driehoek ABC in twee gelijke delen verdeelt (zie figuur 14). Gevraagd: hoe zal men dit geometrisch doen? Oplossing: trek eerst een lijn ED door D evenwijdig aan AB (figuur 14). Maak vervolgens het parallellogram $HAEF$ met de zelfde oppervlakte als driehoek ABC (zie commentaar). Neem de helft eraf, dan blijft over het parallellogram $KLEA$. Trek nu een lijn door D zó dat deze van de vierhoek $KLEA$ de driehoek MDL afsnijdt die even groot is als de beide driehoeken KMI en DEN samen. Dan is de driehoek IAN gelijk aan de vierhoek $KLEA$, dus ook gelijk aan de helft van de gegeven driehoek ABC en is IN de gezochte lijn die de driehoek in twee gelijke delen verdeelt.

Om de lijn NI te kunnen trekken maken we een halve cirkel met DL als middellijn (figuur 15) en trek vanuit het ene einde D de lijn DO net zo groot als DE (in figuur 14) met O op de halve cirkel en verbind O met L . Maak nu in figuur 14 KI gelijk aan OL en trek de lijn ID door tot hij AC snijdt in N . De lijn IN is de gezochte lijn want omdat de driehoeken IKM , MLD en DEN alle gelijkvormig zijn en beschreven kunnen worden op de zijden van de rechthoekige driehoek DOL (zie figuur 15) is ook: driehoek MDL = driehoek IKM + driehoek DEN (dit volgt direct uit Euclides boek VI, prop.31,



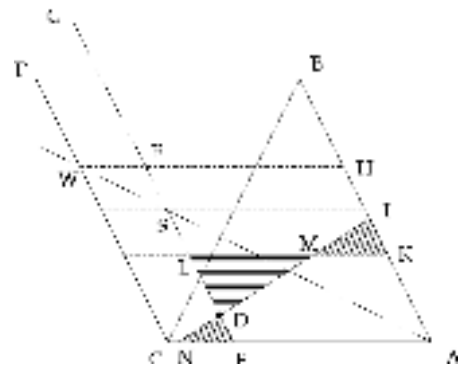
Figuur 14 Questie 92



Figuur 15 Bij het bewijs van Questie 92

een generalisatie en echte uitbreiding van de Stelling van Pythagoras).

Commentaar: om het parallellogram $HAEF$ te construeren kan men als volgt te werk gaan (figuur 16): eerst wordt parallellogram $BACP$ gemaakt dat gelijk is aan tweemaal driehoek ABC . Vervolgens wordt $BAPC$ met de lijn TU in twee gelijke delen verdeeld en de lijn EG getrokken evenwijdig aan AB . Vierhoek $UACT$ is dus gelijk aan driehoek ABC . EG en TU snijden elkaar in S . Het verlengde van AS snijdt CP in W . Trek WH evenwijdig aan CA en noem snijpunt van WH met EG punt F .



Figuur 16 Bij het commentaar op Questie 92

In parallellogram $HACW$ geldt (*Elementen* boek I prop. 43): vierhoek $SECT$ = vierhoek $HUSE$, waaruit volgt: vierhoek $UACT$ = vierhoek $HAEF$ en daarmee is dus het parallellogram $HAEF$ geconstrueerd met dezelfde oppervlakte als driehoek ABC .

Van Schooten jr. geeft in zijn boek [20] de constructie van een lijn die een driehoek volgens een voorgeschreven verhouding verdeelt zowel voor het geval dat het punt binnen als het geval dat het buiten de driehoek ligt. Daarbij gebruikt hij in beide gevallen in

wezen de methode van Cardinael maar voor de sleutelidee tot deze constructie verwijst hij daarbij naar Pappus van Alexandrië (ong. 330) die in zijn *Collectionum Mathematicarum*, 7e boek voorstel 164, ook van *Elementen* boek VI prop.31 gebruik maakt voor een constructie analoog aan de onderhavige in figuur 15, dat wil zeggen de constructie van *OL* in figuur 15 om daarna *KI* in figuur 14 daaraan gelijk te maken en te concluderen dat *ID* de gevraagde lijn is. In dit verband zou het interessant zijn om te weten of Cardinael van deze verhandeling in de *Collectionum* van Pappus op de hoogte was temeer omdat hij in *Questie o* (Stelling van Pythagoras) een bewijs geeft dat gebruik maakt van transformaties van rechthoeken en parallellogrammen op een manier die doet denken aan de methode die Pappus gebruikt bij zijn bewijs van een variant op de Stelling van Pythagoras (Heath 1956, vol.1, p. 366). Hoe het ook zij, op zijn minst komt Cardinael de eer toe deze verrassende toepassing van *Elementen*, boek VI prop.31, als eerste aan de vergetelheid te hebben ontrukkt. In zijn *Questien* besteedt Cardinael veel aandacht aan dit soort verdelingsproblemen: nummer 77 gaat eveneens over de driehoek,

maar de nummers 79 t/m 86, 90, 91 en 93 t/m 95 betreffen veelhoeken (meestal vierhoeken).

Het probleem der verdeling van een polygoon, in het bijzonder een driehoek, in twee delen volgens voorgeschreven verhouding door middel van een lijn (transversaal) getrokken vanuit een punt binnen of buiten dat polygoon gelegen, vormde in Cardinael's tijd een geliefd onderwerp van het meetkunde curriculum en dankte zijn populariteit ongetwijfeld aan de hoge vlucht die de landmeetkunde in die tijd genomen had.

Ook directe voorgangers van Cardinael zoals Simon Stevin, Christoph Clavius en Ludolf van Ceulen hebben zich uitvoerig met deze problematiek beziggehouden. Daarbij beroept Clavius zich expliciet op het voorbereidend werk dat door Stevin verricht is[21] en ook Van Ceulen heeft hierover met Stevin in 1582 gecorrespondeerd[22]. Bij die gelegenheid erkent Stevin deze belangrijke problemen niet naar bevrediging te kunnen oplossen. Nadat hij vanaf 1585 kennis heeft genomen van het werk op dit terrein door Nicolas Tartaglia en diens leerling Joannes Baptista Benedictus is hij in staat een al-

gemene theorie over verdelingsvraagstukken van polygonen af te ronden. Publicatie vind pas plaats in de *Wisconstige gedachtenissen 1605–1608*[23]. De aanschouwelijke en zuiver meetkundige oplossing van Cardinael uit 1614 voor het geval van de driehoek is door zijn eenvoud en elegantie echter superieur aan de enigszins gekunstelde (en niet zuiver meetkundige) oplossing van Stevin. Daar staat tegenover dat Stevin in tegenstelling tot Cardinael aandacht geeft aan de vraag welke zijden de gezochte lijn door *D* snijdt. Interessant is overigens ook de vraag naar het aantal oplossingen: als *D* bijvoorbeeld samenvalt met het zwaartepunt van de driehoek dan zijn er drie oplossingen, maar als *D* 'dichtbij' een hoekpunt ligt is er slechts één oplossing! $\Leftarrow$

Nawoord

Het onderhavige onderzoek naar Cardinael vindt plaats in het kader van het NWO-programma 'Leraar in Onderzoek'. Een apart artikel, meer biografisch van karakter, zal verschijnen in *Gewina*[24]. Bij het tot stand komen van dit artikel is gebruik gemaakt van de commentaren op eerdere versies door J.A. van Maanen[25] en E.M. de Jager[26].

Referenties

- 1 G.A. Vorsterman van Oijen, *Honderd vier en veertig vraagstukken van Nederlandsche wiskundigen der XVII de eeuw*, S.E. van Nooten Schoonhoven 1868.
- 2 D. Bierens de Haan, *Bouwstoffen voor de geschiedenis der Wis- en Natuurkundige Wetenschappen in Nederland*, Overdruk uit de Verslagen der Kon. Akademie van Wetenschappen Afd. Natuurkunde 2e Reeks en 3e Reeks, Amsterdam 1878, 1887.
- 3 C.P. Burger, 'Amsterdamsche rekenmeesters en zeevaartkundigen in de zestiende eeuw', A'dam: Van Langenhuisen. 1908. Overdr. Uit: *De Amsterdamsche boekdrukkers en uitgevers*, dl. III.
- 4 H.F. Wijnman, 'De Amsterdamsche Rekenmeester Sybrandt Hansz Cardinael' in: *Het Boek*, Nieuwe Reeks 22 (1933/4), pp.73–94, en artikel in het NNBW.
- 5 C. L. Thijssen-Schoute, *Nederlands Cartesianisme*, HES Uitgevers, Utrecht 1954; C.L. Thijssen-Schoute, *Uit de republiek der letteren* M.Nijhoff, 's Gravenhage 1967
- 6 J.A. van Maanen, *Facts of seventeenth century mathematics in the Netherlands*, proefschrift Utrecht 1987
- 7 Tractatus geometricus. Darinen hundred schöne ausserlesene liebliche Kunst Quaestiones, Durch welche allerley Longi: Plani: und Solidimetrische Messung seher künstlich zu thun und zu verrichten seind mit beygefüegten auflosungen ausserhalb der Coss oder Algebrae, Vonn Herrn Sybrand Hansz Rechenmaister zu Ambsterdam Niederländisch beschrieben. Jetzt aber ... aus gemelter Niederländischen sprach in Hochdeutsch Transferiert, Durch Sebastianum Curtium, Arithmeticum, Geometram, Burgern und verordneten Visitatoren der Teutschen Schulen in Nurnberg. Gedruckt zu Ambsterdam bey Wilhelm Jansz in dem vergülten Sonnenweyser. Anno 1617. Amsterdam W.J. Blaeu, 1617
- 8 C.A. Davids, *Zeewezzen en wetenschap*, De wetenschap en de ontwikkeling van de navigatie-techniek in Nederland tussen 1585 en 1815, De Bataafse Leeuw, Amsterdam 1985, pp.285 e.v.
- 9 D.R. van Nierop, *Bijvoeghsel op des aertrijs beweging en sonne-stilstant*, Amsterdam 1677.
- 10 Ch. Huygens, *Oeuvres completes*, vol.I, correspondance 1645 n05 (Lisse 1967–77) 5–10.
- 11 Ibid., vol.XI, 1645 23–27. Het betreft de questien 48, 77, 89 en 92.
- 12 R.G. Archibald, 'Thomas Rudd and Sybrandt Cardinael's "Hondert geometrische Questien"', *Nieuw Archief voor Wiskunde*, Tweede Reeks, deel XI, 1915 pp.191–95.
- 13 Thomas Rudd, *Practical Geometry*, London 1650; Euclides *Elements of Geometry* London, 1651.
- 14 Vorsterman van Oijen 1868 (n.1)
- 15 F.W. Kokomoor, 'The Teaching of Elementary Geometry in the seventeenth century', In: *ISIS*, Vol.X, 1928, pp. 21–32 en pp.367–415 (i.h.b.pp.413, 414), Vol XI 1928 pp.85–110
- 16 'Dold-Samplonius', *Janus, Revue internationale de l'histoire des sciences*, etc., 1968 LV, 4 p. 261.
- 17 A.W. Grootendorst en A.J. van Zanten, *Caleidoscoop van de wiskunde*, Delftse Universitaire Pers Delft 1995
- 18 T.L. Heath, *Euclid, the thirteen books of the elements*, Dover Publications New York 1956 Vol.2 p. 225 prop.D.
- 19 P. Molenbroek, *Leerboek der vlakke meetkunde*, negende druk, Noordhoff, Groningen 1943, pp.282 en 366.
- 20 J. van Schooten, *Mathematische oefeningen*, begrepen in 5 boecken, t'Amsterdam 1659–1660, p. 105–108
- 21 *Nieuw Archief voor Wiskunde* (2) 5 (1902) pp.106–191 en ook: H.J.M. Bos: 'Descartes en het Begin van de Analytische Meetkunde', *Vacantie cursus 1989*, Wiskunde in de Gouden Eeuw, pp.79–98.
- 22 L. van Ceulen, *De arithmetische en geometrische fondamenten*, Leyden 1615, p.211.
- 23 S. Stevin, *Wisconstige gedachtenissen*, Leyden, uitg. J. Bouwensz., 1605–1608, p.144.
- 24 *Gewina*, Tijdschrift voor de Geschiedenis der Geneeskunde, Natuurwetenschappen, Wiskunde en Techniek.
- 25 Universitair hoofddocent wiskundendidactiek aan de Rijksuniversiteit Groningen.
- 26 Emeritus hoogleraar wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam.

Ankie de Jongh-Vermeulen

Kortegracht 11

3811 KG Amersfoort

info@mondriaanhuis.nl

Bij de bomen van Pythagoras

Van begin september tot eind november vond in het Mondriaanhuis, Museum voor Constructieve en Concrete Kunst te Amersfoort, de expositie 'De bomen van Pythagoras — Geconstrueerde groei' plaats, gewijd aan op wiskunde gebaseerde kunstwerken. Ook is in het kader van deze tentoonstelling een internationaal symposium gehouden over het thema 'Concrete kunst en mathematiek'. Hier sprak onder andere Semir Zeki (University College London) over Mondriaan en de wiskunde van de hersenen. De tentoonstelling vond plaats in samenwerking met de stichting Ars et Mathesis. Ankie de Jongh-Vermeulen, directeur van het Mondriaanhuis, schreef bij de tentoonstelling de onderstaande inleiding.

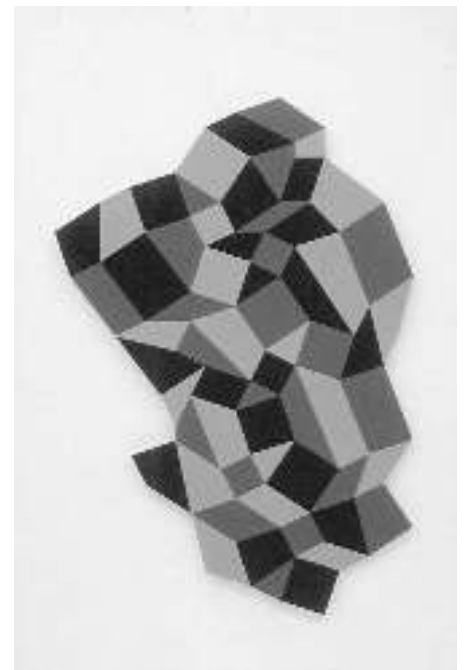
Wiskunde heeft altijd veel invloed gehad op de kunsten in het algemeen en op de schilderen beeldhouwkunst in het bijzonder. Als oudste voorbeelden van gebruik van wiskunde kunnen we waarschijnlijk de piramiden van Egypte noemen. En de oude Grieken hadden al een uitvoerige, op de rekenkunde gebaseerde muziektheorie. In de loop van de geschiedenis ontwikkelde de wiskunde zich tot wetenschap, die als geleerd hulpmiddel werd gebruikt bij de opbouw van een compositie, bijvoorbeeld van het perspectief. Vanaf de twintigste eeuw kreeg wiskunde een sleutelrol in de moderne technologische maatschappij. In de beeldende kunst liep dit parallel met het ontstaan van de abstracte kunst. Het loslaten van de zichtbare werkelijkheid als onderwerp voor een schilderij of sculptuur, leidde vooral bij de geometrisch-abstracte kunst

vanaf de jaren twintig van de vorige eeuw tot een sterk toenemende belangstelling voor het toepassen van vormen die tot dan toe tot het werkterrein van wiskundigen hadden behoord. Bij de kunstenaars die heel expliciet wiskundige principes toepasten, liepen de methoden en de beweegredenen daarvoor vaak ver uiteen. Een kunstenaar die dat juist niet deed, zoals Mondriaan, voelde zich toch gedwongen zijn houding tegenover de wiskunde aan te geven.

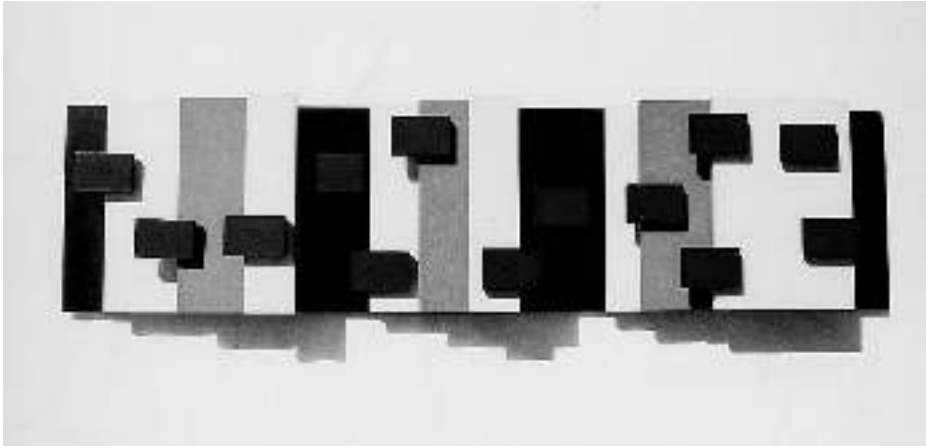
Piet Mondriaan (1872–1944), samen met de Rus Kasimir Malevich (1878–1935) grondlegger van de geometrisch-abstracte kunst, keurde de wiskundige berekening af en bleef altijd de voorkeur geven aan intuïtie als creatief scheppende kracht. Volgens Mondriaans mede door de theosofie gevormde ideeën over een geestelijke evolutie, was intuïtie met een hoger geestelijk plan verbonden dan het verstand. Ordeningssystemen vond hij goed voor de zogenaamde 'gebonden' kunsten, de architectuur en kunstnijverheid, maar niet voor de 'vrije' schilderkunst. In zijn schilderkunst 'vernietigde' hij de zichtbare werkelijkheid, de grillige natuur, om een objectief universeel beeld van een harmonische, evenwichtige werkelijkheid ervoor in de plaats te stellen. Langs esthetische weg wilde hij de wereld veranderen. Kunst en leven waren bij Mondriaan en de andere kunstenaars van het tijdschrift *De Stijl* nauw met elkaar verbonden, hoewel daar nooit politieke consequenties aan verbonden werden zoals bij de Russische constructivisten. Maar allen geloofden in een nieuwe wereld waarin de individuele uitdrukking vervangen zou worden door een

universele beeldtaal, een taal van geometrische vormen en grote zuiverheid, een grensoverschrijdende internationale kunst. En het is juist deze geometrisch-abstracte beeldtaal die zich uitstekend leent voor het toepassen van wiskundige regels.

Mondriaans idee dat intuïtie de hoogste scheppende kracht was, werd in de jaren twintig al niet meer gedeeld door zijn kunstbroeders van *De Stijl*, Georges Vantongerloo (1886–1965) en Theo van Doesburg (1883–1931). Vantongerloo baseerde zijn werken op specifieke geometrische figuren en gaf ze een



Figuur 1 Terra Ercolana, Nathan Cohen



Figuur 2 Reliëfconstructie, Joost Baljieu

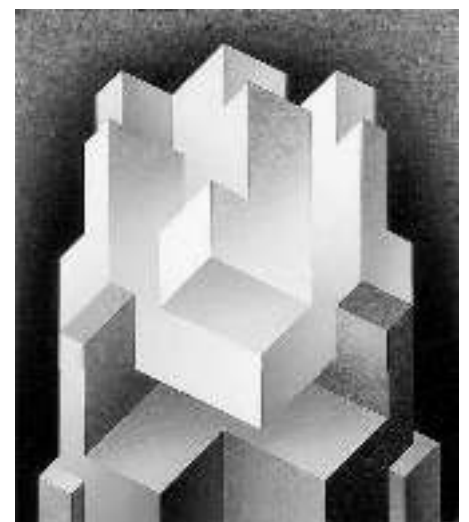
algebraïsche formule mee als titel, hoewel gezegd moet worden dat het verband tussen deze formule en het kunstwerk niet altijd duidelijk is. Ook trachtte hij een kleurensysteem op te zetten. In 1926 onderwierp hij in het Franse tijdschrift *Vouloir* zelfs twee van Mondriaans neoplasticistische werken aan een wiskundige analyse, iets wat Mondriaan zelf zeer twijfelachtig vond. Van Doesburg zou in 1930 de intuïtie geheel uitbannen en zijn kunst op eenvoudige rekenkundige regels baseren. In het door hem en enkele andere kunstenaars ondertekende manifest 'Base de la peinture concrète' in *Art Concret* staat te lezen dat een concreet werk volledig uitgedacht moest zijn 'in de geest' voordat het uitgevoerd werd en dat het uit eenvoudige, zuiver beeldende en controleerbare geometrische elementen moest worden opgebouwd. Een concreet kunstwerk had geen andere betekenis dan zichzelf. Het begrip 'abstract' werd hier voor het eerst afgezet tegen het nieuwe begrip 'concreet'. Abstract had nog te maken met een zekere gevoelsmatigheid, intuïtie en het abstraheren van de zichtbare werkelijkheid, aldus Van Doesburg, maar concreet had daar niets meer mee te maken. Het metafysisch denken, dat zo sterk aanwezig was bij Malevich en Mondriaan, begint hier zijn belang te verliezen. Van Doesburg had in zijn *Aritmetische compositie*, uit hetzelfde jaar 1930, met behulp van een eenvoudig getallensysteem binnen een raster van kwadraten een systematisch groter wordend vierkant geconstrueerd. Het idee om vanuit een basisprincipe systematische structuren te laten ontstaan met behulp van eenvoudige getallenreeksen zou grote invloed hebben.

Enkele kunstenaars in Zürich, van wie Max Bill (1902–1999) en Richard Lohse (1902–1988) de invloedrijkste zouden worden, hebben de definities van Van Doesburg

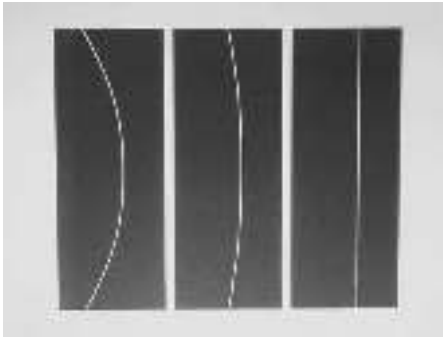
verder ontwikkeld en een relatie tussen concrete kunst en wiskundige denkprocessen en systematiek gelegd. Zeer belangrijk werd Bills essay uit 1949: *Die mathematische Denkweise in der Kunst unserer Zeit*. Hij vat een kunstwerk op als de zichtbare uitkomst van een probleemstelling die voortkomt uit een logisch denkproces met wetenschappelijke, meestal wiskundige uitgangspunten. Deze kunst heeft niets meer met de natuur te maken, zij behoudt haar relatie tot de werkelijkheid slechts door aansluiting bij de filosofie, wetenschap en techniek. "Concrete kunst is in zijn uiterste consequentie de zuivere uitdrukking van harmonische maten en wetten. Ze ordent systemen en geeft met artistieke middelen leven aan deze ordening", aldus Max Bill. De structuur in zijn werken is altijd van tevoren geheel bepaald en wordt zorgvuldig volgens plan uitgewerkt. Toch zijn er ook de intuïtieve, subjectieve keuzes die de kunstenaar moet maken bij het bepalen van zijn uitgangspunten en tijdens het ontstaansproces. In het werk van Richard Lohse wordt de ordening van vormen en kleuren volledig wetmatig bepaald volgens systemen die beschreven kunnen worden in wiskundige terminologie: regelmatig verkleinen, vergroten, herhalen, spiegelen, roteren, enzovoort. Maar de keuze van het ordeningssysteem blijft persoonlijk en de keuze van de kleuren gevoelsmatig. Bill en Lohse hebben de grondslag gelegd voor de richting die later seriële of systematische kunst is genoemd. De seriële of systematische werkmethode is nog steeds in vele variaties bij een groot aantal eigentijdse kunstenaars terug te vinden. Deze kunstrichting kreeg een nieuwe impuls door het gebruik van de computer.

Begin jaren dertig begonnen twee 'adepten' van Mondriaans neoplasticistische beeldtaal hun composities in verhouding te brengen met behulp van wiskundige methoden

of getallenschema's: de Fransman Jean Gouin (1899–1981) en de Engelse kunstenares Marlow Moss (1890–1958). In hun schilderijen, reliëfs en sculpturen worden zowel de verworvenheden van Mondriaan, als ook die van Vantongerloo en die van Van Doesburg verwerkt. Naast een groot vertrouwen in het rationele vermogen van de mens, in de wetenschap en techniek, speelde bij hen ook de Pythagoreïsche leer een rol. Belangstelling voor de Pythagoreïsche leer had rond 1900 een soort opleving gekend in occulte en mystieke kringen van theosofen en vrijmetselaars. Dat hierbij aan Pythagoras en zijn leerlingen ideeën werden toegeschreven die deze naar alle waarschijnlijkheid zelf niet hebben gekend, is voor de invloed ervan niet relevant. Een moderne en meer op de wetenschap gerichte interpretatie van de Pythagoreïsche leer werd rond 1930 in Parijse kunstkringen gestimuleerd door de uitgaven van twee boeken van Matila Ghyka: *Esthétique des proportions dans la Nature et dans les Arts* (uitgekomen in 1927) en *Le Nombre d'Or. Rites et rythmes pythagoriens dans le développement de la civilisation occidentale* (1931). Eén van de bronnen, die hij gebruikte voor zijn boeken, was *On Growth and Form* van D'Arcy Thompson, dat ook nu nog door hedendaagse concrete kunstenaars als inspiratiebron wordt genoemd. Volgens Ghyka waren in de Pythagoreïsche leer tien geometrische en tien arithmetische getallenreeksen te vinden, die de creatieve krachten in de natuur vormen en die terug te vinden zijn in het groeien van planten en bomen. Ghyka beschreef hoe wetenschappers en kunstenaars zich hadden gebaseerd op een Pythagoreïsch-Platoons schoonheidsideaal en maakte door middel van vele afbeeldingen en diagrammen vergelijkingen tussen



Figuur 3 Beautiful Building for a Big Belgian City, Jos de Mey



Figuur 4 Progression mit 3 Radien, Hellmut Bruch

bepaalde maatverhoudingen die men in de natuur en bij de mens tegenkomt evenals in de architectuur en beeldende kunst. Een kunstenaar die deze verhoudingen in zijn werk toepast, zou een schepping maken die de ordening in de kosmos weerspiegelt.

