

Inhoud | Contents

194	Colofon
195	Redactioneel <i>Jaap Top</i>
196	Agenda
198	Nieuws
202	In memoriam Freerk Lootsma <i>Hans Melissen, Kees Roos</i>
205	In memoriam Christoffel Jacob Bouwkamp <i>Johannes Boersma, Adrianus T. de Hoop</i>

Oratie | Inaugural lecture

209	Chaos en licht <i>Bernd Krauskopf</i>
-----	---------------------------------------

Onderzoek | Research

216	Een wiskundige kijk in de hersenen <i>Natasha Maurits</i>
-----	---

Interview | Interview

224	Twee seconden is hier een eeuwigheid <i>Gerard Alberts, Ger Koole, Jaap Molenaar</i>
-----	--

Opinie | Opinion

230	Toekomststrategie <i>Peter Nijkamp</i>
234	De basis van de kenniseconomie <i>Jan Veldhuis</i>
238	Wiskunst <i>Hugo Brandt Corstius</i>

Recreatieve wiskunde | Recreational mathematics

240	Schuifpuzzels <i>Wouter Waalewijn</i>
-----	---------------------------------------

Geschiedenis | History

242	De Bibliotheca mathematica van Bierens de Haan <i>Kasper van Ommen, Henk Bos</i>
254	Kleine Groninger en grote wetenschapper <i>Herold Dehling, Jan van Maanen</i>

Boeken | Books

258	Boekbesprekingen
-----	------------------

Rubrieken | Departments

208	Brieven
215	Nieuw-Zeeuwse Kroniek <i>Hans van Ditmarsch</i>
229	Oud Archief <i>Danny Beckers</i>
252	TeX <i>Michael van Hartkamp</i>
269	Problemen/UWC

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
<http://www.math.leidenuniv.nl/~naw>

Hoofredactie

Ger Koole (koole@cs.vu.nl)

Eindredactie

Derk Pik (drpik@math.leidenuniv.nl)

Bladmanager/Advertenties

Reinie Ern  (erne@math.leidenuniv.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101

Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@wens.kun.nl)
Rainer Kaenders (r.kaenders@ils.kun.nl)
Hans Melissen (j.b.m.melissen@its.tudelft.nl)
Jaap Molenaar (j.molenaar1@tue.nl)

Bureau redactie

Jos Brakenhoff (naw@math.leidenuniv.nl)
Annelies Hafkenscheid (naw@math.leidenuniv.nl)

Medewerkers

Danny Beckers (KUN), Wieb Bosma (KUN), J.A.W. van Casteren (Univ. Antwerpen), Jan van de Craats (KMA), Robbert Fokkink (TUD), Michael van Hartskamp, Geertje Hek (UVA), Teun Koetsier (VU), Joop Kolk (UU), Pieter Moree (UVA), Jan van Neerven (TUD), Mark Peletier (CWI), Hans Sterk (TUE), Jaap Top (RUG), Chris Zaal (FI)

TeX-ondersteuning

Marko Boon (marko@win.tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079
NL-1090 GB Amsterdam

Vormgeving

Kitty Molenaar, Amsterdam

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEXT)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Giethoorn ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. Het genootschap werd in 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Het is 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap.

Leden van het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het KWG bedraagt  70 per jaar. Gepensioneerden betalen  35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor  25 per jaar.

Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van  50.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor  90 respectievelijk  105.

Members of the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, and South-African Mathematical Societies* pay  50 instead of the full membership fee of  70 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members. A postage charge of  5 is added for members living outside of the Netherlands.

Internetpagina

<http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Eduard Looijenga (UU, *voorzitter*), Herman te Riele (CWI, *secretaris*), Fieke Dekkers (UU, *penningmeester*), Geertje Hek (UvA), Metha Kamminga (NHL), Annette Kik (CWI), Vivi Rottschäfer (UL), Michel Vellekoop (UT).

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredacteur Ger Koole (koole@cs.vu.nl). Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina: <http://www.math.leidenuniv.nl/~naw>

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	uiterste inleverdatum kopij
4	05-12-2003	02-09-2003
1	05-03-2004	02-12-2003
2	18-06-2004	16-03-2004
3	03-09-2004	01-06-2004

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen.



Centrum voor Wiskunde
en Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft

Op het omslag

De achttiende-eeuwse wiskundige en natuurwetenschapper Daniel Bernoulli is in 2000 geëerd met een gedenksteen in de Openbare Bibliotheek van Groningen. Voor een schets van zijn leven, zie pagina 254.

Aandacht voor wiskunde

Voor het eerst in m'n leven heb ik deze zomer tijdens het inpakken van de vakantiekoffer bewust aan reclame voor ons vak gedacht. De vier t-shirts (twee grijze, een witte en een kanariegele) met een naar wiskunde verwijzende opdruk gingen allemaal mee. Niet omdat ik me veel illusies maakte over het directe effect dat de aanblik van mijn persoon gehuld in zo'n kledingstuk heeft op bijvoorbeeld het aantal inschrijvingen in het eerste jaar van de bachelor's opleiding wiskunde; wel om eens wat vaker en duidelijker iets uit te stralen van 'kijk, met dit vak verdien ik de kost, en het is zo leuk dat ik er zelfs hier op de camping naar wil verwijzen'.

Twee maanden later wordt het tijd voor wat bezinning: was het achteraf toch beter om het afzichtelijke geel plus het saaie grijs en wit te vervangen door iets anoniems waar geen informatie over interesses, vorige vakanties of favoriete popgroepen van de toerist uit zijn af te leiden? In ieder geval heeft m'n bescheiden collectie een tiental gesprekken opgeleverd. De leukste was met een fietsenmaker in Kingston, Ontario. De voorkant van m'n gele t-shirt, gekregen van de deelnemers aan een MRI Master Class over algebraïsche en arithmetische meetkunde in 1995/96, citeert een regel uit het bekende tekstboek van Robin Hartshorne: "Be careful! Our intuition is derived from working with schemes or finite type over a field." De fietsenmaker las het, beaamde hoe juist deze uitspraak was, en las het vervolgens hardop nog eens voor. Daarna bekende hij het toch wel heel intrigerend te vinden om zoveel wiskunde te kennen dat de betekenis van een dergelijke uitspraak je duidelijk zou worden. Ik vroeg hem hoe hij wist dat de tekst sloeg op een wiskundig onderwerp. Voorzover ik wist, had hij immers de achterkant van de t-shirt, waaruit dat duidelijk blijkt, nog niet onder ogen gehad. Het antwoord was verrassend: het begrip 'field' kende hij uit de math club waaraan

hij enkele jaren eerder in grade 8 van een plaatselijke school deelnam, en het woord 'scheme' had hij uit een tijdschriftartikel over de laatste stelling van Fermat onthouden. Of ik misschien meteen het begrip maar even wilde toelichten?

Een minder opmerkelijke, maar toch ook aardige ervaring was met de garage-eigenaar die de auto van de familie Ribenboim onderhoudt (Paulo Ribenboim is niet alleen auteur van een tweetal boeken over de laatste stelling van Fermat, maar ook eigenaar van een auto met op de kentekenplaat de letters FERMAT): het bewijs van de laatste stelling van Fermat, dat dankzij de referenties op de rugzijde gemakkelijk op de voorzijde van het t-shirt past, ontlokte de garagehouder de vraag of ik Paulo kende en, zo ja, of dit dezelfde Fermat betrof als op diens auto. Hij bekende vervolgens dat hij ondanks Ribenboims evidente enthousiasme weinig begrepen had van diens uitleg over deze stelling.

Wat ik in elk geval uit dergelijke gesprekjes heb geleerd, is dat ons vak breed opgemerkt wordt. Het is dus niet onbelangrijk ervoor te blijven zorgen dat er ook daadwerkelijk in brede kring iets van wiskundige ontwikkelingen op te merken valt. Het *Nieuw Archief* kan hierin direct of indirect een rol spelen. Af en toe een exemplaar achterlaten op de lectuurtafel van de kapper of in de wachtkamer van huis- of tandarts lijkt me dan ook een goede zaak. Wie weet merken we er tijdens onze volgende vakantie de gevolgen van.



Jaap Top
hoofdredacteur (vanaf 1 september)

*Instituut voor wiskunde en informatica
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 800, 9700 AV Groningen
top@math.rug.nl*

Agenda

Upcoming Events

september 2003

22–26 september

□ EIDMA-Stieltjes Onderwijsweek

Cursus cryptografie voor aio's en oio's.

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

26 september

□ Wiskundetoernooi voor scholieren

Wiskundetoernooi gehouden voor middelbare scholieren.

plaats Katholieke Universiteit Nijmegen

info www.math.kun.nl/wistoernooi

26 september–2 oktober

□ Mathematics of cryptology

Workshop georganiseerd door Ronald Cramer, Bas Edixhoven en Berry Schoenmakers.

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

oktober 2003

1–3 oktober

□ 2003 Conferentie van Numeriek Wiskundigen

Conferentie van de Nederlandse en Vlaamse numerieke wiskunde gemeenschappen. Thema's: bewegende-randproblemen en matrixfuncties.

plaats Woudschoten, Zeist

info www.cwi.nl/events/2003/NumAnalysis.html

10 oktober

□ Afscheid TUE Jan Karel Lenstra

Lezingenmiddag Combinatorische Optimalisering. Sprekers: R. Möhring, G. Woeginger S. van de Velde, J.K. Lenstra.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info email: h.koops@tue.nl

10 oktober

□ Thomas-Dag

Lezingendag ter ere van het aanstaande emeritaat van E. Thomas. Onderwerpen: gegeneraliseerde Gel'fand-paren, niet-commutatieve harmonische analyse, integraalrepresentaties en padintegralen. Sprekers: J.D. Stegeman, B. Jefferies, T. Dorlas, J. Faraut, G. van Dijk.

plaats Academieggebouw, Rijksuniversiteit Groningen

info www.math.rug.nl/~top/thomas.html

november 2003

13–14 november

□ EIDMA 2003 Symposium

Jaarlijks terugkerend symposium voor aio's.

plaats Carlton De Brug, Mierlo

info www.win.tue.nl/math/eidma/congressen

15 november

□ Jaarvergadering NVvW

Studiedag Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars in samenwerking met Wiskids. Onderwerpen: vragen uit de WisFaq, de veelzijdigheid van veelvlakken, de Wiskunde Scholen Prijs, trainen voor de Wiskunde Olympiade, spelletjes uit de Kangoeroewedstrijd, het beroepsperspectief van wiskundigen, Vierkant voor Wiskunde, het Nijmeegse Ratio-project.

plaats Cals College, Nieuwegein

info www.nvww.nl/jaarvergo3-1.html

17–19 november

□ Bijeenkomst van Stochastici

Jaarlijkse bijeenkomst. Sprekers (onder voorbehoud): Steffen Lauritzen, Wing Wong.

plaats De Werelt, Lunteren

info www.cs.vu.nl/~lunteren

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

22 november

☐ **Ars et Mathesis-dag**

Ars et Mathesis viert zijn vierde lustrum.

info www.arsetmathesis.nl

28 november

☐ **Wiskunde A-lympiade**

Wiskundewedstrijd voor leerlingen uit 5-havo of 5/6-vwo met Wiskunde A.

info www.fi.uu.nl/Alympiade

28 november

☐ **Wiskunde B-dag**

De wiskunde B-variant van de Wiskunde A-lympiade. Wiskundewedstrijd voor leerlingen uit 5-havo of 5/6-vwo met Wiskunde B.

info www.freudenthal.nl/nl/projecten/beschrijving/project98.html

december 2003

8–10 december

☐ **Gibbs versus non-Gibbs**

Statistische mechanica en gerelateerde onderwerpen.

info www.eurandom.tue.nl/workshops/2003

15–17 december

☐ **Winter school on mathematics and biology**

plaats Wageningen

info www.math.leidenuniv.nl/~verduyn/nwo-wso3.html

15–19 december

☐ **Special points on Shimura varieties**

Werkgroep rond het André-Oortvermoeden en het equidistributievermoeden. Organisatoren: Bas Edixhoven en Frans Oort.

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

17–19 december

☐ **Winter school on financial mathematics**

Speciaal onderwerp: Volatility Modeling and Computational Finance.

plaats De Werelt', Lunteren

info <http://remote.science.uva.nl/~spreij/stieltjes/winterschool2003.html>

januari–juli 2004

10 januari

☐ **Wintersymposium KWG**

Wiskunde en muziek.

plaats Senaatszaal Universiteit Utrecht

info www.wiskgenoot.nl

14–16 januari

☐ **Panama Conferentie**

22ste conferentie voor het primair in reken- en wiskundeonderwijs. Organisatie: Freudenthal Instituut.

plaats Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/panama

23–24 januari

☐ **Arithmetic Quantum Chaos**

Inleidende lezingen on *Arithmetic Quantum Chaos* door J.P. Keating and P. Sarnak.

plaats Montpellier, Frankrijk

info www.math.univ-montp2.fr/~pev/MAT2004

6–7 februari

☐ **Nationale Wiskunde Dagen**

Bijeenkomst voor wiskundeleraren die lesgeven aan leerlingen van 12 tot 18 jaar van ieder schooltype.

plaats Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/nwd

16–20 februari

☐ **Minicourse Iterative Decoding Techniques**

Sprekers: Joachim Hagenauer (TU München), Rüdiger Urbanke (Swiss Federal Institute of Technology).

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.win.tue.nl/math/eidma/courses/minicourses

8–12 maart

☐ **Buildings and Groups of Lie-Type**

Minisymposium door Bernhard Mühlherr.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.win.tue.nl/math/eidma/courses/minicourses/muehlherr/muehlherr.html

19 maart

☐ **Kangoeroe**

Wedstrijd voor middelbare scholieren en voor leerlingen van groep 7 en 8 van de basisschool.

info www.math.kun.nl/kangoeroe

25–26 maart

☐ **Nationale rekendagen**

Conferentie aan het rekenonderwijs gewijd.

plaats Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/rekenweb/rekendagen

19–29 april

☐ **Continuous and Discrete Random Spatial Processes**

Organisatoren: J. van den Berg (CWI), B. Nienhuis (UvA).

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

29 mei

☐ **Symposium X Historische kring reken- en wiskunde onderwijs**

plaats Hogeschool Domstad, Utrecht

info www.freudenthal.nl/nl/agenda.nl.shtml

14–18 juni

☐ **Moda 7**

Aan het ontwerpen van statistische experimenten gewijde conferentie.

plaats Kapellerput, Heeze

info www.eurandom.tue.nl/workshops/2004/MODA7/start.htm

6–18 juli

☐ **Internationale Wiskunde Olympiade**

De 45ste versie van het grootste internationale wiskundetoernooi voor middelbare scholieren.

plaats Athene, Griekenland

info <http://olympiads.win.tue.nl/imo/index.html>

Nieuws

| News

Armand Borel overleden

De Zwitserse wiskundige Armand Borel is op maandag 11 augustus op tachtigjarige leeftijd in Princeton, New Jersey aan kanker overleden.

Borel was emeritus hoogleraar in Princeton, waar hij van 1957 tot 1993 onderwijs gegeven heeft. Hij was sinds 1981 buitenlands lid van de Franse Académie des sciences en sinds 1987 lid van de Amerikaanse National Academy of Sciences. Na de tweede wereldoorlog werkte hij nauw samen met verschillende leden van de Bourbaki-groep, zoals Jean Leray, André Weil, Henri Cartan en Jean-Pierre Serre, de winnaar van de eerste Abel prijs.

Borel is in 1923 geboren in La Chaux-de-Fonds (Zwitserland) en studeerde aan het *Institut fédéral suisse de technologie* in Zurich, waar hij in 1947 een diploma behaalde. Hij werkte enige tijd in Zwitserland, waarna hij in 1949 een positie verwierf aan het *Centre National de la Recherche Scientifique* (CNRS) in Parijs. In 1952 verkreeg hij zijn doctorat d'état. Daarna werd hij benoemd tot hoogleraar aan het *Institute for Advanced Study* in Princeton waar hij 35 jaar lang bleef. Hij werkte samen met onderzoekers van vele universiteiten in de Verenigde Staten (Chicago, Berkeley, Yale, Michigan), in India (Bombay), in Japan (Sendai) en in Hongkong (Zhejiang). Armand Borel heeft een fundamentele rol gespeeld bij de ontwikkeling van de theorie van Liegroepen en algebraïsche groepen. In 1978 kende het Wiskundig Genootschap Armand Borel de Brouwermedaille toe en in 1991 kreeg hij de Steele prijs van de American Mathematical Society.

Bronnen: Los Angeles Times, International Herald Tribune



Armand Borel als *special lecturer* aan de University of Wisconsin-Madison

Plannen tweede fase vrijwel ongewijzigd ingediend

Begin juli 2003 zijn de nieuwe voorstellen voor een verdere aanpassing van de tweede fase havo-vwo door de ministerraad goedgekeurd en naar de tweede kamer gestuurd. Ondanks de vele protesten zijn de plannen voor het drastisch terugbrengen van de studielast voor wiskunde bij het profiel Natuur & Techniek gehandhaafd. Op het havo wordt het aantal uren teruggebracht van 440 tot 320 (een afname van 27%), op het vwo wordt nu een reductie met 32% (van 760 naar 520) voorgesteld. De plannen voor de ontwikkeling van een vak 'voortgezette wiskunde' zijn ingetrokken.

De profielen Natuur & Gezondheid en Economie & Maatschappij krijgen (in principe) het zelfde vak wiskunde AB. De omvang hiervan is op het vwo 520 uur (in plaats van 600 een teruggang van 13%), op het havo is 320 uur (dat betekent bij het profiel Economie & Maatschappij een toename van 14%). Wiskunde verdwijnt op het havo als verplicht

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland.

Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien?

Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar naw@math.leidenuniv.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

vak voor het profiel Cultuur & Maatschappij, terwijl het op het vwo onder de naam wiskunde A en een aanzienlijk grotere omvang krijgt (480 uur in plaats van 360 uur).

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW), de Nederlandse Vereniging voor het Onderwijs in de Natuurwetenschappen (NVON) en de actiegroep Boze Bèta's hebben op 15 augustus in een brief aan de vaste kamercommissie van OC&W het door hen ontwikkelde alternatief voor de voorstellen nogmaals onder de aandacht gebracht van de bestuurders. Bovendien hebben ze aangedrongen op een onderzoek naar de onderdelen en leerlingactiviteiten in de studielast welke met dan wel zonder docent kunnen worden verricht, om zo te kunnen komen tot een meer objectieve omrekening van studielast naar contacttijd.

Meer informatie en de briefwisseling van de NVvW met het ministerie: www.nvvw.nl *Bronnen: Ministerie van OC&W; NVvW*

Spinozapremie voor Robbert Dijkgraaf

De Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO) heeft op maandagochtend 25 augustus de vier onderzoekers bekendgemaakt die de NWO Spinozapremie 2003 ontvangen. De premie is de grootste Nederlandse onderscheiding in de wetenschap. Elke onderzoeker krijgt anderhalf miljoen euro, vrij te besteden aan onderzoek.

Dit jaar gaan de de premies naar de econoom prof.dr. A.L. Bovenberg (Universiteit van Tilburg, Erasmus Universiteit Rotterdam), nanotechnoloog prof.dr. C. Dekker (Technische Universiteit Delft), de historicus prof. dr. J.L. van Zanden (Universiteit Utrecht, Internationaal Instituut voor Sociale Geschiedenis, Amsterdam) en de mathematisch fysicus prof.dr. R.H. Dijkgraaf (Universiteit van Amsterdam).

De toekenningen komen tot stand op voordracht van de rectores magnifici van de universiteiten, de voorzitters van de afdelingen Letterkunde en Natuurkunde van de KNAW, de voorzitter van het Nederlands Forum voor Techniek en Wetenschap, het Landelijk Netwerk Vrouwelijke Hoogleraren, de voorzitter van de Sociaal Wetenschappelijke Raad en de voorzitters van de NWO-gebiedsbesturen. Dit jaar is de negende keer dat de Spinozapremies worden toegekend. De officiële uitreiking van het geld en het Spinozabeeldje zal begin 2004 plaatsvinden.

Dijkgraaf levert originele en diepgravende bijdragen aan zowel de wiskunde als de theoretische natuurkunde, in het bijzonder de snaartheorie.

Bron: NWO



Robbert Dijkgraaf

Tentoonstelling: De bomen van Pythagoras

Vanaf 6 september tot en met 23 november zal in het Mondriaanhuis te Amersfoort een groot overzicht worden geëxposeerd van op wiskunde gebaseerde kunstwerken. Er doen ongeveer vijftig kunstenaars uit binnen- en buitenland mee. De werken brengen begrippen als groeien, krimpen, groter en kleiner worden, seriële verandering of vormverandering tot uitdrukking. Sommige kunstenaars zien in hun werk een herkenbare verwantschap met de ordeningsprincipes in de natuur. Anderen baseren hun werk op geometrische ordeningen van oude Islamitische tegeltableau's of Romeinse mozaïeken. Ook moderne ontwikkelingen als computergrafiek en computeranimatie komen aan de orde.

Deze tentoonstelling is in samenwerking met de Stichting *Ars et Mathesis* tot stand gekomen. Bij deze expositie zullen creatieve kindermiddagen en educatieve projecten voor scholen worden georganiseerd. Ook in het *Koopmanshuis van Pon*, Zuiderinslag 6 te Leusden, zijn werken te zien van de kunstenaars die exposeren in het Mondriaanhuis. Informatie: <http://www.mondriaanhuis.nl> *Dick Klingens*



Distortions, Rinus Roelofs

Mager resultaat bij Internationale Wiskunde Olympiade

Bij de dit jaar in Tokio gehouden 44ste Internationale Wiskunde Olympiade zijn de Nederlandse deelnemers voornamelijk in de achterhoede geëindigd. In het officiële landenklassement komt ons land op een 64e plaats (82 deelnemende landen), met 30 punten (van maximaal 252). De prestaties van Nederland lijken steeds verder terug te zakken. In 1999 werd nog een 31e plaats bereikt (74 punten) en de vorige twee jaar twee keer een 54e plaats. Opmerkelijk is dat de prestaties van buurland België in de lift lijken te zitten. Onze zuiderburen behaalden dit jaar een 37e plaats (met 70 punten), en scoorden daarmee aanzienlijk beter dan in de voorgaande jaren.

De beste resultaten werden dit jaar behaald door het team uit Bulgarije (met een score van 227 punten). Dit land behoort de laatste jaren steeds bij de top vijf (evenals China, Rusland en de VS).

Zie voor meer informatie <http://imo.math.ca>

Gerard Koolstra

Jan Karel Lenstra nieuwe directeur CWI

Per 1 oktober wordt prof.dr. Jan Karel Lenstra de nieuwe algemeen directeur van het Centrum voor Wiskunde en Informatica. Lenstra was eerder prominent onderzoeker op het CWI, van 1969 tot 1989, waarvan zes jaar als hoofd van de afdeling Besliskunde, Statistiek en Systeemtheorie. In 1989 werd hij benoemd tot hoogleraar Combinatorische Optimalisering aan de Technische Universiteit Eindhoven, waar hij van

1999 tot 2002 decaan was van de Faculteit Wiskunde en Informatica. In het najaar van 2002 betrok hij een positie aan Georgia Institute of Technology.

Mark Peletier



Jan Karel Lenstra en Wim Hutter (interim algemeen directeur van het CWI) tijdens het vastleggen van de aanstelling als algemeen directeur. (Foto: CWI.)

Saskia Stuiveling ontvangt deel 1 van de 'Rekenmeesters'

Op 26 september ontvangt Saskia Stuiveling van de algemene Rekenkamer in Nijmegen het eerste deel van de historische reeks 'Rekenmeesters'. Deze reeks bevat reproducties van historische Nederlandse reken- en wiskundeboeken.

Als eerste deel is gekozen voor 'Grondbeginselen der Rekenkunde' uit 1828. Voor de nieuwe serie komen historische Nederlandse reken- en wiskundeboeken in aanmerking die destijds een wezenlijke rol in het onderwijs hebben gespeeld: of omdat ze de markt van lesboeken beheersten, of omdat ze representatief waren voor een belangrijke (onderwijs-)stroming uit een bepaalde periode van de Nederlandse geschiedenis. Daarnaast wordt de keuze bepaald door de herkenbaarheid en leesbaarheid van de boeken voor een hedendaags publiek.

De boeken bieden een afspiegeling van hun tijd. Het doel van de serie is om ons cultureel erfgoed voor een breed publiek toegankelijk te maken. Ieder deel bevat een facsimile voorafgegaan door een inleiding die het boek in een cultuur- en onderwijshistorisch kader plaatst. In de inleiding van het eerste deel wordt ingegaan op de achtergronden waartegen dit boekje geproduceerd werd: het jonge koninkrijk Nederland, de onderwijshervormingen en de nieuwe didactische aanpak in het wiskundeonderwijs. Ook de genootschappen en de invoering van het metrieke stelsel worden onder de aandacht gebracht. *Marjolein Kool*

Cursus wiskundendidactiek voor het basisonderwijs

Het tekort aan leerkrachten op de arbeidsmarkt van het basisonderwijs blijft aanzienlijk en daarmee blijft er een noodzaak om in korte tijd veel nieuwe leraren basisonderwijs op te leiden. De pabo's spelen hierop in door versnelde, duale trajecten aan te bieden, waarbij de opleiding voor het grootste deel plaatsvindt in de basisschool en de bemoeienis van de pabo vermindert. Dit brengt het gevaar met zich mee dat aankomende leerkrachten te weinig met reken- en wiskundendidactiek worden geconfronteerd.

Op de komende 'Panama Opleidersdag' van donderdag 30 oktober zullen voorbeelden getoond worden van hoe men in een dergelijke setting toch voldoende aandacht kan besteden aan wiskundendidactiek.