De behoefte om het verloren evenwicht tussen mens en natuur en tussen kunst en natuur te herstellen, was belangrijk voor Joost Baljeu (1925–1991) en vele concrete kunstenaars die publiceerden in het tijdschrift *Structure*, dat van 1958 tot 1964 werd uitgebracht. Baljeu streefde ernaar in zijn werk een structureel groeiproces uit te drukken dat parallel loopt met dat van de natuur, waarbij hem een synthese van kunst en natuur voor ogen stond. Natuurvormen zouden worden voortgebracht door middel van een proces van op elkaar inwerkende krachten. Baljeu vond dan ook dat de kunstenaar zich dus niet moest toeleggen op de uiterlijke kenmerken van een vorm maar op de groeiprocessen die eraan ten grondslag liggen. Organische groeiprocessen kon men vooral door middel van wiskundige formules uitdrukken. Baljeu en de andere kunstenaars van *Structure* geloofden dat zij door hun werkproces parallel te laten lopen aan het groeiproces in de natuur, de komst van een nieuwe harmonieuze wereld konden bevorderen. Baljeu achtte de menselijke geest niet superieur aan de materiële

werkelijkheid. Bij Mondriaan vond hij wat dit betreft een te wisselvallige houding ten opzichte van de natuur en hij greep daarom terug op de Franse kubist Albert Gleizes en later op de ideeën over tijd-ruimte en de vierde dimensie van Van Doesburg om het dynamische karakter van de natuur uit te drukken. Ruimtelijke constructies als het reliëf en het vrijstaande beeld zouden een steeds grotere rol bij hem gaan spelen omdat in hen de verwantschap met het dynamische groeiproces in de natuur beter tot uitdrukking komt dan op het platte vlak van een schilderij.

De kunstenaar Ad Dekkers (1938–1974) had een grote affiniteit met Mondriaan, zowel met diens kunst als met de rol die Mondriaan zijn kunst gaf in het leven. Mondriaans uitspraak: “de kunst — hoewel doel op zichzelf — is, evenzeer als religie, weer het middel waardoor het universele gekend, dat is, in de beelding, aanschouwd wordt”, sprak hem zeer aan. Kunst als model voor een harmonisch leven. Mondriaans schilderkunst was zijn uitgangspunt maar tegelijk ook zijn uitdaging. Hij nam zeer veel van Mondriaan over maar onderscheidde zich op die punten waar hij diens dogma’s niet terecht vond. Zo weersprak hij Mondriaans visie op het primaat van de intuïtie en liet hij zich in zijn werk leiden door wetmatigheden als een systematische deling, een regelmatige verkleining of verschuiving en de overgang van de ene geometrische figuur in de andere. Ook gebruikte hij cirkels en driehoeken naast rechthoeken en vierkanten en negeerde daarmee Mondriaans verbod op de gebogen lijn. Net als veel van zijn tijdgenoten zou hij overgaan op reliëfs en driedimensionale constructies. Zijn leven werd beheerst door een constante reflectie op zijn kunst, net als bij Mondriaan.

De hier genoemde kunstenaars hebben een fundament gelegd waarop huidige kunstenaars kunnen verder bouwen of waartegen ze zich af kunnen zetten. Maar toepassing van



Figuur 5 Reliëfstructuur 2C2-4, Gerard Caris

wiskundige formules alleen is niet genoeg om kunst te maken. Er ontstaat pas kunst als een werk voldoende visuele zeggingskracht heeft. Ook formuleerden veel kunstenaars een theoretisch kader waardoor het gebruik van wiskundige regels zin krijgt. Van drie van de bovengenoemde kunstenaars is aan het begin van de tentoonstelling een werk te zien: een schilderij van Marlow Moss uit 1956/57, een reliëf van Joost Baljeu uit 1957 en een reliëf van Ad Dekkers uit de jaren zestig. Drie kunstenaars die na de eerste of tweede generatie geometrisch-abstracte kunst voor de uitdaging stonden de verworvenheden opnieuw te interpreteren en de confrontatie met deze erfenis aan te gaan vanuit het perspectief van hun eigen levenservaring en de eisen van hun tijd. Het woord is nu aan de eigentijdse kunstenaar. <-----

De tentoonstellingscatalogus *De bomen van Pythagoras — Geconstrueerde groei*, uitgave Mondriaanhuis, bevat een bij dit artikel behorende uitgebreide literatuurlijst en is aldaar verkrijgbaar voor 15 euro.

Danny Beckers

Dorpsstraat 26a

6582 AN Heumen

d.beckers@inter.nl.net

Oud Archief

Wiskunde van nu is voor een groot deel het werk van mensen die al lang geleden zijn gestorven. Wat waren dat voor mensen en wat hield hen bezig? Hoe verdienden ze de kost en hoe keek de maatschappij tegen hen aan? Danny Beckers, gepromoveerd in de geschiedenis van de wiskunde aan de Katholieke Universiteit Nijmegen, neemt ons mee in de archieven van de wiskunde.

In 1522 verscheen de *Rechnung auff der Linien und Federn* (rekenen op lijnen en met behulp van een veer), een rekenboek van de Erfurter rekenmeester Adam Ries. Tien jaar later, in 1532 dus, verscheen een tiende editie van het boek. Deze editie was voorzien van het hier afgebeelde frontispice. Het boek zou ruim twee eeuwen populair blijven. De afbeelding toont twee rekenaars die door een derde persoon worden gadegeslagen. De man in het midden rekent op lijnen, terwijl de linker man aan het cijferen is. De laatstgenoemde rekenaar gebruikt iets dat nog het meest lijkt op

een krijtje, maar dat is de persoon die de (in de titel) met 'veer' aangeduide methode hanteert. Een (gesneden) ganzenveer was tot in de negentiende eeuw een veel gebruikt middel om inkt op papier over te brengen. Deze persoon schrijft zijn getallen dus op en rekent zoals wij dat ook vandaag nog op de basisschool leren.

De tweede rekenaar, de man in het midden, is degene die op de lijnen rekent. Rekenen op lijnen was een uiterst praktische en gemakkelijk te leren methode om berekeningen uit te voeren. De rekenaar ging zitten en tekende op tafel of in het zand een aantal horizontale lijnen en twee of drie verticale lijnen. Iedere horizontale lijn representeerde een bepaalde waarde, bijvoorbeeld een lijn voor penningen, een lijn voor stuivers en een lijn voor guldens; of drie lijnen voor respectievelijk duimen, voeten en ellen. Steentjes of munten die op de lijnen werden gelegd representeerden eenheden in de waarde van de lijn waar ze op lagen. Een steentje tussen de verticale lijnen telde voor één; een steentje rechts van de tweede lijn voor (bijvoorbeeld) vijf; een steentje rechts van een derde lijn voor (bijvoorbeeld) tien. Op die wijze bleef het aantal steentjes dat nodig was om een getal neer te leggen enigszins binnen de perken. In veel steden bevatte een stuiver immers twaalf penningen, en een gulden twintig stuivers, dus het was niet ondienstig om een afzonderlijke kolom voor vijf of tien te gebruiken. De lijnenmethode was flexibel — in feite gaat het om een ad hoc geconstrueerde abacus. Indien daartoe behoefte bestond kon links van de eerste lijn ook nog in halve, derde of vierde delen van de eenheid worden gewerkt.

Optellen van twee bedragen was gewoon een kwestie van beide bedragen op de lijnen neerleggen en iedere keer als er twaalf steentjes op de lijn van de penningen lagen die weghalen en daarvoor in de plaats een

steentje te leggen op de lijn van de stuivers. Deze aanschouwelijke wijze van optellen (en met name van het overdragen van de cijfers) was bij niet-tientallig onderverdeelde maten uiterst praktisch — zeker zo lang het om niet te veel bewerkingen ging.

Voor de vermenigvuldiging leert Adam Ries de lezer om getallen (die op de lijnen liggen) te verdubbelen. De verdubbelingsoperatie is op de lijnen natuurlijk ook heel gemakkelijk: elk steentje wordt twee steentjes. Na afloop van die verdubbeling moest de lijnenrekenaar eventueel alleen nog steentjes herschikken.

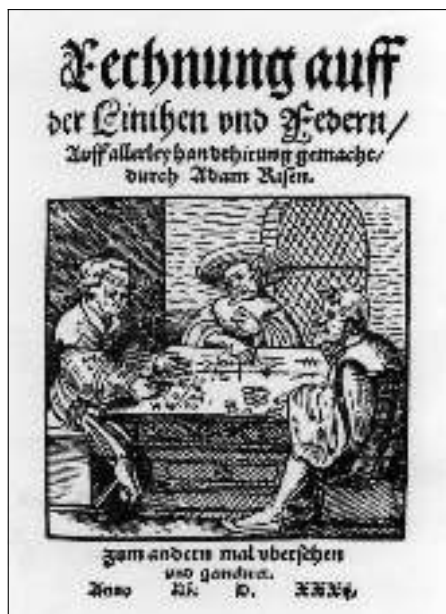
Had de leerling de verdubbelingsoperatie eenmaal onder de knie, dan kon hij aan de vermenigvuldiging beginnen. Vermenigvuldiging met zeven bijvoorbeeld, geschiedde door middel van optelling van een getal bij zijn dubbele en zijn twee keer verdubbelde ($7 = 1 + 2 + 4$): een techniek die ook in het oude Egypte werd gehanteerd.

Het rekenen op lijnen was tot diep in de zestiende eeuw heel populair, naast het rekenen met de veer. Het boekje van Ries verscheen juist in een overgangperiode, toen beide methoden naast elkaar werden gebruikt. De afbeelding op zijn boek suggereert zelfs dat er wedstrijdsjes plaats vonden tussen de beide soorten rekenaars.

Hoe zeer het rekenen op lijnen ingebakken zat in denken en handelen van de zestiende-eeuwse mens laat zich bijvoorbeeld illustreren met het feit dat de verdubbelingsoperatie werd behandeld in sommige zestiende (en zelfs zeventiende) eeuwse rekenboeken over Arabische cijfers — waarin het rekenen op lijnen helemaal niet meer aan bod kwam. De verdubbeling was een rudimentaire operatie voor wie het tientallig stelsel beheerste, maar essentieel voor de lijnenrekenaar.

Literatuur

Marjolein Kool, *Die conste vanden ghetale*, Hilversum (1999)



Jacques Haubrich

Fontys Hogescholen
Postbus 347
5600 AH Eindhoven
j.haubrich@fontys.nl

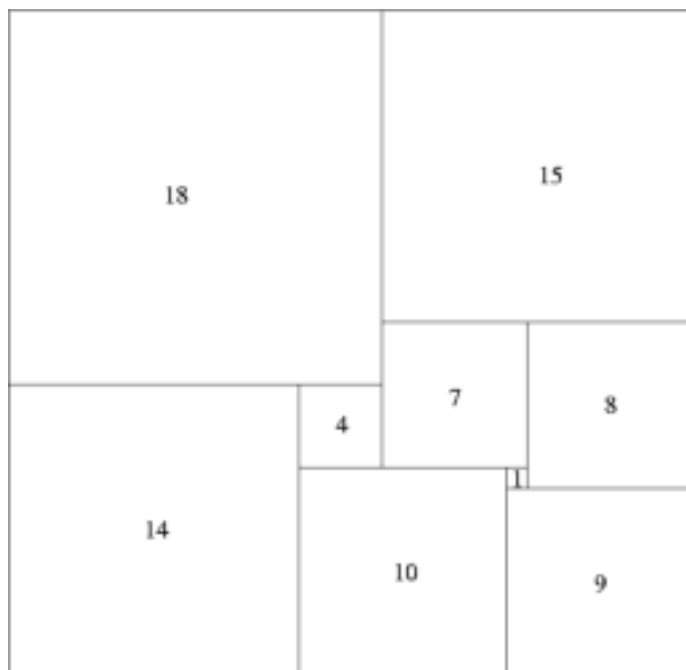
C.J. Bouwkamp en de Squared Squares

Het onderverdelen van een vierkant in kleinere vierkanten is een populair probleem waar vele wiskundigen aan hebben gewerkt. Met onder andere een artikel in *Scientific American* bracht Martin Gardner het probleem onder de aandacht van een breder publiek. De onlangs overleden prof.dr. C.J. Bouwkamp, aan wie in het vorige Nieuw Archief voor Wiskunde een In Memoriam is gewijd[1], heeft belangrijke bijdragen geleverd aan het onderzoek naar dergelijke vierkanten. Hij liet ruim dertig ordners vol papieren en een enorme stapel enveloppen na over het opdelen van rechthoeken in onderling ongelijke vierkanten. In dit artikel geeft Jacques Haubrich, docent aan Fontys Hogescholen te Eindhoven, een indruk van de geschiedenis van dit probleem en de rol die Bouwkamp daarin heeft gespeeld.

Vrijwel precies een eeuw geleden, namelijk in 1903, poneerde M. Dehn[2] de vraag of het mogelijk is, een rechthoek op niet-triviale wijze te verdelen in een eindig aantal elkaar niet-overlappende vierkanten. Dehn gaf geen oplossing maar bewees wel dat een dergelijke verdeling altijd zou resulteren in vierkanten met zijden die in rationele verhoudingen staan tot de zijden van de totale rechthoek. Pas in 1925 publiceerde Z. Morón[3] de eerste oplossing. Hij verdeelde een rechthoek van 33×32 in negen ongelijke vierkanten zoals aangegeven in figuur 1.

De rechthoek is verdeeld in negen vierkanten. We spreken daarom van een verdeling van orde 9. Alle vierkanten zijn verschillend van grootte; de verdeling heet daarom perfect. Veel later werd pas bewezen[4–5] dat deze verdeling ook de perfecte verdeling is van de laagst mogelijke orde.

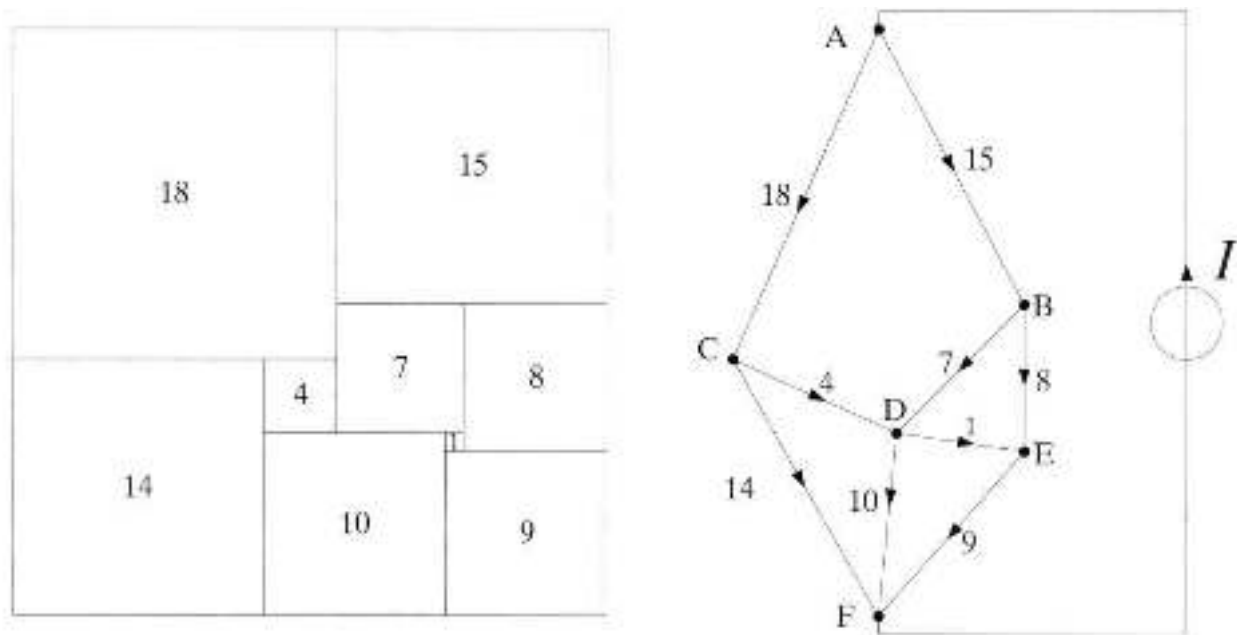
Het is dus niet mogelijk, een rechthoek te verdelen in minder dan negen ongelijke vierkanten. Een *vierkant* verdeeld in vierkanten was echter nog niet gevonden. Dat zou tot 1939 duren toen R. Sprague het eerste *perfect squared square* vond[6]. Het was echter een zogenaamde *Compound*, samengesteld uit vijf *perfect squared rectangles* plus vijf vierkanten. T.H. Willcocks vond in 1947 het eerste *Simple Perfect Squared Square*, van orde 37. Hij was ook lange tijd de recordhouder inzake het Simple Perfect Squared Square van de laagste orde, totdat Duijvestijn het vierkant van orde 21 ontdekte.



Figuur 1 De verdeling van Morón.

Een oplosmethode

De grote doorbraak kwam in december 1940 met een artikel van Brooks, Smith, Stone en Tutte[4], die lieten zien dat een in vierkanten verdeelde rechthoek kan worden geassocieerd met de stromen in een weerstandsnetwerk dat aan een stroombron is aangesloten. Een rechthoek van homogeen materiaal, bijvoorbeeld koperplaat, met een perfect geleidende boven- en onderrand heeft namelijk een (Ohmse) weerstand die evenredig is met de hoogte van de rechthoek en omgekeerd evenredig met de breedte ervan. Dat betekent dat alle vierkanten van een dergelijk materiaal dezelfde weerstand hebben, die gemakshalve gelijk aan 1Ω gesteld kan worden. We kunnen als gedachte-experiment de rechthoek van figuur 1 opgebouwd denken uit dergelijk materiaal en verdeeld



Figuur 2 Een rechthoekverdeling en het ermee corresponderende netwerk.

denken in 33 (de breedte van de rechthoek) verticale repen van 1 eenheid breed en 32 eenheden hoog. Elk van die repen heeft dan een weerstand van 32Ω . Zetten we nu over boven- en onderrand een spanning van $32 V$ (volt), dan wel een stroombron van $33 A$ (ampère), dan zal door elke reep een stroom van $1 A$ lopen. Aangezien elk vierkant bestaat uit één of meer repen naast elkaar met uiteraard van elk van die repen het juiste gedeelte in de hoogte, zal door elk vierkant dus een stroom lopen van evenveel ampères als de breedte van dat vierkant en zal tevens de spanningsval in volts over het vierkant gelijk zijn aan de hoogte van het vierkant. Een in vierkanten verdeelde rechthoek heeft dus een elektrisch analoon: een netwerk bestaande uit weerstanden van 1Ω die met elkaar zijn verbonden in knooppunten die overeenkomen met de horizontale lijnsegmenten in de rechthoekverdeling op plaatsen waar boven- of onderranden van vierkanten tegen elkaar komen. Ter verduidelijking zien we in figuur 2 de verdeling uit figuur 1 opnieuw, met ernaast het bijbehorende elektrische netwerk.

De weerstanden van 1Ω in elke tak zijn eenvoudigshalve weggelaten. Bij een totale stroom $I = 33 A$ zal door tak AC een

stroom van $18 A$ lopen, door AB een stroom van $15 A$, enzovoort. Elk knooppunt in het netwerk komt overeen met een horizontaal lijnsegment in de rechthoekverdeling, dus met de onder- en bovenranden van vierkanten. De polen A en F corresponderen met de boven- en onderrand van de rechthoek. In elk knooppunt komt 'van boven' evenveel stroom binnen als er 'naar onderen' weer uitgaat, dus dat de stroomsterktes kloppen, is gemakkelijk in te zien. Het kost wat meer moeite, deze stromen te berekenen als ze nog niet bekend zijn. Dat is mogelijk dankzij de wetten van Kirchhoff: volgens zijn eerste wet is in elk knooppunt de som van de binnenkomende stromen gelijk aan de som van de uitgaande stromen, en volgens zijn tweede wet is de som van de spanningen rond elke maas gelijk aan 0, hetgeen bij weerstanden van 1Ω betekent dat de som van de stromen rond elke maas gelijk aan 0 is. Dat leidt voor het netwerk uit figuur 2 tot de volgende vergelijkingen:

$$\text{punt A : } i_{AC} + i_{AB} = I$$

$$\text{punt B : } i_{AB} = i_{BD} + i_{BE}$$

$$\text{punt C : } i_{AC} = i_{CF} + i_{CD}$$

$$\text{punt D : } i_{CD} + i_{BD} = i_{DE} + i_{DF}$$

$$\text{punt E : } i_{DE} + i_{BE} = i_{EF}$$

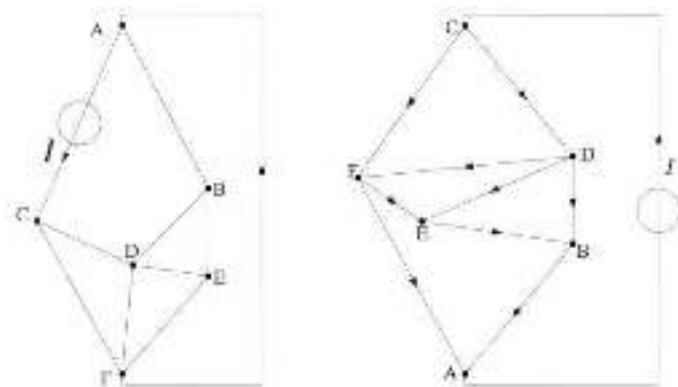
$$\text{maas ACDB : } i_{AC} + i_{CD} - i_{BD} - i_{AB} = 0$$

$$\text{maas CDF : } i_{CF} - i_{DF} - i_{CD} = 0$$

$$\text{maas BDE : } i_{BD} + i_{DE} - i_{BE} = 0$$

$$\text{maas DEF : } i_{DF} - i_{EF} - i_{DE} = 0.$$

De vergelijking voor punt F is weggelaten: deze zou leiden tot een afhankelijk stelsel, hetgeen zowel wiskundig als vanuit elektrische optiek eenvoudig valt in te zien. De gevonden 9 vergelijkingen bevatten precies 9 onbekenden en het stelsel valt als volgt te noteren:



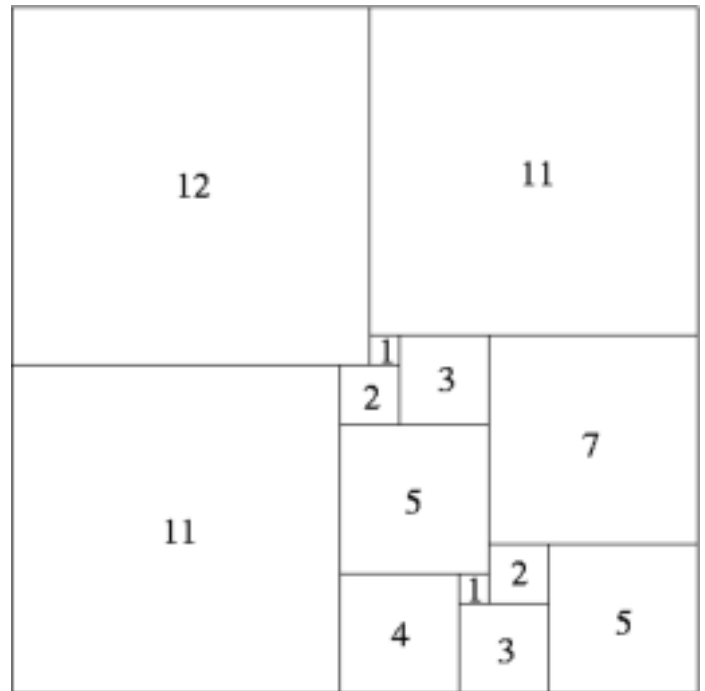
Figuur 3 Een ander netwerk verkregen uit dat van figuur 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{AB} \\ i_{AC} \\ i_{BD} \\ i_{BE} \\ i_{CD} \\ i_{CF} \\ i_{DE} \\ i_{DF} \\ i_{EF} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Voor een wiskundige is het dan niet moeilijk meer, hooguit onaangenaam, om hieruit de 9 onbekende stromen te bepalen, die dan telkens zoveel 33-ste van I blijken te zijn. Kies dus $I = 33 A$ en alle stromen zijn precies de gehele getallen die in figuur 1 en figuur 2 staan aangegeven. Het is een aardige oefening, de spanningsbron uit tak AF te verwisselen met de weerstand uit tak AB : zie figuur 3-links. Na enige vervormen ziet het netwerk er dan uit als in figuur 3-rechts.

De pijlen in figuur 3 geven de positieve stroomrichtingen aan en bij berekening blijkt dat een totale stroom $I = 61 A$ zich zal splitsen in $i_{CF} = 33 A$ en $i_{CD} = 28 A$. De rest van de berekening wordt aan de lezer overgelaten, evenals het tekenen van de bijbehorende in vierkanten verdeelde rechthoek. Door de stroombron in nog een andere tak te plaatsen, ontstaat weer een nieuwe berekening. Uit dit ene netwerk met in totaal 10 takken, kunnen dus (theoretisch) 10 verschillende verdelingen van rechthoeken in 9 vierkanten berekend worden. In dit geval ontstaan er overigens slecht 3 verschillende verdelingen die elk meermalen te voorschijn komen, veroorzaakt doordat er slechts 3 verschillende weerstandsnetwerken ontstaan.

Door alle mogelijke (planaire) netwerken (grafien met tenminste 3 takken per knooppunt) te tekenen en daarin achtereenvolgens de stroombron in elk van de takken te plaatsen en de daaruit voortkomende stromen te berekenen, krijgt men 'vanzelf' alle verdelingen van rechthoeken in vierkanten. Brooks, Smith, Stone en Tutte hebben dat gedaan en in hun artikel[4] beschreven. Ze deden dat voor alle netwerken met 13 of minder takken, netwerken dus die leiden tot een verdeling in 12 of minder vierkanten en ze

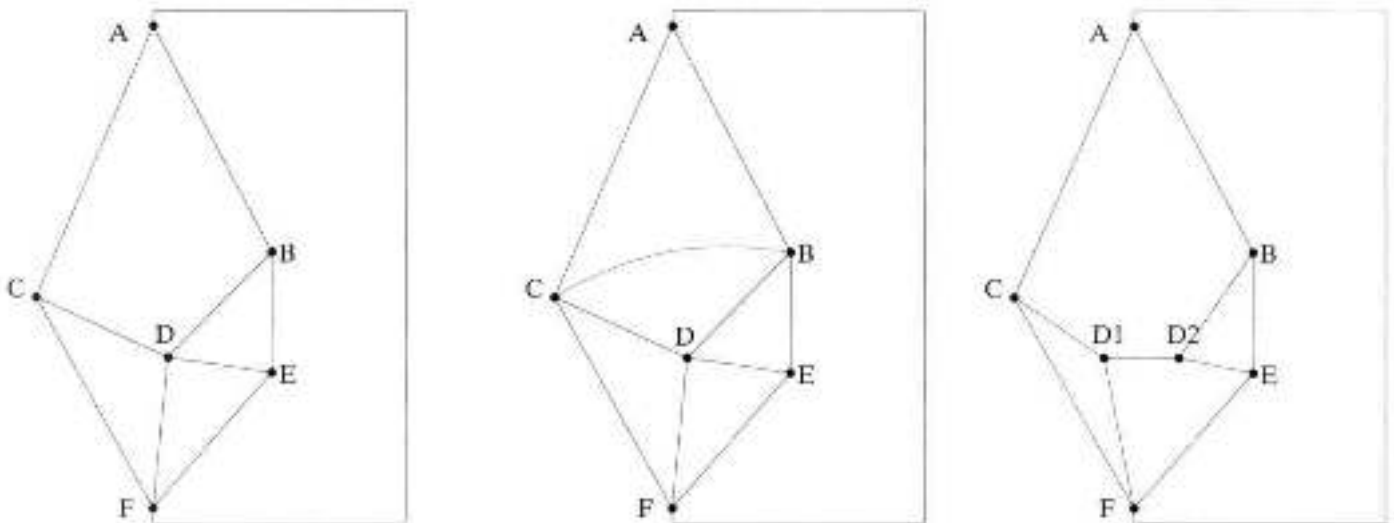


Figuur 5 Het eenvoudigste Simple Imperfect Squared Square.

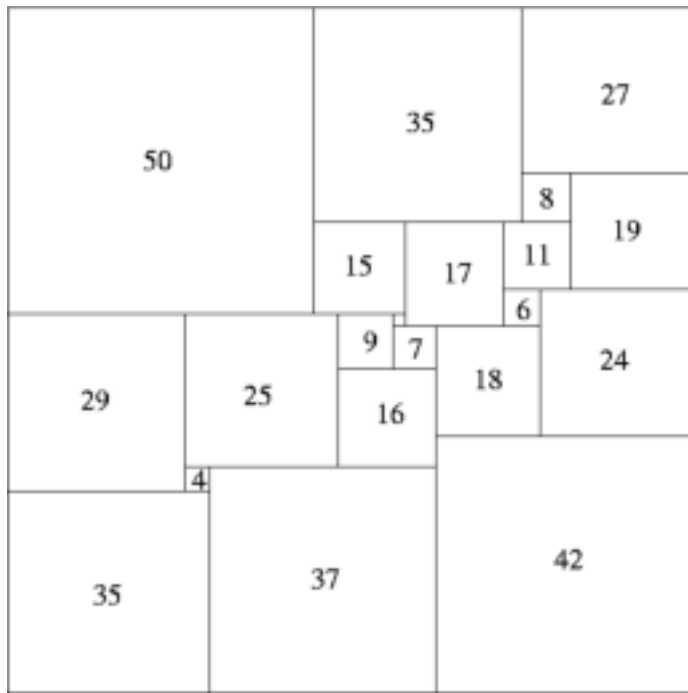
vonden 2 verdelingen van orde 9, 6 van orde 10, 22 van orde 11 en 67 van orde 12. Het moge duidelijk zijn dat één en ander nogal wat rekenwerk vereist. Daarnaast is er dan nog het probleem hoe men eerst nog alle denkbare planaire netwerken vindt.

Het genereren van netwerken

Uit bijvoorbeeld het netwerk van figuur 2, een netwerk van orde 10 (dus met 10 takken), kan men op 2 manieren komen tot een netwerk van orde 11. De ene manier is het onderling verbinden van twee knooppunten die nog niet verbonden zijn, bijvoorbeeld C en B , of A en E . De andere manier is het opsplitsen van een knooppunt met 4 of meer takken, zoals bijvoorbeeld punt F of punt D , in twee nieuwe knooppunten die met elkaar verbonden worden. Beide manieren staan geïllustreerd in figuur 4.



Figuur 4 De twee methoden voor het genereren van nieuwe netwerken.



Figuur 6 Het Simple Perfect Squared Square van orde 21.

In het algemeen kan men uit elk netwerk van orde n een aantal netwerken van orde $n + 1$ maken door hetzij het toevoegen van nieuwe takken, hetzij het splitsen van knooppunten. Men ziet gemakkelijk in dat twee onderling verschillende netwerken van orde n toch eenzelfde netwerk van orde $n + 1$ kunnen opleveren. Er ontstaan bij dit proces dus vele duplicaten, die geëlimineerd moeten worden. Het daartoe identificeren van netwerken en vaststellen dat twee netwerken duplicaten zijn, is verre van triviaal. Dat men op deze wijze inderdaad uit alle netwerken van zekere orde alle netwerken van een 1 hogere orde vindt, is overigens alderminst vanzelfsprekend. Sterker nog, van elke even orde is er precies één netwerk dat men op deze wijze niet vindt en dat dus apart moet worden toegevoegd. Het is voorts behoorlijk ingewikkeld, een en ander per computer uit te voeren.

Het werk van C.J. Bouwkamp

C.J. Bouwkamp was sinds 1941 in dienst bij het Natuurkundig Laboratorium van Philips en besteedde reeds in de oorlogsjaren een deel van zijn werktijd en vrije tijd aan het tekenen van netwerken en het berekenen van de stromen. Vele bladzijden aantekeningen, tekeningen en berekeningen alsmede een complete kaartenbak heeft hij in die jaren gevuld, in 1946 leidende tot een driedelige publicatie in de Proceedings van de KNAW[5]. Met eindeloos geduld en gigantisch veel rekenwerk (toen zelfs nog zonder zakjapanner!) heeft hij alle 63 netwerken met maximaal 14 takken afgeleid en uitgetekend en daaruit alle 213 verdelingen van orde 13 of minder gevonden en als 'nevenproduct' nog 34 imperfecte verdelingen, verdelingen waarin op niet-triviale wijze gelijke vierkanten voorkomen. Slechts in één geval vond hij een vierkant en wel van orde 13. Deze is weergegeven in figuur 5.

Helaas is deze verdeling imperfect: ze bevat twee vierkanten van 11×11 en ook enkele kleinere maten komen tweemaal voor. Maar het vierkant is wel *simple*, de verdeling bevat geen subrecht-hoek die zelf weer in vierkanten is verdeeld, laat staan twee gelijke vierkanten tegen elkaar.

Bouwkamp vond niet alleen deze bijzondere verdeling, hij ontwikkelde ook een codering voor rechthoekverdelingen. De verdeling van figuur 5 wordt in de naar hem genoemde Bouwkamp-code genoteerd als

$$13 : 33 \times 33 (12, 11) (1, 3, 7) (11, 2) (5) (2, 5) (4, 1) (3).$$

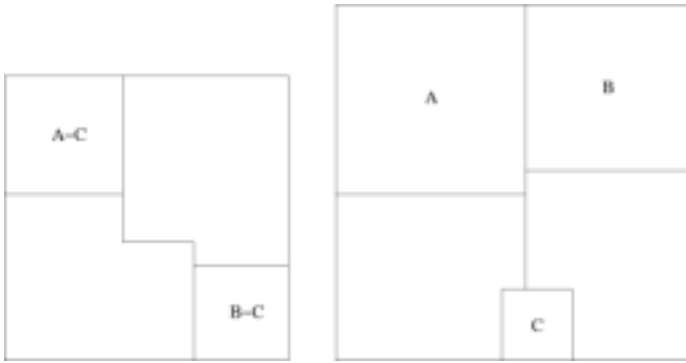
Allereerst staat hier de orde van de verdeling, dan de afmetingen van de rechthoek en vervolgens de maten van de vierkanten in een vrij logische volgorde: van links naar rechts en dan van boven naar beneden, gescheiden door een komma als de vierkanten dezelfde bovenrand hebben en middels haakjes gegroepeerd per horizontaal lijnsegment. Daarbij geldt als basisregel dat de rechthoek zo getekend moet worden dat de langste zijde horizontaal is en dat het vierkant in de linkerbovenhoek niet kleiner is dan de andere hoekvierkanten.

Het moet een monnikenwerk geweest zijn, al deze 63 netwerken uit te tekenen en vervolgens bij elk een flink aantal stelsels van maximaal 13 (lineaire) vergelijkingen met evenzoveel onbekenden uit te schrijven en op te lossen. Er zijn wel methodes waarbij een deel van het rekenwerk vervallen kan of eenvoudiger kan op grond van een dosis inzicht, maar toch. Helaas dateerde Bouwkamp in die tijd zijn aantekeningen nog niet; we weten dus niet exact wanneer hij wat precies deed. Zijn kaartenbak gaat overigens nog door tot en met netwerken van orde 16 (waarvan er 249 zijn) waaruit rechthoekverdelingen van orde 15 te voorschijn komen. Gelet op Bouwkamps welhaast legendarische precisie lijkt het niettemin onwaarschijnlijk dat hij daarbij exemplaren over het hoofd heeft gezien. Zijn aantekeningen vermelden overigens niet alle rechthoekverdelingen; bij elk netwerk heeft hij wel minstens één verdeling berekend.

Op vierkantengebied was het daarna even rustig, tot het einde van de jaren vijftig toen bij Philips de eerste echte computers werden geplaatst. Een speciale rekengroep onder leiding van A.J.W. Duijvestijn werd in het leven geroepen en Bouwkamp was er als de kippen bij om de computer netwerken te laten genereren en verdelingen te laten berekenen. De eerste programma's werden ontwikkeld en uitgeschreven door Duijvestijn en P. Medema, in 1960 leidend tot publicaties[7–8] en in 1964 tot [14]. Toen Philips zijn eerste eigen computer, de voor die tijd uiterst snelle PASCAL, in 1961 operationeel had, werd de aanzienlijk grotere rekenkracht



Figuur 7 Het Journal of Combinatorial Theory



Figuur 8 Transformatietechniek I.

van deze machine ingezet om het allemaal nog enkele ordes verder te brengen en onder Bouwkamps supervisie leidde dat in 1962 tot de promotie van Duijvestijn[9], die daartoe alle netwerken tot en met orde 20 had gegenereerd en daarmee dus alle verdelingen van rechthoeken in vierkanten tot en met orde 19 had onderzocht. Daarbij bleken naast onderverdeelde rechthoeken uitsluitend imperfecte vierkantverdelingen te voorschijn te komen, verdelingen dus waarin een paar gelijke vierkanten voorkomt. Meer dan orde 20 was in die tijd niet goed mogelijk: de benodigde rekentijd kwam in de orde van de MTBF (Mean Time Between Failures) van de computer.

Duijvestijn, in 1964 benoemd tot hoogleraar aan de Universiteit Twente, ging aldaar door met het genereren van netwerken en het berekenen van verdelingen. In maart 1978 had hij succes met de ontdekking van de kleinste perfecte vierkantverdeling in 21 vierkanten, prompt gepubliceerd[10] en sindsdien hét sierend element van de omslag van het *Journal of Combinatorial Theory*. De Bouwkampcode luidt

$$21 : 112 \times 112 (50, 35, 27) (8, 19) (15, 17, 11) (6, 24) \\ (29, 25, 9, 2) (7, 18) (16) (42) (4, 37) (33)$$

en de verdeling ziet er uit zoals in figuur 6 weergegeven.

De opsomming van alle perfect squared squares van orde 24 door Bouwkamp en Duijvestijn levert en passant de oplossing voor de '70² puzzel'. De vraag luidt: is het misschien mogelijk om een 70 vierkant te overdekken met vierkanten met zijde 1, 2, 3, 4, tot en met 24? er geldt namelijk dat

$$1^2 + 2^2 + \dots + 24^2 = 70^2.$$

Het ontkennende antwoord werd in 1975 in *CACM* 18 gepubliceerd door J.R. Bitner en E.M. Reingold.

Uiteindelijk kon Duijvestijn begin jaren 90 doorgaan tot en met verdelingen van orde 26 en onder de vele miljarden rechthoekverdelingen van die orde vond hij 441 vierkantverdelingen. De resultaten werden door Bouwkamp en Duijvestijn gepubliceerd in 1992[11] en in 1994[12]. Inmiddels zijn we weer 10 jaar verder en ondanks de exponentieel uit de hand lopende hoeveelheid rekenwerk zou het nu met de juiste computerkracht mogelijk kunnen zijn, weer twee of drie ordes verder te komen, maar een uitputtende berekening van alle *squared squares* blijft waarschijnlijk voor altijd ondenkbaar.

Transformaties

Naast Bouwkamp en het viertal Brooks, Smith, Stone en Tutte uit Engeland, waren enkele anderen in vierkantverdelingen

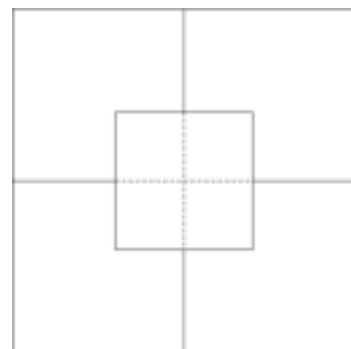
geïnteresseerd, met name P.J. Federico, J.C. Wilson en T.H. Willcocks. In die groep waren vooral Bouwkamp en Federico op het idee gekomen van een aantal nieuwe methoden om *squared squares* te vinden: transformaties.

De linker tekening in figuur 8 stelt een *squared square* voor met totale lengte van een zijde $A + B - C$. We nemen aan dat het vierkant bestaat uit twee in vierkanten verdeelde zeshoeken plus twee vierkanten met zijde $A - C$, respectievelijk $B - C$. De twee zeshoeken vormen dan samen met drie nieuwe vierkanten met zijde A , B en C , een nieuw *squared square* van afmeting $A + B$, zoals weergegeven in de rechter tekening. De orde daarvan is dus 1 hoger dan de orde van de linkerverdeling. Een configuratie als in de linker tekening blijkt inderdaad herhaaldelijk voor te komen en levert dus telkens bijna 'gratis' een nieuwe vierkantverdeling op van een orde 1 hoger.

De genoemde onderzoekers hebben in de loop der jaren meer dan een dozijn van dergelijke transformaties gevonden en daarmee vele tientallen nieuwe vierkantverdelingen. Met name Bouwkamp ging er prat op, van de ordes 25 en 26 heel wat vierkantverdelingen met dergelijke transformaties te hebben gevonden vóórdat Duijvestijn ze per computer vond. Bouwkamp hield ook nauwkeurig bij wie, wanneer, middels welke transformatie, uit welke verdeling welke andere verdeling(en) had gevonden en gedurende ettelijke jaren was het een intellectuele wedstrijd tussen diverse onderzoekers wie er het meeste kon vinden. Op dit moment zijn meer dan 1700 *perfect squared squares* bekend van orde 27 of hoger.

Bouwkamp ontving met Kerst 1996 een kaart van de Amerikaan J.D. Skinner met daarop de tekening van een vierkant verdeeld in 104 vierkanten. Het was niet moeilijk daarin de structuur te herkennen zoals aangegeven in figuur 9.

De figuur is opgebouwd uit vier *squared squares* die handig bijeengezocht zijn. Het betreft namelijk een viertal dat na vergroting tot een zijdelengte die het kleinste gemene veelvoud is van de vier oorspronkelijke zijdelengten, een hoekvierkant bevat dat in alle vier dezelfde afmetingen heeft. Bij de juiste orientatie smelten die vier hoekvierkanten dan samen tot één nieuw vierkant in het midden van de totale figuur. Bouwkamp was gefascineerd, onderzocht meteen alle hem bekende vierkantverdelingen en vond niet minder dan 16 van dergelijke 'Supersquares', in orde variërend van 97 tot 108, waarover hij kort daarna, op 1 februari 1997, publiceerde[13]. Die waren voor hem niet zó moeilijk te vinden: hij beschikte immers over alle bekende *squared squares* en had meer dan voldoende programmeerervaring om deze met een zelfgeschreven programma te onderzoeken op de verhoudingen tussen de



Figuur 9 De structuur van Supersquares.

zijdelengten van de hoekvierkanten en de totale afmeting van dat squared square. De maten van de gevonden *supersquares* werden overigens wel geschreven met 9 cijfers!

Squared squares zijn inmiddels niet meer weg te denken uit de recreatieve wiskunde: W.T. Tutte[16] en Martin Gardner[15] schreven er artikelen over en P.J. Federico gaf een goed historisch overzicht in [17]. Een zoekopdracht op internet naar bijvoorbeeld *squared squares* of *squared rectangles* levert vele interessante links, waarbij de informatie natuurlijk niet altijd even betrouwbaar is.

Tot besluit

Het bovenstaande bevat een aantal niet geheel willekeurige grepen uit een levenslange zoektocht naar squared squares. Bouwkamp was niet tevreden toen hij in het begin van de veertiger jaren het eerste *simple squared square* (figuur 5) vond en hij was

niet tevreden toen Duijvestijn in 1978 het kleinste *simple perfect squared square* van orde 21 vond. Hij wilde, en dat overigens niet alleen inzake het probleem van de vierkantenverdeling, altijd alle oplossingen hebben. Hij wilde ook zeker weten dat de resultaten kloppen. Hij analyseerde ze ook allemaal met de hand op bijzonderheden en kwam zo op het idee van vele transformaties waarmee hij weer andere vierkantverdelingen vond. Hij wilde weten of er regelmaat is en welke regelmaat er is in de aantallen vierkantverdelingen als functie van de orde, een tot dusverre onopgelost probleem. De voorgenomen studie van het enorme aantal door Bouwkamp nagelaten papieren zal ongetwijfeld nog de nodige interessante ontdekkingen opleveren inzake *squared squares* en wat daarmee samenhangt. De afronding daarvan zal nog wel enkele jaren op zich laten wachten. 

Referenties

- 1 J. Boersma en A.T. de Hoop, 'In memoriam Christoffel Jacob Bouwkamp (1915–2003), Passie voor precisie', *Nieuw Archief voor Wiskunde* (5) 4 (3), p. 205–207 (2003)
- 2 M. Dehn, 'Über Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke', *Math. Annalen* 57, p. 314–332, 1903.
- 3 Z. Moroń, 'O rozkładach prostokątów na kwadraty', *Przegląd Mat. Fiz.* 3, p. 152–153, 1925.
- 4 R.L. Brooks, C.A.B. Smith, A.H. Stone, and W.T. Tutte, 'The dissection of rectangles into squares', *Duke Math. J.* 7 (1940), 312–340.
- 5 C.J. Bouwkamp, 'On the dissection of rectangles into squares I, II & III', *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch.*, Amsterdam, 49, 1176–1188 (1946); 50, p. 58–71, p. 72–78 (1947).
- 6 R. Sprague, 'Beispiel einer Zerlegung des Quadrats in lauter verschiedene Quadrate', *Math. Zeit.* 45 (1939) 607–608
- 7 C.J. Bouwkamp, A.J.W. Duijvestijn, and P. Medema, *Catalogue of simple squared rectangles of orders nine through fourteen and their elements*, Technische Hogeschool, Eindhoven, May 1960, 50 pages.
- 8 C.J. Bouwkamp, A.J.W. Duijvestijn, and P. Medema, *Tables relating to simple squared rectangles of orders nine through fifteen*, Technische Hogeschool, Eindhoven, August 1960, 360 pages.
- 9 A.J.W. Duijvestijn, *Electronic computation of squared rectangles*, Ph.D. Thesis, Technische Hogeschool, Eindhoven, 1962, 92 pages.
- 10 A.J.W. Duijvestijn, 'Simple perfect squared square of lowest order', *J. Comb. Theory B* 25, p. 240–243 (1978)
- 11 C.J. Bouwkamp, A.J.W. Duijvestijn, *Catalogue of simple perfect squared squares of orders 21 through 25*, EUT Report 92-WSK-03, Technische Universiteit Eindhoven, November 1992.
- 12 C.J. Bouwkamp, A.J.W. Duijvestijn, *Album of simple perfect squared squares of order 26*, EUT Report 94-WSK-02, Technische Universiteit Eindhoven, December 1994.
- 13 C.J. Bouwkamp, *Preliminary report on supersquares*, Technische Universiteit Eindhoven, February 1997, 32 pages.
- 14 C.J. Bouwkamp, A.J.W. Duijvestijn, J. Haubrich, *Catalogue of simple perfect squared rectangles of orders 9 through 18*, 12 volumes containing 154486 squared rectangles, Philips Research Laboratories, Eindhoven, 1964, 3090 pages.
- 15 Martin Gardner, *Mathematical Carnival*, Penguin Press Science, 1990, hoofdstuk 11
- 16 Martin Gardner, *Second Scientific American Book of Math puzzles*, University of Chicago Press, 1987, hoofdstuk 17
- 17 P.J. Federico, 'Squaring rectangles and squares: A historical review with annotated bibliography', *Graph Theory and Related Topics*, Academic Press, 1979, p. 173–196

Gerard Alberts

*Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam
g.alberts@wens.kun.nl*

Ger Koole

*Afdeling Wiskunde
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam
koole@few.vu.nl*

Hans Melissen

*Faculteit Informatietechnologie en Systemen
Technische Universiteit Delft
Mekelweg 4
2600 GA Delft
j.b.m.melissen@its.tudelft.nl*

De overval

Tussen wetenschap en commercie

Voor deze tweede aflevering van de serie 'de overval' ging het NAW-team op bezoek bij TNO Telecom, tot voor kort KPN Research. Gerard Alberts, Ger Koole en Hans Melissen gingen op zoek naar de wiskundige in dit nieuwe instituut. Dolend door de lange gangen kwam een beeld naar boven van een organisatie die continu zijn weg zoekt tussen wetenschap en commercie.

KPN bevond zich de laatste jaren in zwaar weer. De financiële verplichtingen voortkomende uit de aanschaf van UMTS-licenties (Universal Mobile Telecommunication System-licenties) brachten het concern tot de rand van de afgrond. Alle bedrijfsonderdelen, waaronder KPN Research, moesten maximaal bijdragen aan het bedrijfsresultaat. Na een periode van onduidelijkheid over het voortbestaan van het laboratorium is het overgegaan in handen van TNO. Niet alleen financiële overwegingen lagen aan deze beslissing ten grondslag.

Directeur Gerard van Oortmerssen: "Belangrijke overwegingen voor KPN om Research af te stoten waren efficiency en flexibiliteit. KPN verwacht, nu we open op de markt moeten concurreren, dat we efficiënter worden en liefst ook beter. Werken voor andere bedrijven verbreedt en vergroot je kennis. Daar kan KPN ook van profiteren. We zullen ons nu op het geheel van de ICT richten in plaats van puur op de telecomsector. KPN blijft onze grootste klant, daar zijn ook voor de eerstkomende jaren afspraken over gemaakt, maar we kunnen

nu ook voor andere bedrijven werken, binnen en buiten de telecomsector."

Verzelfstandiging maakt de research meer autonoom. Ook maakt het de inbreng van bèta's in de economie beter zichtbaar. Toch heeft het een niet mis te verstane symbolische lading dat grote bedrijven als Shell of KPN hun research afstoten. Als zij zonder kunnen, wie kiest er dan nog exact? "Outsourcing, het afstoten en verzelfstandigen van staf- en onderzoeksafdelingen, zie je ook in andere sectoren. Of het daadwerkelijk wat oplevert is een lastige vraag. Je ziet de trend ook bij de ICT-ondersteuning. Vaak doet men het in de hoop dat het goedkoper zal worden, maar achteraf valt dat wel tegen. De kosten zijn wel beter zichtbaar, je bent flexibeler, het is makkelijker te managen, je neemt alleen af wat je nodig hebt. Belangrijk is de kwaliteit, en dat geldt zeker ook voor ons. Want op termijn is KPN vrij naar bijvoorbeeld het Fraunhofer Instituut of MIT te gaan als ze denken dat het daar beter is."

Wiskundige George Huitema is verbonden aan de Groningse vestiging van het laboratorium en sinds 2001 bijzonder hoogleraar Telematica aan de Rijksuniversiteit Groningen: "Nu we van ze losstaan worden we door KPN serieuzer genomen. En we hebben de mogelijkheid nieuwe markten aan te boren. Zo hebben we hier in het noorden goede contacten met 'Energy Valley', een groep bedrijven rond de Gasunie. In de energiesector zijn er veel bedrijven met problemen met 'billing', en dat is mijn specialisme."