Voor meer informatie zie de Panama website van het Freudenthal Instituut: <http://www.fi.uu.nl/panama/opleidersdag> *Bron: FI*

Nieuwe oscillerende chemische reactie ontdekt

Onderzoekers van het Berlijnse Fritz-Haber instituut hebben bij toeval een nieuwe oscillerende chemische reactie ontdekt. Bij onderzoek naar warmte-effecten van de reactie tussen zuurstof en koolmonoxide aan een platina katalysator bleek de uiterst dunne platinafolie als een kloppend hart te pulseren.

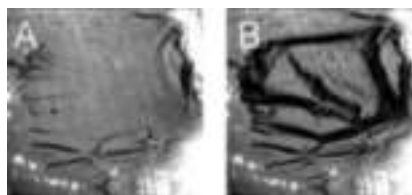
Samen met onderzoekers van de Amerikaanse universiteit van Princeton, die chemische reacties wiskundig hebben gemodelleerd, kwamen de onderzoekers tot de conclusie dat ze veel geluk hebben gehad. Het effect blijkt alleen op te treden bij een heel speciale verhouding tussen dikte en diameter van de folie en slechts bij een vrij beperkte set van reactieparameters zoals temperatuur en gasdruk.

De modellering toonde aan dat de waargenomen effecten volledig chemisch te verklaren zijn: Bij de vorming van koolstofdioxide komt warmte vrij die tot vervorming van de folie leidt. De hogere temperatuur versnelt de reactie, met als gevolg dat de koolmonoxide in de buurt van de folie volledig wordt opgebruikt. Bij gebrek aan koolmonoxide stopt de productie van kooldioxide, de temperatuur daalt en de folie spant zich weer. Als er weer voldoende koolmonoxide naar de folie is gestroomd kan het proces weer van voren af aan beginnen.

Het geluk van de Duitse onderzoekers blijkt nog verder te gaan dan het ontdekken van de chemische oscillatie alleen. Het effect blijkt namelijk gebruikt te kunnen worden om de warmtehuishouding tijdens de chemische reactie heel nauwkeurig in kaart te brengen. De techniek daarvoor wordt inmiddels toegepast in het Duitse onderzoek.

Meer informatie en links: www.kennislink.nl

Bron: Kennislink, Max Planck Gesellschaft



Links de platinafolie in gladde, rechts in vervormde toestand (bron: Max Planck Gesellschaft)

Drie nieuwe bestuursleden NWO-Exacte Wetenschappen

Het NWO-gebied Exacte Wetenschappen heeft per 1 augustus drie nieuwe bestuursleden: prof.dr. E.H.L. Aarts, mw.prof.dr. R.F. Curtain en prof.dr. M.B.M. van der Klis. Op dezelfde datum treden dr. H.A.M. van Eekelen en prof. dr. P.C. van der Kruit uit het bestuur.

Emile Aarts (1955) wordt voorzitter van het gebied. Hij volgt Van Eekelen op. Aarts is vice-president van Philips Research. Hij is daarnaast deeltijdhoogleraar computing science aan de faculteit Wiskunde en Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven. Aarts is gepromoveerd in de natuurkunde. Hij is bijna twintig jaar actief als onderzoeker in de computing science. Vanaf 1991 is Aarts deeltijdhoogleraar in Eindhoven. Hij zit in diverse besturen op zowel wetenschappelijk als gouvernementeel gebied. Ook is Aarts deeltijdconsultant bij het Eindhovense Center for Quantitative Methods. Aarts schreef vijf boeken en meer dan 140 wetenschappelijke artikelen. De onderwerpen lopen uiteen van kernfysica tot neurale netwerken. In 1998 lanceerde hij het idee van 'Ambient Intelligence' (de intelligente omgeving). In 2001 stichtte Aarts het Philips HomeLab. Zijn huidige wetenschappelijke interesses gaan uit naar de interactietechnologie en naar embedded systems (het op maat maken van chips voor één bepaalde taak).

Ruth Curtain (1941) is hoogleraar Wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen. Zij is fellow van de IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers), mede vanwege haar bijdragen aan de controletheorie van stochastische systemen en aan de theorie van oneindig-dimensionale systemen.

Michiel van der Klis (1953) is als hoogleraar verbonden aan het Sterrenkundig Instituut 'Anton Pannekoek' van de Universiteit van Amsterdam. Voor zijn belangrijke bijdragen aan de hoge-energieastrofysica ontving hij in 1987 de Rossi Prize van de American Astronomical Society. Hij ontving in 1991 een Pionierssubsidie van NWO. *Bron: NWO*

Eredoctoraat Hubertus Th. Jongen aan de Shanxi universiteit Taiyuan, China

In april van dit jaar is aan Hubertus Th. Jongen, hoogleraar wiskunde aan de Rheinisch Westfälische Technische Hochschule te Aken, een eredoctoraat verleend door de Shanxi universiteit Taiyuan in China. Het eredoctoraat werd verleend vanwege Jongens bijzondere verdiensten op het gebied van de optimalisatietheorie, zijn wetenschappelijke betrokkenheid bij Azië en Latijns Amerika en zijn grote inzet voor de Shanxi universiteit.

Hubertus Jongen werd in 1947 Oirsbeek geboren. Hij was meerdere jaren officier bij de marine en studeerde drie semesters aan de Technische Universiteit Twente. Als assistent van een onderzoeksgroep in de biomechanica aan de universiteitskliniek in Münster (Duitsland) bekwaamde hij zich als autodidact in de wiskunde en behaalde een universitair diploma in de wiskunde in 1973. Hij promoveerde aan de universiteit van Twente en werd in 1980 hoogleraar in de wiskunde in Hamburg. Sinds 1987 is Jongen hoogleraar in Aken.

De Shanxi universiteit is gesticht in 1902 en is een der oudste van China. De provincie Shanxi ligt in het noorden van China met hoofdstad Taiyuan. Het eredoctoraat was het eerste dat de Shanxi universiteit ooit heeft verleend. *Bron: Christof Zierat, Technische Hochschule Aken*



Hubertus Th. Jongen bij de promotieplechtigheid

TU Delft zet promovendi voor de klas

De Technische Universiteit Delft wil promovendi les laten geven op middelbare scholen. Het motiveren van middelbare scholieren voor het volgen van een bètastudies is het doel. De promovendi gaan lesgeven aan bovenbouwleerlingen van het vwo met profielen *natuur en techniek* en *natuur en gezondheid*.

In de omgeving van de universiteit hebben verschillende scholen positief gereageerd op het initiatief. Voorwaarde van de scholen is dat het geen incidentele lessen betreft. Promovendi moeten naast hun onderzoek al onderwijs verzorgen; dit betreft meestal het verzorgen van werkgroepen of het geven van college aan eerstejaars studenten.

Het is de bedoeling dat de tijd voor het onderzoek hetzelfde blijft; de onderwijsverplichting binnen de universiteit zal vervallen. Omdat verwacht wordt dat het aanzienlijk moeilijker is om les te geven aan middelbare scholieren dan aan studenten, krijgen de promovendi een spoedcursus didactiek. Bestrijding van het lerarentekort is niet het doel, wel een neveneffect. *Bron: NRC handelsblad*

Computer herkent klinkers

Verschillen in uitspraak van Nederlandse klinkers zijn semi-automatisch in kaart te brengen. Dit is de belangrijkste conclusie van het proefschrift van onderzoekster Patti Adank. Zij promoveerde op 23 juni aan de Katholieke Universiteit Nijmegen. Met haar onderzoek heeft ze laten zien dat computeralgoritmes kunnen concurreren met menselijke experts als het gaat om klinkerherkenning en het negeren van verschillen in lichaamsbouw.

De promotie van Patti Adank maakt deel uit van een Nederlands-Vlaams onderzoeksproject dat de verschillen in uitspraak van het Nederlands en Vlaams in kaart moet brengen. Na haar promotie zal dr. Adank in Liverpool onderzoek gaan doen naar automatische spraakherkenning in lawaaiige omgevingen. *Gieljan de Vries, Kennislink*

Achterstand in wiskundeonderwijs allochtone leerlingen door verborgen taalproblemen

Bij het vak wiskunde blijven de prestaties van allochtone leerlingen achter bij die van hun leeftijdgenoten. De oorzaak moet voor een groot deel gezocht worden bij verborgen taalproblemen. Docenten zouden meer aandacht moeten besteden aan de context en de bedoeling van een opgave. Dit concludeert Corine van den Boer, die op dinsdag 27 mei 2003 promoveerde bij de faculteit Wiskunde en Informatica van de Universiteit Utrecht.

In de hedendaagse middelbare-schoolwiskunde is het begrijpen van de context van een wiskundeopgave een deel van het oplossen van de som. Bij allochtone leerlingen is de woordenschat vaak kleiner dan bij autochtone leerlingen.

Uit het onderzoek van Van den Boer blijkt dat allochtone leerlingen zich in de wiskundelessen vaak passief opstellen; Vanwege hun gebrek aan taalvaardigheid richten zij zich op de berekeningen en de antwoorden. Hierdoor leren ze minder van hun eigen wiskundige activiteiten en beperkt het leren zich tot instrumenteel begrip. *Bron: wiskunde persdient, website Universiteit Utrecht*

Hans Melissen

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
j.b.m.melissen@its.tudelft.nl

Kees Roos

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft

In memoriam Freerk Lootsma (1936–2003)

Zoeken naar verborgen drijfveren

Op 16 mei van dit jaar is Freerk Lootsma overleden. Hij was emeritus hoogleraar Operationele Analyse aan de Technische Universiteit Delft en heeft een belangrijke rol gespeeld bij het introduceren van dit vakgebied in Nederland. In zijn wetenschappelijke carrière heeft hij zich steeds ingezet voor het toepassen van de operationele analyse op maatschappelijke problemen. De auteurs van dit In memoriam, Hans Melissen en Kees Roos, zijn beiden universitair hoofddocent geweest bij de leerstoel van Freerk Lootsma. Thans is Kees Roos hoogleraar Optimization Technology bij de faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica, afdeling Informatie Systemen Algoritmiek en Hans Melissen is daar universitair hoofddocent. Beiden verrichten onderzoek op het gebied van optimalisatie.

In het Haagse Bronovoziekenhuis overleed op 16 mei jongstleden, na een kort ziekbed, Freerk Lootsma, emeritus hoogleraar Operationele Analyse aan de Technische Universiteit Delft. Het snelle verloop van zijn ziekte overrompelde het gezin volkomen. Freerk leek in de korte periode die hem nog restte toch berusting te hebben gevonden in zijn lot.

Studie

Jean Henri van Swinden (1746–1823), hoogleeraar natuurkunde en wijsbegeerte aan de Universiteit van Franeker, roemde reeds de Friese lucht als bijzonder geschikt voor de beoefening van de wiskunde. Het is daarom misschien niet verwonderlijk dat domineesoon Freerk Auke Lootsma, op 21 januari 1936 geboren in het Friese Midlum, een bijzondere aanleg voor de wiskunde had. Op zeventien-

jarige leeftijd slaagde hij in Dokkum voor het examen gymnasium B. Vanwege zijn jeugdige leeftijd besloot men om hem een jaar te laten 'narijpen' en in 1954 legde hij in Leeuwarden met goed gevolg het staatsexamen gymnasium A af. De keuze tussen alfa en bèta viel hem zwaar.

Hij overwoog klassieke talen te gaan studeren, maar koos uiteindelijk voor scheikunde. De stank en het ongrijpbare van de praktische experimenten deden hem echter al na enkele weken omzwaaien naar de studie wiskunde en theoretische natuurkunde. Tijdens zijn studietijd in Utrecht (1954–1961) ontmoette hij zijn vrouw Riekje, die daar Frans studeerde. Studiefinanciering kreeg hij van het Sint-Geertruidsleen uit Abbega, een fonds dat sinds 1508 nazaten van pastoor Abma in staat stelde om priester te worden. Na de Reformatie schakelde men over op het sponsoren van predikanten, en nog later werd het een algemeen studieleen, waarvan ook Friezen van buiten Abbega gebruik konden maken.

TNO

In 1961/62 vervulde Freerk zijn militaire dienstplicht als luitenant ter zee bij de Koninklijke Marine. Hij werd gedetacheerd bij TNO–FEL op de Waalsdorpervlakte, waar hij werkte aan het evalueren van wapensystemen voor de onderzeebootbestrijding. Bij TNO kwam hij voor het eerst in aanraking met de Operations Research (OR). Dit vakgebied was in Nederland in opkomst en werd uiteraard niet gedoceerd in het zuivere bolwerk Utrecht. Freerk overwoog een proefschrift te schrijven over zijn onderzoek, maar stuitte op zoveel pro-

blemen in verband met geheimhouding, dat hij hier van afzag.

Philips

Na zijn dienstperiode lag de wereld voor hem open. Grote bedrijven als Kema, de Staatsmijnen en Shell stonden in de rij om de weinige wiskundigen die indertijd afstudeerden aan zich te binden. De keuze viel op Philips, niet in de laatste plaats omdat deze firma in de ogen van de jonge Freerk het best wist hoe je een sollicitant met egards moest ontvangen. Bij de OR groep van Philips' rekencentrum in Eindhoven werkte hij aan netwerkplanning, snijproblemen en de synchronisatie van verkeerslichten. In 1967 volgde een periode van drie jaar op het Natuurkundig Laboratorium van Philips, waar hij onderzoek deed aan niet-lineaire optimalisering. Dit werk legde de basis voor zijn wetenschappelijke carrière en resulteerde in een proefschrift [4]. Freerk promoveerde in 1970 aan de Technische Hogeschool Eindhoven bij J.F. Benders, één van de grondleggers van de Operations Research in Nederland. In die tijd ontwikkelde hij ook een computerprogramma voor niet-lineaire optimalisering, dat nog lang op diverse plekken binnen Philips werd gebruikt. Jong gepromoveerden werden destijds vaak naar een buitenlands zusterlab gestuurd, dus Freerk trok met zijn gezin voor een jaar naar het Mullard Research Laboratory in Redhill, UK, waar hij zijn studie naar algoritmes voor niet-lineaire optimalisering voortzette. Na terugkomst in Eindhoven werd hij bij de automatiseringsafdeling ISA van Philips ingeschakeld om te onderzoeken hoe de automatisering binnen Philips met behulp van bedrijfs-



Freerk Lootsma

kundige gereedschappen op een corporate niveau kon worden getild. Zo bestudeerde hij samen met leden van de Harvard Business School de automatiseringsstrategieën van Philips in Europa en onderzocht hij waarom automatiseringsprojecten zo vaak mislukten. Hij ontwikkelde *business cases* voor gebruik in seminars voor topmanagers van Philips, die aantoonde dat ICT pas effect kan hebben als de infrastructuur en de organisatie zijn aangepast. Het bleek voor Philips inderdaad een utopie te zijn om het automatiseringsbeleid van de autonome hoofdin-dustriegroepen centraal te beïnvloeden. De stafafdeling ISA Research was na het vertrek van Freerk dan ook geen lang leven meer beschoren.

Delft

Het vakgebied Operationele Analyse ontstond tijdens Tweede Wereldoorlog toen de geallieerden onderzoeksgroepen vormden om logistieke militaire operaties optimaal te plannen. Na de oorlog bleken de ontwikkelde wiskundige technieken ook belangrijke civiele toepassingen te hebben in industrie, economie, energie en logistiek. Aan alle belangrijke universiteiten werden leerstoelen in de Operationele Analyse gevestigd. Het aantal voldoende gekwalificeerde kandidaten was in het begin van de zeventiger jaren echter zeer beperkt. Voor de Technische Hogeschool in Delft was Freerk een ideale kandidaat: een proefschrift op het gebied van de niet-lineaire optimalisering, geschreven bij een van de pio-

niers op het gebied in ons land, met daarnaast een uitgebreide toegepaste expertise, opgedaan tijdens de Philips periode, en bovendien een ruime internationale ervaring door de contacten met de Harvard Business School en het jaar doorgebracht in Engeland. De benoemingscommissie, bestaande uit de hoogleraren Benders (TUE), Kosten (TUD), Sieben (TUD) en Stam (RUG), had daarom de vrijmoedigheid om Freerk als enige kandidaat voor te dragen. Zij schreef: "Het is niet mogelijk gebleken een tweede kandidaat voor te dragen, vanwege het geringe aantal deskundigen op het vakgebied van de Operationele Analyse, weshalve wordt afgeweken van het noemen van een tweede kandidaat". De benoeming werd goedgekeurd door het toenmalige ministerie van Onderwijs en Wetenschappen en Freerk Lootsma trad op 1 augustus 1974 in dienst van de Technische Hogeschool Delft. Hij zou ruim 25 jaar invulling geven aan de leerstoel Operationele Analyse bij de Faculteit Toegepaste Wiskunde en Informatica.

De overgang van Philips naar de TU Delft heeft Freerk als moeilijk ervaren. Hoewel hij genoot van de academische vrijheid en de buitenlandse contacten, waren de starre politieke verhoudingen, de totaal andere normen en waarden en de sobere entourage aan de Hogeschool voor hem een cultuurschok. Zijn eerste bijeenkomst met hoogleraren van de faculteit, waarop hen een heuse Iglomaaltijd werd aangeboden stond nu eenmaal in schril contrast met de luxe waarmee Philips haar hoger personeel omringde.

Menselijke beweegredenen

Op het wetenschappelijke vlak profileerde Freerk zich in de Delftse periode aanvankelijk als een expert in de niet-lineaire optimalisering, in die jaren een nieuw en bloeiend onderzoeksgebied. De proceedings [5] hebben veel internationale aandacht gekregen en worden net als zijn proefschrift [4] nog regelmatig geciteerd. In de jaren '80 heeft Freerk zich bezonnen op het vergelijken van de performance van niet-lineaire optimaliseringsprogrammatuur. Hij schreef zelf programma's die werden opgenomen in de NAG softwarebibliotheek (Eo4HAA en Eo4HAF).

Later, geïnspireerd door de club van Rome, raakte Freerk er van overtuigd dat de rol van operationele analyse moest worden verbreed om een bijdrage te kunnen leveren aan belangrijke maatschappelijke problemen. Hij verdiepte zich onder andere in het energievraagstuk, waarin verschillende belanghebbenden met conflicterende doelstellingen tot rationele beslissingen moesten komen. Multi-criteria analyse werd zijn hoofdaandachtsgebied en hij raakte gefascineerd door het wiskundig modelleren van het menselijk oordeel. Een veel geciteerde studie van zijn hand [6] had betrekking op de beraadslagingen in een benoemingsadviescommissie voor een hoogleraar in de wiskunde. Met scherpzinnige analyse en stijlvolle humor liet hij zien hoe multi-criteria methoden de verborgen beweegredenen van de deelnemers aan het licht kunnen brengen, en zodoende tot een beter begrip leiden. Het werk aan multi-criteria analyse leverde methoden op die bruikbaar zijn in een algemene context. Verschillende van zijn ruim tachtig publicaties hebben *Multi-Objective Programming*, *Multi-criteria Analysis* of *Fuzziness* als onderwerp. De resultaten van deze onderzoeken zijn samengevat in twee recentelijk verschenen boeken [2–3]. In contractonderzoek voor onder andere het Ministerie van Economische Zaken en de Europese Commissie zette hij zijn kennis in bij het oplossen van maatschappelijk relevante vraagstukken. Freerk was er goed in om, zoals een ambtenaar van Volksgezondheid het uitdrukte, "bergen cijfers in beleid om te zetten" en hij kon zich vreselijk ergeren als er onjuiste conclusies werden getrokken.

Freerk was binnen en buiten de universiteit organisatorisch en bestuurlijk actief. Hij organiseerde drie *NATO Advanced Studies Institutes* en was *associate editor* van de tijdschriften *Optimization* en *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*. Jarenlang was hij penningmeester van de *Mathematical Programming Society*, adviseur bij TNO, voorzitter van de



De spionageroman geschreven door Freerk Lootsma onder het pseudoniem Milan Bern.

vakgroep Stochastiek, Statistiek en Operationele Analyse en plaatsvervangend rector tijdens promotieplechtigheden. Verder zette hij zich in voor buitenlandse bezoekers als voorzitter van de *Delft University Visitors Foundation*. Gedurende het academisch jaar 1993–1994 bracht hij een sabbatsjaar door aan de Universiteit van Michigan, Ann Arbor, USA. Samen met zijn verblijf in Redhill beschouwde hij dit zelf als hoogtepunten van zijn carrière.

Freerk maakte geen school, maar trad wel op als (co-)promotor voor een achttal promovendi: R.P. van Vet (1980), P.P.J. vann den Bosch (1983), M. Kok (1986), D. den Hertog (1992), B. Jansen (1996), A.H. Lobbrecht (1997), E. de Klerk (1997) en A.J. Quist (2000). Daarnaast studeerden ruim honderd studenten af bij zijn leerstoel en gaf hij vele colleges aan studenten binnen en buiten de faculteit.

Het BACH-project

De vraag of hij het verrichten van onderzoek wel zou volhouden heeft Freerk vaak bezighouden. Ook manifesteerde de worsteling

tussen alfa en bèta zich herhaaldelijk tijdens zijn leven. Uit een combinatie van literaire aspiraties en de behoefte om de ervaringen en frustraties uit zijn Philipstijd van zich af te schrijven ontstond in 1983 een spionageroman. De roman, die onmiskenbaar autobiografische trekken vertoont, werd onder het pseudoniem Milan Bern geschreven, maar Freerk heeft nooit veel moeite gedaan om de ware auteur te verbergen. Hoewel het boek prettig leesbaar is en er enkele duizendtallen van zijn verkocht, hoeft er gelukkig niet geconcludeerd te worden dat een groot Nederlands schrijver in spé zijn carrière aan de wiskunde heeft vergooid. In het kort de inhoud:

De hoofdpersoon, Marco Barends, wordt na zijn studie in Utrecht als dienstplichtige gedetacheerd bij het marine-laboratorium in Vlissingen. Vervolgens treedt hij als jonge onderzoeker in dienst bij de multinational Phlux in Breda. Na een promotie gebaseerd op onderzoek aldaar volgt er een jaar in Engeland, waarna Marco terugkeert naar Breda. Hij wordt verantwoordelijk voor een deel van het BACH-project, een zeer geheim en ambitieus automatiseringsproject, maar raakt daardoor verwickeld in een machtsstrijd waarbij doden vallen. Marco voelt zich voortdurend bedreigd, zeker nadat hij een aanslag op zijn leven heeft overleefd. Twee oudere collega's (Greenberg en McCormick geheten, namen van bekende Amerikaanse beslistkundigen) vragen hem op zeker moment naar zijn toekomstplannen. Marco zegt dat hij voorlopig bij het project betrokken wil blijven, hij heeft zojuist een verzoek afgeslagen om te solliciteren naar een positie als hoogleraar in Dordrecht. "Als je daar maar geen spijt van krijgt", zegt Greenberg. "Het is de vraag of jij je hele leven in de research wilt blijven. Wanneer jouw creativiteit uitgeput raakt, heb je geen keuze meer! Dan wordt je gedwongen om een positie in een ander onderdeel van het bedrijf te accepteren, waarschijnlijk in de computersector". Marco krijgt het Spaans benaamd. "Vanuit zo'n situatie zou ik wel willen overstappen naar een universiteit of hogeschool". Een indringend gesprek met zijn vrouw Petra geeft de doorslag en hij dingt alsnog mee naar het hoogleraarschap. Tijdens

het gesprek met de commissie wordt hem duidelijk wie er achter het complot zit waarin hij betrokken is geraakt. Het boek eindigt met de ontknoping waarbij nog enkele sleutelfiguren het loodje leggen. Marco en zijn minnares Ilo-na (die een Hongaarse agente blijkt te zijn) blijven echter in leven.

De detectiveroman die Freerk nog eens wilde schrijven is er nooit gekomen. Wel goot hij zijn afscheidsrede [7] in de vorm van een science-fictionverhaal waarin wordt teruggeblikt naar het effect van onjuiste beslissingen op catastrofale gebeurtenissen in het jaar 2010 en waarin een wiskundestudente het fatale slachtoffer wordt van de output-financiering.

Pensioen

Het afscheid van de Technische Universiteit viel Freerk zwaar, maar successievelijk bouwde hij toch zijn contacten met de Operations Research af. Tijdens zijn leven heeft hij de vele buitenlandse contacten gekoesterd die hij opdeed tijdens zijn buitenlandse bezoeken en de NATO workshops. Zo onderhield hij persoonlijke relaties met kopstukken als Greenberg en Powell. Hij merkte echter na zijn pensionering in 2000 dat hij weinig kennis in zijn eigen omgeving had. Door actief te zijn in de Haagse Probusclub was hij bezig hierin verandering te brengen. Hoewel Freerk totaal niet sportief was, ontdekte hij in Ann Arbor zijn affiniteit met golf. Na zijn pensionering werd golfen een passie en hij betreunde er niet veel eerder mee te zijn begonnen. Ook intellectueel bleef hij actief. Hij storte zich op de bestudering van de neuroscience, las boeken met titels als *The Emotional Brain*, *The Fabric of Mind* en nam deel aan workshops op dat gebied in Amsterdam. Zijn korte periode van pensionering verliep niet zonder persoonlijke problemen. Het verdriet om de ziekte en dood van zijn schoondochter was groot. Op 21 mei 2002, precies één jaar voor Freerk, werd zij gecremeerd. Zijn vele vrienden en kennissen zullen zich Freerk herinneren als een charmante, gedreven en altijd geïnteresseerde persoon. ←

Referenties

- 1 Milan Bern (pseudoniem van F.A. Lootsma), *Het Bach-Project, roman over spionage in de Europese computerindustrie*. De Fontein, Baarn, 1983.
- 2 Lootsma, F.A., *Fuzzy logic for planning and decision making*. Kluwer, Dordrecht, 1997.
- 3 Lootsma, F.A., *Multi-criteria decision analysis via ratio and difference judgement*. Kluwer, Dordrecht, 1999.
- 4 Lootsma, F.A., *Boundary properties of penalty functions for constrained minimization*. Proefschrift, Eindhoven, 1971, ook verschenen als *Philips Research Reports Supplements* 3, 1971.
- 5 Lootsma, F.A., editor. *Numerical methods for non-linear optimization*. Academic Press, London, 1972. Conference held at the University of Dundee, 28 June–1 July, 1971.
- 6 Lootsma, F.A., Saaty's priority theory and the nomination of a senior professor in operations research. *European Journal of Operations Research* 4, 380–288, 1980.
- 7 Lootsma, F.A., *Geteld, geteld, gewogen, gebroken*, Afscheidsrede TU Delft, 2000.