Commercie

Gerard van Oortmerssen: "Bij mijn vorige werkgever, het CWI, was de niet-financiële component heel belangrijk, maar die is hier ook niet zonder belang. Niet alleen telt hoeveel geld er is verdiend, maar ook hoe goed we zijn. Aan het eind van het jaar hebben we hier een audit — op het CWI heette dat een visietie — waar een internationale commissie onze kwaliteit komt beoordelen. Het is hier meer dan op het CWI gericht op de praktische component; welke innovatie helpen wij tot stand brengen in het bedrijfsleven. De uitkomsten hangen samen met de besteding van de 30% overheidsfinanciering, maar zeggen ook iets over het feit hoezeer wij in staat zijn de resterende 70% uit de markt te halen."

Johan Bruin, hoofd Knowledge Innovation Center: "Ons product is kennis in de vorm van een nieuwe dienst of een stukje advies. Concreet gaat het er telkens om wat onze kennis voor een klant, en vaak is dat KPN, kan betekenen. Nieuwe diensten als UMTS en i-mode zijn hier uitontwikkeld en voor het eerst uitgeprobeerd."

Competenties

Gerard van Oortmerssen: "Onder druk van de markt is hier de afgelopen jaren zoveel de nadruk komen te liggen op toepassingen, dat men naast de wetenschappelijke aspecten de andere zaken als communiceren met je klant en consultancy-vaardigheden veel belangrijker is gaan vinden. De balans met de diepte-kennis zullen we de komende tijd herstellen."



Gerard van Oortmerssen: we zullen ons op het geheel van de ICT richten in plaats van puur op de telecomsector.

len. Ik verwacht dat we weer mensen gaan aanstellen met een inhoudelijke achtergrond, ook in de wiskunde.”

Joyce van Kooten, personeelsadviseur en recruitment officer: “Er is een aantal studies benoemd, waaronder wiskunde, waar we graag mensen van willen hebben: enige basiskennis is belangrijk voor het werk dat ze gaan doen. Bij starters met de goede opleiding gaan we ervan uit dat ze kennis van bijvoorbeeld wiskunde in huis hebben, en dat ze in staat zijn eventueel die kennis in een termijn van zes tot twaalf maanden op te doen. Kennis kun je bijleren. Waar we bij de selectie met name naar kijken is een aantal competenties; die zijn namelijk niet altijd bij te leren. Competenties die mensen echt niet in huis hebben zijn heel moeilijk aan te leren. Wat er in aanleg is, kun je verbeteren. Voor adviesvaardigheid, bijvoorbeeld, kijken we hoe iemand met je communiceert. Vertelt iemand alleen zijn eigen verhaal, of is hij ook geïnteresseerd in de anderen aan tafel. Competenties zijn het belangrijkste selectiemiddel. Dit leidt wel eens tot wrijving. Men heeft bij de afdelingen soms het idee dat er niemand meer door de poort komt. Dit komt deels nog uit KPN-periode, waarin sterk op management-potentieel werd geselecteerd. Nu kijken we ook wat de gewenste competenties voor een inhoudelijke loopbaan zijn. Iets als resultaatgerichtheid vinden we echter nog steeds heel belangrijk.”

Suzanne van Kooten, afdelingsmanager Business and Network Optimization: “Ik manage een groep van 32 mensen, voor tweederde bestaande uit wiskundigen en econo-

metristen. Opvallend genoeg zitten daar vrij veel vrouwen tussen, zeven van de twintig. Dat hangt ongetwijfeld samen met ons selectiebeleid. De inhoudelijke toppers zijn dan weer de mannen. Maar in mijn afdeling heb je meer nodig: de klant aanvoelen, goede offertes kunnen schrijven, projectleiding (zowel richting klant als richting team) en daar heb je competenties voor nodig die je vooral ook bij de vrouw aantreft.”

Gerard van Oortmerssen: “Er zijn ook wiskundigen die goed kunnen communiceren, die selecteren we er wel uit.”

Suzanne van Kooten: “Veel van onze opdrachten zijn niet superdiep qua wiskunde. Het is goed om de basis te hebben, om af en toe de theorie in te durven en kunnen duiken en met anderen te kunnen sparren, maar waar de klant om vraagt, heb je niet die diepe wiskunde voor nodig. Er zijn er veel die zeggen: “Ik vind het leuk om dit als basis te hebben, maar ik wil nu verder en ik ga richting projectleiding of consultancy.” Anderen, die in de kennis verder willen, krijgen de kans zich daar op toe te leggen. Het omgekeerde kom je ook tegen: mensen die veel papers hebben geschreven en naar conferenties zijn geweest, die nu weer met mensen aan de slag willen.”

Rob van der Mei is een van de inhoudelijke topmensen van TNO Telecom en deeltijdhoogleraar aan de Vrije Universiteit: “De kennis die je vanuit je studie gebruikt is het gevoel voor modellen, het gevoel voor stochastiek, niet zozeer de precieze inhoud van de vakken die je gedaan hebt. Vandaar dat het niet zoveel uitmaakt of iemand wiskunde, econometrie,

of informatica gedaan heeft. De competenties zijn wel heel belangrijk. Een gewone nerd komt hier niet meer binnen.”

Gezond verstand

George Huitema wist dat hij niets met wiskunde ging doen toen hij na zijn promotie bij Henk Broer en Boele Braaksma aan de Rijksuniversiteit Groningen bij het toenmalige KPN Research begon: “Bewust heb ik gekozen voor een baan met projectmatig werken, in multidisciplinaire teams. Waarom ze me hebben aangenomen, vroeg ik me ook wel eens af. Waarschijnlijk vanwege mijn gezond verstand, het analytische denkvermogen.”

“Het zit in je genen, dat analytisch vermogen, maar je ontwikkelt het tijdens je promotieonderzoek. Hoofd- van bijzaken scheiden, logisch nadenken, verschil tussen nodige en voldoende voorwaarden, elke dag gebruik ik dat in mijn werk.”

Joyce van Kooten: “Wiskundigen zijn heel analytisch; het conceptueel vermogen is ook heel sterk. Grote stukken informatie snel verwerken, daar zijn wiskundigen ook goed in. Wij doen een assessment met onze kandidaten; wiskundigen halen uit een tekst wat de belangrijkste zaken zijn. Je herkent de wiskundigen onder je personeel omdat zij de eersten zijn die het opmerken als een berekenregel wiskundig niet klopt. Bij de overgang naar TNO was er iets niet helder in de arbeidsvoorwaardenregeling. De mensen van de afdeling Network Planning trokken meteen aan



Joyce van Kooten: we kijken met name naar een aantal competenties; die zijn namelijk niet altijd bij te leren.

Van Dr Neherlab tot TNO Telecom

Onlangs is het verzelfstandigde onderzoeksbedrijf van KPN overgenomen door TNO. Daar is het samengevoegd met enkele andere onderdelen van TNO tot TNO Telecom. Het was niet de eerste flirt met TNO. In het kielzog van de eenwording van de telefoonmaatschappijen werd na de Tweede Wereldoorlog ook het onderzoek samengevoegd in het Centraal Laboratorium van de PTT. Op 19 juli 1946 stelt directeur generaal voor de PTT, Neher, met terugwerkende kracht per 1 april van dat jaar het Centraal Laboratorium in. Even leek het er op dat de samenwerking met het Fysisch Laboratorium van Defensie, dat in de oorlogsjaren onderdak had gevonden bij het laboratorium van de PTT, voortgezet zou worden in een constructie onder de koepel van TNO, de Nederlandse Organisatie voor Toegepast Natuurwetenschappelijk Onderzoek. Dat gebeurde niet. Het Centraal Laboratorium bleef bij de PTT. Sinds 1954 heet het Dr Neherlaboratorium. Bij de verzelfstandiging en opdeling van de PTT werd het laboratorium aanvankelijk een zelfstandig onderdeel van KPN: KPN Research. Begin 2003 is het overgegaan naar TNO om, met onder meer een gedeelte van datzelfde vroegere Fysische Laboratorium, TNO Telecom te vormen. De wiskundigen van vandaag hebben illustere voorgangers. In 1947 kwam er in laboratorium een Mathematische Afdeling onder leiding van L. Kosten. W.L. van der Poel kwam bij Kosten werken en zijn ontwikkelden vroege computers: de PTERA (1953) en — ontworpen in Den Haag, in serie gemaakt in Engeland — de ZEBRA (1957).

de bel: dat is zo'n afdeling waar veel wiskundigen werken. Wiskundigen willen dat een regel klopt. Wiskundigen scoren, net als mensen uit andere technische disciplines, minder goed op externe oriëntatie en op resultaatgerichtheid — prioriteiten kunnen stellen. Ook op emotionele intelligentie scoren ze dikwijls lager. Het komt voor dat iemand die hier solliciteert, alleen maar naar buiten zit te kijken, of naar de tafel."

"Op het gebied van externe oriëntatie — heeft iemand oog voor de klant — zie je overigens wel een verschil tussen de toegepaste wiskundige en de theoreticus. Dat merk ik in selectiegesprekken. Een theoretische wiskundige zal mij precies vertellen wat hij voor zijn

afstuderen heeft gedaan. Hij kan dat vaak nog wel vertalen in Jip-en-Janneketaal; dat kunnen wiskundigen meestal wel. Een toegepaste wiskundige praat veelal meer vanuit het belang voor onze organisatie."

Suzanne van Kooten: "Heel belangrijk in ons werk is de toepassing te kunnen vinden, dus niet te verzanden in de theorie. Je moet gevoel hebben voor wat de klant beweegt. Wij maken de tools zo dat onze klant overtuigd is dat wat erin zit correct is en er zelf mee aan de slag kan. De klant moet het aan zijn baas of aan zijn klant kunnen laten zien."

"Analytisch vermogen is ook een hele goede eigenschap voor een manager. Het helpt je, ook bij de softere zaken, om boven de dingen te staan. Dat je toch niet zoveel bèta's in managementfuncties tegenkomt, hangt misschien samen met het volgende: Technici doen liever hun werk goed, dan dat ze er in de buitenwereld mee te koop gaan lopen. Wij zijn zelf ook gemigreerd van alleen maar problemen aanpakken omdat we ze leuk vinden naar projecten uitvoeren met heel veel impact omdat we even boven de theorie uitstijgen. We zijn er ons eigenlijk pas sinds 2000 echt van bewust hoe goed we zijn en dat we prima consultancy aan topmanagement kunnen leveren. Op dat niveau kom je de grote consultancy bureaus tegen die soms projecten 'inpijken' waar wij voor ons gevoel een beter inhoudelijk resultaat hadden kunnen opleveren. Op zo'n moment vraag je jezelf wel eens af: willen we zoals de grote consultants werken of blijven we bij onze werkwijze en moeten we nog harder ons best doen?"

De natuur straft

Waarom herkent men de wiskundige in het bedrijf; welke kwaliteiten brengt hij mee?

Gerard van Oortmerssen: "Het modelmatig denken, het bouwen van computer- en simulatiemodellen. Wiskundigen doen dat beter dan bijvoorbeeld bedrijfskundigen, ongeacht of ze van een gewone of een technische universiteit komen."

Johan Bruin: "Niet; ik herken ze niet. Van sommige medewerkers weet ik dat ze wiskundigen zijn, van anderen heb ik geen idee wat hun achtergrond is. Die gegevens zijn bekend bij personeelszaken, maar dat is hier niet zo relevant. Wat belangrijker is, is hoe je met de klant omgaat, ben je in staat je kennis te verkopen. Kennis simpel vertalen naar een oplossing, goed samenwerken in een team. Dat zijn de elementen die dan vaak toch belangrijker zijn dan iemands vooropleiding. Na een jaar zijn ze geen wiskundige meer, maar TNO-er."

Rob van der Mei: "Het is hartstikke leuk om hier wiskunde te doen. Maar iedereen die binnenkomt zal toch moeten leren wat telecomcommunicatie is, en hoe de businessomgeving er uitziet. Je moet inderdaad een soort *telecom-wasbeurt* gehad hebben. Daar ontkom je niet aan. Daarnaast moet je je kunnen verplaatsen in een telecommunicatie-operator die geld moet verdienen. Luisteren is belangrijk: Als je niet goed luistert naar wat de werkelijke problemen zijn waar een telecom-operator mee worstelt, dan zul je natuurlijk niet in staat zijn je werk te verkopen."

"Hier ligt een fundamenteel probleem: het 'gat' tussen wetenschap en toepassing. Wetenschappers lossen vaak problemen op die vanuit academisch oogpunt interessant zijn, en bekommeren zich niet om een daadwerkelijke toepassing daarvan. De toepassers daarentegen zijn meestal geen wetenschappers en lezen geen wetenschappelijke tijdschriften. Het gevolg is dat wetenschappelijke resultaten en oplossingen vaak niet worden gebruikt. Vanuit mijn rol probeer ik een brugfunctie te vervullen, en ervoor te zorgen dat wetenschappelijk resultaten daadwerkelijk worden toegepast. Ik zie dat als een enorme uitdaging."

Een wiskundig verantwoord kunstwerk lokt onbedoeld de passerende NAW-redactie de kamer binnen van Hans Schmidt, elektrotechnisch ingenieur. De schroef is zelf-gestapeld van papier. Schmidt werkt vaak samen met wiskundigen: "Er is niks mis met de mathe-



Rob van der Mei: de kennis die je vanuit je studie gebruikt, is het gevoel voor modellen, het gevoel voor stochastiek, niet zozeer de precieze inhoud van de vakken die je gedaan hebt.



Suzanne van Kooten: belangrijk is in ons werk het kunnen vinden van de toepassing en niet te verzanden in de theorie.

matische benadering. De mate van abstractie is anders. Wiskundigen zitten meer met de neus in de boeken en hebben weinig voeling met apparatuur. Je ziet het met name met simulatie, waar wiskundigen sterk in zijn. Hun oplossingsruimte ziet er heel anders uit dan mijn oplossingsruimte. Wiskundig kun je alles, maar de natuur straft je: het moet werken.”

In de ‘daktuin’ van het Leidschendamse laboratorium bevinden zich de afstudeerders. Een van hen is Roland de Haan, student wiskunde aan de TU Eindhoven. “Wiskundigen zijn analytisch sterk; kunnen hoofd- en bijzaken goed uit elkaar houden. Wiskundigen zijn ook vrij slim. Dat is natuurlijk altijd welkom voor een bedrijf als TNO Telecom.”

Van handschriftherkenning tot i-mode

Wiskunde zit overal in, zo lijkt het, maar waarin in het bijzonder? Waar vinden we de verrassingen?

Gerard van Oortmerssen: “Een belangrijk onderwerp waar je wiskundigen tegenkomt is het gebied van *quality of service*. Op dat gebied werken we ook samen met het CWI, met de groep van Sem Borst en Michel Mandjes. Van onze kant zijn daar Hans van den Berg en Rob van der Mei bij betrokken.”

“Ik kom heel veel wiskundigen tegen, ook op plaatsen waar je dat niet verwacht, zoals in afdelingen die zich veel meer met de markt bezighouden, of met business modeling. We hebben een hele grote groep die op het gebied van security, daar kom je veel wiskunde tegen. In handschriftherkenning was dit lab pionier, voor de Postbank en PTT Post. Daar is een spin-offbedrijfje uit voortgekomen, Prime Vision. Nog een heel ander onverwacht voorbeeld: we hebben op basis van een wiskundig model van consumentengedrag een tool ontwikkeld waarmee we kunnen voorspellen wat het marktsucces van een nieuw product zal zijn.

Johan Bruin: “Wiskunde komt vaak te pas

in een aantal onderdelen rond een project, bijvoorbeeld om allerlei voorspellings- en propagatiemodellen te maken: wordt een project door de gebruikers, de samenleving, geaccepteerd? En wiskunde speelt ook een rol in het bepalen en meten van de quality of service van het netwerk. Dat zijn twee hele concrete voorbeelden, waar de wiskunde onmisbaar is voor de toepassingen.”

Suzanne van Kooten: “In mijn afdeling worden heel diverse technieken gebruikt. Veel Markovketens, lineaire programmeringsvraagstukken, maar dan wel vaak de heuristische methodes in plaats van een methode die het optimum oplevert. Een leuk recent project was voor het energiebedrijf Essent. Dit bedrijf had de keuze tussen een aantal projecten, die verschillend scoorden op een aantal criteria. Gegeven het budget moest er een keuze worden gemaakt. Een van onze gepromoveerden heeft voor die concrete toepassing de code voor de optimaliseringsroutine geschreven.”

Rob van der Mei: “Ik ben gepromoveerd in de wachttijdtheorie, bij Onno Boxma. Toen ik hier solliciteerde in 1995 kwamen net de pakketgeschakelde netwerken op. Als je klanten met pakketjes vergelijkt, dan is de link gauw gemaakt. Ik ben gespecialiseerd in de prestatieanalyse van die netwerken. Tegenwoordig heb je i-mode, dat is hetzelfde maar dan mobiel. Daar spelen allerlei vragen op het gebied van capaciteitsperformancemanagement, en dat is ook de afdeling waar ik voor werk. De rol van wiskunde is het ontwikkelen van stochastische modellen om de performance te modelleren. Het doen van metingen hoort daar ook bij, als je niet ziet wat er in het netwerk gebeurt blijft modelleren een ivoren-torenexercitie.”

Stagiaire Roland de Haan: “TCP/IP is het standaardprotocol van internetverkeer. De afstudeeropdracht gaat over het modelleren van het Transmission Control Protocol (TCP), en het schatten van ‘throughput’ binnen het model. Je kijkt hoe lang een pakketje er gemiddeld over doet om zijn bestemming te bereiken. In concreto zie je dit terug in de downloadtijd, wanneer iemand iets op internet heeft gevonden. Het model voor mijn onderzoek was al ontwikkeld in een publicatie van mensen van dit laboratorium. In die zin is mijn werk niet een bevestiging van de visie dat modelmatig denken, modellen opstellen vanuit de werkelijkheid, het sterke punt is van de wiskundigen. Het transformeren van werkelijkheid naar model doe ik niet zelf in dit geval. Ik werk aan een zo goed mogelijke uitbreiding van dit model. Ik houd mij voornamelijk bezig met het pakket-gedeelte van het mo-

del. Het is een zogenaamd M/D/1/K-model. In eerste instantie hebben we gekeken naar een generalisatie tot een G/D/1/K-model. Dat bleek nog niet helemaal te voldoen en nu bestuderen we een on-off model. We kijken naar de congestie bij het knooppunt van de aankomst van pakketjes. De knooppunten waar de pakketjes vandaan komen beschouwen we als aan-uit bronnen. In de werkelijkheid van het hele TCP-verhaal blijken dan nog allerlei vreemde dingen op te treden die je aanvankelijk niet verwacht. Bovendien is het hier binnen TNO zo dat je naar een oplossing toewerkt die redelijk goed is, maar niet al te ingewikkeld. Die afweging moet je ook telkens weer maken. Je leert hier bij TNO al verder te kijken dan eenzijdig wiskundige benadering. Als je dezelfde opdracht binnen de universiteit zou aanpakken, zou je wel iets dieper op de wiskunde in gaan, misschien andere methoden kiezen om het proces nog gedetailleerder te beschrijven. Nu werk ik toch met bepaalde aannames waarvan je vantevoren weet dat ze — hoewel niet helemaal uit de lucht gegrepen — niet helemaal conform de werkelijkheid zijn.”

Hans Schmidt werkte onder andere aan draadloze netwerken voor de brandweer. “Heel verschillende machines moeten elkaar kunnen vinden en een communicatie tot stand brengen. Om te beginnen is de topologie van een netwerk heel grillig. Daar komt bij dat de apparaten heel verschillend zijn. We ontwikkelen daarvoor zogenaamde ‘ad hoc algoritmes’. Wat we ontwikkelen is een variant op IP, het internet protocol. De machi-



Hans Schmidt: wiskundig kun je alles, maar de natuur straft; het moet werken.



Johan Bruin: een tekort aan technisch afgestudeerden.

ne die een signaal uitzendt, "ik ben hier, dit zijn mijn burens, ik heb een pakketje voor bestemming X" moet begrepen worden. Je kijkt gewoon in de literatuur welke protocollen er beschikbaar zijn en ontwikkelt de specifieke algoritmen vervolgens zelf. Daar heb je niet altijd de wiskundigen voor nodig."

George Huitema staat bekend als 'Mister Billing': "In Nederland verzorgen de telecombedrijven per dag zo'n 100 miljoen gesprekken en sms'jes. Alle gegevens daarover moeten netjes op de nota komen. Hoe moet je dat organiseren? Het organiseren van de bedrijfsprocessen zodat de billing goed verloopt, daarin ben ik gespecialiseerd. En dat wordt steeds complexer naarmate het aantal diensten en de soorten devices toenemen. Men wil overal, altijd op elk device communiceren en informatie opvragen."

Het managen van kennis

Wat doet TNO Telecom om de kennis te vergroten? Gerard van Oortmerssen: "We hebben verschillende banden met universiteiten. Een aantal mensen is deeltijdhoogleraar. Verder participeren we in veel kennisopbouwprojecten, Europese projecten en ICES-KIS."

Rob van der Mei: "Toen ik hier in 1995 begon was het nog veel academischer dan nu. Toen gooide je zo nu en dan een rapportje over de muur, bij wijze van spreken. Vier jaar geleden, ik kwam net terug van vier jaar VS, brak de pleuris uit. Het was de tijd van de aankoop van de UMTS-licenties. Al gauw werd het onderzoek secundair, en kwam alles in het teken te staan van overleven en geld verdienen, duurbetaalde consultancy-uren draaien. Zo werd ook de bibliotheek opgeheven: een duidelijk signaal. Gelukkig zag men daarna in dat we inhoudelijk aan het afglijden waren, terwijl juist die kennis ons bestaansrecht geeft. De overname door TNO geeft ons weer de ruimte om het kennisniveau weer op te bouwen. Van Oortmerssen lijkt de kennisverwerving hoog in het vaandel te hebben, ik ben blij met zijn komst."

George Huitema: "In Groningen hebben we de bibliotheek weten te behouden. Een deel is geschonken aan de universiteit, een ander deel bevindt zich nog in het lab, inclusief de tijdschriften."

Rob van der Mei: "Dat op twee gedachten hinken, tussen praktijk en theorie, is soms wel een soort spagaat. Je leert dat een uitdaging noemen."

George Huitema: "TNO staat als kennisinstituut voor de brugfunctie tussen enerzijds structuren en modellen en anderzijds de praktijk, de context, de behoeften. De kennisverwerving en de noodzaak geld te verdienen zorgen wel voor een spanningsveld, je hebt tijd en ruimte nodig voor kennisopbouw. We doen dit door te participeren in Europese projecten, of door kennisverwerving expliciet in contracten mee te nemen. De laatste jaren sloeg de balans wel eens naar het commerciële door, het was een tijd van overleven, maar nu zijn we uit het dal."

Leraren en de toekomst

Johan Bruin: "Er is een tekort aan technisch afgestudeerden. Wij merken dat minder mensen zich spontaan aanmelden, dat vinden wij best zorgelijk."

Gerard van Oortmerssen: "Om de aandacht voor wiskunde te vergroten zouden we zicht-



Roland de Haan over zijn afstudeeropdracht: het gaat over het modelleren van het Transmission Control Protocol (TCP), en het schatten van 'throughput' binnen het model. Je kijkt hoe lang een pakketje er gemiddeld over doet om zijn bestemming te bereiken.

baar moeten maken waar die allemaal een rol in speelt en wat voor leuke beroepen wiskundigen allemaal kunnen krijgen. Een deel van de oplossing ligt bij de leraren, deze zouden kinderen er enthousiaster voor moeten maken. Een goede leraar kan uitleggen wat er zo leuk is aan wiskunde, die kan uitleggen wat er zo leuk is aan de stelling van Pythagoras."

Dit kan je ook omdraaien. Wat is de reden voor het huidige gebrek aan belangstelling voor exacte vakken? "De leraren doen het niet goed genoeg. Het is het hele imago eromheen. Het is moeilijk, het is saai, het is niet cool genoeg."

Biedt TNO Telecom dat leuke beroep aan? Van Oortmerssen: "Ik denk dat onze hoogleraren met groot enthousiasme zullen vertellen over hun werk. En dat is niet alleen omdat zij bijzondere wiskunde doen, maar ook omdat het resultaat van hun werk heel belangrijk is voor iedereen in Nederland."

Roger Cooke

Delft Institute of Applied Mathematics

Technische Universiteit Delft

Postbus 5031, 2600 GA Delft

r.m.cooke@its.tudelft.nl

Boekbespreking Het pseudoniem van God

Een wiskundige over geloof, wetenschap en toeval

Ronald Meester, hoogleraar waarschijnlijkheidsrekening aan de Vrije Universiteit, gaf een spraakmakende visie op geloof en wetenschap in het boek 'Het pseudoniem van God'. Ook Roger Cooke, hoogleraar Toepassing van de Besliskunde aan de Technische Universiteit Delft, wijdde een deel van zijn inaugurele rede aan de relatie tussen waarschijnlijkheidsrekening en religie. Wat vindt hij van het boek van Ronald Meester?



“Dit boek gaat over geloof. Geloof in God, maar ook geloof in wetenschap.” schrijft Ronald Meester in de eerste twee zinnen van zijn recente boek *Het pseudoniem van God*. Hij licht het als volgt toe: “Mijn insteek is een beetje ongewoon, maar daarmee ook origineel. Ik ben wiskundige, met een leerstoel in de waarschijnlijkheidsrekening”. Er wordt dus zwaar ingezet. “Na de inleidende woorden uit de inleiding komen we nu in zekere zin ter zake” (bladzijde 21) bij het eerste hoofdstuk getiteld *Wat is een kans?* De frequentistische, de klassieke en subjectieve interpretaties worden vlugjes besproken. We lezen dat relatieve frequenties niet gebruikt kunnen worden om kansen te definiëren omdat bepaalde rijen (de non-random rijen) met een of ander criterium moeten worden uitgesloten. “Zo’n criterium zal altijd kanstheoretisch van aard zijn. Vanuit dat perspectief is het denk ik niet mogelijk om de cirkelredenering te vermijden” (bladzijde 29). R. von Mises heeft de studie van random rijen (collectieven) geïntroduceerd [9–10]. In navolging hierop hebben Martin-Löf [5], Schnorr [6] en anderen bevredigende definities van *randomness* gegeven in termen van recursieve nulverzamelingen (géén cirkelredenering dus). Ook in Nederland wordt er onderzoek van de bovenste plank gedaan op dit gebied [8]. Voor het feit dat dit onderzoek geheel ontbreekt in dit boek heeft noch Meester noch ondergetekende een verklaring.