Johannes Boersma

Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
j.boersma2@tue.nl

Adrianus T. de Hoop

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Delft
Mekelweg 4, 2628 CD Delft
a.t.dehoop@its.tudelft.nl

In memoriam Christoffel Jacob Bouwkamp (1915–2003)

Passie voor precisie

In februari van dit jaar overleed Christoffel Jacob Bouwkamp. Hij was buitengewoon hoogleraar in de toegepaste wiskunde aan de Technische Universiteit Eindhoven en lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Zijn wetenschappelijke leven heeft zich afgespeeld op het snijvlak van de wis- en natuurkunde. De auteurs van dit In memoriam zijn verbonden aan de Technische Universiteiten te Eindhoven en Delft. Johannes Boersma, emeritus hoogleraar wiskunde, heeft Bouwkamp voor het eerst ontmoet in 1956 toen hij als student een stage vervulde op het Philips' Natuurkundig Laboratorium. Vanaf 1966 hebben Boersma en Bouwkamp veel samengewerkt, onder andere op het gebied van de diffractietheorie. Adrianus T. de Hoop, Lorentz Chair Emeritus Professor te Delft, kwam met Bouwkamp in contact toen hij in 1952 als jong ingenieur een artikel van Bouwkamp over diffractietheorie nodig had. De discussies met Bouwkamp hebben tot een blijvende wetenschappelijke samenwerking geleid.

Op 23 februari 2003 is in zijn woonplaats Eindhoven overleden prof.dr. C.J. Bouwkamp op de leeftijd van 87 jaar. Hij was lid van het Wiskundig Genootschap sinds 1937. Als student publiceerde hij reeds zijn eerste twee artikelen in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* van 1936.

Loopbaan

Christoffel Jacob Bouwkamp werd geboren op 26 juni 1915 in Hoogkerk (thans deel van Groningen). Van 1928 tot 1933 doorliep hij de Rijks-HBS te Groningen waar Bottema zijn leeraar wiskunde was. Vervolgens studeerde hij wis- en natuurkunde aan de Rijksuniversiteit Groningen, waar hij in november 1938 'cum laude' het doctoraal examen theoretische natuurkunde aflegde. Op 23 januari 1941 promoveerde hij aan dezelfde universiteit tot doctor in de wis- en natuurkunde op het proefschrift *Theoretische en numerieke behandeling van de buiging door een ronde opening*. Zijn promotor was prof.dr. F. Zernike, Nobelprijswinnaar natuurkunde in 1953.

Zeer bijzonder is, dat Bouwkamps dissertatie bijna dertig jaar na verschijning nogmaals in een door hemzelf verzorgde Engelse vertaling in de *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* van maart 1970 is gepubliceerd, zulks op uitnodiging van de redactie. Aan deze versie is een woord vooraf toegevoegd van Editor D.R. Rhodes waarin deze schrijft: "There are at least three major contributions in this paper. These are 1) the solution to the problem of diffraction through a circular aperture, 2) the rigorous formulation of Babinet's principle for scalar fields, and 3) the development of properties of spheroidal functions, including an iteration procedure for constructing the functions that is still the best available today. In this paper can be found the origins of much of Dr. Bouwkamp's later work, which has played a central role in the development of diffraction theory."

Kort na zijn promotie trad Bouwkamp in dienst bij het Philips' Natuurkundig Laboratorium te Eindhoven, waaraan hij tot zijn pensionering in 1975 verbonden bleef als weten-

schappelijk medewerker, groepsleider en later als wetenschappelijk adviseur. Daarnaast raakte hij betrokken bij universitair onderwijs en onderzoek. Zo was Bouwkamp in 1945 geëxamineerd bij de examens aan de toenmalige Tijdelijke Academie te Eindhoven. In latere jaren was hij gastdocent of gastonderzoeker aan de Technische Hogescholen te Göteborg en Stockholm, aan New York University, en aan de University of California te Berkeley en Los Angeles. Van 1955 tot 1958 was hij buitengewoon hoogleraar in de toegepaste wiskunde aan de Rijksuniversiteit Utrecht.

In november 1956 werd Bouwkamp door het College van Curatoren van de pas opgerichte Technische Hogeschool Eindhoven benoemd tot zijn adviseur, "teneinde advies te geven inzake het wetenschappelijk onderzoek en het onderwijs in de toegepaste wiskunde". In de jaren daarna zijn Seidel en Bouwkamp opgetreden als de grondleggers van de toenmalige Onderafdeling der Wiskunde. Van 1958 tot 1980 was Bouwkamp buitengewoon hoogleraar in de toegepaste wiskunde aan de (thans) Technische Universiteit Eindhoven. In 1960 werd Bouwkamp benoemd tot lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.

Diffractietheorie

In het wetenschappelijke werk van Bouwkamp zijn een paar hoofdlijnen te onderscheiden. Een eerste lijn betreft zijn onderzoek op het gebied van de antennetheorie en van de diffractie- of buigings-theorie. In de antennetheorie heeft hij gewerkt aan het probleem van de elektrische stroomverdeling langs een draadvormige antenne. Voor dit probleem was eerder een theorie ontwikkeld door de Zweedse onderzoeker Hallén, welke theorie door Bouwkamp is verfijnd en uitgebreid. Samen met N.G. de Bruijn onderzocht Bouwkamp het probleem van de 'optimale' stroomverdeling langs een draadantenne, zodanig dat een voorgeschreven stralingspatroon zo goed mogelijk gerealiseerd werd. Aangetoond werd dat het onderhavige probleem 'slecht gesteld' ('ill-posed') was en dat de gevonden wiskundige oplossing instabiel en dus technisch onbruikbaar was; deze conclusie verwekte destijds (1946) enige sensatie.

Bouwkamps onderzoek op het gebied van de diffractietheorie is begonnen met zijn dissertatie. Sindsdien hebben in het bijzonder de problemen van akoestische of elektromagnetische diffractie door een cirkelvormige opening in een vlak scherm zijn voortdurende aandacht gehad. Belangrijk was zijn werk



Christoffel Jacob Bouwkamp

over de singulariteiten van het elektromagnetische veld in de buurt van een scherpe rand ('edge'). Bouwkamp was de eerste die wees op de noodzaak om de zogenaamde 'edge condition' op te nemen in de mathematische formulering van het elektromagnetische diffractieprobleem. Van het werk in latere jaren dient in het bijzonder genoemd te worden het grote overzichtsartikel 'Diffraction theory' in *Reports on Progress in Physics* 17, 35-100 (1954). In dat artikel geeft Bouwkamp op gezaghebbende wijze een kritische bespreking van de toen bekende literatuur over de klassieke diffractietheorie, compleet met een literatuurlijst van meer dan 500 artikelen, die allemaal in de tekst zijn verwerkt. Voor veel vakgenoten is dat overzichtsartikel een leerboek en een startpunt voor verder onderzoek geweest. Dat laatste blijkt uit de vele verwijzingen naar Bouwkamps artikel in de latere literatuur: de *Science Citation Index* vermeldt er ongeveer 360 in de periode vanaf 1960 tot heden.

Nauw verbonden met de diffractietheorie was Bouwkamps werk op het gebied van speciale functies: sferoïdale golf functies, Mathieufuncties en Besselfuncties. Dat verband was heel natuurlijk: in het probleem van de buiging door een ronde opening vormen sferoïdale golf functies het passende wiskundige gereedschap en waar dat gereedschap niet kant en klaar voorhanden was, heeft Bouwkamp het zelf ontwikkeld tot en met de numerieke uitwerking toe. Met recht is Bouwkamp een klassiek toegepaste wiskundige te noemen bij wie de beoefening van wiskunde en haar toepassing in de natuurkunde op vruchtbare wijze samengingen. In het onder-

wijs heeft Bouwkamps wetenschappelijke activiteit een waardevolle spin-off gegeven in de vorm van een aantal caput-colleges Toegepaste Wiskunde, waarvan de studenten hebben kunnen profiteren.

Combinatoriek en computer

Een tweede onderzoeksthema van Bouwkamp is geïnspireerd door puzzels met een wiskundige inslag. Daarbij ging het hem niet om het vinden van *een* oplossing van de puzzel, maar om de constructie van *alle* oplossingen met gebruikmaking van methoden uit de combinatoriek en, bovenal, van de computer. Zo heeft Bouwkamp zich uitvoerig beziggehouden met diverse pentomino-problemen.

Een pentomino (in ruimtelijke vorm) is een configuratie van vijf eenheidskubussen in één vlak gelegen en met elkaar verbonden langs hun zijvlakken. Er bestaan twaalf verschillende pentomino's en deze kunnen bij voorbeeld gebruikt worden om een rechthoekige doos met afmetingen $3 \times 4 \times 5$ of $2 \times 5 \times 6$ te vullen. Van beide problemen heeft Bouwkamp alle oplossingen bepaald en getabelleerd. Daartoe ontwikkelde hij zeer efficiënte computerprogramma's, waarin met behulp van een proces van 'backtracking' de 'boom' van oplossingen werd afgezocht.

Een ander combinatorisch probleem dat Bouwkamp meer dan vijftig jaar heeft gefascineerd, betreft de verdeling van een rechthoek (of een vierkant) in ongelijke deelvierkanten. In zijn eerste artikelen uit 1946-1947 presenteerde Bouwkamp een complete tabel van de 310 mogelijke rechthoekverdelingen van ordes 9 tot en met 13, alle met de hand berekend. De 'orde' is het aantal vierkanten waarin de rechthoek is verdeeld, terwijl rechthoekverdelingen van orde kleiner dan 9 niet voorkomen. Geruime tijd later, toen de computer zijn intrede had gedaan, zag Bouwkamp voor het probleem van de rechthoekverdeling nieuwe mogelijkheden, waarbij hij zich verzekerde van de medewerking van A.J.W. Duijvestijn en anderen.

Dat heeft onder meer geresulteerd in de dissertatie van Duijvestijn in 1962 (met Bouwkamp als promotor), waarin de constructie van rechthoekverdelingen naar opklimmende orde volledig gecomputeriseerd is. Door het gebruik van de computer was het toen mogelijk alle rechthoekverdelingen tot en met orde 18 te bepalen, zij het dat de output van ruim 3000 pagina's te omvangrijk was om gepubliceerd te worden! In de jaren 90 is het onderzoek vooral gericht geweest op het speciale geval van vierkantverdelingen. Bouwkamp en Duijvestijn hebben een tweetal *Albums* ge-

publiceerd met daarin fraaie tekeningen van alle vierkantverdelingen van ordes 21 tot en met 25, en 26 (zie figuur 1).

'Exterminating the problem'

Aparte vermelding verdient Bouwkamps jarenlange werkzaamheid als hoofdredacteur van de *Philips Research Reports*. In deze functie heeft hij door zijn kritische commentaar, zowel wetenschappelijk inhoudelijk als wat het gebruik van de Engelse taal betreft, aanzienlijk bijgedragen tot de kwaliteit van het tijdschrift. Bij zijn afscheid van het Philips' Natuurkundig Laboratorium in 1975 werd te zijner ere een 379 pagina's tellende *Special Issue* uitgebracht waarin een keur van auteurs uiting gaf aan zijn waardering en respect voor Bouwkamp.

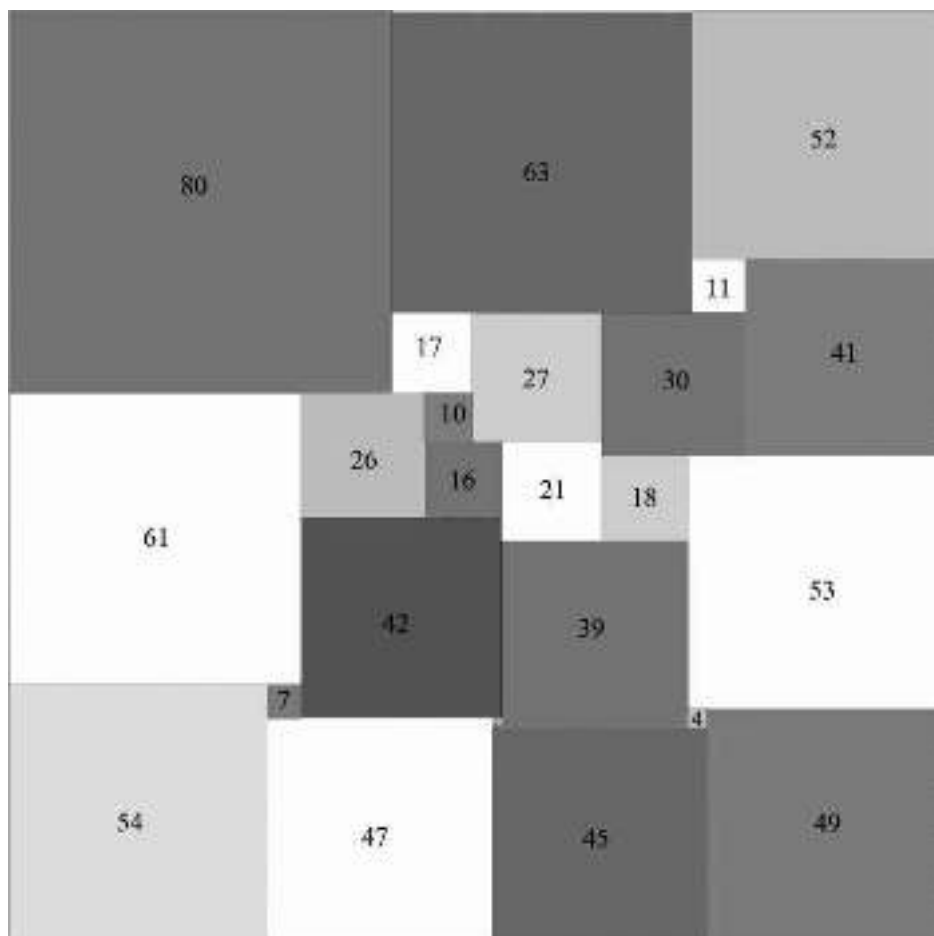
In zijn wetenschappelijke werk heeft Bouwkamp zich vooral gebogen over concrete, specifieke en vaak moeilijke problemen. Die problemen loste hij dan grondig en met grote accuratesse op, inclusief alle analytische en numerieke details. Casimir heeft dat zeer passend tot uitdrukking gebracht in zijn artikel in de *Special Issue*: "if Bouwkamp tackles a problem he deals with it exhaustively, he 'exterminates' the problem, to use his own words."

Bouwkamp is altijd gedreven door een 'passion for exact knowledge', zoals Bottema dat genoemd heeft in diens bijdrage tot de *Special Issue*. Die 'passion for exact knowledge' ging samen met een sterk kritische zin en een grote werkkraft, wat heeft geresulteerd in een oeuvre dat de toegepaste wiskunde wezenlijk heeft vooruitgebracht. Van Bouwkamps kritische zin getuigen ook zijn 374 bijdragen aan de *Mathematical Reviews*. Terzijde zij opgemerkt dat Bouwkamps passie om de dingen grondig te weten en te doen zich niet beperkte tot zijn wetenschappelijke werk. Met dezelfde passie beoefende hij zijn hobby's of het nu het rapen van kievietseieren was of het verzamelen van postzegels en munten.

Een tweede passie die altijd weer treft bij Bouwkamp, is zijn 'passion for accuracy' (de kwalificatie is van Morris Kline van New York University). Die 'passion for accuracy' strekte zich uit over zijn totale werk, vanaf een heel precieze analyse van zijn problemen, via een zorgvuldig en helder schrijven van zijn artikelen, tot en met de correctie van drukfouten in de uiteindelijke publicatie. Zelfs in de overdrukken van zijn artikelen verbeterde Bouwkamp nog de schaarse overgebleven drukfouten!

Bouwkamp is altijd een solist geweest, toegankelijk voor een ieder die met een se-

rieus wiskundig of fysisch probleem bij hem kwam, altijd bereid een ander te laten delen in zijn inzichten. Hij had evenwel—voorzichtig gezegd—geen behoefte aan organisatorische functies in het bedrijf waar hij werkzaam was of aan grote aantallen studenten en promovendi bij de universiteit. Aan de Technische Universiteit Eindhoven heeft Bouwkamp twee promovendi gehad: A.J.W. Duijvestijn en J.K.M. Jansen. Hoewel geen promovendi in formele zin, stellen schrijvers dezes er prijs op toch ook als leerlingen van Bouwkamp beschouwd te worden. Allen die wat langere tijd met Bouwkamp wetenschappelijk in contact hebben gestaan, zijn blijvend geïnspireerd door zijn compromisloze voorbeeld van wetenschapsbeoefening. $\leftarrow$



Figuur 1 Een vierkant, opgedeeld in 24 kleinere vierkanten van onderling verschillende grootte. De verdeling heeft orde 24. Bouwkamp en Duijvestijn hebben een tweetal *Albums* gepubliceerd met daarin onder andere alle 26 vierkantverdelingen van orde 24.

Brieven

| Letters to the editor

Leve het Koninklijk Wiskundig Genootschap! (2)

In de brief *Leve het Koninklijk Wiskundig Genootschap!* van Klaas Landsman (blz. 116/117, NAW, juni 2003) worden in een stijl die lijkt op die van de journalist Burke van Scientific American allerlei op zich interessante zaken aan elkaar geregen. Waar echter Burke's stijl weloverwogen, objectief en ter zake is, is die van Landsman in voor-noemde brief dat niet.

Beethoven, Napoleon, de grondslagencrisis, zeventiende-eeuwse politiek, ondermaanse en bovenmaanse werelden, Cartesianisme, verenigingen en het begrip 'Koninklijke', enzovoorts, dit alles dolt en tui-melt over elkaar heen in een deining die zijn weerga niet kent. Sterker nog, koppeling dezer zaken pretendeert een bijdrage te hebben geleverd aan het thema: "Verlening van het predicaat *Koninklijke* aan het Wiskundig Genootschap."

Men mag denken over het verlenen en voeren van het predicaat *Koninklijke* zoals men wil. Het wordt verleend op grond van op dat moment van verlening bereikte grote verdiensten voor aspecten van de Nederlandse samenleving. Daar kan de onderscheidene terecht trots op zijn. Het predicaat *Koninklijke* kan worden ingetrokken, zo meen ik, bij duidelijk gebleken wangedrag, ook als dat na verloop van tijd zich voordoet.

Het Koninklijk Huis bestaat sedert het begin van de negentiende eeuw (rond 1815) en dateert dus niet uit de "antieke tijd" noch heeft het bestuur van het Wiskundig Genootschap "op 1 mei 2003 de klok vier eeuwen teruggezet", aldus Landsman's brief. Koning Willem I heeft als verlicht despoot direct na zijn intocht, naar Nederland gehaald zijnde vanuit Engeland op instigatie van de heren Van Hoogendorp en Van der Duijn van Maasdam, gedurende een reeks van jaren zijn stempel gedrukt op het Nederlands bestuur en de Nederlandse wetenschap.

Het Cartesianisme is van 1647 tot 1676 aan de Leidse Universiteit verboden geweest, officieel althans. Maar dagelijks ging alles gewoon verder, ook waar het de Cartesiaanse leer betreft, in woord en geschrift, en ook bij colleges. Bij andere universiteiten was het niet anders. Juist hier had enige terughoudendheid gepast door Landsman bij zijn one-liner over Cartesianisme. Over deze leer, Aristoteles-isme en ander-ismen kan men veel vinden in de voortreffelijke, en objectieve passages in: 1) *Leiden University in the seventeenth century* (An exchange of Learning), ed. by Th.H. Lunsingh Scheurleer et al., Leiden 1975: U.P. Leiden/Brill; 2) *Magna Commoditas* (Geschiedenis van de Leidse Universiteitsbibliotheek 1575–2000), door Ch. Berkvens-Stevelinck, 2001 Primavera/U.P. Leiden. Zie blz. 111/112 in de laatste bron, en alle literatuur vermeld in beide bronnen.

Dan de foto bij Landsmans brief. Het lijkt erop dat het gezelschap is voorzien van een Koninklijke Onderscheiding. Zal de schrijver van *Leve het Koninklijk Wiskundig Genootschap!* een eventuele koninklijke onderscheiding wel of niet aanvaarden als blijk van grote achting en eer? Ik ben te zijner tijd benieuwd naar de uitweg in dit dilemma.

Rob van der Waall, Amsterdam

Bernd Krauskopf

Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081, 1081 HV Amsterdam
Department of Engineering Mathematics
University of Bristol
Bristol BS8 1TR, United Kingdom
B.Krauskopf@bristol.ac.uk



Bernd Krauskopf

Inaugurele rede

Chaos en licht

Bernd Krauskopf is hoogleraar in de toegepaste niet-lineaire wiskunde aan de Universiteit van Bristol. Van 2001 tot 2006 is hij Advanced Research Fellow voor het Engineering and Physical Sciences Research Council (EPSRC). Op 1 september 2002 is hij benoemd tot bijzonder hoogleraar mathematische fysica aan de Vrije Universiteit. Zijn inaugurele rede, uitgesproken op 13 maart 2003, handelt over de rol die het vakgebied dynamische systemen speelt bij het ontrafelen van ingewikkelde dynamica van lasersystemen.

De moderne samenleving maakt steeds meer gebruik van licht, bijvoorbeeld voor het opslaan en lezen van data op cd's en voor het snel overdragen van grote hoeveelheden informatie door middel van glasvezels. In deze technische toepassingen wordt het benodigde licht gemaakt door halfgeleiderlasers — kleine, efficiënte lasers van nog geen millimeter groot. Wanneer deze lasers blootgesteld zijn aan externe optische invloeden, zoals reflecties aan een cd of glasvezel, kunnen zij zeer ingewikkeld gedrag vertonen, en dit houdt de mogelijkheid in dat het laserlicht chaotisch is!

Maar wat is chaotisch laserlicht en hoe ontstaat het? Deze vraag stond en staat centraal aan mijn onderzoek naar de niet-lineaire dynamica van halfgeleiderlasersystemen. Ik wil proberen u hier een indruk van te geven.

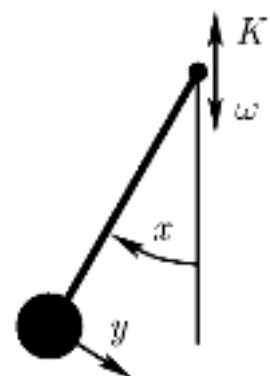
Chaos

Wat is chaos eigenlijk? U zult zelf wel een idee hebben wat chaos is. Het Van Dale woordenboek [17] definieert het woord 'chaos' als

"1) toestand van ongeordendheid of verwarring $\Rightarrow$ wanorde, bende, rotzooi, ordeloosheid; 2) de ordeloze massa voor de scheping $\Rightarrow$ baaierd." Ik wil hier echter preciezer zijn en een indruk geven van wat men onder chaos verstaat in de theorie van dynamische systemen [18]: het gaat om *deterministische chaos*. Om dit begrip duidelijk te maken ga ik beginnen met een voorbeeld van een klassiek mechanisch systeem: de aangedreven slinger met wrijving [19].

Een aangedreven (geïdealiseerde) slinger is een massapunt aan een massaloze staaf die kan draaien rond een vast ophangpunt onder invloed van de zwaartekracht (zie figuur 1). Het is toegestaan dat de slinger over de kop gaat, vandaar dat hij niet aan een touw hangt maar aan een staaf. De slinger wordt periodiek aangedreven, bijvoorbeeld door het ophangpunt periodiek op en neer te bewegen met een amplitude K en een frequentie ω . De toestand van dit systeem wordt bepaald door twee grootheden: de positie x van de slinger, die wordt gemeten als een hoek, en de

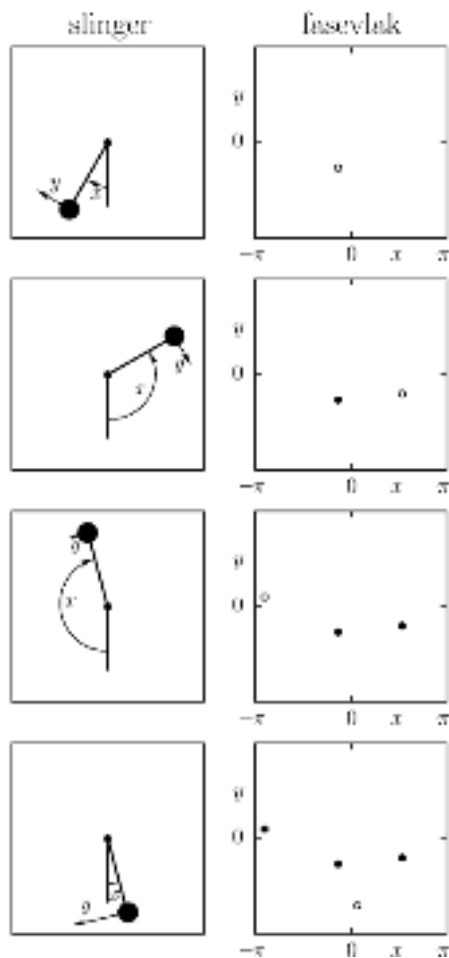
(hoek)snelheid y van de slinger, die is gegeven als de tijdsafgeleide van de positie. Door middel van Newtons wetten is het nu mogelijk een differentiaalvergelijking af te leiden die het gedrag beschrijft. Geschreven in de vorm van een vectorveld is dit dynamisch systeem gegeven door drie vergelijkingen (zie figuur 1): één voor de positie x , één voor de snelheid y en één voor de tijd t (die expliciet in de y -vergelijking voorkomt). De aange-



Figuur 1 De aangedreven slinger wordt beschreven door het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -[1 + K \sin(\omega t)] \sin(x) - c y, \\ \dot{t} &= 1.\end{aligned}$$

Hierbij is x de positie, y de snelheid, K de amplitude van de aandrijving, ω de frequentie van de aandrijving en c de hoeveelheid demping.



Figuur 2 We laten een slinger los in een donkere ruimte en 'flitsen' het experiment met een stroboscopische lamp die precies de frequentie van de aandrijving heeft. Op dat moment noteren wij de positie x en de snelheid y van de slinger in het (x, y) -vlak, het zogenaamde fasevlak.

gedreven slinger is een voorbeeld van een *drie-dimensionaal continu dynamisch systeem*.

De twee hoofdparameters die gemakkelijk tijdens een experiment kunnen worden veranderd, zijn de amplitude K en de frequentie w van de aandrijving. De positieve parameter c geeft aan hoeveel wrijving de slinger onder vindt door de stroefheid van het medium waar hij doorheen beweegt.

In de afwezigheid van de aandrijving, dat wil zeggen voor $K = 0$, zal elke beweging van de slinger uitdampen naar de rustpositie: de slinger hangt uiteindelijk recht naar beneden.

De situatie is echter heel anders wanneer de slinger periodiek wordt aangedreven. Voor een juiste combinatie van amplitude K en frequentie ω van de aandrijving vertoont de slinger chaotische dynamica.

Om dit zichtbaar te maken laten we de slinger los in een donkere ruimte en 'flitsen' we het experiment met een stroboscopische lamp die precies de frequentie van de aandrijving heeft —bijvoorbeeld telkens wanneer het

ophangpunt op zijn hoogste stand is. Op dat moment noteren wij de positie x en de snelheid y van de slinger in het (x, y) -vlak, het zogenaamde fasevlak. Van flits tot flits lijkt de slinger gek heen en weer te springen, net als een danser in een discotheek, en we noteren steeds meer punten in het fasevlak, zoals is te zien in figuur 2.

Als we meer en meer punten van deze stroboscopische procedure in het fasevlak noteren ontstaat er uiteindelijk een duidelijke structuur, namelijk de chaotische aantrekker in figuur 3.

Het gaat om een aantrekker omdat voor (bijna) elke begintoestand (positie x en snelheid y) uiteindelijk hetzelfde plaatje verschijnt. De aangedreven slinger (en de bijbehorende aantrekker) is chaotisch in de volgende zin. Twee begintoestanden die willekeurig dicht bij elkaar liggen zullen tot tijdsevoluties leiden die er na verloop van niet al te lange tijd heel anders gaan uitzien. Dit gebeurt nadat in de ene evolutie de slinger net over de kop gaat terwijl dit in de andere evolutie niet gebeurt.

Omdat een begintoestand in de praktijk nooit met 100% zekerheid te bepalen is, betekent dit dat de aangedreven slinger als het ware onvoorspelbaar is. Desalniettemin is het systeem wel deterministisch: *dezelfde* begintoestand zal altijd *hetzelfde* gedrag tot gevolg hebben. Er is hier dus geen toeval in het spel, en toch is het gedrag van de slinger niet te voorspellen en *lijkt* het daarom toevallig!

Deze schijnbare tegenstrijdigheid is precies het kenmerk van deterministische chaos: de begintoestand bepaalt eenduidig het toekomstige gedrag, maar twee verschillende begintoestanden, hoe dicht bij elkaar dan ook, leiden na verloop van tijd tot totaal uiteenlopend gedrag. Men spreekt van *gevoelige afhankelijkheid van beginvoorwaarden*.

De ontdekking van chaotische dynamica gaat terug naar de Franse wiskundige Henri Poincaré. Hij toonde in 1889 aan dat chaotische dynamica mogelijk is in Newton's vergelijkingen voor drie of meer lichamen en won hiermee een internationale prijsvraag van koning Oscar II van Zweden over de stabiliteit van het heelal (zie [1], hoofdstuk 5). Dat zeer eenvoudige systemen, zoals een aangedreven slinger, chaotisch gedrag kunnen vertonen is een van de grote ontdekkingen van de laatste eeuw. Een belangrijke bijdrage hieraan werd in 1963 geleverd door de Amerikaanse meteoroloog Edward N. Lorenz, die gevoelige afhankelijkheid van beginvoorwaarden vond in een simpel model van de atmosfeer [20].

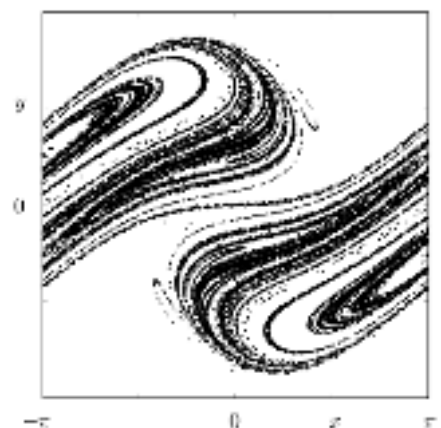
Dit wordt vaak verwoord door het inmiddels welbekende vlindereffect: een vleugelslag van een vlinder in Brazilië kan een onweersbui in Florida veroorzaken (zie [1], hoofdstuk 7). Het vlindereffect wordt nogal eens verkeerd geïnterpreteerd. Bijvoorbeeld wordt er niet bijgezegd dat een andere vlinder, waar dan ook ter wereld, deze onweersbui juist weer kan voorkomen.

Ook wat chaos en zijn bestudering inhoudt wordt helaas vaak verkeerd begrepen. Bijvoorbeeld definieert de Van Dale het woord 'chaostheorie' als "*wiskunde die de afwijking van empirische verschijnselen berekent ten opzichte van de voorspellingen daarvan door natuurwetten.*" Dit is jammer, want het was juist een belangrijke ontdekking dat *de natuurwetten zelf* chaos tot gevolg (kunnen) hebben. Ik ben trouwens geen liefhebber van het woord 'chaostheorie' en heb het liever over de theorie van dynamische systemen.

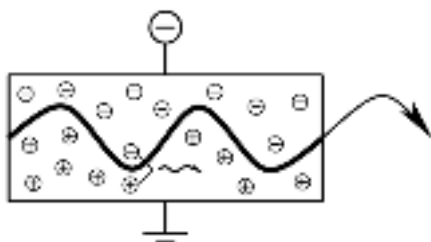
Het vakgebied dynamische systemen is vandaag de dag in ieder geval erg levendig. Hoewel er nog veel interessante theoretische vragen open zijn, kan men toch stellen dat de aandacht zich steeds meer is gaan richten op het bestuderen van ingewikkelde dynamica en chaos in toepassingen.

Dit komt vooral omdat onderzoekers in andere vakgebieden, zoals natuurkunde, biologie en ingenieurswetenschappen, zich meer en meer realiseren dat methoden uit de dynamische systemen veel te bieden hebben in onze niet-lineaire wereld. Bijvoorbeeld trok de conferentie *Applications of Dynamical Systems* van de Society of Industrial and Applied Mathematics (SIAM) in mei 2003 bijna 700 deelnemers [21].

Wat deze theorie bijzonder aantrekkelijk maakt is het feit dat het nu mogelijk is in detail uit te zoeken wanneer en hoe een systeem



Figuur 3 Het resultaat van de procedure in figuur 2: een chaotische aantrekker van de aangedreven slinger.



Figuur 4 Het halfgeleidermateriaal van een halfgeleiderlaser is aan een elektriciteitsbron aangesloten waardoor elektron-gatparen ontstaan, die bij recombinatie elk een foton uitzenden. De twee uiteinden van de laser werken als spiegels die een deel van het licht terugkaatsen. Wanneer er voldoende elektron-gatparen worden aangemaakt, leidt dit tot een staande golf van heen en weer reflecterende fotonen die de elektron-gatparen stimuleert tot recombinatie. Er wordt coherent licht geproduceerd dat de laser verlaat door een van de spiegels.

chaotisch wordt wanneer parameters (bijvoorbeeld de amplitude van de aandrijving) worden veranderd. Ik wil hier een voorbeeld van geven.

Laserlicht

Tijdens de voorbereiding van deze rede heb ik ontelbare malen gebruik gemaakt van laserlicht, bijvoorbeeld voor het opslaan van informatie, het overhalen van bestanden via het internet en het uitprinten van de tekst op een laserprinter. Ik overdrijf niet als ik zeg dat het moderne leven haast onvoorstelbaar is zonder laserlicht, en u zult dan ook wel een of meerdere lasers thuis hebben, bijvoorbeeld in uw cd- of dvd-speler.

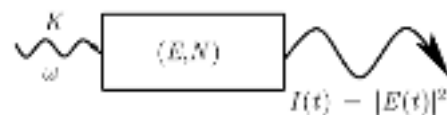
In de meeste gevallen wordt het laserlicht opgewekt door een halfgeleiderlaser, een kleine laser van ongeveer 1 mm lengte die gemaakt is van halfgeleidermateriaal op een siliciumschijf, net als een microchip voor computers. Zoals geschetst is in figuur 4 is het halfgeleidermateriaal aan een elektriciteitsbron aangesloten en daardoor ontstaan elektron-gatparen, die bij recombinatie elk een foton uitzenden. De twee uiteinden van de laserwerken als spiegels die (een deel van) het licht terugkaatsen. Wanneer er voldoende elektron-gatparen worden aangemaakt, leidt dit tot een staande golf van heen en weer reflecterende fotonen die de elektron-gatparen stimuleert tot recombinatie. Er wordt coherent licht geproduceerd dat de laser verlaat door een van de spiegels. Men spreekt van *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*, vandaar de naam *laser*[7].

Halfgeleiderlasers zijn efficiënt, en zo klein dat deze zich gemakkelijk laten inbouwen in allerlei technische apparaten. Hun belangrijkste toepassingen op dit moment zijn dataopslag en telecommunicatie via glasvezels.

Halfgeleiderlasers hebben echter ook een

paar eigenschappen die vaak vervelend zijn in toepassingen. Omdat het halfgeleidermateriaal zeer efficiënt is, worden spiegels gebruikt die typisch maar 30% van het licht reflecteren. Met andere woorden, maar liefst 70% van het licht wordt doorgelaten. Daarom zijn halfgeleiderlasers gevoelig voor externe optische invloeden, zoals het licht van een ander laser, of hun eigen licht dat na reflectie aan bijvoorbeeld een cd weer in de laser terecht komt. Het halfgeleidermateriaal zelf heeft bovendien een zeer niet-lineair gedrag: wanneer de lichtsterkte toeneemt, verandert de frequentie sterk —de laser ‘zingt vals’.

Door de combinatie van deze eigenschappen zijn halfgeleiderlasers zeer interessante dynamische systemen. Bijna elk interessant fenomeen in de theorie van dynamische systemen, en dit houdt ook chaotisch gedrag in, kan men vinden in een of ander lasersysteem [9]. Aan de andere kant heeft de wiskundige theorie van dynamische systemen, met name de *bifurcatietheorie*[22] —de studie naar kwalitatieve veranderingen van de dynamica— veel te bieden wanneer het gaat om het ontrafelen van ingewikkelde dynamica van lasersystemen. Halfgeleiderlasers opereren namelijk op zulke korte tijdschalen dat het (vandaag de dag) onmogelijk is om hun intensiteit als functie van de tijd direct te meten. Daarom kunnen alleen optische spectra gemeten worden, en dat maakt het moeilijk om een onderscheid te maken tussen verschillende, gecompliceerd gedrag van de laser. Hier moet de theorie uitkomst bieden.



Figuur 6 Een wiskundig model voor een injectiellaser wordt gegeven door het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\dot{E} = K + \left[\frac{1}{2}(1 + i\alpha)N - i\omega \right] E,$$

$$\dot{N} = -2\Gamma N - (1 + 2B\Gamma)(|E|^2 - 1).$$

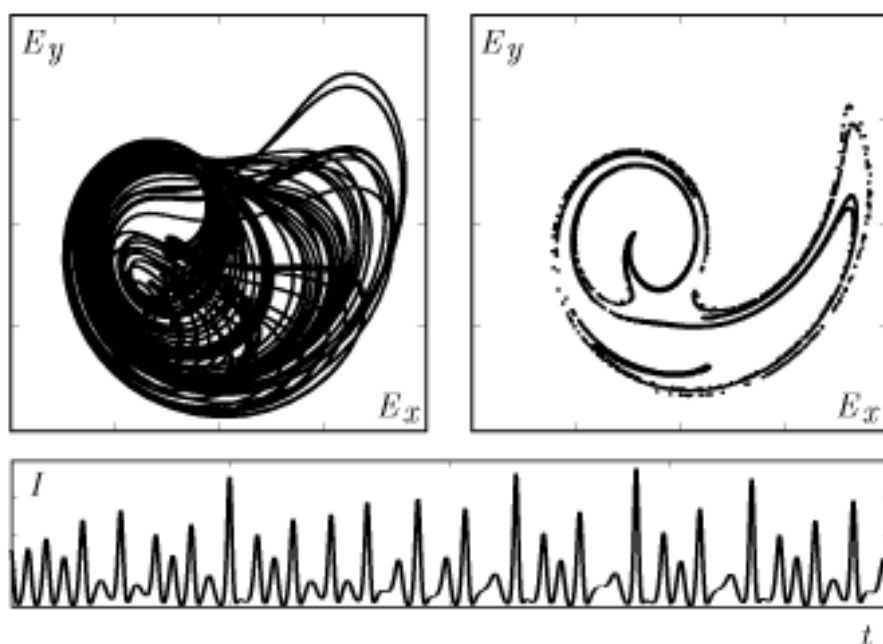
Hierbij is E het complex-elektrische veld, N de inversie, K de sterkte van het geïnjecteerde licht, ω de frequentie van het geïnjecteerde licht, en α, Γ, B zijn materiaaleigenschappen van de laser.

Chaotisch laserlicht

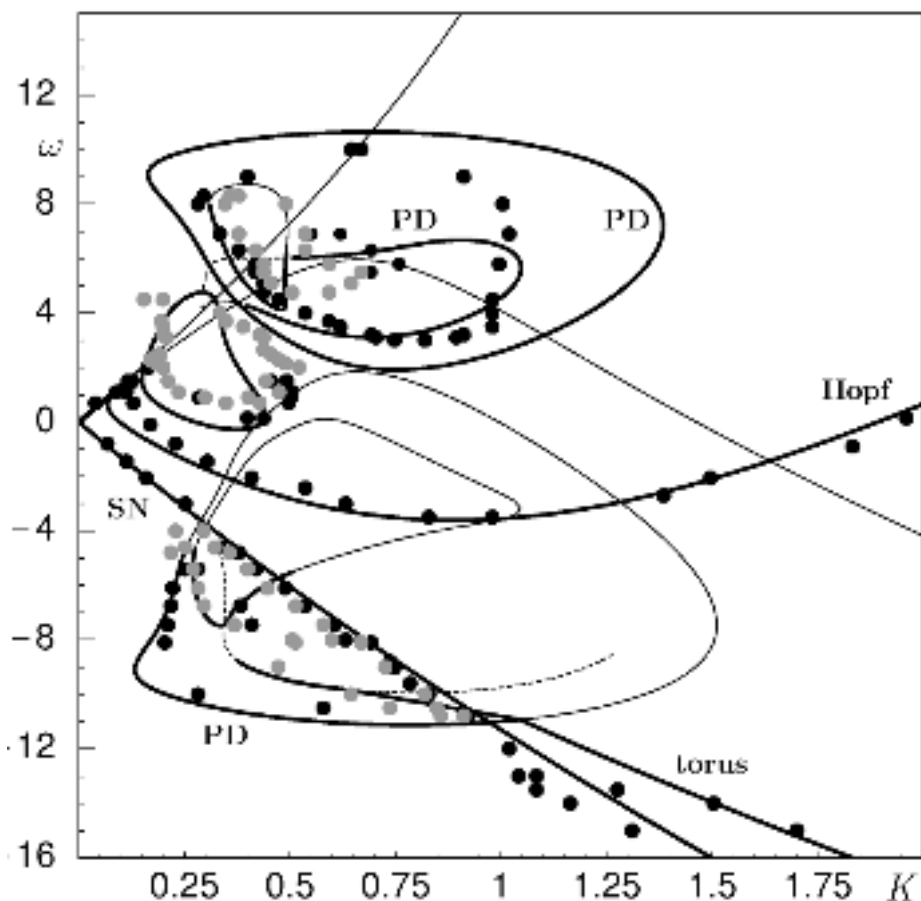
Als voorbeeld van een chaotische laser wil ik een klassiek lasersysteem bespreken: de *injectiellaser* —een halfgeleiderlaser met optisch geïnjecteerd licht van sterkte K en frequentie ω [14]. (Ik merk even op dat ‘klassiek’ in de laserdynamica betekent dat dit systeem wordt bestudeerd sinds de jaren 80.)

Evenals de aangedreven slinger kan de injectiellaser worden gemodelleerd door een stelsel differentiaalvergelijkingen; zie figuur 6. In dit geval is er één voor het complexe *elektrisch veld* E en één voor het aantal elektron-gatparen N , ook wel de *inversie* genoemd. Het inkomende licht heeft invloed op het elektrisch veld E via de experimenteel veranderbare parameters K en ω . De andere parameters α, Γ en B beschrijven materiaaleigenschappen van de laser en blijven onveranderd tijdens een experiment. De laserintensiteit I van het laserlicht is gegeven als $|E|^2$.

Wat is nu het gedrag van dit model van de injectiellaser? In de afwezigheid van



Figuur 5 De chaotische aantrekker van de injectiellaser bovenaan leidt tot een chaotische tijdreeks van de intensiteit.



Figuur 7 Bifurcatiekrommen en meetpunten in het (K, ω) -vlak van de injectielaser (reprinted from [15], Copyright (2002) by the American Physical Society).

geïnjecteerd licht, dus voor $K = 0$, gedraagt de halfgeleiderlaser zich net als de (onaangedreven) slinger: onafhankelijk van de begintoestand dempt de dynamica uit naar een vaste toestand van het systeem, namelijk het produceren van laserlicht van een vaste intensiteit. (Ik veronderstel hier dat de laser daadwerkelijk aan is zonder geïnjecteerd licht.)

Echter, voor de juiste waarden van amplitude K en frequentie ω is de laser chaotisch, dat wil zeggen, de intensiteit I van het laserlicht schommelt op en neer op een chaotische en onvoorspelbare manier, zoals is te zien in de tijdreeks onderaan in figuur 5. Hier hoort de chaotische aantrekker linksboven bij, die nogal lijkt op een garenklosje en hier geprojecteerd is op het complexe E -vlak. De afstand van een punt op deze baan tot de oorsprong van het complexe vlak in het kwadraat geeft de intensiteit van het laserlicht.

Om een betere indruk te krijgen van de structuur van de aantrekker kijken wij naar zijn doorsnijding met het vlak waar de inversie gelijk is aan nul. Dit levert de wolk punten rechtsboven in figuur 5 op: een chaotische aantrekker waar punten op heen en weer

springen. Het kijken naar de gereduceerde dynamica in een goed gekozen vlak is een constructie die teruggaat naar Poincaré. Het analogon hiervan voor de aangedreven slinger is de besproken stroboscopische procedure. De structuur van de zo verkregen aantrekker is typisch voor een chaotische tweedimensionale afbeelding.

De vraag is nu: voor welke waarden van K en ω vindt men chaos? Of nog beter: maak een plattegrond in het (K, ω) -vlak van de gebieden van verschillend gedrag, chaotisch of niet, van het model van de injectielaser. En tenslotte is er nog een belangrijke vraag: Hoe goed komt deze plattegrond overeen met experimentele resultaten?

Deze vragen kunnen worden beantwoord met het, toegegeven, vrij ingewikkelde plaatje van het (K, ω) -vlak in figuur 7. Het is het resultaat van een samenwerking over de laatste vier jaren met Daan Lenstra en Sebastian Wieczorek aan de Vrije Universiteit, en met de experimentator Tom Simpson van Jaycor in San Diego. Deze resultaten, betreffende de overeenkomst tussen theorie en experiment en hier samengevat in figuren 7 en 8, zijn ge-

publiceerd in [15–16].

De krommen geven grenzen aan tussen gebieden met verschillend gedrag van het lasermodel. Om zo een kromme te verkrijgen moet men eerst een waarde van K en ω vinden waar de dynamica kwalitatief verandert, een *bifurcatie* genoemd. Dit is een punt op de grens tussen twee gebieden in het (K, ω) -vlak. Het is vervolgens mogelijk om de bijbehorende grens- of bifurcatiekromme tussen deze twee gebieden te volgen met behulp van normaalvormtheorie in combinatie met gespecialiseerde computerprogramma's. Dit levert dan een sluitend beeld op van het gedrag van een gegeven dynamisch systeem, in dit geval van het model van de injectielaser.

Verschillende krommen staan voor verschillende types bifurcaties. Wanneer krommen dikker zijn getekend gaat het om bifurcaties van aantrekkers, en die zijn direct in een experiment terug te vinden.

De experimentele meetpunten zijn opgenomen tijdens zeer nauwkeurige metingen van optische spectra van een zogeheten *distributed feedback* laser met optische injectie. Een grijs punt geeft aan dat de gemeten spectra een overgang naar ingewikkeld gedrag van de laser, waarschijnlijk chaos, laten zien.

De overeenkomst tussen theorie en experiment is opvallend goed over een heel groot gebied van het (K, ω) -vlak. Ik wil hier benadrukken dat het theoretische plaatje niet 'geoptimaliseerd' is, maar dat vaste waarden voor de laserparameters α , Γ en B zijn gebruikt, zoals door Tom Simpson gemeten aan zijn gebruikte laser.

Er zijn verschillende gebieden waar de laser chaotisch is. In feite was het mogelijk bepaalde overgangen naar chaos te voorspellen die vervolgens daadwerkelijk in het experiment gemeten konden worden.

Een voorbeeld hiervan is een plotselinge overgang van een naar chaos, die is weergegeven in figuur 8. De linker kolom toont de experimentele optische spectra van steeds twee opeenvolgende metingen, en de middelste kolom de berekende spectra van het model. Het eerste spectrum is van chaotisch gedrag: het spectrum bevat als het ware alle frequenties tegelijk, een veelgebruikt kenmerk van chaos. Het tweede spectrum is genomen bijna op het moment van bifurcatie, en men ziet dat er pieken verschijnen bij bepaalde frequenties. Ook is er plotseling een verschil tussen de twee achter elkaar gemeten spectra, hetgeen een verandering van het gedrag van de laser aankondigt. Het derde spectrum, tenslotte, is helemaal anders en toont alleen maar pieken op een paar vaste frequenties.

De laser produceert hier licht van een periodiek veranderende intensiteit.

De rechter kolom in figuur 8 laat zien wat het gedrag is van de bijbehorende aantrekker. Deze bifurcatie is dus een dramatische overgang van een chaotische aantrekker naar een periodieke baan (die het gekozen vlak in twee punten doorsnijdt), of andersom.

De goede overeenstemming tussen theorie en experiment voor dit lasersysteem is nogal opmerkelijk en ligt niet voor de hand. Tijdens de afleiding van het model van de injectielaser zijn namelijk nogal wat aannames gemaakt. Bijvoorbeeld wordt alle ruimtelijke dynamica van het elektrisch veld en de inversie in de laser zelf verwaarloosd. Verder wordt de spontane emissieruis in de laser, een altijd aanwezig element van toeval net als radioactief verval, niet meegenomen. Het model is dus volledig deterministisch, terwijl een echte laser dit nooit is.

Ondanks deze bedenkingen is gebleken dat het mogelijk is met methoden uit de theorie van dynamische systemen niet alleen kwalitatieve maar ook kwantitatieve voorspellingen te doen over het gedrag van dit lasersysteem.

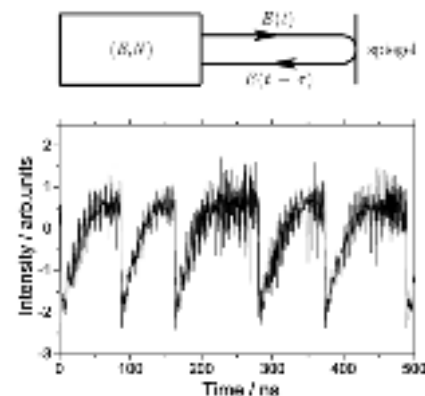
Enkele vooruitzichten

U vraagt zich nu misschien af wat er eigenlijk nog te doen valt in de komende jaren op het gebied van de niet-lineaire dynamica van

lasersystemen? Door verworven kennis in een nette vorm te presenteren kan gemakkelijk de indruk ontstaan dat alles al gedaan is en men beter op een ander gebied kan gaan werken. Helaas heeft de wiskunde veel last van dit effect. Alles lijkt al door de oude Grieken of uiterlijk in de 19de eeuw te zijn bedacht. Ik weet eerlijk gezegd zelf niet zo goed waarom ik uiteindelijk voor wiskunde heb gekozen, maar één reden was zeker dat er op school in latere jaren wel degelijk uitdagingen werden gepresenteerd en niet alleen feiten. Ik wil hier dan ook een korte indruk geven van een paar uitdagingen.

Ik heb het gehad over het, wiskundig gezien, eenvoudigste geval van een lasersysteem dat goed beschreven wordt door een dynamisch systeem van een lage dimensie. Zoals is gebleken is dit systeem al verbazingwekkend ingewikkeld, maar men kan wel bestaande methoden toepassen. Het gaat als het ware om het uitzoeken van een ingewikkelde puzzel. Ik merk wel op dat sommige puzzelstukjes nog niet bekend zijn: bepaalde bifurcaties die in de injectielaser optreden zijn theoretisch nog niet uitgezocht. (Een ervan is onderwerp van een onderzoeksproject in Bristol.)

Een belangrijk en spannend onderzoeksgebied op dit moment is de dynamica en het soort chaos dat men kan vinden in halfgeleiderlasers met optische terugkoppeling [23].