Uit een bladzijde gewijd aan subjectieve kansen, wordt geconcludeerd dat deze kan-

sen bestaan. “Maar of wij er wat aan hebben? Ik denk het niet, al is het alleen maar vanwege het feit dat kansen vanuit het subjectieve perspectief zullen verschillen van persoon tot persoon” (bladzijde 33). De conclusie luidt: “Ik wil niet beweren dat ik alle mogelijke filosofische benaderingen van kansen heb besproken, maar u moet mij maar op mijn woord geloven dat alternatieven allemaal gelijksoortige bezwaren kennen. We hebben een aantal pogingen gedaan, en het is ons niet gelukt: we moeten bekennen dat we niet weten wat een kans eigenlijk is [...]” (bladzijde 33–34).

Mensen met belangstelling voor grondslagen weten wel degelijk wat een kans is, dat wil zeggen, ze kennen de formele definities en axioma’s, en ze weten hoe deze kunnen worden geïnterpreteerd, bijvoorbeeld als mate van geloof van een rationeel persoon of als limieten van relatieve frequenties in geschikte random rijen. Bovendien, ze kennen de definitie van *definitie*, waardoor zij ook weten dat geen formele definitie alle associaties van een informeel begrip kan vangen. *Kans* is een fascinerend voorbeeld hiervan. De niet-technische lezer wordt verwezen naar de uitstekende boeken van Hacking [4] en Bernstein [1]. Hetzelfde verhaal kunnen we houden voor de begrippen *verzameling*, *oneindig*, *getal* of voor tal van andere begrippen uit de wiskunde. De meeste wiskundige disciplines met raakvlakken in de grondslagen dekken dit af in hun opleiding. Een boek van een hoogleraar getaltheorie die niet weet wat een getal is kan ik me althans niet herinne-



Illustratie: Peter de Wit

ren. Vroeger waren grondslagen een verplicht onderdeel van de wiskundeopleiding. Ik pleit bij deze voor een herinvoering hiervan.

In hoofdstuk 2, *Wat is toeval?*, worden verschillende standpunten besproken, namelijk het causale, het sceptische, het zuivere, het psychologische en tenslotte het religieuze. De "opvallende en verstrekkende conclusie" is dat er "zoveel overeenkomsten bestaan tussen de wetenschappelijke, psychologische en religieuze benadering van het toeval" (bladzijde 59), namelijk dat toeval een dekmantel is voor onze onwetendheid. Dus, "de keuze voor het wetenschappelijke standpunt is, wanneer je het op deze manier bekijkt, ook een geloofsuitspraak, namelijk het geloof dat er geen toeval bestaat omdat alles met elkaar in verbinding staat" (bladzijde 59). Er zijn natuurlijk zeer sterke wetenschappelijke argumenten aan te voeren tegen het negentiende eeuwse determinisme dat Meester vereenzelvigt met "het causale wetenschappelijke standpunt", maar de geïnteresseerde lezer zal hiervoor andere bronnen moeten raadplegen.

De elkaar opvolgende hoofdstukken *Natuurwetenschap*, *Religie en spiritualiteit* en *Religie en wetenschap* gaan in deze geest door, totdat we komen aan wat voor mij het interessantste hoofdstuk is van het boek: *Toeval en evolutie*. Het houdt de geleerden nog altijd bezig of de mensenziel van apen komt. Bij theologische en wetenschappelijke verhan-

delingen let Meester er telkens scherp op dat het kansbegrip goed gehanteerd wordt. Hierin verricht hij verdienstelijk werk. De moderne evolutietheorie zelf komt minder aan bod. Met name mis ik een discussie over de mechanismen die ervoor kunnen zorgen dat de evolutie harder kan gaan lopen dan bij natuurlijke selectie (zie de boeken van Dobzhansky [3] of Boerlijst [2] en de referenties daarin). De conclusie van dit hoofdstuk luidt: "Ten diepste is het een individuele keuze om de evolutie op een wetenschappelijke dan wel op een religieuze manier te beschouwen" (bladzijde 170). Anders dan bij subjectieve kansen vindt de auteur in dit geval diverse standpunten waardevol.

Het leuke van dit boek is de enthousiaste en innemende schrijfstijl. Het gapende gebrek aan diepgang is wellicht te verklaren doordat de auteur zich richt op een publiek dat ik niet ken. Meester is gefixeerd op de evolutie theorie; van de belofte om de relatie tussen wetenschap en geloof als zodanig te bestuderen is weinig terecht gekomen. Dat is jammer, want wetenschap en geloof hebben nog veel met elkaar te bespreken. Het gaat dan over veel meer dan de vraag of de ziel geëvolueerd is. Wat te denken van de directeur van de *Wetenschappelijke Raad voor Onderzoek, Advies en Begeleiding op het Rechte Pad* van Saoedi-Arabië die in 1982 schreef dat de aarde plat is en dat de zon om de aarde draait (zie [7])? Of van het feit dat de

Roomse Kerk pas in 1992, na dertien jaar be raad in pauselijke commissie, erkende dat de aarde bewoog en dat Galileo gelijk had? Hoeveel mensen geloven nog dat de God die de Israëlieten beval alle vrouwen en kinderen in het beloofde land te vermoorden (bijvoorbeeld Deuteronomium 20:16) en maagdelijke meisjes uit aangrenzende gebieden te verkrachten (bijvoorbeeld Numeri 31:17, 18) ook de mensenziel schiep? In Neurenberg zou Hij zijn opgehangen.

Civil Society is een schepping van de Verlichting. De grondgedachte daarbij is dat gezag niet van bovenaf komt, maar van onderop. Staten ontleen hun legitimiteit aan de goedkeuring van hun burgers en niet van een of andere god. De vraag is welke goden zich aan de regels van *Civil Society* willen houden, en of de burgermaatschappij de bevoorrechte positie van kerken ten opzichte van andere vrijetijdsactiviteiten niet moet herzien. Van een wetenschapper die aankondigt over wetenschap en geloof te schrijven, valt het tegen wanneer zijn belangstelling niet verder strekt dan de discussies rond de *evolutieleer* (zo wordt de evolutietheorie in creationistische kringen genoemd). Immers, iemand die religieuze teksten letterlijk wil nemen, heeft veel grotere problemen dan het probleem van de zielsproblematiek in de evolutie. ☞

Het Pseudoniem van God, Ronald Meeester, 336 pagina's, prijs € 14,90, Ten Have Baarn, 2003, ISBN 90-259-5372-7.

Referenties

- 1 P. Bernstein, *Against the Gods; the Remarkable Story of Risk*, Wiley, New York, 1996.
- 2 M. Boerlijst, *Selfstructuring: a Substrate for Evolution*, Universiteit Utrecht, 1994.
- 3 T. Dobzhansky, *Evolution, Genetics and Man*, Wiley, New York, 1967.
- 4 I. Hacking, *The Emergence of Probability: a Philosophical Study of Early Ideas about Probability*, Cambridge University Press, London, 1975.
- 5 P. Martin-Löf, 'On the notion of randomness', *Intuitionism and Proof Theory*, A. Kino and R.E. Vesley (eds), p. 73-78, North-Holland, Amsterdam, 1970.
- 6 C.P. Schnorr, 'Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit', *Lecture Notes in Mathematics* 218, Springer, Berlin, 1970.
- 7 B. Udink, *Achter Mekka*, Meulenhoff, Amsterdam, 1990.
- 8 M. van Lambalgen, *Random Sequences*, proefschrift, Universiteit van Amsterdam, 1987.
- 9 R. von Mises, 'Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung', *Mathematische Zeitschrift* 5 (1919), p. 52-99.
- 10 R. von Mises, *Wahrscheinlichkeit, Statistike und Wahrheit*, Springer, Berlin, 1936.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Alle in de vijfde serie van het NAW verschenen boekbesprekingen zijn te vinden op onze webpagina.

Tevens staat daar een lijst met ter recensie aangeboden congresverslagen en eventueel andere boeken.

Indien u er prijs op stelt een van deze verslagen te bespreken, meld dit dan binnen een maand na verschijnen van dit nummer (bij voorkeur per e-mail) op onderstaand adres.

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.10
Dept. of Math. and Computer Science
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
Webpagina: www.math.rug.nl/revwg/
e-mail: wgreview.win@tue.nl

J. van Mill

The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces

(North-Holland Mathematical Library 64)

Amsterdam: Elsevier, 2001

644 p., prijs €138,-

ISBN 0-444-50557-1

Voor een volledig reguliere topologische ruimte X is $C_p(X)$ de verzameling van alle continue functies $X \rightarrow \mathbf{R}$, voorzien van de topologie van puntsgewijze convergentie, dat wil zeggen, de topologie die $C_p(X)$ erft als deelruimte van de productruimte $\mathbf{R}^X$. Zij $Q = [0,1]^\infty$ de Hilbert-kubus, $s = (0,1)^\infty$ het pseudo-inwendige van Q en $B(Q) = Q \setminus s$ de pseudo-rand van Q . Als nu X een aftelbare, niet-discrete ruimte is met $C_p(X)$ een $F_{\sigma\delta}$ in $\mathbf{R}^X$, dan is $C_p(X)$ homeomorf met het aftelbare product $B(Q)^\infty$ van pseudo-randen van Q .

Dit resultaat van Dobrowolski, Marciszewski en Mogilski uit 1991 vormt de 'rode draad' van het boek dat we hier bespreken, in die zin dat het de aanleiding vormt voor de behandeling van een groot aantal resultaten op uiteenlopende gebieden van de wiskunde, zoals de algemene en oneindig-dimensionale topologie, ANR-theorie, dimensietheorie en beschrijvende verzamelingenleer. Die behandeling mondt uiteindelijk uit in een bewijs van genoemde stelling, maar de expositie gaat veel verder dan hetgeen nodig is voor dat bewijs.

Het boek begint met een hoofdstuk *Basic topology*, met als belangrijkste thema de uitbreiding van functies. De auteur houdt in dat opzicht vast aan de opzet van zijn eerdere boek, *Infinite-dimensional topology, prerequisites and introduction*. Aan de orde komen onder meer de bekende uitbreidingsstellingen van Tietze, Dugundji en Borsuk, maar ook Bing shrinking, inverse limieten en hyperruimten. De echte basisbeginselen van de algemene topologie bevat dit hoofdstuk zeker niet: hiervoor wordt verwezen naar Appendix A.

Het korte tweede hoofdstuk is getiteld *Basic combinatorial topology* en behandelt simplices, simpliciale complexen en nerven van overdekkingen. De vaste-puntstelling van Brouwer wordt er bewezen, met behulp van het Lemma van Sperner.

Dan volgt een uitgebreid hoofdstuk 3, *Basic dimension theory*, over de dimensietheorie van separabel metrische ruimten. Naast de onderwerpen die men standaard aantreft in een boek over dimensietheorie is ook een aantal meer bijzondere resultaten opgenomen over onder meer zogenaamde indecomposable continua en over kleuringen van afbeeldingen. Apart en boeiend is ook een paragraaf met een historische beschouwing over de 'Dimensionsgrad' van Brouwer.

Hoofdstuk 4, *Basic ANR theory*, bevat als toepassing onder meer de Stelling van Curtis-Schori-West: de hyperruimte 2^X van een compactum X is de Hilbert-kubus precies voor Peano continua X .

Hoofdstuk 5 is *Basic infinite-dimensional topology*, over Z -zets, capsets en absorbers. Belangrijkste toepassing met het oog op de stelling van Dobrowolski, Marciszewski en Mogilski is het resultaat dat $B(Q)^\infty$ een $F_{\sigma\delta}$ -absorber is.

Het laatste hoofdstuk van het boek is tevens het enige waarvan de titel niet begint met 'Basic': *Function spaces*. Het eerste deel van het hoofdstuk behandelt de relatie tussen topologische eigenschappen van X en van $C_p(X)$, waarbij beschrijvende aspecten centraal staan. Een eerste observatie is dat X discreet is

dan en slechts dan als $C_p(X) = \mathbf{R}^X$. Als X niet discreet is, dan is $C_p(X)$ geen $G_{\delta\sigma}$ in $\mathbf{R}^X$, maar $C_p(X)$ kan wel een $F_{\sigma\delta}$ zijn, zo leert uitschrijven van de continuïteitsdefinitie voor aftelbare metrizeerbare X . Het boek karakteriseert vervolgens de ruimten X waarvoor $C_p(X)$ een Baire-ruimte is. De titel van de betreffende paragraaf 6.4, *The Baire property in function spaces*, wekt wel heel erg de indruk dat het hier gaat over wat op p. 520 van het boek 'the property of Baire' wordt genoemd en is dus nogal ongelukkig gekozen. Hetzelfde kan gezegd worden van de titel van paragraaf 6.5, waarin functieruimten $C_p(X)$ onderzocht worden voor aftelbare X van een bijzondere vorm, bepaald door een vrij filter op $\mathbf{N}$. Deze X spelen opnieuw een belangrijke rol in de paragraaf met het centrale resultaat van Dobrowolski, Marciszewski en Mogilski. Het tweede deel van het hoofdstuk (voorafgaand aan het centrale resultaat en nog een paragraaf met voorbeelden) bevat resultaten betreffende ℓ -equivalentie en ℓ^* -equivalentie van functieruimten.

Het boek wordt besloten met drie appendices: de al eerder genoemde appendix met de vereiste topologische voorkennis, een appendix met oplossingen van geselecteerde opgaven en tenslotte een appendix met opmerkingen en referenties. Al met al een zeer gedegen werk, dat een beetje een kruising is tussen een leerboek en een 'research monograph'. Zo'n kruising brengt natuurlijk het risico mee dat het eindproduct als leerboek te ver gaat of als research monograph niet ver genoeg. Voor wat betreft het leerboek-aspect heeft de auteur wat mij betreft dit risico niet geheel kunnen vermijden. De eerste vijf hoofdstukken bevatten een dermate grote diversiteit aan 'basics' dat het voor een student soms moeilijk zal zijn het overzicht te bewaren, de gemeenschappelijke noemer van 'Dobrowolski-Marciszewski-Mogilski' ten spijt.

De heldere expositie en een steeds goed gekozen mate van detaillering in de bewijsvoering maken echter in dit opzicht veel goed. De onderzoeker die specifiek geïnteresseerd is in functieruimten zal echter zeer gelukkig zijn met de wijze waarop in dit boek veel elders alleen verspreid voorkomende resultaten zijn opgenomen, gestructureerd en bewerkt.

A.J.M. van Engelen

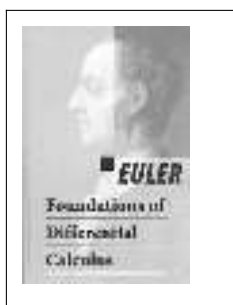
helst: een methode om de verhouding van verdwijnende toenames van met elkaar samenhangende variabelen te bepalen. Hij neemt afstand van het idee van oneindig kleine hoeveelheden. Hij pleit voor toenames die echt nul moeten zijn. Pas dan is de uiteindelijke verhouding bereikt. Uit het feit dat Euler hier (en in de latere hoofdstukken) zoveel aandacht besteedt aan het helemaal verdwijnen van de toenames zelf, geeft aan dat dat bij andere auteurs niet vanzelf spreekt. Tot slot merkt hij op dat alles geheel binnen de zuivere analyse wordt ontwikkeld en dat er dus geen behoefte is aan meetkundige overwegingen. Het boek bevat dan ook geen enkel plaatje.

Het eerste hoofdstuk behandelt eindige differenties van diverse ordes. Verschillende voorbeelden worden uitgewerkt en uitgebouwd tot algemeen geldende patronen. Wat daarbij opvalt is het grote gemak waarmee reeksontwikkelingen voor gebroken en irrationale functies worden gebruikt. Aan het eind van dit hoofdstuk komt het omgekeerde probleem aan de orde: vind bij een gegeven differentie de functie terug. En dat Euler niet vies was van een stevige hoeveelheid rekenwerk is duidelijk te zien: er zijn bladzijden die geheel zijn gevuld door de uitwerking van slechts één expressie.

In de volgende hoofdstukken wordt alles verder uitgebouwd. Pas in hoofdstuk vijf wordt het differentiëren van functies van één variabele behandeld. En dat is wel even wennen. Euler grijpt terug op de uitdrukkingen die in hoofdstuk 1 zijn gevonden en laat hogere machten van differentiaal verdwijnen bij aanwezigheid van de eerste macht. Zo komt hij heel snel tot het bekende $dx^n = nx^{n-1}dx$. Negatieve en gebroken exponenten worden zonder verder commentaar onder deze rekenregel meegenomen en ook de kettingregel is bij deze notatie geen probleem. Bij de productregel verdwijnt weer de hogere orde differentiaalterm. Ook de quotiëntregel wordt geformuleerd.

Ik denk niet dat iemand door het lezen van dit boek zijn didactiek van de differentiaalrekening drastisch zal wijzigen. Maar het is wel erg boeiend om te zien hoe een grootheid uit de beginjaren van deze nieuwe techniek probeert zijn lezers mee te krijgen.

H. Bakker



L. Euler (translated by J.D. Blanton)
Foundations of Differential Calculus

Berlin: Springer-Verlag, 2000

194 p., prijs € 76,95

ISBN 0-387-98534-4

In 1755 publiceerde Leonhard Euler in twee delen *Institutiones calculi differentialis*. Het eerste deel, dat de eerste negen hoofdstukken beslaat, behandelt de theorie van de differentiaalrekening. Het tweede deel, dat de rest van de in totaal 27 hoofdstukken bevat, is gewijd aan de toepassingen van deze theorie. Dit boek bevat de door J.D. Blanton verzorgde engelse vertaling van het eerste deel. De vertaler merkt op dat de oorspronkelijke notatie verrassend modern is. Hij heeft dan ook maar een klein aantal aanpassingen in de presentatie aangebracht.

Euler opent met een zeer uitgebreid voorwoord, waarin hij de lezer probeert duidelijk te maken wat differentiaalrekening be-

Using History to Teach Mathematics An International Perspective

(MAA Notes, 51)

Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 2000

261 p., prijs \$ 32.95

ISBN 0-88385-163-6

What is this book about? Is it new? For whom is it useful? Does it seem reliable? A good buy? The title "Using History to Teach Mathematics" more or less answers the first question, but the title should be understood in a rather inclusive manner. The reader must also be prepared for texts which have nothing to do with mathematics teaching. The fifth and concluding part of the book (107 pages of a total of 273) contains articles about the history of mathematics. Several of these provide useful background knowledge for the mathematics teacher or student but they do not relate to teaching. The other four parts deal with "General ideas on the Use of History in Teaching" (three articles), "Historical Ideas and their Relationship to Pedagogy" (four articles), "Teaching a

Particular Subject Using History" (five articles) and "The Use of History in Teacher Training" (three articles) and these match the title of the book better. As a whole, the volume is based on papers presented at two congresses: the 8th International Congress on Mathematical Education and the Quadrennial Meeting of the History and Pedagogy of Mathematics (HPM) study group, both held in the summer of 1996.

The discussion of novelty and usefulness ends in a balanced answer, as it usually does. The appeal of the arguments strongly depends on the audience. The specialist will recognize many themes and treatments, but these may still be new to the wider audience of teachers and mathematicians. The opening article by Siu is a good example. It is a well-designed overview in the *ABCD-style* of how one can use history in the undergraduate classroom — history provides anecdotes, broad outlines, contents, and a view on the development of mathematics. The topics and the presentation are quite well known, but for someone wanting to enrich a lecture the article may be a welcome source.

As to the selection, the coherence, and the reliability of the material, the editor could have done better. With respect to education, there is an unbalanced emphasis on the undergraduate level. Some of the articles are under the wrong heading, as is the case with "Anomalies and the Development of Mathematical Understanding" which is included under "Teaching a Particular Subject Using History", but which would be more appropriately placed under "General Ideas". Some references still point to the 1996 conference papers, whereas the articles referred to are in the book. Finally, there are a number of errors in the detail. Inconsistencies in dating are not always so small as in Ibn Sina's case, who died in 1037 (p. 167) and in 1039 (p. 79). Grugnetti gives Euler (1707-1793, p. 34) ten years more than Siu (1707-1783, p. 5). Legendre reached a respectable age (1752-1853, p. 80) or should we believe that he died in 1833 (p. 204)? The top is Clifford, with dates (184-1879, p. 207). With a name index maybe some of these errors could have been avoided.

Positive aspects with which to conclude are the sound multicultural balance, the wide historical and mathematical variation of the topics discussed, and the accessibility of most of the articles.

J. van Maanen

Russell. Het hyperoppervlak $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$ is diffeomorf met $\mathbf{R}^6$, maar is niet algebraïsch isomorf met $\mathbf{C}^3$.

De affiene ruimte is zo moeilijk omdat de automorfismengroep van de affiene ruimte zo ingewikkeld is. Naast lineaire en affiene transformaties, bestaan er ook andere inverteerbare polynomiale afbeeldingen. Bijvoorbeeld, wanneer $a_i \in \mathbf{C}^*$ en $f_i(X_{i+1}, \dots, X_n)$ een polynoom is in de variabelen $X_{i+1}, \dots, X_n$ voor alle i , dan definieert

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 X_1 + f_1(X_2, X_3, \dots, X_n) \\ a_2 X_2 + f_2(X_3, \dots, X_n) \\ \vdots \\ a_{n-1} X_{n-1} + f_{n-1}(X_n) \\ a_n X_n + f_n \end{pmatrix}$$

een zogenaamde *Jonquièrre* transformatie. Automorfismen die liggen in de groep voortgebracht door de Jonquièrres en de lineaire automorfismen heten *tam*. Voor $n = 1$ zijn alle automorfismen gegeven door een niet constante lineaire functie. In section 5.1 wordt een stelling van Jung en Van der Kulk bewezen die zegt dat alle automorfismen voor $n = 2$ tam zijn. Voor $n = 3$ is er het volgende voorbeeld van Nagata

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X - 2(XZ + Y^2)Y - (XZ + Y^2)^2 Z \\ Y + (XZ + Y^2)Z \\ Z \end{pmatrix}.$$

Men vermoedt dat dit automorfisme niet tam is, maar tot nu toe is niemand erin geslaagd dit te bewijzen. (In een preprint bewijzen Shostakov en Umirbaev dat Nagata's voorbeeld niet tam is. Voor zover ik weet is dit manuscript nog niet helemaal geverifieerd en nog niet gepubliceerd.) Dit voorbeeld komt uit Appendix F. In deze appendix worden diverse voorbeelden en tegenvoorbeelden opgesomd. Zo'n lijst is handig, omdat een tegenvoorbeeld voor een vermoeden vaak ook gebruikt kan worden om een ander vermoeden te weerleggen.

Een polynomiale afbeelding $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ met $f_i \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ voor alle i heet inverteerbaar wanneer er een andere polynomiale afbeelding $G = (g_1, \dots, g_n)$ bestaat zodat de composities $G \circ F$ en $F \circ G$ de identiteit zijn. Het meest beruchte vermoeden in dit gebied van polynomiale automorfismen is het zogenaamde *Jacobi vermoeden*. Stel dat $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ een polynomiale afbeelding is. Het Jacobi vermoeden zegt dat F inverteerbaar is wanneer de Jacobi determinant

$$JF := \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right)_{i,j}$$

constant en ongelijk 0 is (De omgekeerde implicatie is een eenvoudige opgave.) Het Jacobi vermoeden werd door Steven Smale genoemd als een van de problemen voor dit millennium. Het Jacobi vermoeden werd voor het eerst geformuleerd door Keller in 1939 en is voor $n \geq 2$ nog steeds open. Een belangrijke techniek is de reductie tot eenvoudigere polynomiale afbeeldingen. Bijvoorbeeld, het is genoeg om het Jacobi vermoeden te bewijzen voor alle n en alle polynomiale afbeeldingen in de Druzkowski vorm:

$$\begin{aligned} f_1 &= X_1 + (a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \dots + a_{1,n}X_n)^3 \\ &\vdots \\ f_n &= X_n + (a_{n,1}X_1 + a_{n,2}X_2 + \dots + a_{n,n}X_n)^3. \end{aligned}$$



A. van den Essen
**Polynomial Automorphisms
and the Jacobian Conjecture**
(Progress in Mathematics, 190)
Basel: Birkhäuser, 2000
329 p., prijs €73,-
ISBN 3-7643-6350-9

Er zijn talrijke beruchte open problemen die met de algebraïsche automorfismengroep van de affiene ruimte te maken hebben. Men zou kunnen beweren dat de affiene ruimte de meest gecompliceerde affiene variëteit is. Het is bijvoorbeeld zeer moeilijk om te beslissen of een affiene variëteit isomorf is met de affiene ruimte. Voor $n \leq 2$ kan men $\mathbf{C}^n$ min of meer topologisch karakteriseren, maar voor $n \geq 3$ bestaan er exotische algebraïsche structuren. In section 9.4 beschrijft Van den Essen het volgende voorbeeld van

Er zijn eigenlijk geen boeken op het gebied van polynomiale automorfismen. Dit boek zal dan waarschijnlijk ook meteen een standaardwerk worden. Het aardige is dat een groot aantal resultaten in dit boek bijeen gebracht is. Bijvoorbeeld zijn vele eenvoudige eigenschappen van polynomiale afbeeldingen en lokaal nilpotente derivaties eindelijk in een boek opgeschreven. Daarnaast bevat het boek ook de bewijzen van een aantal belangrijke en soms diepe stellingen, zoals het Markus-Yamabe vermoeden en het LaSalle probleem voor dynamische systemen in dimensie 2 (en tegenvoorbeelden voor dimensie ≥ 3), Robert's tegenvoorbeeld voor Hilbert's veertiende probleem, en de Abhyankar-Moh stelling, die zegt dat wanneer $f(t)$ en $g(t)$ twee polynomen zijn zodat $\mathbb{C}[t] = \mathbb{C}[f(t), g(t)]$, dan is de graad van f een deler van de graad van g of omgekeerd.

Het boek geeft een zeer compleet overzicht van alle resultaten op het gebied van polynomiale automorfismen. Voor onderzoekers op dit gebied, de zogenaamde "Jacobianen", is dit boek een handig naslagwerk met een grote bibliografie. Het boek is ook zeer geschikt voor jonge onderzoekers die zich willen oriënteren op dit gebied. Er is een groot aantal oefeningen. In de appendix worden resultaten van algebra, algebraïsche meetkunde, D -modulen en Gröbner bases behandeld, zodat het boek op zichzelf gelezen kan worden.

H. Derksen

History in Mathematics Education An ICMI Study

(New ICMI Study Series, 6)

Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000

450 p., prijs €173,50

ISBN 0-7923-6399-X

History in Mathematics Education: een monumentaal werk, maar met een zwart randje. Het mag beschouwd worden als de kroon op het werk van John Fauvel, die het samen met Jan van Maanen redigeerde. Maar tegelijk was het een voortijdig sluitstuk van zijn oeuvre. Kort na het verschijnen overleed Fauvel op 53-jarige leeftijd. Hij was een inspirerend voortrekker van een wereldomspannende studiegroep van geschiedenis in het wiskundeonderwijs, zoals onder meer blijkt uit de reacties op zijn overlijden in de nieuwsbrief van de groep. Onder auspiciën van deze studiegroep kwam *History in Mathematics Education* tot stand. Fauvel en Van Maanen, beiden voormalig voorzitter, schreven het discussiestuk voor een studieconferentie die in 1998 in het Franse Luminy gehouden werd. Deelnemers met uiteenlopende achtergronden schreven in elf werkgroepen evenzovele hoofdstukken. *History in Mathematics Education* belicht vanuit diverse invalshoeken heden, wat verleden en ideeën voor de toekomst van het gebied. Het collectieve karakter is zichtbaar in een sporadische overlap in algemene beschouwingen. Samenhang en volledigheid overheersen echter en komen tot uiting in een bijzonder element: de samenvattingen van de hoofdstukken vormen een lopend betoog dat als zodanig in de inleiding te vinden is. De studie toont de bijzondere waarde van geschiedenis voor het wiskundeonderwijs door een veelheid aan materiaal bijeen te brengen. Onderwijzenden en onderwijsontwikkelaars van basisonderwijs tot aan lerarenopleidingen kunnen er hun voordeel mee doen. De ruimte voor deze bespreking is te krap om de inhoud van het werk in meer dan

grote lijnen weer te geven. Naast een inventarisatie van de stand van zaken in het gebruik van geschiedenis en onderzoek daarvan, beslaat het grootste deel concrete voorbeelden en ideeën en analytische perspectieven daarop. Geschiedenis kan op diverse manieren ingezet worden in het wiskundeonderwijs, van het larderen met anekdotes tot aan het gebruik van originele teksten en voorwerpen. Daarmee kunnen diverse (wiskundig-)didactische doelen bereikt worden, van het vergroten van inzicht in concepten en formalismen tot aan reflectie op de culturele waarde van wiskunde. Wat betreft de behandeling van al deze thema's zijn wat mij betreft de latere hoofdstukken in het boek van de hoogste kwaliteit: concrete voorbeelden en heldere, ter zake beschouwingen. Een boek als dit laat zich moeilijk van kaft tot kaft lezen. Hoe te beginnen? De docent zal vanuit het voorbeeldmateriaal van hoofdstukken 8 en 9 naar de — uitstekende — didactische analyse van hoofdstuk 7 willen werken en van daaruit verder naar buiten naar de meer beschouwende hoofdstukken. De beleidsmaker begint bij de openingshoofdstukken over beleid en praktijk en over de programmatische context. Maar ook de gemiddelde lezer van het *Nieuw Archief*, wat verder van het onderwijsveld, zou *History in Mathematics Education* moeten naslaan. In het omstandige pleidooi voor de waarde van de geschiedenis voor de wiskundige vorming nodigt het uit tot een leerzame overdenking van de wiskunde.

F.J. Dijksterhuis

H. Derksen, G. Kemper

Computational Invariant Theory

(Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 130)

Berlin: Springer-Verlag, 2002

268 p., prijs €84,95

ISBN 3-540-43476-3

Invariant Theory has had a mixed history. Its early history is firmly rooted in the late 19th century: this period of *Classical Invariant Theory* culminated in two major papers of David Hilbert, in which he first proved key finiteness theorems concerning invariant rings for classical groups, and then (in answer to criticism from some of his contemporaries) provided constructive methods for determining all invariants for the special and general linear groups. So from the early days, computational methods have been an important part of invariant theory.

After Hilbert, the theory rather went out of fashion, with a feeling that the major problems in the field had been solved and there was nothing interesting left to be said on the subject. Two factors have been instrumental in reviving interest in invariants since the middle of the 20th century: on the one hand, the rise of commutative algebra and algebraic geometry; and on the other, the growing development of computer algebra systems. By now there is a long list of books, articles and lecture notes on modern and classical invariant theory, computational and theoretical, alongside the wider literature on computational commutative algebra. Of these, there is only one which concentrates on algorithmic aspects: Sturmfels's *Algorithms in Invariant Theory* (Springer 1993). The authors of the book under review are careful to explain in the Introduction how their book differs from that of Sturmfels: appearing nine years later, there is new material which has been developed over that period; there is more here about modular invariant theory; and less on classical invariant theory.

I found this book to be very impressive in its scope, accessibility and the quality of writing. Prerequisites are minimal: even basic techniques from computational commutative algebra (Gröbner basis and related algorithms) are explained fully in Chapter 1, though for some of the proofs of this material, the reader is referred to one of the many other excellent books on the subject; and there is an Appendix on Linear Algebraic Groups. The second chapter introduces the main concepts of invariant theory itself, with sections on Reductive Groups, Cohen-Macaulay properties and Hilbert series.

Having set the algorithmic and theoretical groundwork, the heart of the book is in Chapters 3 and 4, which concern the invariant theory of finite groups and then reductive groups. The finite groups chapter complements the books of Benson (1993) and Smith (1995), which give theoretical treatments, by concentrating on computational aspects. Useful information is included on computer algebra packages in which the algorithms described here are implemented (and indeed, on which they have been developed). The second author (Kemper) has played a major part in two of these implementations, the INVAR package for Maple, and the MAGMA invariants package.

Chapter 4, on invariants for Reductive Groups, includes as a special case such classical situations as SL_2 acting on binary forms, but also many other generalizations such as SL_n , GL_n , tori. There is a treatment of Hilbert series, Molien's formula and generalizations, and various results, old and new, on degree bounds for invariants. This material is all illustrated with worked examples and contains full references to the literature.

The last chapter is on applications of invariant theory, with no less than ten fairly short sections on applications from finite group cohomology through coding theory to computer vision. There can be few readers, even amongst those with some prior knowledge of invariant theory, for whom several of these applications will not be new and impressive. One omitted topic is projective geometry, which was covered in the book of Sturmfels (op. cit.). Naturally, none of the applications is covered in great depth, but there is enough here to give a flavour of each, and plenty of references for further reading.

Those wishing to obtain a fuller introduction than the brief summary contained in this review are strongly recommended to read for themselves both the five-page Introduction, and also the chapter on applications. In summary, this beautifully produced book is highly recommended both for experts in invariant theory and newcomers to the field.

J.E. Cremona

A. Baker

Matrix Groups

An Introduction to Lie Group Theory

(Springer Undergraduate Mathematics Series)

Berlin: Springer-Verlag, 2002

330 p., prijs €35,-

ISBN 1-85233-470-3

Lie-groepen zijn gladde variëteiten zodanig dat de groepsbewerkingen gladde afbeeldingen zijn. Een belangrijke klasse van voorbeelden zijn matrixgroepen, zoals $GL(n, \mathbf{R})$, de groep van inverteerbare $n \times n$ -matrices met reële matrixcoëfficiënten, $GL(n, \mathbf{C})$, de groep van inverteerbare $n \times n$ -matrices met complexe ma-

trixcoëfficiënten, en ondergroepen, zoals $SL(n, \mathbf{R})$, respectievelijk $SL(n, \mathbf{C})$, de ondergroep van matrices van determinant 1. Andere voorbeelden zijn de ondergroepen van orthogonale matrices of unitaire matrices. In feite kan heel wat theorie worden ontwikkeld aan de hand van matrixgroepen zonder (al te veel) differentiaalmeetkunde te gebruiken. De raakruimte in de eenheid van een Lie-groep heet een Lie algebra. Dit is een lineaire deelruimte van de ruimte van alle matrices, en bijvoorbeeld voor $SL(n, \mathbf{R})$ vinden we de matrices van spoor 0. Een aantal aspecten van een Lie-groep, zoals ontbindingen en representaties, kan worden bestudeerd aan de hand van corresponderende afgeleide begrippen in de Lie-algebra en de exponentiële functie van de Lie algebra naar de Lie-groep.

In dit boek worden veel van deze matrixgroepen expliciet beschreven, tezamen met de bijbehorende Lie-algebras. Ook worden er enkele voorbeelden van homogene ruimtes gegeven, en worden samenhangs- en overdekkingseigenschappen van bepaalde matrixgroepen beschreven. In de laatste hoofdstukken wordt de classificatie van compacte simpele Lie-groepen gegeven aan de hand van Dynkin-diagrammen. In het algemeen is de stijl elementair, ofschoon niet altijd even duidelijk is wat als voorkennis wordt verondersteld. De overgang naar de laatste hoofdstukken is waarschijnlijk te hoog gegrepen voor de doelgroep. Er wordt dan overgeschakeld naar een hoger tempo, en niet alle beweringen krijgen een bewijs.

De ondertitel van het boek suggereert dat dit boek als een introductie naar Lie-groepentheorie moet worden gezien. Naar mijn mening slaat het boek hier de plank mis. Het is bijvoorbeeld verbazingwekkend dat bij de belangrijke exponentiële afbeelding niet de Baker-Campbell-Hausdorff formule wordt behandeld. Ook een aanzet van de representatietheorie van Lie-groepen ontbreekt volledig, alsmede integratie op Lie-groepen. Belangrijke ontbindingen, zoals de Iwasawa-, de Cartan-, en de Bruhat-ontbinding, worden niet of nauwelijks genoemd, terwijl dat voor de matrixgroepen expliciet uit te werken is.

Voor de lezer die de theorie van Lie-groepen en resultaten van de representatietheorie wil leren, zijn betere bronnen beschikbaar, zoals *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations* van Varadarajan, of, meer recent, *Lie Theory* van Duistermaat en Kolk. Het boek *Lie Groups: An Introduction through Linear Groups* van Rossmann heeft eenzelfde aanpak via matrixgroepen, en slaagt daarin veel beter.

E. Koelink

M. Kreuzer, L. Robbiano

Computational Commutative Algebra 1

Berlin: Springer-Verlag, 2000

321 p., prijs €40,-

ISBN: 3-540-67733-X

Dit boek kan ik direct aanbevelen voor iedereen die met zelfstudie dit onderwerp wil bestuderen. De lange inleidingen, persoonlijke schrijfwijze en de citaten aan het begin van elke paragraaf geven je het gevoel dat de schrijvers persoonlijk tegen je praten. Daarnaast geven de schrijvers zelf al aan dat ze het belangrijk vinden dat elke stelling, lemma en propositie in het boek zelf bewezen wordt. Naast de theorie wordt er ook ruim aandacht besteed aan oefening met de stof. Naast een behoorlijk aantal opgaven staan er bij elke paragraaf zogenaamde *tutorials*: een serie vragen over een

onderwerp die uiteindelijk leidt tot het implementeren van een algoritme. Het is voor het inzicht heel nuttig om niet alleen met de theorie bezig te zijn, maar ook deze programmeeroefeningen te doen. Het geeft overigens wel een behoorlijk grote studielast als je ze allemaal zou willen maken.

Ook als boek bij een college is het om dezelfde redenen geschikt. Het dekt de standaardstof voor een inleidend college commutatieve algebra en er is goed nagedacht over de opbouw en over de keuzes die gemaakt zijn.

Als naslagwerk is het minder aan te bevelen, door het grote aantal opgaven en tutorials en de uitgebreide inleidingen is het veel geschikter om van voor naar achter te lezen dan om er even iets in op te zoeken. Al heeft het boek wel een uitgebreide index en zijn de basisbegrippen vlot terug te vinden.

De positiefste punten aan het boek vind ik dat de schrijvers uitgebreid vertellen welke overwegingen er genomen zijn bij het schrijven van een hoofdstuk en waarom bepaalde keuzes gemaakt zijn plus de persoonlijke sfeer die er opgeroepen wordt. Negatieve punten heb ik niet kunnen vinden. Wel wil ik opmerken dat er redelijk veel aandacht besteed wordt aan het feit dat de tutorials allemaal gemaakt kunnen worden in CoCoA. Zelf zou ik de opgaven maken met een computeralgebrapakket dat ik toch al ken. Maar, voor mensen die nog niet eerder met een computeralgebrapakket gewerkt hebben is het noemen van een specifiek programma (CoCoA) en de uitleg hierover misschien wel nuttig.

M. Honsbeek

H. McKean, V. Moll

Elliptic Curves

Function Theory, Geometry, Arithmetic

Cambridge: Cambridge University Press, 1999

294 p., prijs £22,-

ISBN 0-521-658179

The authors introduce the reader in a very attractive way to the beautiful world of elliptic curves and of the corresponding elliptic integrals and elliptic functions. This rewarding subject combines three fundamental areas of mathematics: function theory, geometry and arithmetic. The book is the well-formed fruit of twenty-five years of teaching by the authors. With an easy mind the reviewer can recommend this book to those who want to become acquainted with the subject and to those who look for a book which can serve as guide for a course on the subject.

After a preparatory chapter, which deals with fractional linear substitutions, projective curves, Riemann surfaces and coverings, the authors introduce elliptic integrals and elliptic functions in chapter 2. The next chapter treats Jacobi's theta functions and then a chapter on the modular group and modular functions follows. Chapter 5 which deals with the icosahedron and quintic equations is followed by a chapter on class fields of imaginary quadratic number fields. In the last chapter the reader is introduced to the arithmetic of elliptic curves by means of the Mordell-Weil-theorem on the rational points of elliptic curves.

To make the reader familiar with the subject matter, the text contains approximately three hundred well chosen exercises. More than twelve pages with references conclude the book.

The exemplary way in which *Elliptic Curves* is written, made reviewing a pleasure.

M. van der Vlugt

Wu Wen-tsun

Mathematics Mechanization

Mechanical Geometry Theorem-Proving, Mechanical Geometry Problem-Solving, and Polynomial Equations-Solving

(Mathematics and its Applications, 489)

Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2001

420 p., prijs €190,-

ISBN 0-7923-5835-X

Wu Wen-Tsun, the author of this book, is a well-known name in computer algebra. He is the honorary director of the Mathematics Mechanization Research Center in Beijing. The characteristic sets he introduced have played an important role in the development of computer algebra. In this book, he describes these and related results and places them in a historical context.

Part I (chapters 1 and 2) of the book is about historical mathematical developments in China. I encourage anyone to read this part, and to read it from the beginning to the end (do not skip any sections, in particular you need the vocabulary introduced in section 1.1). I greatly enjoyed reading this part. The author brings to life the thoughts of mathematicians that lived long ago and far away from the Western world.

Part I also explains the author's motivation to follow the tradition of ancient Chinese mathematics, which aimed at solving real problems in a mechanical way with a 'Shu', what we now would call a formula or an algorithm. Mathematics mechanization or computer algebra fits well in this tradition.

Part II consists of chapters 3, 4 and 5. Mathematical notations are not always standard but it did not take long to get used to this. However, I do think that formulas would have looked better if the book had been typeset with $\text{\TeX}$ or $\text{\LaTeX}$.

In chapter 3 the author introduces extended points (I like extended points and I wonder why they are not more popular), ascending sets, basic sets, characteristic sets. The Char-Set algorithm on page 101 is very elegant. Given a set of polynomial equations, the Char-Set algorithm produces an ascending set called characteristic set. The solutions of the original set of equations generically match solutions of the characteristic set, more precisely, they match outside the set of solutions of initials (leading coefficients). To give a complete description of the solutions, a collection of ascending sets, called the characteristic series, is introduced. The presentation is clear, this is a good text for learning the characteristic sets method.

For (mechanical or traditional) geometry theorem proving, the author notes in chapter 2 that one not only has to consider the generic case but degenerate cases as well. This closely matches the situation of a characteristic series where the generic solutions are given by one ascending set, and the degenerate solutions with a sequence of additional ascending sets.

Chapter 4 discusses the 'well behaved basis' of a polynomial ideal, which has properties similar to Groebner basis, but is constructed in a different way, following results of Riquier and Janet.

Section 4.5 discusses the problem of factorization of multivariate polynomials. This problem is reduced to a computationally far more expensive problem, namely polynomial system solving. This is very strange because more efficient methods for multivariate factorization based on Hensel lifting are well known.

Chapter 5 discusses some topics in algebraic geometry, like the

Chow form, Chern classes and quasi-varieties. The latter objects are natural to consider in this book's context; the description of a variety by means of a characteristic series in chapter 3 was also of this form. Theorem 4.1 says that the projection of a quasi-variety is again a quasi-variety that can be determined algorithmically.

Part III (chapters 6, 7, 8) is on applications and examples. Section 6.1 discusses polynomial system solving and a few methods are discussed to reduce the expression swell in the computation. Inexact coefficients are discussed in section 6.2 but it is not clear if this leads to a practical algorithm. The remaining sections, as well as chapters 7 and 8, give examples of applications.

Chapter 7 discusses applications to geometry theorem proving. This is an area where the characteristic sets method has been particularly successful. In fact, the author introduced the characteristic sets method in his 1978 paper precisely for this purpose. The author credits Hilbert, Descartes, Tarski, the ancient Chinese, and others for contributions to mechanical geometry theorem proving. However, the author himself deserves much credit for his discovery that mechanical theorem proving can really be done in practice. This was a major and very influential discovery that sparked a lot of interest in polynomial system solving and in computer algebra in general. In this book this work is placed in a historical context.

M. van Hoeij

R. Kiehl, R. Weissauer

Weil Conjectures, Perverse Sheaves and l -adic Fourier Transform

(*Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, 42*), Berlin: Springer-Verlag, 2001, 375 p., prijs €105,- ISBN 3-540-41457-6

Laten we beginnen met een korte uitleg van de woorden in de titel. De Weilvermoedens, tegenwoordig stellingen, betreffen eigenschappen van de aantallen punten van algebraïsche variëteiten over eindige lichamen, gecodeerd als eenvoudige uitspraken omtrent genererende machtreeksen (zeta- en L -functies). Perverse schoven zijn geen schoven maar complexen daarvan, gebruikt onder andere voor Poincaré dualiteit op singuliere variëteiten, en analoog aan reguliere holonome D -modulen. De l -adische Fouriertransformatie is een operatie op complexen van l -adische schoven op de affiene lijn, analoog aan de gebruikelijke transformatie op functies.

Het te bespreken boek is een vervolg op *Etale cohomology and the Weil conjecture*, geschreven door Freitag en Kiehl (Springer-Verlag, 1988), dat een overzicht geeft van étale cohomologie (Grothendieck, Artin, Verdier, en anderen), en het bewijs van de Weilvermoedens (Grothendieck, Deligne), eindigend met het beroemde artikel *Weil I* van Deligne (1974).

Dit vervolg gaat uit van het standpunt dat het natuurlijk kader voor Deligne's algemene theorie van gewichten (*Weil II*, 1980) gegeven wordt door de theorieën van l -adische Fouriertransformatie (Deligne, Laumon) en perverse schoven (Beilinson, Bernstein, Deligne, Gabber). Hoofdstuk 1 geeft een bewijs van de gegeneraliseerde Weilvermoedens, naar Deligne en Laumon. Hoofdstuk 2 behandelt de technische gereedschappen (afgeleide categorieën, t -structuren, dualiteit) voor hoofdstuk 3 (perverse schoven). Hoofdstuk 4 bevat een bewijs van "Hard Lefschetz"

dat gebruik maakt van de Brylinski-Radon-transformatie. Hoofdstuk 5 geeft toepassingen op goniometrische sommen. Het lange hoofdstuk 6 (70 pagina's) beschrijft verschillende constructies van Springers (onze landgenoot!) representaties van Weyl-groepen.

Het boek bevat geen nieuwe resultaten, maar geeft een goed en zeer nuttig overzicht van de behandelde stof, die uitstekend als inleiding tot deze materie kan dienen. In een eventuele volgende uitgave zouden de auteurs of de uitgever er goed aan doen de tekstopmaak te verbeteren: tekst in formules is consequent niet als zodanig gezet, en zelfs in de titel zit een storende fout.

B. Edixhoven

Topics on Riemann Surfaces and Fuchsian Groups

(*London Mathematical Society Lecture Note Series, 287*)

Cambridge: Cambridge University Press, 2001

177 p., prijs £24,95

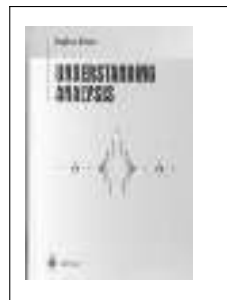
ISBN 0-521-00350-4

Volgens het voorwoord zijn de artikelen in deze band gebaseerd op voordrachten op een conferentie die in 1998 in Madrid werd gehouden. Het niveau van de conferentie was 'instructional'. De meeste bijdragen geven een inleiding tot een bepaald onderwerp, zonder precieze bewijzen. Onder de onderwerpen die aan bod komen zijn Fuchs-groepen, Belyi functies en moduli van reële krommen.

Sommige bijdragen zijn heel aardig, al zou men naar mijn smaak wat scheutiger mogen zijn met verwijzingen naar de literatuur. Over de hele linie kan dit boek me echter maar matig boeien. Van sommige bijdragen vraag je je af wat de motivatie is. Zo is er een artikel over het verband tussen compacte Riemann oppervlakken en functielichamen. Behalve dat er een expliciet voorbeeld wordt doorgerekend heeft dit niets toe te voegen aan wat al in vele tekstboeken te vinden is.

Eveneens teleurstellend vond ik het artikel over het Schottky-probleem. Dit is een fascinerend onderwerp, waar uitstekende literatuur over is (Beauville, Van der Geer, en anderen). De auteur, R. Silhol, beperkt de discussie tot krommen van geslacht ≤ 4 en slaagt er niet in om enthousiasme voor dit onderwerp over te brengen. Dan kun je beter Mumfords *Curves and their Jacobians* lezen.

B. Moonen



S.D. Abbott

Understanding Analysis

(*Undergraduate Texts in Mathematics*)

Berlin: Springer-Verlag, 2001

257 p., prijs €49,95

ISBN 0-387-95060-5

Het te bespreken boek is bedoeld als een inleiding tot de reële analyse; het zou gebruikt kunnen worden bij een cursus van één semester. Meer voorkennis dan calculus van één variabele is niet vereist. De acht hoofdstukken heten achtereenvolgens: de reële getallen, rijen en reeksen, eenvoudige topologie op $\mathbb{R}$, limieten en

continuïteit, de afgeleide functie, rijen en reeksen van functies, de Riemann-integraal en 'overige onderwerpen'.

De opzet van het boek is ietwat ongebruikelijk. Ieder hoofdstuk begint met een paragraaf waarin middels voorbeelden en vragen (gelardeerd met geschiedenis) alvast wat gevoel voor het probleem gekweekt wordt, zonder direct aan de slag te gaan met stellingen en bewijzen. Deze volgen later, vergezeld van opgaven. Als afsluiting volgt steeds een epiloog, waarin de zojuist ontwikkelde theorie nog eens wordt samengevat. Vaak worden hier nog andere resultaten in dezelfde richting vermeld, om te laten zien wat er wel en niet kan.

De doelgroep van de schrijver is dan ook de student "die wil weten hoe het verhaaltje afloopt". Nieuwsgierigheid opwekken, de lezer uitdagen, wiskundige intuïtie verbeteren: mijns inziens is dit zeer goed gelukt.

Ook voor de student die op zoek is naar een onderwerp voor een werkstuk is er genoeg te vinden. Bevat de Cantor-verzameling irrationele getallen? Is iedere oneindig vaak differentieerbare functie limiet van een Taylor reeks? Bestaan er continue functies die nergens differentieerbaar zijn? Dit zijn nog maar enkele voorbeelden van vele.

Het enige minpuntje dat ik kon ontdekken, is een paragraaf in het laatste hoofdstuk waarin de gegeneraliseerde Riemann-integraal besproken wordt. Deze heeft voordelen ten opzichte van de Lebesgue-integraal (die in het boek amper besproken wordt), maar dit is niet relevant voor de beginnende student. En daar was het boek nu juist voor geschreven. Mijn advies: gewoon dat stukje overslaan.

Al met al is het een prachtig boek. Mocht U nog op zoek zijn naar een boek voor een cursus reële analyse: zoek niet verder. Uw studenten zullen U dankbaar zijn.

O. Lemmers

T.A. Driscoll, L.N. Trefethen

Schwarz-Christoffel Mapping

(Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics)

Cambridge: Cambridge University Press, 2002

132 p., prijs £30,-

ISBN 0-521-80726-3

In 1867 publiceerde E.B. Christoffel in een artikel over stationaire temperatuurverdeling op vlakke geleiders, de volgende opmerkelijke stelling.