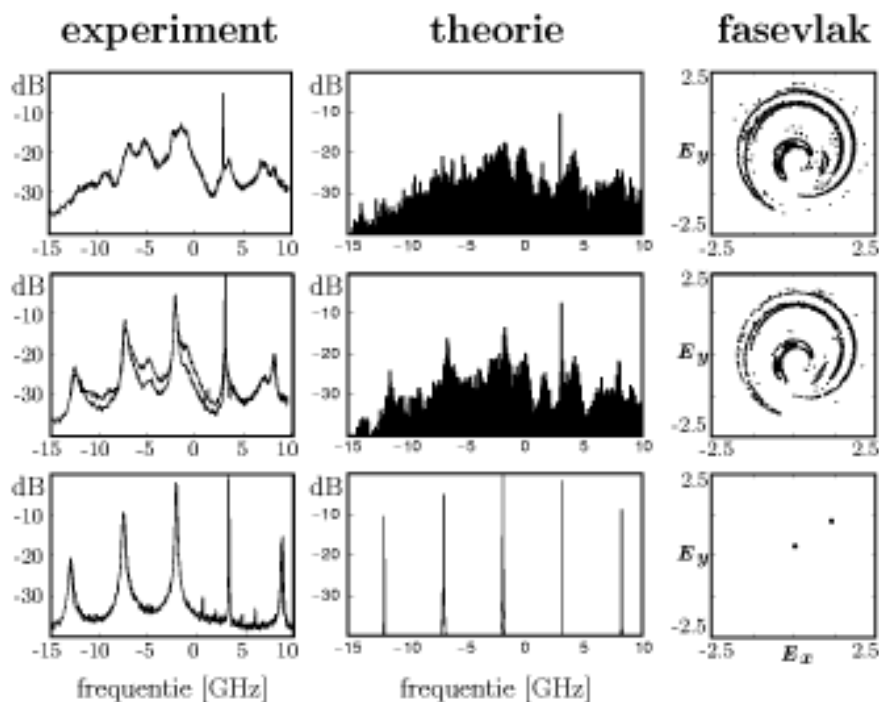
Figuur 9 De laser met optische terugkoppeling; de tijdreeks is gemeten door Ingo Fischer aan de Technische Universität Darmstadt.

In het eenvoudigste geval 'ziet' een laser met enige vertraging zijn eigen licht na reflectie aan een externe spiegel, zoals is te zien in figuur 9. Dit is een lasersysteem van groot technisch belang omdat reflecties kunnen optreden in cd-spelers of bij het inkoppelen van laserlicht in glasvezels. Het is allang bekend dat zelfs een terugkoppeling van minder dan 1% van het uitgezonden laserlicht tot ingewikkelde dynamica kan leiden: de laser gaat op onregelmatige afstanden helemaal uit en dan geleidelijk weer aan, tot hij zijn maximale intensiteit weer heeft bereikt. Dit is duidelijk te zien in de tijdreeks in figuur 9 die is gemeten door Ingo Fischer met een 1 GHz oscilloscoop. In verwijzing naar de Griekse mythologie spreekt men ook van het *Sisyphus effect*, zie [13] en [9], hoofdstuk 5.

Andere lasersystemen met terugkoppeling zijn lasers met fasegeconjungeerde of optoelectronische terugkoppeling, of lasers die onderling verbonden zijn en elkaars licht ontvangen. Echter, het effect van terugkoppeling is ook erg in de belangstelling binnen andere gebieden van toepassingen, zoals in de regeltheorie, de biologie en de scheikunde.

Het is een van de grote open problemen om in detail te begrijpen hoe halfgeleiderlasersystemen zich gedragen afhankelijk van de hoeveelheid teruggekoppeld licht en andere parameters.

Wiskundig leidt terugkoppeling tot een beschrijving van het systeem door een differentiaalvergelijking met vertraging, oftewel een *delay-vergelijking*. Delay-vergelijkingen hebben een oneindig-dimensionale faseruimte: het is niet genoeg om de toestand op dit moment te kennen, men moet ook het stuk van het verleden kennen tot en met de delay-tijd geleden. Daardoor kunnen delay-vergelijkingen zeer ingewikkeld gedrag vertonen. Ook de wiskundige analyse is veel moei-



Figuur 8 Spectra bij een overgang van en naar chaos in de injectielaser (reprinted from [16], Copyright (2003), with permission from Elsevier).

lijker dan voor eindig-dimensionale dynamische systemen [2, 6].

Gelukkig is er recentelijk heel wat gebeurd, met name op het gebied van geavanceerde software voor de bifurcatieanalyse van delay-vergelijkingen [24]. Lasers met terugkoppeling spelen hier een belangrijke rol als motivatie, maar ook als testvoorbeelden. Ik verwacht veel activiteit op dit gebied in de volgende jaren en zal zelf betrokken zijn bij projecten in Bristol en op de VU. Hier gaat het zowel om het verder ontwikkelen van de methodes als om het uitzoeken van de dynamica van concrete lasersystemen, liefst weer in samenwerking met experimentatoren.

Een ander gebied dat veel belangstelling trekt, is de dynamica van andere types lasers, in het bijzonder *vertical cavity surface emitting lasers*, oftewel VCSEL's. Voor deze lasers is de plaatselijk uitgebreide dynamica binnen de laser erg belangrijk, en dit leidt tot

wiskundige modellen in de vorm van partiële differentiaalvergelijkingen. Ook deze modellen hebben een oneindig-dimensionale fase-ruimte met alle problemen van dien, zie [9], hoofdstukken 7 en 14.

Ik hoop dat ik u kon overtuigen dat dit een uitstekend moment is voor onderzoek naar de dynamica van lasersystemen. Ik zal er natuurlijk hier op de VU en ook in Bristol verder mee doorgaan. Maar ik hoop ook nieuwe jonge onderzoekers voor de dynamica van lasers, en voor dynamische systemen en mathematische fysica in het algemeen, te kunnen winnen. Goede, ambitieuze en enthousiaste mensen kunnen direct aan de slag —leuke projecten zijn er in ieder geval genoeg. Het is weliswaar niet altijd gemakkelijk om de geldschieters hiervan te overtuigen, maar er zijn best mogelijkheden, zeker voor het financieren van promotieonderzoek. Zoals velen van u misschien wel weten lijkt het op dit moment

moeilijker om goede promovendi te vinden dan promotieplaatsen.

De theorie van dynamische systemen is abstract in de positieve zin. Het maakt bijvoorbeeld niet uit of men een bepaalde bifurcatie vindt in een lasersysteem, een biologisch systeem of een model van een chemische reactie. De ideeën en methoden zijn hetzelfde. Verder is deze theorie behoorlijk meetkundig: het is mogelijk een gevoel te ontwikkelen voor wat men kan verwachten aan dynamisch gedrag. Het is mijn ervaring dat dit veel studenten aanspreekt, ook studenten die eigenlijk altijd een beetje bang waren voor abstractie.

Dit is een echte kans om studenten te interesseren voor de wiskunde. Het is weliswaar flink wat werk om de theorie te leren, maar daar staat tegenover de kracht van de verworven methoden voor de studie van welk dynamisch systeem dan ook! Ik hoop dat u mij deze lichte overdrijving zult vergeven. 

Referenties

- H.W. Broer, J. van der Craats, F. Verhulst, *Het einde van de voorspelbaarheid?*, Aramith Uitgevers en Epsilon Uitgaven 1995.
- O. Diekmann, S.A. van Gils, S.M. Verduyn Lunel, H.O. Walthers, *Delay Equations: Functional, Complex, and Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag 1995.
- K. Engelborghs, T. Luzyanina, G. Samaey, *DDE-BIFTOOL v2.00: a Matlab package for bifurcation analysis of delay differential equations*, <http://www.cs.kuleuven.ac.be/~koen/delay/ddebiftool.shtml>
- J. Gleick, *CHAOS: Making a New Science*, Viking Press 1987.
- J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag 1983.
- J.K. Hale, S.M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag 1993.
- J. Hecht, *Laser Pioneers*, Academic Press 1992.
- B. Krauskopf, K. Green, Computing unstable manifolds of periodic orbits in delay differential equations, *J. Comp. Phys.* **186** (2003) p. 230–249.
- B. Krauskopf, D. Lenstra (Eds.), *Fundamental Issues of Nonlinear Laser Dynamics*, AIP Conference Proceedings **548**, AIP Publishing 2000.
- Yu.A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag 1995.
- E.N. Lorenz, 'Deterministic nonperiodic flow', *J. Atmospheric Science* **20** (1963) p. 130–141.
- S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus 1994.
- G.H.M. van Tartwijk, A.M. Levine, D. Lenstra 'Sisyphus effect in semiconductor lasers with optical feedback', *IEEE J. Quant. Electronics* **1**(2) (1995) p. 466–472.
- S. Wicczorek, B. Krauskopf, D. Lenstra, 'A unifying view of bifurcations in a semiconductor laser subject to optical injection', *Optics Commun.* **172**(1-6) (1999) p. 279–295.
- S. Wicczorek, T.B. Simpson, B. Krauskopf, D. Lenstra, 'Global quantitative predictions of complex laser dynamics', *Phys. Rev. E* **65**(4) 045207(R) (2002).
- S. Wicczorek, T.B. Simpson, B. Krauskopf, D. Lenstra, 'Bifurcation transitions in an optically injected diode laser: theory and experiment', *Optics Commun.* **215**(1-3) (2003) p. 125–134.
- <http://www.blindsupport.be/vandale.htm>
- Een Nederlandse inleiding op algemeen niveau is [1]; een vakboek is bijvoorbeeld [12].
- De aangedreven slinger wordt in bijna elk boek over dynamische systemen besproken, bijvoorbeeld ook in [1, 12].
- Het originele artikel van Lorenz is [11]; zie ook het verhaal van zijn ontdekking in [4].
- <http://www.siam.org/meetings/dso3>
- Hoofdstuk 1 in [9] is een inleiding in de meest belangrijke bifurcaties; vakboeken zijn bijvoorbeeld [5, 10].
- Zie hoofdstukken 5 en 11 in [9] voor een inleiding in de dynamica van een halfgeleiderlaser met optische terugkoppeling
- De belangrijkste ontwikkeling is het beschikbaar komen van het pakket DDE-BIFTOOL [3] voor de bifurcatieanalyse van delay-vergelijkingen. Het is nu ook mogelijk om zogenaamde een-dimensionale globale variëteiten te berekenen [8].

Hans van Ditmarsch

Computer Science Department, University of Otago

PO Box 56, Dunedin 9015

Nieuw-Zeeland

hans@cs.otago.ac.nz

Column Wiskundigen in den vreemde

Nieuw-Zeeuwse Kroniek

In november 2000 promoveerde Hans van Ditmarsch aan de Rijks-universiteit Groningen. De eerste helft van 2001 bracht hij in St. Andrews (Schotland) door, te gast bij informatica. In september 2001 stapte hij op het vliegtuig naar de andere kant van de wereld en begon een nieuwe carrière aan de University of Otago in Dunedin, Nieuw-Zeeland. Een jaar lang doet hij verslag van zijn ervaringen als Nieuw-Zeeuws immigrant.

Twaalf jaar in Nederland op twaalf verschillende tijdelijke contracten, periodiek onderbroken door de verplichte periode van drie-maanden-een-dag werkloosheid opdat je bij dezelfde werkgever weer een nieuwe tijdelijke aanstelling kon aangaan, waarbij ik in die twaalf jaar toch altijd ongeveer hetzelfde academisch onderwijs bleef verzorgen: ik had er genoeg van! En een afgeronde promotie bood me eindelijk de kans op ontsnapping. Het was duidelijk dat ik zo ver mogelijk weg van Nederland wilde geraken. Turend over de wereldkaart is daar dat intrigerende Nieuw-Zeeland helemaal alleen in de Stille Oceaan, en *in* dat Nieuw-Zeeland ook nog eens een relatief leeg gebied onderaan met helemaal in het zuiden de plaats Dunedin. Dit leek boeiend. In de laatste fasen van het proefschrift, in de kwartiertjes die je af en toe nodig hebt om op adem te komen, tikte ik daarom in web-zoekmachine Google de voor de hand liggende woorden Dunedin, computer science, lecturer en vacancy in. Er rolde als vanzelf een vacature uit aan de University of Otago. Wel, dat is voldoende opwindend voor een kwartiertje, dus ik zwoegde weer verder aan dat hoofdstuk uit mijn proefschrift. Maar ik vergat het niet. Later, begin januari 2001, net begonnen in St. Andrews, probeerde ik dezelfde truc: de vacature was er nog! En, naar bleek, een vriend uit Edinburgh werkte daar ook. Ook was het voormalige hoofd van de vakgroep wiskunde in St. Andrews net naar informatica in Otago verkast. Ik solliciteerde. De baan was met zicht op vast.

In maart 2001 was ik een week in Nieuw-Zeeland voor een sollicitatiegesprek. Het hoofd van de vakgroep haalde me persoonlijk van het vliegveld af! En iedere avond was ik bij een andere potentiële collega te gast aan huis voor een diner. Iedereen strooide folders met onroerend goed over me heen (het prijsniveau is een factor vier lager dan in Nederland). Van die gastvrijheid was ik zo onder de indruk dat ik verder niet na behoefde te denken en de baan, nadat deze mij inderdaad werd aangeboden, accepteerde. Op 13 september 2001 stapte ik uiteindelijk op het vliegtuig.

Inmiddels weet ik dat in Nieuw-Zeeland alles anders is! Zo kort

na 11 september 2001 zou je verwachten dat terrorisme het dagelijks onderwerp van gesprek is onder je collega's. Maar dat was niet zo. Men voelt zich hier ver van de rest van de wereld, en meent ook dat men zijn eigen gang kan blijven gaan zonder dat dat veel uitmaakt. Dit blijkt ook uit de kranten: weinig internationaal nieuws, en meer informatie over dahlia-tentoonstellingen en rugby-wedstrijden. Voetballen doen ze hier niet.

Wat het werk betreft valt vooral de *volmaakte rust* op. In Nederland reis je vaak en regelmatig het hele land door, van een colloquium in Eindhoven, via een werkbezoek in Utrecht naar een onderzoeksbijeenkomst in Amsterdam is net te doen op één dag. En twee dagen later weer naar Maastricht voor een belangrijke projectbespreking. Hier komt dat niet voor. De dichtstbijzijnde andere universiteit is in Christchurch, vierhonderd kilometer naar het noorden. Ik weet dat daar ook een vakgroep wiskunde zit, en ik geloof ook een vakgroep informatica. Auckland is 1500 kilometer naar het noorden. Aan datumbriefjes voor afspraken doen ze dus niet. Iedereen is er altijd. "De werkbespreking is morgen om 10 uur." Want tenzij je college geeft, en dat kan iedereen op het collegerooster nagaan, zit je immers te hobbieën in je werkkamer en ben je dus beschikbaar. Dit is even wennen. "Ik kan niet, want ik werk nu net aan mijn onderzoek" is een ongehoord excuus. Inmiddels is mijn imago tot mijn verbazing radicaal omgeslagen: was ik in Nederland een echte onderwijsman, hier ben ik voor mijn collega's een echte onderzoeker.

Om mezelf bij de vakgroep te introduceren legde ik in 2001 mijn collega's het fameuze zeven-kaartenprobleem voor, zoals later ook in NAW 5/3 nr. 4 in detail uitgelegd. Hierover bogen zich velen, maar het was prettig rolbevestigend dat alleen de twee hoogleraren met een correcte oplossing kwamen! Inmiddels doe ik in de groep van een van hen, Mike Atkinson, hoogleraar algoritmiek, een Engelsman die hiervoor in St. Andrews werkte, onderzoek naar generaliseringen van dit probleem. Ik ben erg dankbaar dat ik mij zo wat meer positioneer binnen het onderzoek van de afdeling. Voor meer logische zaken werk ik samen met Willem Labuschagne die oorspronkelijk uit Zuid-Afrika komt. Eigenlijk is alleen de ondersteunende staf, en het schoonmaak- en kantinepersoneel, Nieuw-Zeelands. Bijna alle academische staf is immigrant. In Nederland is dit meestal andersom.

Een volgende keer hoop ik meer te vertellen over de geschiedenis van de University of Otago, de oudste universiteit van Nieuw-Zeeland, en over een beroemd wiskundige en een beroemd logicus die hier hun wortels hebben: Alexander Aitken en Arthur Prior. ←

Natasha Maurits

Academisch Ziekenhuis Groningen
Afdeling Neurologie, V4
Postbus 30.001
9700 RB Groningen
n.m.maurits@neuro.azg.nl

Vakantiecursus 2002

Een wiskundige kijk in de hersenen

Jaarlijks organiseert het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) onder auspiciën van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars een vakantiecursus voor wiskundeleraars en andere belangstellenden. Bij deze gelegenheid verschijnt steeds een syllabus met teksten bij de voordrachten. Die syllabi zijn ook afzonderlijk bij het CWI verkrijgbaar. Het NAW heeft een serie gestart waarin geselecteerde teksten uit recente syllabi worden geplaatst. Dit artikel is afkomstig uit de syllabus van de vakantiecursus 2002 met het thema 'Wiskunde en Gezondheid'. Het onderwerp is het detecteren en zo goed mogelijk lokaliseren van elektrische activiteit in de hersenen. Natasha Maurits is biomedisch informaticus en UD bij de afdeling neurologie van het Academisch Ziekenhuis Groningen.

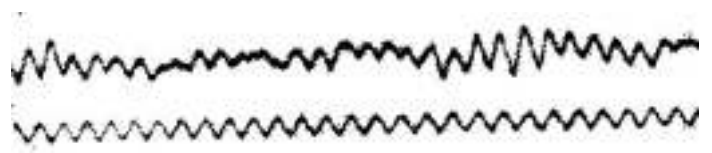
Het functioneren van de hersenen is een van de grootste onopgeloste raadsels van deze tijd. Hoe is het bijvoorbeeld mogelijk dat de gezamenlijke activiteit van miljarden zenuwcellen er voor zorgt dat we denken en slapen? Waar bevinden zich de ziel en het verstand in de hersenen? Waarom zie je bepaalde veranderingen in het gedrag en de vaardigheden van mensen als er een klein deel van de hersenen stuk is? Tegenwoordig zijn er steeds meer technieken beschikbaar waarmee we naar de hersenen kunnen kijken en aan de hersenen kunnen meten, zodat we langzaam maar zeker het mysterie van de hersenen kunnen ontrafelen en dichter bij antwoorden op bovenstaande vragen komen. Bij het gebruik en de interpretatie van al deze technieken, zoals bijvoorbeeld (f)MRI ((functionele) magnetische resonantie imaging), PET (positronen emissie tomografie) en EEG (elektro-encefalografie), spelen wiskundige methoden en modellen een grote rol.

Wiskundige modellen zijn in het algemeen te gebruiken voor het verkrijgen van meer inzicht en het vergroten van het begrip van een systeem. Daarnaast worden modellen natuurlijk ook gebruikt om voorspellingen te kunnen doen, zoals bij het weer of bij beurskoersen. Een voorbeeld van de eerste toepassing is het gebruik van wiskundige modellen om het EEG beter te kunnen interpreteren.

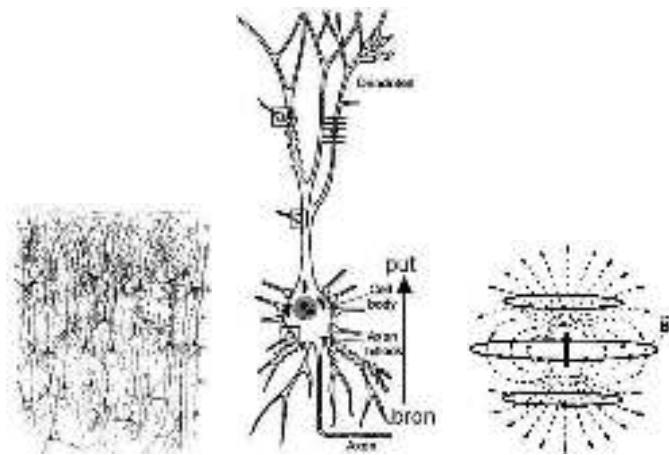
Het EEG

Het EEG is een weergave van elektrische hersenactiviteit, gegenereerd in de neuronen (zenuwcellen) en gemeten met behulp van op het hoofd geplaatste elektroden (kleine metalen schijfjes). Als techniek bestaat het EEG al bijna een eeuw; in 1929 publiceerde Hans Berger in Jena de eerste EEG's van mensen. In figuur 1 is in een voorbeeld hiervan het alpha-ritme (8–13 Hz) te zien.

Bij een EEG-registratie wordt het zwakke elektrische signaal door een elektronische versterker honderden malen versterkt en op papier geschreven, of zoals tegenwoordig, digitaal opgeslagen. Het signaal is altijd een weergave van het momentane potentiaalverschil tussen twee elektroden, weergegeven in een kanaal. Een standaard EEG-registratie maakt gebruik van 20 tot 32



Figuur 1 Eén van de eerste EEG's



Figuur 2 Van links naar rechts: neuronen in de grijze stof; neuron en dipool; elektrisch- en magnetisch veld van een dipool.

elektroden. Tegenwoordig wordt ook gemeten met 64 tot zelfs 128 elektroden. In die vroegste EEG-jaren werd al bekend dat specifieke aandoeningen, zoals epilepsie, slaapproblemen, hersentumoren en dementie, voor typische veranderingen in het EEG zorgen. Jarenlang is de beoordeling van EEGs daarom gebaseerd geweest op het herkennen van patronen horend bij bepaalde ziektebeelden. Maar met de komst van computers is daarin het één en ander veranderd. Door gebruik te maken van digitale filtertechnieken, frequentie- en amplitudeanalyse en kleurenweergaves van potentiaalvelden, wordt het de arts of onderzoeker makkelijker gemaakt patronen te achterhalen in de enorme hoeveelheid getallen van het EEG. Sinds een aantal jaren wordt daarnaast succesvol klinisch gebruik gemaakt van bronlokalisatiemethoden.

Bronlokalisatie en het inverse probleem

Bij deze methoden wordt geprobeerd op grond van het op het hoofd gemeten EEG (uitgedrukt in potentiaalverschillen) te achterhalen waar in de hersenen de bijbehorende elektrische activiteit zich precies bevindt. Zo kan dan bijvoorbeeld op basis van in het EEG gemeten epileptische piekgolfjes geprobeerd worden te achterhalen waar het begin van de epilepsie precies in de hersenen plaatsvindt. Als dit beginpunt goed aangewezen kan worden is het soms mogelijk om bij een operatie dit stukje hersenen te verwijderen. Andere toepassingen van bronlokalisatie komen later in dit verhaal aan de orde. Wat probeer je bij bronlokalisatie nu precies te doen?

Bij bronlokalisatie moet een inverse probleem opgelost worden: gegeven de elektrische potentiaalverdeling op het hoofd, waar liggen dan de veroorzakende bronnen in de hersenen? Al in 1853 is door Helmholtz bewezen dat dit probleem geen unieke oplossing heeft. Dat betekent dat verschillende combinaties van elektrische bronnen in de hersenen dezelfde potentiaal op het hoofdoppervlak kunnen opleveren. Gelukkig heeft het voorwaartse probleem wel een unieke en vaak berekenbare oplossing. Dat wil dus zeggen dat bij een gegeven aantal elektrische bronnen, maar één potentiaalverdeling op het hoofd hoort.

De wetten van Ohm en Maxwell maken het mogelijk het verband tussen potentiaalverdeling en bronnen in formules weer te geven.

Het oplossen van het voorwaartse probleem blijkt equivalent te zijn met het oplossen van een Poissonprobleem. In principe kan de potentiaal V (het op het hoofd gemeten EEG) uit de Poisson-

vergelijking berekend worden, mits de primaire stroom J^p (de bronstroom) en de geleidbaarheid σ van het hoofd bekend zijn. Soms kan dit analytisch, maar in de praktijk moet het meestal numeriek, met de hulp van computers. Vaak zijn daarbij ook nog randvoorwaarden nodig. Het oplossen van de Poissonvergelijking valt onder de potentiaaltheorie.

De wetten van Ohm en Maxwell

De wetten van Maxwell geven het verband tussen de elektrische en magnetische velden die door een stroom(pje) veroorzaakt worden. Omdat de verplaatsingssnelheid van elektromagnetische golven veroorzaakt door potentiaalveranderingen in het brein zo hoog is (10^5 m/sec), dat ze vrijwel overal tegelijk op de schedel gedetecteerd kunnen worden, wordt verondersteld dat de stroompjes zich stationair, dat wil zeggen tijdsafhankelijk, gedragen. Er wordt dus nergens lading opgeslagen. Hierdoor is het voldoende de stationaire Maxwell-vergelijkingen te bekijken voor het elektrisch veld E en het magnetisch veld B :

$$\nabla \cdot E = \rho / \epsilon_0$$

$$\nabla \times E = 0$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J.$$

Hierbij is ρ de ladingsdichtheid, μ_0 de elektrische permeabiliteit van vacuüm, ϵ_0 de diëlektrische constante van vacuüm en J de stroomdichtheid (vector, dus met richting en grootte). Omdat $\nabla \times E = 0$ geldt dat het elektrisch veld te schrijven is als de gradient van een potentiaalveld V :

$$E = -\nabla V.$$

De stroomdichtheid $J(r)$ bestaat volgens de wet van Ohm uit twee gedeeltes: één deel ten gevolge van de passieve volumestroom $\sigma(r)E(r)$ en een deel ten gevolge van de primaire stroom $J^p(r)$:

$$J(r) = J^p(r) - \sigma(r)\nabla V(r).$$

Hierbij is $\sigma(r)$ de geleidbaarheid van het medium (in dit geval de hersenen, schedel, huid etc) die bepaalt hoe moeilijk het is voor de stroom om zich te verplaatsen. Deze scheiding is handig omdat de activiteit van de neuronen aanleiding geeft tot de primaire stroom met name in of bij de cel, terwijl de volumestroom passief overal in het medium stroomt. Door nu de primaire stroom te lokaliseren wordt de bron van de gemeten hersenactiviteit gevonden. $J^p(r)$ is dus als het ware de 'drijvende batterij' van het gemeten EEG. Door nu de divergentie te nemen van de vergelijking hierboven en te gebruiken dat de divergentie van een rotatie nul is en dus $\nabla \cdot J = 0$ (zie laatste Maxwell vergelijking) vinden we:

$$\nabla \cdot J^p = \nabla \cdot (\sigma \nabla V)$$

Dit is een Poissonvergelijking voor de potentiaal $V(r)$.

Oplossen van de Poissonvergelijking: theorie

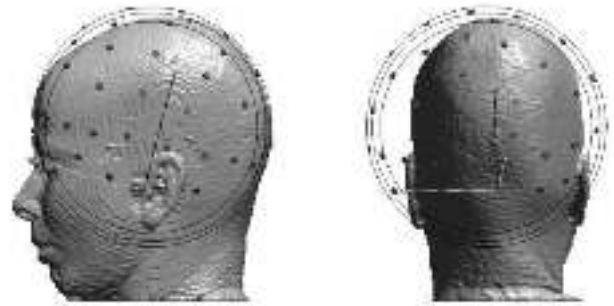
De analytische oplossing van de Poissonvergelijking in het eerste kader is bekend als σ niet van de plaats afhangt en het medium oneindig en in alle richtingen hetzelfde is:

$$V(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \iiint_{\text{volume}} \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}^p}{R} d\mathbf{r},$$

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

In het hoofd is de geleidbaarheid helaas plaatsafhankelijk, het hoofd is eindig en natuurlijk niet in alle richtingen hetzelfde. Dat betekent dat deze oplossing niet direct bruikbaar is. Bovendien representeert de volume-integraal hier de sommatie over alle in het volume gelegen stroombronnen en dat is lastiger dan het lijkt. Het is daarom nodig bepaalde vereenvoudigende aannames te maken over de stroombronnen en de geleider.

De eerste aannames die we maken betreffen de stroombronnen. Over het algemeen wordt aangenomen dat stroombronnen door één of meer dipolen gerepresenteerd kunnen worden. Een



Figuur 3 Hoofd en concentrisch bolmodel

dipool is fysisch interessant, omdat je kunt aantonen dat de potentiaal ten gevolge van een volume waarin zich meerdere elektrische bronnen bevinden, zoals bijvoorbeeld groepjes neuronen, te schrijven is als een oneindige reeksontwikkeling van monopolen, dipolen, tripolen et cetera. In de meeste gevallen is het gelukkig voldoende de stroombronnen te benaderen door een verzameling dipolen. Een dipool bestaat uit twee tegengestelde maar even grote ladingen, die oneindig dicht bij elkaar staan. De dipoolstroomdichtheid van een dipool op positie $\mathbf{r}_Q$ en met sterkte $\mathbf{Q}$ wordt wiskundig uitgedrukt als:

$$\mathbf{J}_{dip}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q).$$

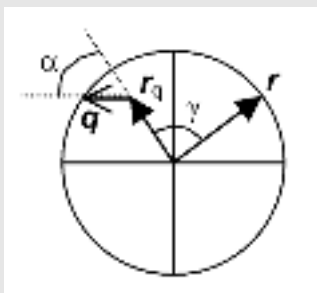
Hierbij is $\delta(\cdot)$ de Dirac-delta functie. Naast fysisch interessant zijn dipolen ook fysiologisch relevant, als model voor populaties van neuronen. In de grijze stof van de hersenen bevinden zich namelijk de pyramidaal neuronen (figuur 2a). Wat je meet bij het EEG is met name de elektrische activiteit van deze cellen. Door hun parallelle oriëntatie wordt bij (voldoende synchrone) activatie van meerdere cellen (in ruimte en tijd) de effectieve stroom sterk genoeg om aan het oppervlak gemeten te kunnen worden. De werking van zo'n neuron is simpel gezegd als volgt: een stimulus van buitenaf (bijvoorbeeld warmte aan je vinger) genereert door verplaatsende ionen een intracellulaire stroompje en ten gevolge daarvan een secundaire extracellulaire volume stroom. Dat maakt de lus van stromende ionen rond. Dit rondstromen van ionen in groepjes van neuronen (figuur 2c) kan gemodelleerd worden door een dipool, die ook wel 'equivalente dipool' (figuur 2b) wordt genoemd. Meestal representeert een dipool een paar cm^2 cortex (hersenooppervlak).

Om de oplossing van de Poissonvergelijking uitrekenbaar te maken moeten niet alleen aannames worden gemaakt over de bronnen, maar ook over de volumegeleider. Dat is de geometrie van het hoofd met alle geleidbaarheden erbij. De simpelste aanname is dat het hoofd een bol is. Het mooie van aannemen dat het hoofd een bol is, is dat dan opeens een analytische uitdrukking bestaat voor de oplossing van het Poissonprobleem. Dat is dus in dit geval de potentiaal ergens op een bol ten gevolge van een dipool ergens in die bol. Dit is de allersimpelste oplossing van het voorwaartse probleem, maar wel heel bruikbaar.

De potentiaal voor meerdere dipolen in een bol is gemakkelijk door optellen te verkrijgen, omdat de Poissonvergelijking lineair is. Een iets betere benadering voor het hoofd als geleider is een meerlaags bolmodel, bestaande uit een centrale bol voor het brein en de cerebrospinale vloeistof, een laag voor de schedel en een

Een analytische uitdrukking voor de oplossing van het Poisson-probleem

De potentiaal op een bolvormige homogene geleider op plaats $\mathbf{r}$ ten gevolge van een dipool in de bol op plaats $\mathbf{r}_q$ zie er als volgt uit. De dipoolsterkte wordt hierbij ontbonden in zijn radiële en tangentiële componenten $q_r = q \cos \alpha$ en $q_t = q \sin \alpha$:



$$v(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q, \mathbf{q}) = v_r(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q, \mathbf{q}) + v_t(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q, \mathbf{q})$$

$$v_r(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q, \mathbf{q}) = \frac{q_r}{4\pi\sigma} \left(\frac{2(r \cos \gamma - r_q)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|^3} + \frac{1}{r_q |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} - \frac{1}{r r_q} \right)$$

$$v_t(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q, \mathbf{q}) = \frac{q_t}{4\pi\sigma} \cos \beta \sin \gamma \times$$

$$\times \left(\frac{2r}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|^3} + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q| + r}{r |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q| (r - r_q \cos \gamma + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|)} \right)$$

Hierbij zijn de vetgedrukte letters vectoren en betreft de gewone variant de lengte van de vector. Verder is β de hoek die gevormd wordt tussen het vlak gevormd door $\mathbf{r}_q$ en $\mathbf{q}$ en het vlak gevormd door $\mathbf{r}_q$ en $\mathbf{r}$. De simpelste vorm van het voorwaartse probleem is hiermee dus opgelost: de potentiaal op het oppervlak ten gevolge van een dipool in een bol is bekend.

laag voor de hoofdhuid (figuur 3). Ook dan kan de potentiaal nog analytisch uitgedrukt worden, hoewel de uitdrukking wel iets ingewikkelder wordt.

Een bol is helaas echter niet zo'n goed model voor een echt, onregelmatig gevormd hoofd. In figuur 3 van het bolmodel is goed te zien dat de bol met name niet past aan de zijanten van het hoofd en onderop. De hersenen zelf en ook de schedel zijn namelijk nogal plat aan de onderkant. Hoewel men zich dit probleem al veel langer realiseerde was daar lange tijd niet zoveel aan te doen omdat de rekenkracht beperkt was. Nu zelfs een desktop PC over flinke reken capaciteit beschikt, wordt voor een betere benadering van hersenen, schedel en hoofdhuid tegenwoordig vaak gebruik gemaakt van driehoeksbeleggingen of een verdeling in volume-elementen voor een realistisch hoofdmodel (figuur 5).

Zoals in figuur 5 te zien is, is de vorm van het hoofd goed te volgen met driehoekjes. De driehoeksbeleggingen blijken erg nuttig te zijn omdat de potentiaal op het hoofd (en elk van de andere grensvlakken tussen de verschillende geleiders) uitgedrukt kan worden in een integraalvergelijking op de grensvlakken. Dit komt omdat de oplossing van de Poissonvergelijking geschreven kan worden als een volume-integraal, die met behulp van de identiteit van Green weer als oppervlakte-integraal uitgedrukt kan worden. De integraalvergelijking kan weer vertaald worden in een (discrete) matrixvergelijking, omdat je bij driehoeksbeleggingen (of volume-elementjes) slechts te maken hebt met een eindig aantal punten waarop je de potentiaal wilt weten. Hierdoor kan de



Figuur 4 Stroomschema voor het oplossen van het inverse probleem met behulp van het voorwaartse probleem

boundary element methode gebruikt worden om numeriek de oplossing te bepalen.

Het inverse probleem in de praktijk

Nu we weten hoe het voorwaartse probleem uitgerekend kan worden, wordt het tijd te gaan kijken hoe dit gebruikt kan worden om het inverse probleem op te lossen. We proberen daarbij dus de veroorzakende bronnen te vinden voor een gegeven elektrische potentiaalverdeling op het hoofd.

Dat doen we 'iteratief': het voorwaartse probleem wordt heel vaak uitgerekend en elke keer vergeleken met de gemeten po-

De boundary element methode om numeriek de oplossing te bepalen van de Poissonvergelijking

Voor de potentiaal $V(\mathbf{r})$ op een grensvlak S_{ij} tussen geleider i (bijvoorbeeld de lucht) en geleider j (bijvoorbeeld de hoofdhuid) geldt:

$$(\sigma_i + \sigma_j)V(\mathbf{r}) = 2\sigma_0 V_0(\mathbf{r}) + \frac{1}{2\pi} \sum_{ij} (\sigma_i - \sigma_j) \int_{S_{ij}} V(\mathbf{r}') d\Omega_r(\mathbf{r}')$$

$$V_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma_0} \iiint_{\text{oneindig volume}} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}^p}{R} d\mathbf{v}'$$

$$d\Omega_r(\mathbf{r}') = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{S}'_{ij}$$

Hierbij moet het een en ander uitgelegd worden over de notatie: de sommatie $\sum_{ij}$ gaat over alle randen tussen geleiders i en j (dus in het realistisch hoofdmodel lucht en hoofdhuid, hoofdhuid en schedel en schedel en brein), (σ_i is de geleidbaarheid van geleider i en σ_0 is de geleidbaarheid van vacuüm. $V_0(\mathbf{r})$ is de potentiaal ten gevolge van bron $\mathbf{J}^p$ in een oneindig, homogeen medium met eenheids geleidbaarheid. $d\Omega_r(\mathbf{r}')$ wordt gedefinieerd als de ruimtehoek waaronder het oppervlakte-element $d\mathbf{S}'_{ij}$ met daarin $\mathbf{r}'$ gezien wordt vanuit $\mathbf{r}$. De oppervlakte-integraalvergelijkingen hierboven kunnen in het geval van driehoeksbeleggingen vertaald worden in een matrixvergelijking, waaruit met behulp van een computer dan de potentiaal als gevolg van een gegeven stroombron in een realistisch hoofdmodel uit te rekenen is. In de *boundary element methode* (BEM) wordt elk oppervlak $S_i, i = 1 \dots m$, in n_i driehoekjes $\Delta_1^i \dots \Delta_{n_i}^i$ verdeeld, waarbij in eerste instantie

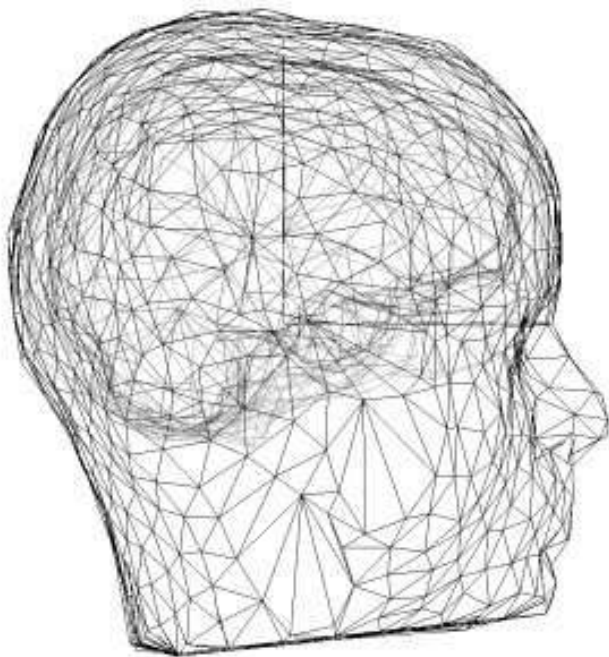
wordt aangenomen dat de potentiaal $V(\mathbf{r} = V_k^i)$ constant is op elk driehoekje. Voor nauwkeuriger benaderingen kunnen hier trouwens ook lineaire of hogere orde interpolaties van de potentiaal op de hoekpunten van een driehoekje worden gebruikt. Als je nu de oppervlakte-integraalvergelijking voor de potentiaal integreert over een van deze driehoekjes, dan krijg je een stelsel van n_i lineaire vergelijkingen voor V_k^i voor driehoekjes die liggen op oppervlak $i, k = 1 \dots n_i$:

$$\mathbf{V}^i = \sum_{j=1}^m \mathbf{H}^{ij} \mathbf{V}^j + \mathbf{g}^i \text{ met}$$

$$g_k^i = \frac{1}{\mu_k^i} \frac{2}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \int_{\Delta_k^i} V_0(\mathbf{r}') dS_i' \text{ en}$$

$$H_{kl}^{ij} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sigma_j^- - \sigma_j^+}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \right] \frac{1}{\mu_k^i} \int_{\Delta_k^i} \Omega_{\Delta_l^j}(\mathbf{r}') dS_i'.$$

Hierbij zijn $\mathbf{V}^i$ en $\mathbf{g}^i$ nu kolomvectoren en $\mathbf{H}^{ij}$ is een matrix, σ_i^- en σ_i^+ zijn de geleidbaarheden binnen en buiten oppervlak S_i , μ_k^i is het oppervlak van het k -de driehoekje Δ_k^i op S_i en $\Omega_{\Delta_l^j}(\mathbf{r}')$ is nu de discrete ruimtehoek. Vaak wordt in de praktijk deze laatste waarde benaderd door de waarde ervan in het zwaartepunt van het betreffende driehoekje Δ_k^i . De matrixelementen H_{kl}^{ij} hangen alleen maar af van de geometrie van de geleider (het hoofd) en hoeven dus voor elke geleider maar een keer uitgerekend te worden. Alleen de bronterm g_k^i verandert voor elke verandering in de stroombronnen en moet dan wel steeds opnieuw uitgerekend worden.



Figuur 5 Hoofd en realistisch hoofdmodel (driehoeksbelegging)

tentiaal of EEG. Voor het overzicht staat in figuur 4 daarvan een stroomschema.

Om te beginnen moet er een aanname gemaakt worden over de bronnen en de volumegeleider, vervolgens wordt voor deze geometrie en bronconfiguratie de potentiaal uitgerekend (het voorwaartse probleem). Dan wordt de zo gevonden potentiaal vergeleken met de gemeten potentiaal. Is de afwijking klein genoeg, dan is een oplossing gevonden. Is de afwijking nog niet klein genoeg, dan wordt op een slimme manier een andere positie van de bronnen bepaald en begint het hele rondje opnieuw. Elk van de belangrijke stappen zal hierna apart toegelicht worden.

De eerste vraag is nu hoe je handig de potentiaal uitrekenet bij gegeven bronnen en geleider (het voorwaartse probleem), zonder dat je al te veel werk dubbel moet doen. Dat uitrekenen moet immers in elke iteratiestap opnieuw gebeuren. Zoals eerder aangetoond werd, is het uitrekenen van de potentiaal geen probleem. Voor dipolen in een bol is er een gesloten uitdrukking en voor realistische hoofdmodellen moet er een matrixvergelijking opge-

lost worden. In de praktijk wordt niet steeds op die manier bij elke nieuwe stroombron- (of dipool-)configuratie de potentiaal opnieuw uitgerekend, maar worden een aantal slim uitgekozen berekeningen van tevoren uitgevoerd en steeds hergebruikt.

Al eerder hebben we gezien dat de Poissonvergelijking lineair is; de potentiaal ten gevolge van stroombronnen gedraagt zich lineair. De gemeten potentiaal is dus de som over de bijdragen van alle stroombronnen. Het is daarom mogelijk om voor de potentiaal van een elektrode(paar) i een lineaire vergelijking als functie van de stroomdichtheid op te schrijven:

$$V_i = \int \mathbf{L}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}) d\mathbf{v}.$$

$\mathbf{L}_i$ is de lead-field operator die afhangt van de geleidbaarheden in de geleider en de elektrodeconfiguratie. Als nu de stroombron een dipool met sterkte $\mathbf{Q}$ op plaats $\mathbf{r}_Q$ is ($\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)$), zoals meestal wordt aangenomen, dan geldt:

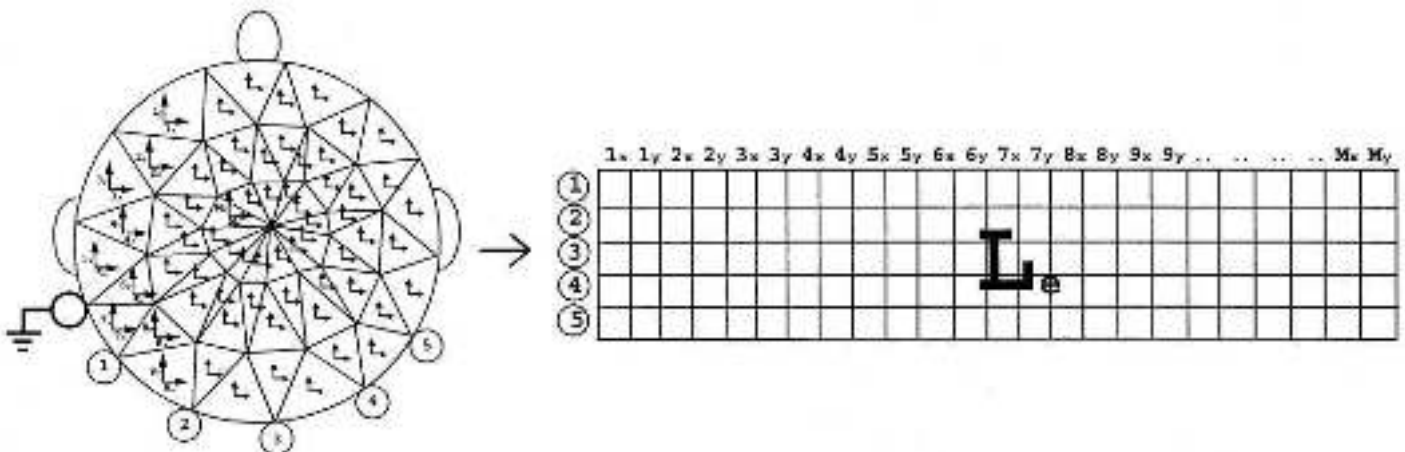
$$V_i(\mathbf{Q}, \mathbf{r}_Q) = \int \mathbf{L}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{Q}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)(\mathbf{r}) d\mathbf{v} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L}_i(\mathbf{r}_Q).$$

In principe krijg je de lead-field operator dus door de potentiaal uit te rekenen op elk punt óp het hoofdmodel, ten gevolge van een dipool $\mathbf{Q}$ op elke mogelijke plaats $\mathbf{r}_Q$ in het hoofdmodel. Als $\mathbf{L}_i$ eenmaal bekend is, kan deze elke keer hergebruikt worden als de potentiaal in datzelfde hoofdmodel ten gevolge van een ander bronmodel berekend moet worden. Voor een bolmodel is dit relatief gemakkelijk om te doen. Bij een realistisch gevormd hoofdmodel is dit een veel lastiger berekening die erg lang kan duren. Er zijn gelukkig wel slimmere methoden om de lead-field operator uit te rekenen voor realistische hoofdmodellen.

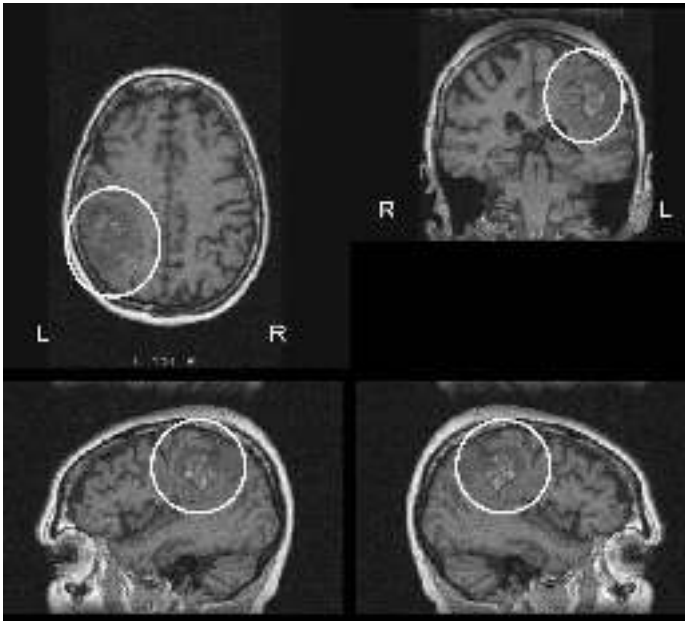
In de praktijk ziet de lead-field vergelijking er voor een bepaalde bronnenconfiguratie $\mathbf{s}$, de gemeten waarden op de elektrodes $\mathbf{d}$ en de ruis in het systeem $\mathbf{n}$, er op een bepaald moment als volgt uit:

$$\mathbf{d} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{n}.$$

De lead-field matrix heeft nu evenveel rijen als er elektrodes zijn en evenveel kolommen als er mogelijke bronposities zijn. Omdat het hoofd gediscetiseerd wordt, is dit laatste een eindig aantal. Om de lead-field matrix uit te rekenen voor een hoofd bestaande uit 16^3 elementen met in elk element 3 orthogonale dipoolcompo-



Figuur 6 M (2D)-dipolen in FEM-elementen, 5 elektroden en grondelektrode leveren een 5 bij 2M lead-field matrix op [4].



Figuur 7 MRI van 65-jarige vrouw met hersentumor (omcirkeld)

nenten zou een computer al meer dan een dag moeten rekenen, als een standaard numerieke voorwaartse berekening zou worden uitgevoerd. Een mooi eindigvolumemodel voor het hoofd kan wel 300.000 elementen hebben met 60.000 knooppunten; als je dan in elk element een dipool zou willen kunnen plaatsen is de lead-field matrix dus niet meer (traditioneel) te berekenen. Door het reciprociteitsprincipe (Helmholtz, 1853) te gebruiken is hier een oplossing voor te vinden. Het principe zegt dat, gegeven een (equivalente) dipool $\mathbf{p}$ en de vraag naar het resulterende potentiaal verschil $V_A - V_B$ tussen twee punten (elektroden) A en B , dit gelijk is aan het inproduct van $\mathbf{p}$ en het elektrisch veld $\mathbf{E}$ op de dipoollocatie, ten gevolge van een eenheidsstroom I tussen A en B :

$$\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{p}}{-I} = V_A - V_B.$$

Dit kan gebruikt worden om $\mathbf{L}$ makkelijk te berekenen. Door een eenheidsstroombron op een gekozen grondelektrode te plaatsen en een eenheidsstroomput op een andere elektrode, kan het potentiaalveld ten gevolge van dit stroompje in alle elementen berekend worden. Door vervolgens de gradient te nemen wordt het elektrisch veld in elk element verkregen. De componenten van het elektrisch veld voor alle elementen vormen dan een rij van de lead-field matrix [4]. Er hoeven nu slechts evenveel voorwaartse potentiaalberekeningen uitgevoerd te worden als er elektroden zijn (één elektrode van elk paar is steeds dezelfde grondelektrode), in plaats van evenveel als het aantal mogelijke dipoolposities (figuur 6). Anders gezegd: elke voorwaartse berekening levert nu een rij van de lead-field matrix op in plaats van een kolom. $\mathbf{L}$ zelf hoeft zo maar één keer uitgerekend te worden. Bij elke iteratiestap in het oplosproces wordt de lead-field vergelijking wel opnieuw uitgerekend, maar is $\mathbf{L}$ al bekend.

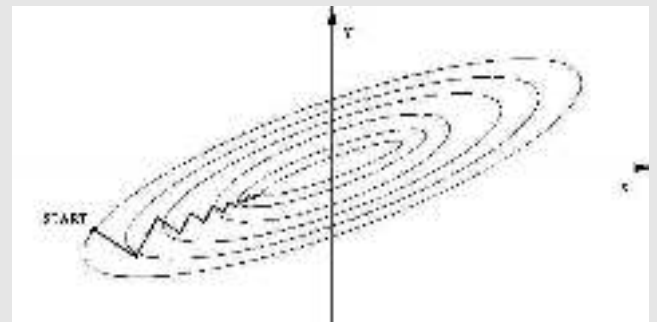
De volgende stap in de iteratieve oplossing van het inverse probleem is het toepassen van de iteratieve methode zelf. Hierbij moeten steeds nieuwe bronposities gevonden worden, zolang het verschil tussen de gemeten en berekende potentiaal nog te groot is. Dit heet een niet-lineair optimalisatieprobleem. Dit probleem

wordt in meer takken van wiskunde opgelost. Er zijn dan ook veel methoden die gebruikt kunnen worden [8]. Bij bronlokalisatie wordt vaak gebruik gemaakt van het Marquardt-algoritme, een variant van de 'steepest-descent'-methode.