Zij f een conforme afbeelding van het bovenhalvlak op een veelhoek; dan is de afgeleide van de logaritme van de afgeleide van f (d.w.z. het quotiënt van de tweede en de eerste afgeleide van f), een rationale functie met enkelvoudige polen die liggen in de originelen onder f van de hoekpunten van die veelhoek.

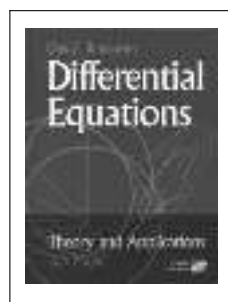
Onafhankelijk van Christoffel bewees A.H. Schwarz enige tijd later (en op een andere manier) hetzelfde resultaat. De door Schwarz gevolgde methode is in veel leerboeken over functietheorie te vinden. Ondanks het feit dat Christoffel eerder was dan Schwarz wordt tegenwoordig steeds over Schwarz-Christoffel afbeeldingen gesproken. In de achter ons liggende honderddertig jaar zijn er veel variaties van en generalisaties op dit thema bedacht. (Afbeeldingen van de schijf of van een strook of van een rechthoek op een veelhoek; afbeeldingen op een deel van het vlak begrensd door cirkelbogen of nog algemenere krommen). Het door Schwarz in verband met dit probleem ontwikkelde spie-

gelingsprincipe is een eigen leven gaan leiden en heeft zeer veel toepassingen gevonden.

Door de resultaten van Christoffel en Schwarz is het bepalen van conforme afbeeldingen op veelhoeken teruggebracht tot het bepalen van integralen van producten van zekere machten van functies van de vorm $z \mapsto (z - a)$; het probleem hierbij is dat de parameters a niet vrij te kiezen zijn. Het zijn zoals eerder opgemerkt, de originelen van de hoekpunten van de veelhoek. Het berekenen van de parameters is het onderwerp van dit boek. Trefethen heeft gedurende de afgelopen jaren belangrijke bijdragen geleverd bij het ontwikkelen van numerieke methoden om bij voorgeschreven veelhoeken de parameters te bepalen.

De auteurs stippen de complicaties aan die kunnen optreden bij die berekeningen, en zij geven software pakketten waar ieder zelf mee aan de slag kan gaan. Voor wiskundigen is het een beetje onbevredigend dat slechts oppervlakkig aandacht besteed wordt aan zowel de complexe functietheorie als de numerieke wiskunde. Het boekje krijgt zo het karakter van een receptenbundel. In de tekst staan zeer veel zeer goed verzorgde figuren die zoals de schrijvers met nadruk vermelden, allemaal 'quantitatively correct' zijn. Al met al denk ik dat de schrijvers zich in de eerste plaats richten tot gebruikers van concrete conforme afbeeldingen. Voor die groep lijkt dit boek mij erg nuttig.

R.A. Kortram



D. Betounes

Differential Equations Theory and Applications, with Maple

Berlin: Springer-Verlag, 2001

680 p. (met cd-rom), prijs €84,95

ISBN 0-387-95140-7

Dit boek behandelt de beginselen van de theorie van differentiaalvergelijkingen. Meest opvallend is dat een cd-rom is bijgeleverd met Maple worksheets. De meeste theorie in het boek is standaard, zoals de existentie en de uniciteit van de 'flow', linearisatie van differentiaalvergelijkingen, Liapunov-functies, et cetera. Deze theorie is ook uitstekend weergegeven in het boek *Differential equations, dynamical systems and linear algebra* van Hirsch en Smale. Het verschil met dit boek zit hem vooral in de laatste hoofdstukken, waarin integreerbare systemen, Newtoniaanse mechanica en Hamiltoniaanse systemen uitgebreid worden behandeld.

Het boek is erg ruim van opzet, en lijkt vooral geschikt als cursusboek voor natuurkundigen. Het boek bevat volledige bewijzen van alle stellingen, en verder veel voorbeelden en opgaven. Mensen die houden van een iets beknoptere tekst, met iets meer diepgang zullen waarschijnlijk het bovengenoemde boek van Hirsch en Smale meer waarderen.

De cd-rom met Maple worksheets is gemaakt voor Maple 5 en 6, en werkt ook prima in Maple 7. De worksheets zijn mooi opgezet, met veel uitleg, en alle programmaatjes zijn zichtbaar en te veranderen. Met deze cd-rom kunnen studenten snel een beetje wegwijs raken in Maple. Voor een practicum is hij echter niet geschikt, want alle voorbeelden zijn volledig uitgewerkt. De cd kan hooguit gebruikt worden als een startpunt voor een practicum, waarbij de docent aanvullende opgaven maakt.

M. Berkenbosch

Numerical Analysis 2000 Volume 1 to 7

Amsterdam: Elsevier, 2000-2001

3.500 p., prijs €472,-

ISBN 0-444-50686-1

The first time that I heard about the idea to publish a multi-volume series of books covering the most important developments in the field of Numerical Analysis (starting with the 1928 paper by Courant, Friedrichs and Lewy) must have been in autumn 1999. Thinking about that now, I am impressed that such an ambitious project was, on the one hand, still in a preliminary stage in autumn 1999, whilst on the other hand completed in March 2001.

A project with the title *Numerical Analysis 2000* can rightfully be called ambitious. Maybe it should also be called impossible: no series of books pretending to cover the developments of an entire area in mathematics is likely to get the support of the entire community belonging to that area. Subject to personal taste and unpredictable trends and irks, choices need to be made by a relatively small number of people.

The editors identified seven main subfields for their volumes: Approximation Theory, Interpolation and Extrapolation, Linear Algebra, Nonlinear Equations and Optimization, Quadrature and Orthogonal Polynomials, Ordinary Differential and Integral Equations, and Partial Differential Equations. Indeed, virtually every paper in numerical analysis can, maybe with some re-interpretation, be classified in one of those categories. But, how to fill the separate volumes with a content that seems right to most of the people working in the field? One can choose for different styles, for example monographs, reviews, or even, relatively safely and simply, for reprinting papers that have proved their impact already and intertwining those with historical comments.

The editors chose to have both historical papers and survey papers as well as papers containing recent advances. This makes a rather awkward mix.

Having said the above, I will now state some points of criticism, or rather opinions, of which I admit they are rather personal, but which might be shared by others:

The editors should have opted for historical and survey papers only, about subfields that have proved their relevance. New research papers, and particularly those that will appear truly original and relevant in the end, might find a wider and more appreciative audience in high quality, high impact journals rather than hidden in a series in which the average reader may not expect them.

The editors could have taken more time to think about the actual contents of the volumes. One needs distance to appreciate the real value of things, and the twentieth century is not bound to run away.

With these comments I express my opinion that I feel that as a series, or better as a work of reference, the project has failed. Moreover, the claim that the series is "an authoritative, indispensable source of knowledge for the next millennium", as mentioned on the Elsevier website seems slightly awkward, because, surprisingly, there is no subject index, nor a list of keywords. This is quite an interesting lack, one which I have difficulty to comprehend. My opinion is even strengthened when I compare *Numerical*

Analysis 2000 to two other series that have similar aims, the *Handbook of Numerical Analysis*, eleven volumes to date, edited by P.G. Ciarlet and J.L. Lions, published by Elsevier, and *Acta Numerica*, twelve volumes to date, edited by A. Iserles, published by Cambridge University Press.

The *Handbooks* are expository in style, and came from an initiative of the editors dating back to 1984. The first volume appeared no sooner than six years later. Compared to *Numerical Analysis 2000* they have a uniform monograph/textbook style of writing with full indexing and referencing, and they cover topics from scratch but in depth. As with the authors of the review papers in *Numerical Analysis 2000*, the authors of the *Handbooks* are well-known experts in the fields, but, other than *Numerical Analysis 2000*, exclusively so. *Acta Numerica* is a series with high-quality survey papers only, of which the topics are chosen by an impressive editorial board that scrutinizes the development of the field, and invites distinguished authors to contribute to the yearly volumes.

So, both the *Handbooks* and *Acta Numerica* have my preference as a series in numerical analysis highlighting the most important developments in the field. However, this does not disqualify *Numerical Analysis 2000*. Having carefully read all sixteen papers that also appeared in a separate hardback volume *Numerical Analysis: Historical Developments in the 20th Century* (Elsevier, 2001) I came to the conclusion that, with the odd exception, they are of high quality and a pleasure to read. Apart from those sixteen, I also read the papers of volumes 1,3,6 and 7 in rather much detail and can recommend the majority of them. The papers in the remaining volumes, being outside my own area of research, I can not fully judge, although my overall impression is that most of the authors have done their best to write intelligible papers.

Therefore, in my opinion, *Numerical Analysis 2000* most resembles seven volumes of conference proceedings: each volume contains a number of plenary and invited talks turned into good papers, but also papers of which the future impact is at present rather obscure. The only thing that keeps them together is their common topic.

J.H. Brandts



T. Cebeci, J. Cousteix
**Modeling and Computation of
Boundary-Layer Flows
Laminar, Turbulent and Transitional
Boundary Layers in Incompressible
Flows**

Berlin: Springer-Verlag, 1999

469 p., prijs Euro 99,95

ISBN 3-540-65010-5

Er is bijna een eeuw verstreken tussen Prandtl's 'ontdekking' in 1904 van de grenslaag (een dunne laag in een stroming vlak langs het oppervlak van een omstroomd voorwerp) en het verschijnen van het voorliggende boek in 1999, met daarin een diepgaand overzicht over het modelleren en berekenen van grenslaagstromingen. Grenslagen zijn bestudeerd in een vrijwel exclusief Europese traditie, inclusief een belangrijke Nederlandse bijdrage. Een van de auteurs, Jean Cousteix, komt uit de Franse school met jarenlange ervaring op het onderzoeksinstituut ONERA. Tuncer Cebeci, geboren in de Oude Wereld, propageert in de Nieuwe We-

reld het gebruik van grenslaagmodellen bij aerodynamische stromingsberekeningen (in dienst van de vliegtuigfabrikant McDonnell Douglas). Hij is hiermee een witte raaf tussen zijn getallenkrakende collega's die zich, profiterend van de krachtige computers in de Verenigde Staten, op het oplossen van de Navier-Stokes vergelijkingen hebben gestort. Europa heeft minder 'rekenintelligentie' tot zijn beschikking en moet derhalve meer de 'menselijke intelligentie' aanspreken.

Het grenslaagconcept verdeelt een stroming in gebieden waar viscositeit al dan niet een rol speelt, waarbij in ieder gebied zo eenvoudig mogelijke vergelijkingen worden toegepast. Op deze wijze zijn berekeningen gebaseerd op het grenslaagconcept zo'n twee ordes goedkoper dan de brute-kracht Navier-Stokes berekeningen; toch zijn de uitkomsten in veel situaties even waardevol. Daarom fungeren ze ook in het moderne computertijdperk nog altijd als 'werkpaard' bij het aerodynamisch ontwerp. Pas wanneer grote recirculatiegebieden in de stroming optreden is het aan de orde om de volledige Navier-Stokes vergelijkingen toe te passen, mits daarbij ook de turbulentie voldoende nauwkeurig gemodelleerd wordt (en dit laatste is nog steeds een zeer grote uitdaging!).

Het boek geeft een uitgebreide behandeling van de modellering en berekening van onsamendrukbare grenslaagstromingen. Ook 'klassieke' methoden vinden hun plaats. Zo wordt Pohlhausen's methode uit de jaren twintig, terecht, nog met verve beschreven, terwijl deze in de nieuwste versie van Schlichting's 'Boundary Layer Theory' geschrapt is (Schlichting and Gersten, Springer-Verlag, 2001). Alle hedendaagse modellen en methoden komen aan de orde, zowel integraal- als differentiaalformuleringen. De numerieke discretisatie van de grenslaagvergelijkingen wordt gedetailleerd behandeld. Veel (Fortran) subroutines zijn opgenomen, waardoor studenten snel zelf een grenslaagprogramma in elkaar kunnen zetten. Ook bevat het boek een veelheid aan huiswerkopgaven, geschikt voor het leslokaal. Een begeleidende uitgave met de uitwerkingen van deze opgaven is beschikbaar.

Het boek eindigt met de (numerieke) behandeling van de interactie tussen de viskeuze grenslaag en de niet-viskeuze buitenstroming. Hiermee zijn alle ingrediënten behandeld die nodig zijn om stromingen uit de praktijk door te rekenen. En inderdaad, Cebece heeft een vervolgbok geschreven over de ingenieurspraktijk, *An Engineering Approach to the Calculation of Aerodynamic Flows* (Springer-Verlag, 1999), dat begint waar het voorliggende boek ophoudt.

A.E.P. Veldman

S. van de Geer

Empirical Processes in M -Estimation

(Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics)

Cambridge: Cambridge University Press, 2000

298 p., prijs £42,50

ISBN 0-521-65002

This book is about applications of empirical process theory to nonparametric M -estimation, with special emphasis on maximum likelihood estimators and least squares estimators. In Chapter 1 the author gives a brief introduction to the type of statistical estimation problems she will consider. Entropy numbers (with and without bracketing) for classes of functions G in various metrics, such as the $L_p(Q)$ -metric for a measure Q on the sample space, are defined in chapter 2. Kolmogorov and Tikhomirov

(1959) were the first to compute entropy numbers in function spaces with the supremum metric; other important cases like Sobolev classes of functions were treated by Birman and Solomjak (1967). These two early references are at the basis of chapter 2.

Chapter 3 is concerned with uniform laws of large numbers, which are valid if the envelope function of G is in $L_1(P)$ and a condition on the random entropy with respect to the $L_1(P_n)$ norm is satisfied; here P is a probability measure and P_n denotes the empirical distribution based on the data. Consistency of nonparametric maximum likelihood estimators in the Hellinger distance and of least squares estimators in various regression models, under entropy conditions are given in chapter 4. Loosely speaking one can say that if the parameter space is not too large in the sense of entropy, consistent estimation is possible.

In chapter 5 it is proved that the increments of an empirical process behave like the integral of the (square root) entropy (with bracketing). Application of this fairly technical result yields uniform central limit theorems for empirical processes in chapter 6. Rates of convergence of maximum likelihood estimators for various classes of densities, such as smooth densities in a Sobolev space or the class of decreasing densities, are derived in chapter 7.

The general case of independent, non-identically distributed random variables is considered in chapter 8, where the author highlights an exponential probability inequality (due to J. Kuelbs) for weighted sums of independent random variables, which are assumed to be uniformly sub-Gaussian. This chapter also briefly deals with dependent variables (martingales) and gives an application to maximum likelihood.

Rates of convergence for least squares estimators in various regression models are derived in chapter 9, using the results obtained in chapter 8. The sub-Gaussian errors assumption is relaxed to errors with exponential tails, provided stronger entropy conditions (entropy with bracketing) are imposed.

Penalized least squares estimators in regression models are the topic of chapter 10. The penalty is on the complexity or roughness of the model, for instance, by penalizing a function in a Sobolev space one obtains the penalized smoothing spline estimator. Penalized maximum likelihood and least squares on sieves are investigated; a sieve is an approximation of the parameter space by a space with smaller entropy. These estimators are the really fruitful ones for statistical applications, as they require no a priori knowledge of certain constants, like the roughness penalty.

Applications to semiparametric models are considered in Chapter 11. Partial linear models, mixture models and a single-indexed model with binary explanatory variable are treated. Penalized quasi-likelihood estimation is introduced, the partial splines estimate occurring in the partial linear model and the penalized maximum likelihood estimator in a partially linear binary choice model are shown to be special cases, and rates of convergence for these estimates are derived.

The general class of M -estimators, covering maximum likelihood and least squares estimators as special cases, are the topic of the final chapter 12. As in previous chapters, a 'basic inequality', which relates the squared distance between the estimator and the true parameter to an empirical process, and the behaviour of the increments of empirical processes are the main tools to obtain rates of convergence for M -estimators. This is done for the regression problem using a general loss function and for the classical case of a finite dimensional parameter space.

The basic probabilistic tool employed in this book is empirical process theory. The relation between the rate of convergence of M -estimators and the complexity of the parameter space (measured by its entropy) is the author's general theme. Many interesting examples arising in modern statistical practice are discussed, such as the Grenander estimator (for estimating a monotone density), partial linear models, mixture models, interval censoring, convolution models and image analysis.

In summary, this excellent book will be extremely useful for graduate students and researchers in the general area of nonparametric estimation. It is a welcome addition to the existing literature and certainly recommended.

R. Helmers

Z.Y. Huang, J.A. Yan

Introduction to Infinite Dimensional Stochastic Analysis

(Mathematics and its Applications, 502)

Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2001

302 p., prijs €109,50

ISBN 0-7923-6208-X

This book, written by two experienced authors from the field of infinite dimensional stochastic analysis, presents and compares two different approaches to the field.

One of the most fruitful directions in infinite dimensional analysis is the field of infinite dimensional integration theory. In 1923 N. Wiener constructed a probability measure on the space of all continuous functions, the so-called Wiener measure. In the 1940's Cameron and Martin proved that the Wiener measure is quasi-invariant when translated by functions with a square integrable derivative. This approach leads to a differential calculus on path space, the so-called Malliavin calculus, which is one of the two main focuses of the book under review.

In 1975, T. Hida started the so-called white noise analysis. Here Gaussian white noise is defined to be the derivative of Brownian motion in distribution sense. With successful applications to Feynman integrals and quantum field theory, white noise analysis has increasingly attracted the attention of theoretical physicists. White noise analysis and its relationship with Malliavin calculus is the other main topic of the book.

The book comprises five chapters. The first chapter collects useful basic knowledge on infinite dimensional analysis, including linear operators on Hilbert spaces, Fock spaces, and completely normed spaces. The second chapter develops Malliavin calculus. It presents chaos decomposition for functionals of Gaussian probability spaces, the important Ornstein-Uhlenbeck semigroup, and Meyer's inequality. In the third chapter Malliavin calculus is applied to obtain, among others, Malliavin's celebrated proof of Hörmander's theorem. In chapter four the focus changes to white noise analysis. The general theory is developed and applications to Feynman integrals, $P(\phi)_2$ -quantum fields, and local times of self-intersections of Brownian motion are briefly discussed. The last chapter deals with the more recent and more advanced technical development of the Hida calculus.

The book is well written and by and large nicely structured. Moreover, it is one of the few, if not the only, book

that treats both Malliavin calculus and white noise analysis. Unfortunately, the book is spoiled by careless handling by the publishers. The English has not been looked over and the text

has not even been spell-checked (e.g., there are three different spellings of the word 'operator' on the first 15 pages). The layout sometimes looks funny, e.g. the headline of Chapter II.1 is found on the bottom of page 59, while the text starts on page 60. However, I am firmly convinced that the book will become a standard reference for experts in the field of stochastic analysis.

M. Lowe

N. Limnios, G. Oprişan

Semi-Markov Processes and Reliability

Basel: Birkhäuser, 2001

229 p., prijs €140,-

ISBN 0-8176-4196-3

Semi-Markov processes form an important class of continuous time processes and are obtained from a temporally homogeneous Markov chain (the skeleton) by associating with each pair of states (x, y) a conditional distribution Q_{xy} describing the conditional sojourn time in x whenever this state is entered and the subsequent transition is to y . If all Q_{xy} are exponential distributions with a parameter only depending on x , the semi-Markov process is in fact a Markov jump process. Directly related to a semi-Markov process is the sequence of transition (jump) times which together with the skeleton chain forms a so-called Markov renewal process or Markov-additive process. It is a natural generalization of a classical renewal process in that the increment distributions are no longer independent identically distributed but conditionally independent with conditional distributions drawn from the set $\{Q_{xy}\}$. Its intrinsic properties are analyzed within the framework of Markov renewal theory. Semi-Markov processes and their associated Markov renewal processes are of great importance in various fields of Applied Probability like queueing, risk or reliability theory. Their use in the last mentioned area forms the main topic of the book by Limnios and Oprişan. After a short introduction of some important types of stochastic processes (chapter 1) the subsequent three chapters are devoted to the development of the basic results on Markov renewal processes, semi-Markov processes and some functionals typically arising in applications. The final two chapters are then devoted to reliability models based on these processes. The book may be of some interest to all readers who are working in reliability and interested in semi-Markov modeling.

G. Alsmeyer

J. Buchmann

Introduction to Cryptography

(Undergraduate Texts in Mathematic)

Berlin: Springer 2002

281 p., prijs €29,95

ISBN 0-387-95034-6

This book was originally published in German (Springer-Verlag, 1999) Books with similar content are Koblitz's *A Course in Number Theory and Cryptography* (Springer-Verlag, 1994) and *Algebraic Aspects of Cryptography* (Springer-Verlag, 1998) and Stinson's *Cryptography — Theory and Practice* (CRC Press, 1995). The book is written for "readers who want to learn about modern cryptographic algorithms and their mathematical foundation but who do not have the necessary mathematical background" (citation from the

preface). It is based on a course about cryptography, that Buchmann held for students of computer science.

At the beginning the author explains some basic algebra, for example the Euclidian algorithm, computing 'modulo n ', little Fermat, the Chinese remainder theorem, the Euler phi function, the structure of finite fields, etc. The exposition is very down-to-earth and Buchmann's focus is on the integers.

The cryptographical part of the book starts with the definition of encryption schemes and some historical examples, for example affine ciphers and their cryptanalysis. Very briefly the DES algorithm is presented. The author avoids explaining attacks like differential cryptanalysis. There's a chapter about prime numbers including the Miller-Rabin primality test.

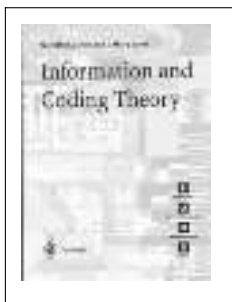
A major part of the book is about public-key cryptosystems. Among others, the RSA and the El Gamal cryptosystem serve as examples. In this context factoring and solving discrete logarithms are discussed. The author sketches the quadratic sieve algorithm and some generic methods for solving the discrete logarithm problem. Also a sketch of the index calculus method is given.

Buchmann left out encryption and signature algorithms using elliptic curves. He does mention elliptic curves, but the section about elliptic curves is far from being worked out. It is unproportionately short compared with the significance of elliptic curve cryptosystems in practice.

The book is completed by a discussion of hash functions including some theoretical examples, identification protocols and public key infrastructures. It includes 158 exercises. The reader finds solutions for about half of the exercises in the appendix of the book.

Buchmann has a very conceptual approach to the subjects presented in his book. Mostly he avoids difficult formalism. Instead, he concentrates on the ideas. This makes the book very readable for the beginner. However, there is a certain lack of depth and completeness from the point of view of a more advanced reader. People interested in elliptic curves should rather consult the books by Koblitz.

R. Carls

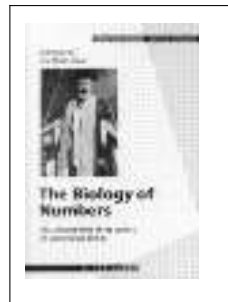


G.A. Jones, J.M. Jones
Information and Coding Theory
 (Springer Undergraduate Mathematics Series)
 Berlin: Springer-Verlag, 2000
 210 p., prijs €32,45
 ISBN 1-85233-622-6

Dit boekje presenteert in zeven hoofdstukken de eerste beginselen van de informatie- en coderingstheorie. De eerste vier hoofdstukken behandelen standaardbegrippen uit de informatietheorie zoals source coding, Huffman codes, entropy, mutual information. Hoofdstuk vijf presenteert Shannon's belangrijke stelling dat de capaciteit van een binair symmetrisch kanaal bereikt kan worden door gebruik te maken van zeer lange blokcodes. Het bewijs wordt gecompleteerd in de Appendix. Al deze resultaten zijn terug te vinden in Shannon's originele tekst uit 1948, nog steeds beschikbaar in herdruk (The mathematical theory of communi-

cation, University of Illinois Press), half zo duur en veel leuker om te lezen. De coderingstheorie komt niet echt van de grond in de laatste twee hoofdstukken. Het boekje is keurig verzorgd en leesbaar voor lagerejaars studenten, maar biedt te weinig. Op dit niveau zijn tal van tutorials te vinden op het web. Voor aanschaf van een echt boek over informatietheorie is bijvoorbeeld *Information Theory* van de auteurs Csiszar en Korner te overwegen. En voor coderingstheorie *Introduction to Coding Theory* door Van Lint.

I. Duursma



G. Israel, A. Millán Gasca
The Biology of Numbers: The Correspondence of Vito Volterra on Mathematical Biology

Basel: Birkhäuser, 2001
 405 p., prijs €74,-
 ISBN 3-7643-6514-5

The Biology of Numbers is een wat misleidende titel, want dit boek gaat niet over de biologie van getallen, maar over de getallen van de biologie, dat wil zeggen over het wiskundig modelleren van biologische verschijnselen. Op zich een passend onderwerp in deze tijd waarin de wiskunde en de biologie weer elkaars toenadering zoeken. *The Biology of Numbers* gaat terug in de geschiedenis. Het boek begint met een inleidend artikel van de tweede auteur dat een aardig overzicht geeft over het onderzoek in de mathematische biologie in de eerste twee decennia van de twintigste eeuw en het aandeel van Vito Volterra (1860–1940) daarin. Het verscheen eerder in verkorte vorm in *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences* (Millán Gasca, 1996). Daarna volgt de correspondentie genoemd in de ondertitel van het boek. Deze is opgebouwd uit collecties van brieven van 19 verschillende wetenschappers, voornamelijk biologen, aan Volterra. Slechts enkele brieven zijn van Volterra zelf. De collecties worden voorafgegaan door een korte biografie van de betreffende wetenschapper en zijn heel wisselend van omvang en inhoud. Alle brieven, 425 in totaal, worden gepresenteerd in de taal waarin ze oorspronkelijk zijn geschreven, de meeste in het Italiaans of Frans en enkele in het Engels of Duits. De meest interessante en uitgebreide correspondentie is die van Volterra's schoonzoon Umberto D'Ancona. Hierin worden naast enkele familieaangelegenheden vooral wetenschappelijke zaken aan de orde gesteld, waardoor de lezer enig inzicht krijgt in de ontwikkeling van Volterra's belangstelling voor biologische problemen. Deze briefwisseling is geheel in het Italiaans, dat ik jammer genoeg niet goed genoeg beheers om de details te kunnen begrijpen. Daarnaast is er een drietal Franstalige correspondenties (Marcel Brelot, Vladimir Kostitzin, Jean Régnier) van enige omvang en inhoud. De overige correspondentie is nogal beperkt en bevat voornamelijk oppervlakkige, formele briefjes en bedankbriefjes over zaken als het aanbieden van een artikel aan een tijdschrift en wederzijdse bezoeken, wat mij betreft volkomen oninteressant. Ook de overwegend zeer korte brieven van Volterra zelf zijn van die aard. Zoals in het voorwoord wordt gemeld, is het doel van dit boek een uitputtende collectie van brieven te presenteren tussen Volterra en andere wetenschappers over de mathematische biologie. Zelf zou

ik ervoor gekozen hebben een selectie uit de correspondentie te maken en alleen betekenisvolle brieven tezamen met hun vertaling in het Engels te presenteren. Aan dit boek heb ik helaas niet veel plezier beleefd.

M. de Gunst

L.A. Peletier, W.C. Troy

**Spatial Patterns
Higher order models in physics and mechanics**

Basel: Birkhäuser, 2001

320 p., prijs €110,-

ISBN 0-8176-4110-6

This book is about a new family of higher-order scalar model equations recently proposed in order to gain insight into the dynamics of complex spatiotemporal patterns in a wide range of physical and mechanical problems. The authors have set themselves the following goals: (1) to give a systematic account, based on both analytical and numerical results, of the existence and qualitative properties of families of special solutions; (2) to introduce a new method based on topological shooting, especially designed to analyse the qualitative properties of solutions of a large family of the model equations.

The book is on the one hand written for mathematicians and mathematical physicists, who want to learn about this fascinating subject, and on the other hand also accessible to graduate students. One finds a large amount of exercises and open problems that can serve as a starting point for further research.

This book basically studies the so-called *canonical equation*

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + q \frac{d^2 u}{dx^2} + f(u) = 0$$

for q an eigenvalue parameter and f a function.

Chapter 1 is an introduction into the subject. Various models in physics are introduced and the role of the canonical equation is demonstrated. The chapter concludes with a brief overview of the rest of the book, which is now divided into two parts.

Part I, chapters 2–7, focuses on the case where the non-linearity is given by

$$f(u) = u^3 - u.$$

In Part II, chapters 8–10, more general non-linearities are studied.

The authors have produced a well-written book, which gives a good picture of what is known about the canonical equation. The extensive bibliography at the end of the book makes all remarks about non-completeness superfluous.

M. Akveld

melden, het is een werkboek en geen boek om op je gemak bij het haardvuur uit te lezen. Dat laatste zou je misschien ook niet verwachten, maar zelfs vergeleken met andere wetenschappelijke boeken vereist het een hoge mate van zelfwerkzaamheid. De reden hiervan is dat een groot deel van de tekst bestaat uit opgaven. Deze staan niet, zoals gebruikelijk, apart aan het eind van een paragraaf of hoofdstuk, maar maken een integraal deel uit van de tekst. Het laatste deel van het boek bestaat uit de uitwerkingen van (bijna) alle opgaven.

Het doel van deze opzet is dat een volhardende lezer het vak echt in de vingers krijgt. Niet alleen wat betreft de epidemiologie, maar ook wat betreft algemenere wiskundig-biologische taalvaardigheden. Ik vind dit een lovenswaardig streven van de auteurs, en het boek is in dit opzicht zeker nuttig voor beginnende onderzoekers in de wiskundige biologie. Zij moeten daar dan, schat ik, echter wel een maand of twee voor uittrekken. Verder sluit ik mij aan bij de aanbeveling van de auteurs om het boek gezamenlijk met anderen door te werken. Hiermee kan de arbeidslast enigszins worden verdeeld. Bovendien gaan de auteurs toch uit van een behoorlijk brede basis: in de waarschijnlijkheidstheorie, de calculus, en ook de biologie. Doorwerken met een divers gezelschap heeft dus ook zijn voordelen in dat opzicht.

Voor mensen met minder tijd voor zelfstudie heeft de opzet van het boek echter een nadeel: het is niet gemakkelijk vluchtig door te lezen om een overzicht te krijgen over het onderwerp of er specifiek onderwerpen in op te zoeken.

Bij tijdgebrek is er echter altijd de mogelijkheid tot spieken in deel III van het boek, en, met wat heen en weer bladeren, geeft het zo toch een overzicht van de wiskundige epidemiologie. Het leukste is dat ook vooral de lacunes worden aangeduid, en ik verwacht dat dat veel inspiratie levert voor relevant nieuw onderzoek. De auteurs hadden zich wat mij betreft dan ook minder vaak hoeven te verontschuldigen voor gaten in de gepresenteerde theorie.

P. Haccou



O. Diekmann, J.A.P. Heesterbeek
Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation

(Wiley Series in Mathematical and Computational Biology)

Chichester, John Wiley and Sons, 2001

320 p., prijs \$ 70,-

ISBN 0-471-49241-8

Dit is een ongewoon boek. Het vereist namelijk een hoge mate van activiteit van de lezer. Ofwel, zoals de auteurs in de inleiding



P.H. Zipkin

Foundations of Inventory Management

Boston: McGraw-Hill, 2000

514 p., prijs \$ 135,-

ISBN 0-256-11379-3

Dit is een prachtig boek over voorraadbeheer. Alle relevante onderwerpen komen aan bod. De meeste plaats is uiteraard ingeruimd voor wiskunde, maar er is ook steeds aandacht voor met name de bedrijfs- en IT-context. Dit maakt het boek zeer geschikt voor een praktijkgericht vak voor studenten wiskunde of econometrie.

Met plezier zag ik hoe er een heel hoofdstuk gewijd is aan het fundamentele EOQ model met al zijn varianten. Daarna komen uitbreidingen zoals tijds-inhomogene systemen en systemen met meerdere producten of locaties aan de orde. Tot zover betreft het deterministische modellen; de tweede helft van het boek gaat over stochastische modellen. Ook hier vinden we een soortgelijke opbouw als bij de deterministische modellen.

De nadruk ligt nadrukkelijk op praktisch relevante modellen, niet op de state-of-the-art qua modeloplossen. Systematisch wordt er aandacht besteed aan zaken als gedecentraliseerde control, en aan door een omgeving gemoduleerde parameters. Ook de link met ketenoptimalisatie en in de industrie veel gebruikte methoden als MRP en JIT komt aan de orde. In alle opzichten een boek dat de verbinding tussen theorie en praktijk weet te maken.

Een klein punt van kritiek is de afwezigheid van een hoofdstuk of appendix over forecasting. Gezien het belang van dit onderwerp voor voorraadbeheer zou meer dan de huidige anderhalve pagina gerechtvaardigd zijn.

G. Koole

D. Brigo, F. Mercurio
Interest Rate Models
Theory and Practice

Berlin: Springer-Verlag, 2001

518 p., prijs \$ 69,95

ISBN 3-540-41772-9

The book *Interest Rate Models* deals with models that can be used to calculate prices of interest rate derivatives. The market for interest rate derivatives has grown explosively since the 1980's and is therefore an important area of research for banks and academia. The focus of the book is directed towards putting the models at work in a practical trading environment.

The book is written in two parts. The first part deals with theory and implementation of models that can be used to value interest rate derivatives. This book provides an excellent overview of models that are actually used in practice by banks and institutions. After the mathematical foundations of no-arbitrage and change of measure are laid in chapter 2, the authors devote a lot of attention in chapters 3 and 4 to one-factor and two-factor short-rate models. Although these models may have gone a little bit out of fashion in academia, they are still very much the workhorses for pricing interest rate derivatives at banks and institutions. Not only the numerical implementation via analytical formulas and various tree-based methods are discussed, but also the issue of calibrating these models to market data. Again, this is an issue that is often ignored in the academic literature, but is vital for practitioners to obtain a working model. Chapter 5 deals with the well known Heath-Jarrow-Morton framework.

In chapters 6, 7 and 8 the authors focus on the LIBOR Market Model and the Swap Market Model which have recently become very popular with practitioners and academics. The reason for this popularity is that in the Market Models the underlying variable is not a theoretically convenient rate like the short rate, but traded market interest rates like LIBOR or swap rates. This makes the option prices for vanilla products like caps or swaptions of the Market Models consistent with the Black pricing formula that market participants use. As a consequence, the implied volatility of the Black option price can directly be interpreted in terms of the model parameters of a Market Model. A disadvantage of using Market Models is that they are much more difficult to implement numerically than the short rate models. Fortunately, the authors devote ample attention to the issues of numerical implementation and calibration of the Market Models.

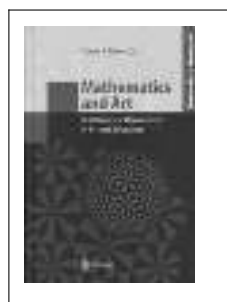
The second part of this book deals with examples of specific interest rate options and how they can be priced with the mod-

els developed in the first part. A good overview of the various products traded nowadays is given. The authors devote ample attention to the crucial issue of which model is most appropriate to price the product under consideration. Again, this is an issue widely ignored by academics, but of vital importance for successful pricing of products in practice.

Finally, Appendix D 'Talking to the Traders' is interesting and quite funny to read. It gives nonetheless a fascinating insight in the questions that traders might ask and expectations traders have of the kind of models developed in this book.

In summary: this book provides an excellent overview and implementation guidelines for effectively pricing interest rate derivatives in a trading-room environment.

A.A.J. Pelsser



Mathematics and Art
Mathematical Visualization in Art
and Education

(*Mathematics and Visualization*)

Berlin: Springer-Verlag 2002

337 p., prijs \$ 74,95

ISBN 3-540-43422-4

This book gives a summary of a Colloquium held in Maubeuge (France) in September 2000. The Colloquium was based on the relations between Arts and Mathematics (in particular, on the art of visualization of mathematics), and contained a collection of 27 talks given by artists as well as mathematicians which were translated and collected in this book. The talks deal with subjects such as polyhedra, dynamical systems, group theory, tuning musical instruments, solving polynomial equations, art and teaching of mathematics, algebraic surfaces, et cetera. Most articles include pictures which help the reader visualizing the concepts. I will briefly discuss some of them:

Solid-Segments Sculptures by George W. Hart: This article gives an algorithmic technique for creating a three-dimensional solid enclosing a given set of line segments. This solid is made of thick edges and open faces in order to distinguish the front and rear surface. The idea of the algorithm is the following: We first build a polyhedron at the vertex of each segment. Then, we build the convex hull of the two polygons that surround the ends of a line segment, which gives a 'prismatoid'. These 'prismatoids' will be the edges of the three-dimensional solid. This technique has been used in sculpture and design of mathematical models.

Machines for Building Symmetry by Maria Dedó: This paper gives the mathematical background to the recent exhibition *Simmetria, giochi di specchi* realized by the Mathematics Department of Milan University. In this exhibition, six machines for building symmetry were discussed. The mirrors of these machines are the walls of the chambers of some irreducible Coxeter groups.

Mathematical Aspects in the Second Viennese School of Music by Carlota Simões: There have always existed many connections between mathematics and music. This article gives a translation into mathematics of the 12-tone music created by Schoenberg in 1923. Schoenberg establishes a completely new method where the hierarchy between the seven notes is removed, that is, there is no tonic, dominant, et cetera anymore. He defines a 12-tone series to

be a sequence of the 12 distinct tones appearing in any octave and having any rhythm. A composition of this type, can only contain this series in the following forms: In its original form, with its intervals inverted, backwards or transposed by half-tones. In this way, all 12 notes will appear the same number of times.

Sphere Eversions: from Smale through "The Optiverse" by John M. Sullivan: The problem of the sphere eversion started interesting mathematicians in the 20th century. The eversion consists of turning the sphere inside-out by a continuous deformation, where the surface is allowed to pass through itself. It was the mathematician Steven Smale who in the late 1950s, proved that spheres could be everted, although it was not until later that mathematicians (such as Bernard Morin or Arnold Shapiro) gave explicit models of eversions built by hand in iron-wire or paper. Later on, computer-graphic videos have been produced in order to show some of the eversions. The latest of them called 'The Optiverse', developed by the speaker of the talk, John Sullivan.

The book also includes a forum: *How Art Can Help the Teaching of Mathematics?* In the discussion, four participants give an attempt to popularize mathematics and some ideas about how to use art in mathematical education.

An Appendix of more than fifty pages at the end of the book shows beautiful pictures of models, sculptures and computer graphics linked to the papers discussed. A beautiful book! *I. Polo*

Hungarian Problem Book III

Based on the Eötvös Competitions: 1929-1943

Cambridge: Cambridge University Press, 2001

163 p., prijs £21.95

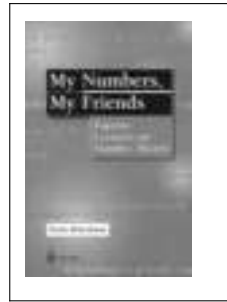
ISBN 0-88385-644-1

"The Eötvös Competition is the oldest high school competition in the world with a tradition dating back to 1894" vertelt de omslag ons. In 1963 werden reeds twee boekjes gepubliceerd met problemen uit de jaargangen 1894-1928 van deze competitie en zoals de titel al doet vermoeden gaat dit boekje nog eens vijftien jaar verder.

Is dit dan een boekje met vijfenveertig wiskundeolympiade-problemen? Ja. Doch, in veredelde vorm. De problemen worden gerangschikt naar onderwerp (combinatoriek, getaltheorie, algebra, meetkunde en nog eens meetkunde) en moeilijkheidsgraad, per onderwerp wordt een klein hoofdstukje theorie toegevoegd en van elk probleem worden een of meer oplossingen zorgvuldig uitgelegd.

Maar de interessantste vraag is natuurlijk: "hoe moeilijk zijn die sommetjes?". Recente wiskundeolympiadesommetjes plegen moeilijker te zijn dan oude. Centraal-Europese wiskundeolympiadesommetjes plegen moeilijker te zijn dan West-Europese. Het niveau van deze sommetjes is dan ook vergelijkbaar (misschien net iets hoger) met het niveau van sommetjes uit de huidige finales van de Nederlandstalige wiskundeolympiades. Behalve voor de sommetjesverzamelaar is dit boek, volgens mij, ook aan te raden voor de scholier die zich ernstig wil voorbereiden op een finale van een Vlaamse of Nederlandse wiskundeolympiade. De ervaren problem-solver en de ambitieuze leerling die hoopt hoge cijfers te halen op een internationale wiskundeolympiade kunnen hun uitdagingen beter elders zoeken.

L. Taelman



P. Ribenboim

My numbers, my friends

Popular lectures on number theory

Berlijn: Springer, 2000

375 p., prijs €44,95

ISBN 0-387-98911-0

Het is niet te hopen dat Ribenboim alle hoofdstukken van dit boek echt als lezingen heeft uitgesproken, want dat zou behoorlijk wat van het publiek gevergd hebben. Om te beginnen zijn er hoofdstukken van ruwweg 10, 20, 30, 40, 50, 60 en 70 bladzijden, waarvan de langste ook voorzien zijn van fikse bibliografieën. Vervolgens is de auteur sterk in het geven van lange opsommingen van resultaten. Zijn hoofdstuk over transcendente getallen besluit hij, na 70 pagina's, als volgt: "It is preferable now to interrupt this survey lest it become too tiring for the reader (but never for me)". Tenslotte heeft hij de merkwaardige gewoonte de delen van een hoofdstuk te laten groeien naarmate de daarin behandelde onderwerpen specialistischer worden (zo loopt het hoofdstuk over 'Fibonacci numbers and the Arctic Ocean' uit op 14 bladzijden over "powers and powerful numbers in Lucas sequences"). Dat is althans merkwaardig als het om populaire lezingen over getaltheorie gaat. Daar staan enkele hoofdstukken tegenover die het als lezingen, en zelfs als causerie, uitstekend zouden doen. Zo introduceert Ribenboim de industrie rond het vervaardigen en testen van grote priemgetallen aan de hand van een rollenspel tussen de ik-persoon, die verkoper van priemgetallen is, en een spion die zich voordoeft als argeloze klant en die priemgetallen van rond de 100 cijfers wil kopen: "En hoe garandeert u nu de kwaliteit van de geleverde waren?" Persoonlijk ben ik ook erg te spreken over het hoofdstuk 'Gauss and the class number problem', waarin de theorie van geheeltallige kwadratische vormen uit de doeken wordt gedaan. Dit hoofdstuk is in zijn geheel beheersbaar voor beginnende studenten en prettig als naslag. Kortom, Ribenboims boek kun je karakteriseren als een poging, op een verjaardag uit te leggen waar je als wiskundige zoal zit met je hoofd, die telkens weer uitloopt op een historisch overzicht à la Dickson (in zijn History of the Theory of Numbers, in drie delen). Iets wat ons allemaal wel eens is overkomen, denk ik...! Studenten en geïnteresseerde leken zullen plezier beleven aan het begin van elke lezing, terwijl het vervolg bij de experts een glimlach van herkenning op zal roepen. Kenmerken van het boek zijn verder een prima uitvoering (weliswaar zonder illustraties en mét diverse drukfouten), een typische wiskundigenhumor en vertoon van een enorme belezenheid op dit klassieke gebied van de wiskunde.

C.E. van de Woestijne

Problemen/UWC

Universitaire Wiskunde Competitie

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina <http://academics.its.tudelft.nl/uwc>

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Er worden drie editieprijzen toegekend, van 100, 50, en 25 Euro. De puntentotalen van winnaars tellen voor 0, 50, en 75 procent mee in de laddercompetitie. De aanvoerder van de ladder ontvangt een prijs van 100 Euro en begint daarna weer onderaan. Daarnaast wordt twee maal per jaar een ster-opgave aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend.

Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in $\text{\LaTeX}$ wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 februari 2004. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.



Opgave A

For each non-negative integer n , let a_n be the number of digits in the decimal expansion of 2^n that are at least 5. For example, $a_{16} = 4$ since $2^{16} = 65536$ has four digits that are 5 or higher. Evaluate the sum $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$.

Opgave B

Let G be a group such that squares commute and cubes commute, i.e., $g^2h^2 = h^2g^2$ and $g^3h^3 = h^3g^3$ for all $g, h \in G$. Show that G is abelian.

Opgave C

Let $(X_n)_{n \geq 1}$ be a sequence of independent and identically distributed random variables with $P\{X_n = 1\} = P\{X_n = -1\} = \frac{1}{2}$. Set $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Calculate

$$P\{\exists n \geq 1 \text{ such that } S_{3n} = n\}.$$

Editie 2003/2

Op de ronde 2003/2 van de Universitaire Wiskunde Competitie ontvingen we inzendingen van Filip de Smet en van Maarten Dobbelaar.

Opgave 2003/2-A

For $n \geq 1$ let r_n be the sequence

$$r_n = 3^n + 5, \quad n = 1, 2, \dots$$

Prove that for every $k \geq 1$ there exists an $n \geq 1$ such that 2^k divides r_n .

Oplossing Solutions by Maarten Dobbelaar, Bert Jagers, Filip de Smet, Benne de Weger. The solution of Jagers is as follows. First observe that

$$3^{2^{k-2}} \equiv 1 + 2^k \pmod{2^{k+1}} \quad (1)$$

for $k \geq 3$. We inductively show that for each k there exists an n such that $3^n \equiv -5 \pmod{2^k}$. Suppose that for $k \geq 3$ there exists an n such that $3^n \equiv -5 \pmod{2^k}$. Then $\pmod{2^{k+1}}$, either $3^n \equiv -5$, or $3^n \equiv -5 + 2^k$. In the first case we are done. In the second case, multiply by the congruence of (1) to find that $3^{n+2^{k-2}} \equiv -5 \pmod{2^{k+1}}$.

Benne de Weger uses 2-adic numbers and the 2-adic logarithm $\log_2$, which has the property that $\text{ord}_2(\log_2(1+x)) = \text{ord}_2(x)$ if x is a 2-adic integer. Then $\text{ord}_2(3^n + 5) = \text{ord}_2(-1 + (-3)^{-n}5) = \text{ord}_2(\log_2((-3)^{-n}5)) = \text{ord}_2(\log_2(5) - n\log_2(-3))$. Write $v = \frac{\log_2(5)}{\log_2(-3)}$ to find that this order is equal to $\text{ord}_2(v - n) + \text{ord}_2(\log_2(-3)) = \text{ord}_2(v - n) + 2$. Now one can approximate v by integers n to find $3^n + 5$ of arbitrary order.

Opgave 2003/2-B Prove that the function

$$f(x) = \sqrt{1+x} \cdot \ln \left(1 + \frac{1 + \sqrt{1+2x}}{1+x} \right)$$

is increasing on the interval $[0, \infty)$.

Oplossing By Filip de Smet and Bert Jagers. Both solutions have been assisted by Maple. Here is Filip de Smet's solution. Compute the derivative

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \left(\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1 + \sqrt{1+2x}}{1+x} \right) - \frac{1}{\sqrt{1+2x}} \frac{x + \sqrt{1+2x}}{2+x + \sqrt{1+2x}} \right)$$

In order to prove that $f'(x) > 0$ we consider $g(x) = \sqrt{1+x} f'(x)$ and put

$$y = \sqrt{1+2x}, \quad \text{or} \quad x = \frac{y^2 - 1}{2} \quad \text{for } y \in [1, \infty)$$

This gives the expression

$$g(y) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{y^2 + 2y + 3}{y^2 + 1} \right) - \frac{1}{y} \frac{y^2 + 2y - 1}{y^2 + 2y + 3}$$

Since

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = 0$$

and

$$g'(y) = -\frac{7y^4 + 4y^3 + 2y^2 + 4y + 3}{y^2(3 + y^2 + 2y)^2(1 + y^2)} < 0 \quad \forall y \in [1, \infty)$$

we find that $g(y) > 0$ and so $f(x)$ is increasing on $[0, \infty)$.

Opgave 2003/2-C

For which $n \in \mathbf{N}$ does there exist an enumeration

$$q_1, q_2, q_3, \dots$$

of $\mathbf{Q}^n$, such that $\|q_{k+1} - q_k\| = 1$ for all k .

Oplossing The problem was proposed by Michiel de Bondt. We present a solution offered by Jos Brakenhoff. The answer is $n \geq 5$. It is impossible to enumerate $\mathbf{Q}^4$ since for a unit length rational point $\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}, \frac{c}{e}, \frac{d}{e}\right)$ one has

$$v_2(e) \leq v_2(a + b + c + d)$$

with $v_2(n)$ the number of factors 2 in n , for $n \in \mathbf{N}$. If $v_2(e) = 0$, then this is trivial. If $v_2(e) = 1$, then $a \equiv b \equiv c \equiv d \pmod{2}$ and $2|(a + b + c + d)$. If $v_2(e) > 1$ then there is no solution with a, b, c or d odd, so we can divide a, b, c, d and e by 2.

Furthermore, if the vectors $\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}, \frac{c}{e}, \frac{d}{e}\right), \left(\frac{a'}{e'}, \frac{b'}{e'}, \frac{c'}{e'}, \frac{d'}{e'}\right) \in \mathbf{Q}^4$ satisfy

$$v_2(e) \leq v_2(a + b + c + d) \quad \text{and} \quad v_2(e') \leq v_2(a' + b' + c' + d'),$$

then the sum

$$\left(\frac{a'e + ae'}{ee'}, \frac{b'e + be'}{ee'}, \frac{c'e + ce'}{ee'}, \frac{d'e + de'}{ee'} \right)$$

has the same property:

$$v_2(ee') \leq v_2(a'e + ae' + b'e + be' + c'e + ce' + d'e + de').$$

So, for example, $(\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ cannot be reached. This also shows that $(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0)$ can not be reached in $\mathbf{Q}^n$ with $n = 1, 2, 3$.

We prove that $\mathbf{Q}^5$ can be enumerated. Observe that the numbers that can be connected to the origin form a subgroup. First we show that for any prime power p^k the origin can be connected to $(\frac{1}{p^k}, 0, 0, 0, 0)$. Represent $(2p^k)^2 - 1$ as a sum of four squares

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (2p^k)^2 - 1.$$

Then

$$\left(\frac{1}{2p^k}, \frac{a}{2p^k}, \frac{b}{2p^k}, \frac{c}{2p^k}, \frac{d}{2p^k} \right) + \left(\frac{1}{2p^k}, -\frac{a}{2p^k}, -\frac{b}{2p^k}, -\frac{c}{2p^k}, -\frac{d}{2p^k} \right) = \left(\frac{1}{p^k}, 0, 0, 0, 0 \right).$$

This shows that the whole set $\mathbf{Q}^5$ can be connected by segments of length 1. Since there are infinitely many unit-length-vectors in $\mathbf{Q}^5$, any two points in $\mathbf{Q}^5$ can be connected by infinitely many disjoint paths. So $\mathbf{Q}^5$ can be enumerated by unit steps. The same argument holds for $n > 5$. So $\mathbf{Q}^n$ can be enumerated by unit steps as well.

Uitslag Editie 2003/2

De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

<i>Naam</i>	A	B	C	<i>Totaal</i>
1. Filip De Smet (Gent)	8	8	6	86
2. Maarten Dobbelaar	4	-	-	12

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie

We vermelden alleen de top 5. Voor de complete ladderstand verwijzen we naar de UWC-website.

<i>Naam</i>	<i>Punten</i>
1. Mark Veraar	208
2. Team Filip Cools	199
3. Tom Claeys	138
4. Team Gerben Stavenga	136
5. Peter Bruin	99