Tot slot moet bij elke methode om het inverse probleem op te lossen op een gegeven moment gekozen worden hoeveel dipolen nodig zijn voor een goed model. Hierbij moet zowel het aantal bronnen als het type bronnen gekozen worden en ook moet een beginpositie van de bronnen voor het iteratieve zoekproces wor-

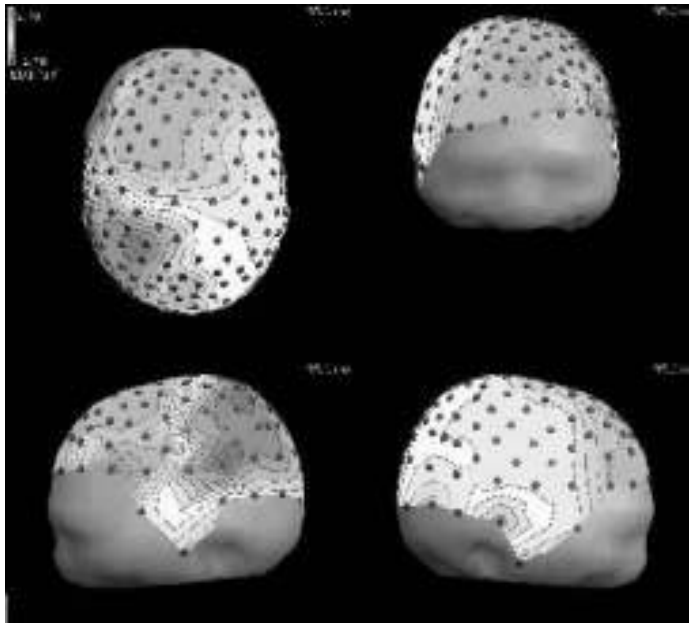
Het Marquardt-algoritme, een variant van de 'steepest-descent'-methode

Om het Marquardt-algoritme te begrijpen is het handig de foutfunctie die geminimaliseerd moet worden voor te stellen als een heuvelandschap, waarbij de dalen de kleinere fouten voorstellen en de pieken de grotere. De bedoeling is om het diepste dal te vinden zonder in een lokaal minimum te blijven hangen. Bij de steepest-descent-methode is het zo, dat vanuit een bepaalde startpositie heuvelafwaarts (in de richting tegengesteld aan de gradient) wordt gezocht. Je maakt dan een stap heuvelafwaarts die zo groot is dat bij een nog grotere stap je weer heuvelopwaarts zou gaan. Het bepalen van deze stapgrootte is een zoekproces op zich en niet zo efficiënt. Bovendien ga je met de steepest-descent-methode zig-zaggend naar beneden en bij lange na niet in een rechte lijn op het minimum af (figuur 8).



Figuur 8 Hoogtelijnen en steepest-descent zoekpad bij een foutfunctie met één minimum

Het Marquardt-algoritme doet het beter dan de steepest-descent-methode door ook de lokale kromming te gebruiken om iets meer te kunnen zeggen over hoe groot de stap is, die in de richting tegengesteld aan de gradient genomen moet worden. Hierbij varieert de methode eigenlijk tussen twee uitersten; als de foutfunctie lokaal heel erg op een kwadratische vorm lijkt wordt het minimaliseren gebaseerd op de lokale kromming. Als de foutfunctie helemaal niet op een kwadratische vorm lijkt, wordt steepest-descent gebruikt. De steepest-descent-variant wordt dan vooral ver van het minimum gebruikt, terwijl de krommings-variant dicht bij het minimum wordt ingeschakeld. Bij de Marquardt-methode wordt meestal niet door geïtereerd tot convergentie, omdat de methode nogal eens rondom het minimum heen en weer blijft wandelen. Meestal wordt dan ook gestopt met itereren als de foutfunctie nog maar met een minimale hoeveelheid afneemt.



Figuur 9 N20-veld van medianus-SEP bij 65-jarige vrouw met hersentumor

den opgegeven. Dit laatste gebeurt vaak met behulp van resultaten uit andere onderzoeken zoals bijvoorbeeld fMRI. Daarnaast is soms ook al bekend uit fysiologisch-anatomische gegevens welke plaatsen in het brein bij de activiteit betrokken zijn.

Vaak gebeurt ook het bepalen van het *aantal* bronnen in het model door gebruik te maken van resultaten uit andere onderzoeken zoals bijvoorbeeld fMRI, EEG of PET. Soms is ook al bekend uit fysiologisch-anatomische gegevens hoeveel plaatsen in het brein (tegelijk) actief zouden moeten zijn. Daarnaast kan het aantal dipolen ook op een puur mathematische manier bepaald worden, met behulp van een SVD- (singular value decomposition), PCA- (principal components analysis) of ICA- (independent components analysis) methode.

Bij de SVD-methode wordt met behulp van de belangrijkste singuliere waarden van de matrix met gemeten waarden, een aantal ruimtelijke componenten of topografieën berekend, zodanig dat de eerste component het grootste deel van de ruimtelijke en tijdsvariatie verklaart. De tweede component staat loodrecht op de eerste component en verklaart een maximaal deel van de overblijvende variatie, enzovoorts. Een nadeel van deze methode is bijvoorbeeld dat de componenten geacht worden loodrecht op elkaar te staan terwijl dat fysiologisch gezien helemaal niet zo hoeft te zijn. Het is in het algemeen dan ook niet zo dat er een 1-op-1 overeenkomst is tussen de SVD-componenten en de activiteit van de daadwerkelijke (dipool)bronnen, maar meestal geeft het aantal belangrijke componenten (met de grootste singuliere waarden) wel een goede indicatie van het aantal actieve bronnen. De PCA-methode is vergelijkbaar met de SVD-methode, waarbij de componenten alleen ten opzichte van elkaar geroteerd kunnen zijn. De ICA-methode wordt tegenwoordig steeds vaker gebruikt omdat daarbij niet verondersteld wordt dat de componenten loodrecht zijn; ze hoeven alleen maar onafhankelijk van elkaar te zijn. De resultaten zijn over het algemeen dan ook veel beter [5].

Praktische overwegingen en een toepassing

Het is niet altijd even gemakkelijk om daadwerkelijk een oplossing van het inverse probleem te vinden die nauwkeurig genoeg

is. Dit komt doordat de potentiaal maar op een beperkt aantal plaatsen gemeten wordt (alleen waar elektroden zitten), de potentiaal met name door de aanwezigheid van het bot in de schedel erg uitgesmeerd wordt en er meestal veel storing (ruis) zit op de meting. Bronlokalisatie werkt pas goed als het interessante signaal in het EEG voldoende sterk is ten opzichte van het achtergrond EEG signaal (grote signaal-ruis-verhouding). Er zijn een aantal manieren om de signaal-ruis-verhouding te verbeteren. Als het interessante signaal meerdere malen gemeten kan worden, zoals bijvoorbeeld bij het vóórkomen van epileptische pieken of bij evoked potentials (EPs), kan gebruik gemaakt worden van middeling. Bij evoked potentials wordt meestal honderden keren dezelfde prikkel gegeven, zoals een elektrische prikkel bij pols of enkel (somato-sensorische EP) of een visuele prikkel (visuele EP). Het idee is dat de verwerking van de prikkel steeds dezelfde hersenactiviteit (en dus EEG) geeft, terwijl het achtergrond EEG bij elke prikkel anders is. Door de stukjes EEG van elke prikkel te middelen, versterk je dan het EEG dat hoort bij de prikkel ten opzichte van het achtergrond-EEG en krijg je een goede signaal-ruis-verhouding.

Het is van een aantal EPs bekend welke hersengebieden betrokken zijn bij de verwerking van de stimuli. Dit maakt het mogelijk om bijvoorbeeld vóór een risicovolle hersenoperatie te kijken waar belangrijke functionele gebieden in de hersenen liggen, zodat deze tijdens de operatie ontzien kunnen worden. Als voor-

Singular Value Decomposition

Mathematisch gezien doet een SVD-methode losgelaten op een matrix $\mathbf{M}$ met meetwaarden het volgende:

$$\mathbf{M} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T$$

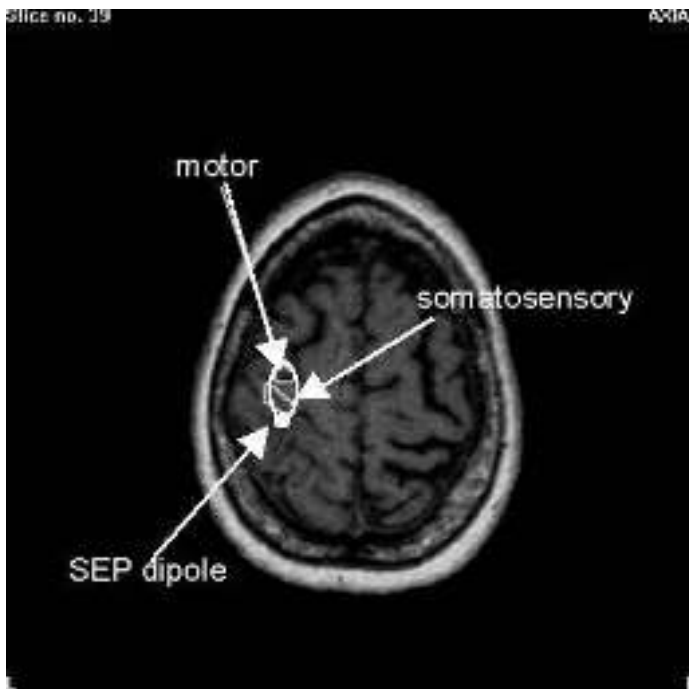
waarbij $\mathbf{\Lambda}$ een diagonaalmatrix is met singuliere waarden λ_k van $\mathbf{M}$ en $\mathbf{U}$ en $\mathbf{V}$ unitaire matrices ($\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{I}$) zijn, opgebouwd uit de singuliere vectoren van $\mathbf{M}$. Je kunt dan aantonen dat het verschil S tussen de gemeten waarden en de waarden die voorspeld worden op basis van een dipool model met r vrijheidsgraden (een vaste dipool heeft 1 vrijheidsgraad) gedefinieerd door

$$S = \|\mathbf{M} - \mathbf{B}\|_F^2, \text{ met } \|\mathbf{A}\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij}^2$$

altijd groter of gelijk is aan

$$\sum_{k=r+1}^{\text{rang}(\mathbf{M})} \lambda_k^2.$$

Hierbij is $\mathbf{A}$ een willekeurige matrix en staan de singuliere waarden in afnemende grootte volgorde. Dit betekent dus dat de fout afhangt van het aantal singuliere waarden dat niet wordt meegenomen, maar ook dat er een optimaal aantal singuliere waarden en dus vrijheidsgraden in je dipool-model is, waarboven de fout niet noemenswaardig meer afneemt.



Figuur 10 Resultaten van pre-operatieve fMRI- en SEP-experimenten

beeld volgt hier het geval van een 65-jarige dame met een hersentumor. Zij had problemen met het gevoel en de functie van haar rechterhand en ook ging het spreken niet meer zo gemakkelijk. Naar aanleiding van deze problemen werd uiteindelijk een MRI gemaakt waarop een tumor te zien was die inderdaad de hersengebieden die betrokken zijn bij de rechterhandfunctie en een deel van de spraak, in gevaar bracht (figuur 7).

Deze tumor moest operatief verwijderd worden, maar voordat dat gedaan werd wilde de neurochirurg graag weten waar de belangrijke hersengebieden voor gevoel en beweging lagen ten opzichte van de tumor. Daarvoor is toen onder andere pre-operatief een SEP van de polsenuw gedaan. Bij deze SEP wordt 500 keer een elektrisch schokje aan de polsenuw gegeven, dat zo'n 20 msec later in de hersenschors aankomt in een gebied dat de somatosensorische schors heet. Hier wordt het schokje het eerst verwerkt. De golf in de EP die hiermee overeenkomt heet de N20-golf en het tijdstip waarop deze golf maximaal was (fi-

guur 9), is geanalyseerd met bronlokalisatie. Omdat de somatosensorische schors vrij oppervlakkig in de hersenen ligt en de potentiaal daardoor minder uitgesmeerd wordt op het hoofdoppervlak dan bij diepliggende bronnen het geval is, is het lokaliseren van de bron van de N20 met een goede nauwkeurigheid uit te voeren. Gekozen is voor het modelleren van de bron door één dipool met een vaste positie en oriëntatie. Deze dipool representeert dus het stukje hersenschors dat 20 msec na een elektrisch schokje aan de pols, met de verwerking hiervan bezig is.

Het hoofdmodel dat gebruikt is, is gebaseerd op de anatomische MRI van de patiënte, waarbij gebruik is gemaakt van segmentatietechnieken om de drie lagen (hersenen, schedel, huid) te bepalen. Ook de posities van de elektroden zijn daadwerkelijk van de SEP-meting bij de patiënte afkomstig. Dat is dan ook essentieel om een betrouwbare lokalisatie van de bron te krijgen. De techniek die gebruikt is om de positie te bepalen past onder andere het Marquardt-algoritme toe. Uiteindelijk leverde dit een positie voor de dipool op die vergeleken kon worden met de hot-spot van een pre-operatief fMRI-experiment waarbij over de vingers gestreken werd. Dit kwam erg goed overeen (figuur 10). Tijdens de operatie is dan ook geprobeerd om de geïdentificeerde gebieden te ontzien met behulp van neuronavigatietechnieken, waarbij tijdens de operatie op een weergave van de MRI zichtbaar is waar de operateur zich bevindt.

Conclusie

Bij bronlokalisatie wordt dus een scala aan wiskundige technieken toegepast; zowel voor het modelleren van het hoofd als de elektrische bronnen, als voor het oplossen van de onderliggende vergelijkingen. Behalve de hier toegelichte technieken zijn er al veel meer methoden bedacht om op een fysiologisch verantwoorde manier de bron van een op het hoofd gemeten EEG te bepalen, die hier natuurlijk niet allemaal aan de orde konden komen. Door het verder ontwikkelen van meettechniek en analysemethoden zullen de toepassingen van bronlokalisatie, zeker in combinatie met andere beeldvormende technieken zoals fMRI en MEG (magneto-encefalografie), de komende jaren alleen nog maar toenemen. Misschien dat het mysterie van de hersenen daardoor weer iets verder ontrafeld kan worden, zodat het beeld dat wij van de hersenen hebben steeds beter kan worden ingevuld. ◀

Referenties

- 1 R.N. Kavanagh et al., 'Evaluation of methods for three-dimensional localization of electrical sources in the human brain', *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 25(5):421-429, 1978.
- 2 J.C. Mosher et al., 'EEG and MEG: Forward solutions for inverse methods', *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 46(3):245-259, 1999.
- 3 E. Kreyszig, *Advanced engineering mathematics*, Wiley, New York, 1988.
- 4 D. Weinstein et al., 'Lead-field bases for electroencephalography source imaging', *Ann. Biomed. Eng.*, 28(9):1059-1065, 2000.
- 5 J. Kastner et al., *Comparison between SVD and ICA as preprocessing tools for source reconstruction*, <http://biomag2000.hut.fi/papers/0865.pdf>.
- 6 R. Plonsey, *Bioelectric phenomena*, McGraw-Hill Series in Bioengineering, New York, 1969.
- 7 E. Niedermeyer et al., *Electroencephalography*, Urban & Schwarzenberg, Baltimore, 1987 (i.h.b. H3: Biophysical aspects of EEG and magnetoencephalogram generation, F. Lopes da Silva et al.).
- 8 W.H. Press et al., *Numerical recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- 9 M. Hämäläinen et al., 'Magnetoencephalography — theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain', *Rev. Mod. Phys.*, 65(2):413-497, 1993.

Gerard Alberts

Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam
g.alberts@wens.kun.nl

Ger Koole

Afdeling Wiskunde
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam
koole@cs.vu.nl

Jaap Molenaar

Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 512
5600 MB Eindhoven
j.molenaar1@tue.nl

De overval

Twee seconden is hier een eeuwigheid

Wiskundigen werken bijna overal. In deze nieuwe serie zoeken Gerard Alberts, Ger Koole en Jaap Molenaar uit waar wiskundigen terecht komen, wat ze er doen, om welke kwaliteiten ze worden gewaardeerd en hoe ze presteren. Na een minimale aankondiging vervoegen zij zich aan de poort van een bedrijf en voelen iedereen aan de tand, van de directeur tot en met de jongste bediende — en natuurlijk de wiskundigen zelf. Als eerste was het Amsterdamse bedrijf Sfiss Financial Technology bereid zich te laten overvallen.

Sfiss is gevestigd in een kleine ruimte in hartje Amsterdam. In een lage zaal zit al het personeel in lederen stoelen voor moderne computers, een enkeling zelfs met twee schermen. Op de *office manager* na is iedereen man en jong. Hier wordt de software gebouwd die *market makers* op de optiebeurs helpt bij het stellen van prijzen van *opties*, *futures* en an-

dere *derivaten*. De wiskundigen werden graag door ons van hun werk gehaald en namen voor de foto met plezier plaats achter het tafelfuotbalspel. De gesprekken gingen echter over andere zaken, zoals *hedges*, *puts* en *strikes*. En over de *Grieken*. De directeur is trots op zijn team, dat voornamelijk bestaat uit wiskundigen en andere bèta's. Voor de verkoop, communicatie en contacten met klanten zijn er mensen met een andere achtergrond bijgekomen, bijvoorbeeld Nijenrode. Er is een *office manager*, die algemene taken uitvoert, van het organiseren van stands op beurzen tot de eerste aanzet voor personeelsbeleid. In totaal is het bedrijf sinds begin 2002 gegroeid van zes naar negentien mensen.

Paul Tangstrøm, bedrijfskundige, is een van de medewerkers die zich bezighoudt met *sales*. "Ik heb de hele groei meegemaakt, van twee tot meer dan twintig mensen, van vier gebruikers tot meer dan zeventig procent van

de financiële wereld in Amsterdam. Wat me aantrekt is dat je met een jong, enthousiast bedrijf in staat bent om hele grote dingen te doen."

Office manager Belia van Gelder: "Ik heb ze allemaal binnen zien komen. Als je ziet wat voor groei het doormaakt, ik vind het heel knap wat ze presteren."

Nico van den Hijligenberg vormt samen met Ralph van Put de directie van Sfiss Financial Technology. Hij vertelt hoe het zo gekomen is. "Ik heb toegepaste wiskunde in Twente gestudeerd bij Martini, mijn promotieonderzoek ging over cohomologie van Liesuperalgebra's. Na twee jaar als postdoc op het CWI bij Arjeh Cohen zocht ik ander werk. Ik was van plan een opleiding voor beleggingsexpert te gaan volgen. Mijn huidige mededirecteur Ralph van Put en professor Jan Bisschop van Paragon, bekend van de taal AIMMS, waren op het idee gekomen om soft-

ware voor financiële instellingen te ontwikkelen. We kwamen met elkaar in contact en zo heb ik bij Paragon voor een *market maker* in drie maanden tijd een prototype van een risico-managementsysteem gebouwd. De *market maker* was zeer tevreden en vroeg me met zijn handelaren te gaan praten om het systeem verder te ontwikkelen. Dat was in 1996. In 1997 kwamen er twee mensen bij en in 1999 was de tijd rijp om te verzelfstandigen.”

De Grieken

Op de beurs gaat het allang niet meer alleen om de aandelen zelf, maar om *derivaten*, afgeleiden, ofwel opties: het recht, de optie, een bepaald aandeel op een gegeven moment voor een bepaalde prijs te mogen kopen of verkopen. De optiebeurs is geheel virtueel geworden. Het is niet meer die hal met schreeuwende mannetjes die een *crowd* vormen bij de Philips- of de KLM-balie. De handel in *put*- en *call*-opties, *futures* en andere *derivaten* vindt geheel op het computerscherm plaats. Sterker nog, het voltrekt zich goeddeels geautomatiseerd. Wat u verwacht is waar: daar komt veel wiskunde bij kijken. Door de overgang van vloer naar schermhandel hebben de beurs en de handelaren meer rekening te houden met een derde partij, de leveranciers van de software die de handel automatisch laat verlopen. Sfs is zo'n leverancier, een ISV (*Independent Software Vendor*).

Van den Hijligenberg: “Onze klanten zijn de market makers, de optiehandelaren die constant prijzen moeten zetten in de optiebeurs. Toen het nog vloerhandel was, leverden wij de ‘hand held’ technologie: software voor kleine apparaatjes waarmee de handelaren op de vloer hun berekeningen konden doen. Onze klanten waren allemaal Amsterdamse bedrijven en wij hadden onder hen een marktaandeel van 70%. Met de tegenwoordige schermhandel maakt het niets meer uit waar je je telefoonlijntje aansluit. Nu hebben wij ook klanten in bijvoorbeeld Ierland en Spanje. Die handelen met ons systeem op verschillende beurzen. Met onze software kun je op *Euronext* handelen, maar ook op *Eurex*, de beurs in Frankfurt en op *Euronext.Liffe*, de beurs in Londen. Ons systeem kijkt ook naar strategische posities. In de optietheorie zijn de partiële afgeleiden van de prijs, aangegeven met de Griekse letters δ , θ , γ , ω , ρ , even essentieel als de prijs zelf. In het *Black & Scholesmodel* zijn de evaluaties hiervan eenvoudig, indien je overgaat tot andere modellen dan leiden de Grieken tot intensief reken-

werk. Op grond van de *Grieken* bekijken onze klanten de risico's van posities, en besluiten ze om zich in te dekken of tegentransacties te doen.”

Twee seconden

Van den Hijligenberg: “Per seconde kan een *Primary Market Maker* (zie kader ‘De beurs’) de prijs van 70 tot 80 producten wijzigen. Is de markt onrustig en moet je alle prijzen wijzigen, dan ben je echt twee seconden bezig. Twee seconden in deze markt is een eeuwigheid. Stel je voor, de PMM's en CMM's (zie kader ‘De beurs’) zetten de schermen vol met aanbiedingen met een typische grootte van 50 contracten. Als er dan iets uit lijn is en de hele markt begint aan jouw prijzen te trekken, zijn het echt bakken met opties die verhandeld worden. Het zijn gigantische risico's die je dan loopt. De taak van onze software is te zorgen dat dat netjes gebeurt, dat de prijzen netjes worden gesteld —dus je moet de goede modellen hebben— en dat ze op tijd en in de goede volgorde worden aangepast.”

Paul Tangstrøm: “Als mijn software een fractie van een seconde eerder beslist dan die van de concurrent, dan kan je daar enorm veel geld mee verdienen. De computer die je gebruikt, de verbinding, maar ook de code spelen allemaal een heel belangrijke rol. De prijzen zijn door de invoering van de schermhandel steeds dichterbij elkaar komen liggen. De rol van de software, en dus van de modellen die je gebruikt, is daardoor steeds groter geworden.”

Maken de systeembouwers wel eens een privéuitstapje naar de beurs? Van den Hijli-

genberg: “Nee, onze mensen zien anders goed dat het handelen op de beurs zijn plus- en zijn min-kanten heeft. Om goed te handelen moet je op een bepaalde manier in je vel zitten. Het is niet zo dat we de mensen daarvoor afschermen. We selecteren op het plezier dat iemand heeft in dit werk en op aansluiting bij de cultuur die hier heerst. Dat blijkt in de praktijk die andere kant, neiging tot beurshandel, reeds uit te sluiten. We letten daar eigenlijk niet expliciet op.”

“Onze mensen zijn open en eerlijk. We zijn een klein bedrijf; je moet gewoon op elkaar kunnen vertrouwen. Functioneert ons programma niet goed, dan is het niet een ‘bug’, het is ook niet iemands fout, het is *onze code* die verbeterd moet worden. De bedrijfsstructuur is heel vlak. Beslissingen worden hier rationeel genomen, niet op status.”

De vraag naar bèta's

Nico van den Hijligenberg staat erop dat zijn team uit academisch gevormde bèta's bestaat. “Over de opbouw van het systeem, over de componenten, over de verdeling van de componenten over het netwerk, over de architectuur van het systeem, over alles hier moet abstract nagedacht worden. Daarom wil ik alleen maar academisch geschoolde bèta's, mensen die in staat zijn het abstractieniveau te kiezen dat recht doet aan de goede opzet van het systeem.”

“Neem dat simpele probleem van de beperkte verbindingscapaciteit. Je mag maar twee berichten per seconde versturen en per bericht kun je niet meer dan veertig prijsinstructies doorgeven. In de markt vragen bij-



Figuur 1 Een achterhaald beeld; tegenwoordig gebeurt alles op het scherm



Figuur 2 Roy van Bakel

voorbeeld 93 producten om een nieuwe prijsstelling. Daar heb je de capaciteit niet voor, dus moet je criteria opstellen voor de keuze welk product je het eerst behandelt. Dat vraagt een ordening; een wiskundige weet uit zijn opleiding welke types ordening er zijn en hoe een volledige ordening eruit ziet. Om uiteindelijk de ordening te bouwen is handelskennis vereist, moet je weten wat belangrijke overwegingen voor de handelaar zijn. Dat moet weer vertaald worden in een algoritme. De wiskundige is niet de enige die dat kan, maar hij heeft zonder meer een voorsprong.”

“Mijn voorkeur voor wiskundigen bij de werving van personeel is deels ingegeven door hun wiskundige kennis, deels door de manier waarop ze problemen bekijken en analyseren. Je ziet wiskundigen abstractie aanbrengen in software; ze signaleren dat een probleem in de ene component van het programma in abstracte vorm hetzelfde is als een probleem in een andere component. Zo schep je hiërarchie in je programma en dat is voor de bouw van je software bijzonder waardevol. Eén van de voordelen is dat je je onderhoudskosten aanzienlijk reduceert.”

Roy van Bakel, toegepast wiskundige en één van de dertien ontwikkelaars bij Sfis: “Ik werk nu aan de prijsbibliotheek, maar voor het werk dat ik hier doe zou je niet specifiek wiskundige hoeven te zijn. *Black & Scholes* ken ik wel, dat is de basis, maar verder maak ik weinig gebruik van mijn opleiding. De manier van denken gebruik je, het analytisch denkvermogen.”

Clemens Bokel komt oorspronkelijk uit de hoge-energiefysica. Hij heeft wis- en na-

tuurkunde gestudeerd in Utrecht en daarna bij het NIKHEF gewerkt, vooral aan Monte-Carlo-simulaties. Na wat omzwerven is hij via een *headhunters*bureau bij Sfis gekomen als ontwikkelaar. De drastische verandering van werkomgeving heeft hij als heel positief ervaren: “Dit is precies wat ik wil. Bij mijn promotieonderzoek bekwam me vaak het gevoel: wie heeft hier nu wat aan. Bovendien was het een heel beperkt wereldje. Bij Sfis is de toepassing geen vraag. Ik denk dat wiskundigen hier in trek zijn, niet alleen omdat ze analytisch denken, maar ook omdat ze niet de neiging hebben snel aan te nemen dat het wel goed is.”



Figuur 3 Tafelvoetbal om half zes: Thorsten Gragert, Chiel Postma, Clemens Bokel en Roy van Bakel

Van den Hijligenberg: “Academici willen altijd een vrijheid houden, zelf bepalen welke kant ze uit gaan. Het is goed binnen je organisatie mensen met een kritische houding te hebben. Aan de andere kant, je moet ook binnen een bepaalde tijd ergens komen. Soms moet je daarom richtingen van onderzoek afkappen. Die noodzaak van een zekere controle en beperking in de bewegingsvrijheid geeft een spanningsveld dat aandacht behoeft.”

Van Gelder: “Je wordt afgerekend op wat je doet en hoe je het doet.”

Weerbare wiskundigen

Zijn bèta's meer open en eerlijk dan anderen? Van den Hijligenberg: “Dat kan ik niet vergelijken. Belt er een klant met een probleem, dan zal de medewerker, ook al zou hij de fout zelf gemaakt hebben, dit open rapporteren. In sommige omgevingen zou dit als naïef overkomen.”

“Je merkt wel dat er een grote overlap in hobbies zit. Ze spelen heel graag spelletjes op het grote scherm hiernaast. Voorkeur voor science fiction is ook niet ongebruikelijk. Dat gaat buiten mij om, gaat van henzelf uit.”

“Toen de handel nog op de vloer gebeurde, kwamen we veel in contact met de wereld van de klanten, de *mannetjesputterswereld* van de beurshandel. Dat contact is nu minder intensief, maar je ziet nog steeds dat de mensen zich hier ontwikkelen. De pas afgestudeerde, schuchtere academicus zie je een jaar later terug als maatschappelijk weerbaar wiskundige. Je merkt het aan de toon van de telefoongesprekken, het zelfvertrouwen tegenover een blazende klant. Er is ook een wereld

Derivatives Technology Foundation

Met twee klanten heeft Sfiss de *Derivatives Technology Foundation* opgericht. De filosofie van deze stichting is dat bèta-afstudeerders steeds belangrijker worden. Tegenwoordig zit de handelaar achter het scherm. Het opleidingsniveau is vrijwel uitsluitend academisch, en men zoekt ook meer bèta's. De man achter het scherm moet meer begrijpen van wat zich afspeelt in de modellen, moet met de computer om kunnen gaan en moet weten hoe je de software bestuurt. Daarom heeft Sfiss het initiatief genomen om afstudeerwerk en promotieonderzoek op dit terrein te sponsoren. De stichting betaalt een promotieplaats in Twente en één in Chicago. Verder organiseert men symposia. Meer informatie is te vinden op de website <http://www.tdtf.nl/>

van verschil in uitstraling tussen de student die zich in een pak heeft gehesen en een iemand die zelfbewust binnenstapt omdat hij weet waarover hij praat. Overigens, het bedrijf is gegroeid en niet alle medewerkers hebben een bèta achtergrond. Bijvoorbeeld *Sales and Support* wordt niet meer door bèta's gedaan."

Tangstrøm: "Het manco van mijn opleiding, bedrijfskunde, is dat je van alles wat hebt gehad, zonder een echt vak te leren. Je hebt de gereedschapskist gezien, maar je bent geen timmerman."

Zijn die weerbare medewerkers na een jaar nog wiskundigen? "De humor is onveranderd bèta, abstracte grapjes: het letterlijk opvatten wat iemand zegt; in emailverkeer iedere weg die openstaat voor verkeerd interpreteren toch even bewandelen. Het uit zich ook in de open sfeer, het grapjes maken wanneer iemand iets over het hoofd heeft gezien en de manier waarop de aangesprokene zo'n grapje opvat. Het schept een prettige manier van met elkaar omgaan."

Belia van Gelder heeft er geen problemen mee als enige vrouw tussen de mannen te zitten. "Ik vind het wel lekker hoor. De sfeer is gemoedelijk, het is mannen eigen sneller te zeggen wat er aan de hand is. Dat het bèta's zijn merk je niet zo. Wel zijn het rustige, ingetogen jongens, geen brallertjes."

Van Bakel: "We lunchen binnenshuis, in twee ploegen. Elke dag komt de bakker langs, en eens per week Albert Heijn. Nee, mijn pakken worden nog niet via het werk gestoomd."

Tangstrøm: "Er wordt hard gewerkt, maar er is genoeg tijd voor leuke dingen. Zo

wordt er om half zes getafelvoetbald. Hiervoor werkte ik bij een gebruiker van *Atom-Pro* in Düsseldorf, een handelaar. Daar was het vaak enorm hectisch, dat heb je hier niet. Toch heerst hier wel een jasje-dasjecultuur, dat is gebruikelijk in de financiële wereld. In de tijd van de vloerhandel kwam je anders het beursgebouw niet eens in."

Thorsten Gragert, projectleider: "Ik vind eigenlijk alles hier goed, het werk, het salaris en de sfeer. Persoonlijk hang ik niet erg aan de hoeveelheid wiskunde in mijn werk. Ik ben vooral geïnteresseerd in het proces dat we iedere keer doorlopen: een probleem, de analyse, een oplossing, de implementatie."

De erfenis van Black & Scholes

Van den Hijligenberg: "Het interessante van optietheorie is dat er in 1973 door het model van *Black & Scholes* een hele beweging op gang is gekomen van mensen uit alle hoeken van de wiskunde die zagen dat technieken uit hun specialisme hier gebruikt konden worden. In de optietheorie kom je mensen uit de zware stochastiek tegen, martingalentheorie, maar evengoed uit de speltheorie, en uit de sfeer van partiële differentiaalvergelijkingen. Probeer maar eens iemand uit te leggen wat überhaupt de probleemstelling is in een onderwerp als cohomologie van Lie-algebra's. Dat is in de optietheorie veel aardiger. Wat je nodig hebt om resultaten te bereiken is echt heel moeilijk, maar het echte probleem is eenvoudig uit te leggen. De betekenis van de resultaten is ook goed over te dragen zonder op de achterliggende theorie in te gaan. De communicatie met de mensen die het in de praktijk gebruiken is geen probleem."

"Wij doen geen wiskundig onderzoek in de zin dat we nieuwe modellen verzinnen. We houden wel bij welke modellen er nu in de wetenschappelijke literatuur worden gepubliceerd. Dit is meestal in het kader van de begeleiding van stagiaires. Het lezen komt wel aan op de zondagmiddag."

"Wat nu in de wetenschappelijke literatuur staat, komt nog lang niet op de markt. Omgekeerd, het dividend-aspect speelt op het moment heel erg in de markt, maar de modelbouwers willen er hun vingers niet aan branden: te lastig."

Hangt er een volgende generatie theorievorming in de lucht? "Nee, de robuustheid en eenvoud van *Black & Scholes*, waarvan iedereen beseft dat de werkelijkheid zo simpel niet in elkaar steekt, zorgen ervoor dat het nog steeds het meest gebruikte model is. Allerlei redelijke, interessante alternatieve modellen, modellen met betere mogelijkheden

De beurs

Euronext is de fusie tussen de beurzen van Amsterdam, voorheen AEX, Parijs en Brussel. Lissabon en Londen zijn daar inmiddels bij gekomen. Op dit moment is de strijd gaande met *Eurex* in Frankfurt, wie de grootste beurs van Europa wordt. Een beurs is er om vraag en aanbod bij elkaar te brengen, en verdient zelf een zeker percentage van de omzet. Daarom volgt een beurs een aanpak die tot handel stimuleert, bijvoorbeeld door ervoor te zorgen dat ervoor elk product altijd een bieden laatprijs is, dat de schermen 'vol' zijn. Dat geeft de garantie dat wanneer iemand naar de beurs komt, hij altijd iets te handelen vindt. Een particulier gaat bijvoorbeeld naar de beurs via het internet en treft in alle opties een markt aan. Je ziet bijvoorbeeld staan '4,40 bieden, 4,60 laten'; dat is een hele nette markt, 20 cent spreiding.

In de huidige schermhandel zijn er, in tegenstelling tot de oude vloerhandel, heel krappe markten, resulterend in weinig spreiding. De kwaliteit van de markt is heel hoog. Bij de overgang van vloer naar scherm heeft men pakketjes gevormd van telkens drie fondsen. In elk pakketje zit een groot, interessant fonds als Koninklijke Olie of Unilever, een middelfonds en een echt klein fonds. Het effect is dat ook de markt in de kleinere fondsen goed verzorgd wordt.

Het bieden gebeurt door *market makers*. Je hebt verschillende market makers, met verschillen in de toegang tot de markt. Iedereen kan twee berichten per seconde doorgeven maar de omvang, het quantum of bandbreedte, van de berichten verschilt. Een *Primary Market Maker* (PMM) heeft een echte *mass quote*; hij kan met één bericht meerdere opties van prijs veranderen. Een typische mass quote bevat veertig instructies. Een PMM kan per bericht veertig quotes, prijzen van opties, wijzigen. Een *Competitive Market Maker* (CMM) kan in zijn bericht ongeveer zeven instructies kwijt. Een *trader* stuurt slechts één instructie per bericht. Een PMM heeft ook plichten, namelijk de verantwoordelijkheid om vrijwel de hele dag prijzen te stellen. Een PMM in bijvoorbeeld ING moet alle opties ING, het hele universum van *expiraties*, *strikes*, *calls*, *puts*, tezamen zo'n 120 producten, 95% van de dag van een prijs voorzien.

tot fitting, zijn voorgesteld. Het probleem om die modellen in de praktijk gebruikt te krijgen is dat er een hele generatie handelaren en gebruikers is die gewend is te praten in termen van het *Black & Scholes* model —dat is hun manier van communiceren en ook de manier van communiceren van *data-vendors*. Bij een ander model zul je geen database van de historie tot je beschikking hebben, je klanten zouden je niet begrijpen. Geen van de alternatieve modellen is zo overtuigend dat de markt zich er naar gaat richten.”

Thorsten Gragert: “Ik heb het idee dat er wel modellen zijn, die betere resultaten zouden kunnen geven. De wensen van de handelaren zijn echter anders. Die begrijpen de huidige modellen: als je de volatiliteit opschroeft, gaat de prijs omhoog. Men is zo verknocht aan de bestaande modellen dat men ze gerust buiten hun geldigheidsgebied gebruikt. Men weet heus wel dat de koersontwikkeling niet lognormaal verdeeld is en dat de *volatility* niet constant is, maar door inventief met de bestaande mo-

dellen om te gaan, bijvoorbeeld door parameters steeds met de hand aan te passen, probeert men er alles uit te halen wat erin zit (en soms zelfs meer). In de academische wereld zijn ze daarentegen weer veel bezig met buitenissige, en daardoor weinig relevante producten.”

Thorsten kan zich de hype rond financiële wiskunde wel voorstellen, hoewel hij zelf na zijn studie toegepaste wiskunde in Twente geen wetenschappelijke loopbaan ambieerde: “Van academisch standpunt uit is het fraaie aan de financiële wiskunde de diversiteit aan wiskundige gebieden die aan bod komen, zoals bijvoorbeeld stochastische differentiaalvergelijkingen, nietlineaire optimalisatie, lineair programmeren, en geheeltallig programmeren.”

Van den Hijligenberg: “De hype rond financiële wiskunde is voorbij in de zin dat de drang naar exotische vraagstukken uitgewoed is. Financiële wiskunde is echter niet op zijn retour. Er zijn nog een groot aantal centrale vragen niet bevredigend opgelost. Het probleem van hedging is in de theorie nog niet goed begrepen. De run op het vak is wel voorbij.”

Het wiskundig onderzoek in Nederland staat onder druk; het meest in Nijmegen. Daar klampt men zich vast aan financiële wiskunde als één van de strohalmen. “In Nederland zou het verstandig zijn om kenniscentra op bepaalde gebieden te creëren. Financiële wiskunde is zo’n blijvend onderzoeksgebied. Er is een aantal plaatsen waar dat geboden kan worden, geen zeventien plaatsen. In Nijmegen zou ik dat *dus niet* doen.”

“Een nieuwe theoretische doorbraak, een nieuwe *Black & Scholes* komt zeker niet bij Sfisss vandaan, maar we houden graag contact met de nieuwe ontwikkelingen. We hebben hier een dozijn Twentse en Groningse afstudeerders gehad. We sponsoren bijvoorbeeld ook een promovendus aan de Universiteit Twente op het gebied van rente-*hedging*. Dat kan best iets bijzonders opleveren.”



Figuur 4 Nico van den Hijligenberg en Ralph van Put, directie Sfisss. Op de achtergrond een ‘trading jacket’, het herkenbare jasje waarin de market makers zich vroeger over de beursvloer bewogen.

Danny Beckers

Universiteit Nijmegen, Mathematisch Instituut
Postbus 9010, 6500 GL Nijmegen
dbeckers@sci.kun.nl

Oud Archief

Wiskunde van nu is voor een groot deel het werk van mensen die al lang geleden zijn gestorven. Wat waren dat voor mensen en wat hield hen bezig? Hoe verdienden ze de kost en hoe keek de maatschappij tegen hen aan? Danny Beckers, gepromoveerd in de geschiedenis van de wiskunde aan de Katholieke Universiteit Nijmegen, neemt ons mee in de archieven van de wiskunde.

Leerlingen vwo wiskunde A oude stijl en hun docenten herinneren zich wellicht nog de grafiekjes waaruit ze geacht werden het kritieke gebied van een binomiale verdeling af te lezen, gegeven de kans op 'succes', de steekproefgrootte en de vooraf gekozen onbetrouwbaarheidsdrempel. De wijze waarop deze ingenieuze grafiekjes tot stand waren gekomen was voor de meeste leerlingen een raadsel, maar het gebruik ervan was verbluffend eenvoudig. Tegenwoordig halen leerlingen dezelfde informatie (eveneens op uiterst eenvoudige wijze) uit hun grafische rekenmachine. En voor de meesten zal de achterliggende constructie tevens een raadsel zijn. De grafiekjes waren een van de laatste overblijfselen van het vakgebied der nomografie.

Nomografie laat zich het eenvoudigst omschrijven als 'rekenlinialen voor gevorderden'. In 1891 publiceerde de Franse ingenieur en wiskundige Maurice d'Ocagne, hoogleraar aan de prestigieuze *École Polytechnique*, de eerste volledige verhandeling over de nomografie, getiteld *Les calculs usuels effectués au moyen des abaques* ('abaque' is het Franse woord voor nomogram). Sindsdien was het een vakgebied waar met name onder ingenieurs veel belangstelling voor bestond. Via het tijdschrift van het Koninklijk Instituut voor Ingenieurs maakten ook de Nederlandse ingenieurs al snel kennis met de nieuwe methode.

Zowel de burgerlijke ingenieurs uit Delft als hun militaire collegae uit Breda kregen al snel met nomogrammen te maken. No-

mogrammen ten behoeve van hydrografische toepassingen, rekenwerk aan spoorwegen en berekeningen aan betonconstructies werden in tijdschriften gepubliceerd. Maurice d'Ocagne werd benoemd tot erelid van het Wiskundig Genootschap en introduceerde de nomografie bij de Nederlandse wiskundige gemeenschap tijdens een voordracht voor de genootschapsleden.

Tijdens de Eerste Wereldoorlog werd aan Franse zijde van het front veel gebruik gemaakt van nomogrammen om snel een benadering te kunnen maken van de waarde van formules — iets dat anders veel rekenwerk vergde. Met name na de oorlog nam het gebruik van nomogrammen flink toe. Het eerste Nederlandse lesboek verscheen in 1926. Rond die tijd zal het vak ook wel een vaste plek in het roostervan de technische opleidingen hebben gekregen. Meer inleidingen tot de nomografie werden in 1930 en 1937 gepubliceerd.

De afbeelding betreft een nomogram ten behoeve van een toepassing in de hydrografie. Gegeven de waarde van de bodembreedte b en de diepte d van een bepaalde vorm kanaal (trapezium met taluds 2 op 3) helpt dit nomogram bij het snel bepalen van een benadering voor de gemiddelde straal R , die in hydrografische toepassingen een rol speelt. Door het verbinden van het punt op de b -schaal (rechts) en het punt op de d -schaal (links), vind de gebruiker een snijpunt op de R -schaal in het midden en kan hij eenvoudig de gewenste benadering aflezen.

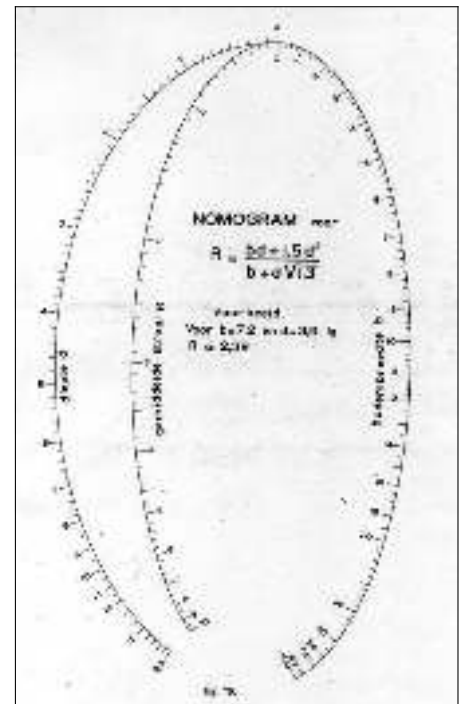
Het bewuste nomogram is afkomstig uit het lesboek *Nomografie* (1949) van de Delftse lector N.D. Haasbroek. In dat boek treft men tevens een voorwoord van de hoogleraar Roelofs. Roelofs wilde met zijn voorwoord het belang van de nomografie onderstrepen. De techniek, zo stelde hij, vereiste snelle benaderingen. Voor de ingenieur was het bovendien nuttig wanneer hij zicht had op het gedrag van onderling afhankelijke variabelen.

Door slimme projecties toe te passen was men in staat nomogrammen te produceren die zelfs zes onderling afhankelijke variabelen overzichtelijk in een diagram weergaven.

Met de komst van de computer werd de nomografie langzaam maar zeker overbodig. Economen en statistici hebben nog het langst gebruik gemaakt van nomografische hulpmiddelen. Dankzij de opname van het onderwerp statistische toetsing in de eindtermen van het wiskunde A programma voor het vwo in 1987 heeft een hele generatie middelbare scholieren (onbewust) nog net een staartje van het eens zo succesvolle vakgebied meegemaakt. Vandaag de dag zijn nomografische instrumenten nog slechts museumstukken waarbij van sommige niet eens meer bekend is wat ze nu eigenlijk uitrekenden. 

Literatuur

N.D. Haasbroek, *Nomografie*, Amsterdam (1949)



Peter Nijkamp

NWO

Laan van NOI 300

2509 AC Den Haag

nijkamp@nwo.nl

Wiskunde, nodig en in nood (1)

Toekomststrategie

Tijdens het negenendertigste Nederlands Mathematisch Congres is het symposium 'Wiskunde, nodig en in nood' gehouden. Hoe moet het verder met de wiskunde in Nederland? Er kiezen maar weinig studenten voor dit vak. Het geldt dat een faculteit van de overheid krijgt is voor een groot gedeelte van het aantal studenten afhankelijk. Het wiskundig onderzoek wordt door deze ontwikkeling inmiddels ook bedreigd.

Drie niet in de wiskunde werkzame sprekers zijn uitgenodigd om op het symposium hun mening te geven. De eerste spreker was Peter Nijkamp. Hij is hoogleraar regionale economie en economische geografie aan de Vrije Universiteit en voorzitter van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek. Hij heeft meer dan duizend artikelen in de internationale wetenschappelijke literatuur gepubliceerd en tientallen boeken geschreven. Voor diverse ministeries en internationale organisaties trad hij op als adviseur. Peter Nijkamp ontving in 1996 de Spinozapremie, de hoogste Nederlandse wetenschappelijke prijs. Hij is voorzitter van de Afdeling Letterkunde van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen en vice-president van deze organisatie. In zijn visie heeft Nederland als kennisland geen schijn van kans indien de wiskunde niet een sterke positie inneemt die op zijn minst gelijk is aan die uit omringende landen.

Wiskunde roept soms het beeld op van een koele set van dwingende logische en saai 'statements'; maar wiskunde is ook een van die verrassende disciplines waarbij het mogelijk is dat twee tegengestelde uitspraken toch tegelijkertijd waar kunnen zijn. Is het bijvoorbeeld denkbaar dat twee spelers allebei en tegelijkertijd de beste kunnen zijn? Een prachtige illustratie van zulke speelse tegenstrijdigheden vinden we in de historische naijver tussen twee gerenommeerde wetenschapsinstellingen, namelijk het Massachusetts Institute of Technology en de Harvard University, op steenworp afstand van elkaar gevestigd in dezelfde stad. Toen op zekere dag het MIT zich in een advertentiecampagne profileerde als "the best university in the world" repliceerde Harvard University daarop de volgende dag in

een advertentie heel simpel als volgt: "we are the best university in town".

Tegen deze achtergrond van wiskundige logica heb ik mijn eigen carrière als wiskundig econoom, ofwel econometrist, vooral te danken aan mijn vroegere hoogleraar wiskunde die zijn wiskundecolleges elk jaar steevast met de volgende anekdote aanving. Een wijze en vooruitziende koning die het beste voor had met zijn onderdanen wilde graag weten op hoeveel ziekenhuizen hij moest rekenen bij een groeiende bevolking. Hij ging daarom te biecht bij zijn wiskundige adviseur, die zich met genoegen kweet van dit eervolle verzoek. Na één dag kwam deze opgetogen terug bij de koning en vertelde hem dat hij reeds het begin van de oplossing had. Zijn computer had hem verteld dat bij een bevolking van om-

vang nul er slechts nul ziekenhuizen nodig waren. Dat de premissen van zijn wiskundig onderzoek niet klopten met de werkelijkheid, deerde hem in het geheel niet, want —zo vertelde hij de koning— wiskunde moet abstraheren van de werkelijkheid. Toen de koning hem vroeg een meer realistische oplossing te bedenken, ging hij opnieuw welgemoed aan de slag. En zie, na een dag reeds had hij een nieuwe oplossing uit de hoge hoed van zijn pc getoverd, want met een trots gezicht vertelde hij de koning dat bij een oneindig grote bevolking er ook oneindig veel ziekenhuizen nodig waren. Toen het gelaat van de koning betrok, reageerde onze wiskundige als volgt: "Sire, de diepe betekenis van de wiskunde ligt toch in haar vermogen te generaliseren, niet om echte problemen op te lossen. Maar als u een honderd procent valide antwoord wilt, kan ik u verzekeren dat het aantal ziekenhuizen dat gebouwd zal moeten worden voor een groeiende bevolking tussen nul en oneindig ligt!"

De paradoxale positie van de wiskunde

Nu hiermee het maatschappelijk en beleidsmatig nut van de wiskunde afdoende is aangetoond, is het zaak de zoeker te richten op de positie van de wiskunde in onze samenleving. Want deze positie —dat zal u niet ontgaan zijn— is niet onproblematisch. De KNAW trok in haar rapport *De Toekomst van het Wiskundeonderzoek in Nederland* reeds in 1999 aan de bel. In de Strategienota 2002–2005 spreekt het Gebiedsbestuur Exacte We-

tenschappen (GBE) van NWO haar diepe bezorgdheid uit over de afkalving van het universitaire onderwijs en het onderzoek op het terrein van de wiskunde. Na een eerste alarmerende schets van de problemen in de natuurkunde stapt het GBE over op de wiskunde en meldt hierover het volgende: "Alleen is hier de problematiek nog urgenter, omdat niet alleen de studenteninstroom maar ook het aantal hoogleraren dramatisch afneemt. In de periode 1991–2000 liep het aantal hoogleraren terug van 120 naar 85. Het aantal hoogleraren Kansrekening is in deze periode afgenomen van elf naar twee. Bij ongewijzigd beleid zal op de universiteiten het aantal wiskunde-hoogleraren in 2004 zijn afgenomen tot 67. Het gevaar dreigt dat de wiskundigen in Nederland binnenkort niet meer aan de vragen uit de samenleving zullen kunnen voldoen. Het wordt de hoogste tijd om de wiskunde krachtig te revitaliseren, de afbraak stop te zetten en tevens de verarming van het wiskundeonderzoek tegen te gaan".

Nieuwe Dimensies, Ruimer Bereik

Noodkreten van deze aard liegen er niet om. In de nota *Nieuwe Dimensies, Ruimer Bereik*, ongeveer een jaar geleden verschenen, wordt —uitgaande van bovengeschetst doomsday-scenario voor de wiskunde— een heroïsche poging ondernomen een nationale strategie voor wiskundeonderzoek en gerelateerde masteropleidingen te ontwerpen. Deze nota ademt een gezonde geest. In plaats van contraproductieve klaagzangen worden hier realistische ambities op tafel gelegd die het verdienen serieus genomen te worden. Zo wordt een pleidooi gevoerd voor extra hoogleraar-onderzoeksleders in de wiskunde, voor centraal geïnitieerde onderzoekclusters, voor een concentratie van masteropleidingen, voor een betere inkadering van wiskundestudenten, voor meer financiële steun voor wiskundeonderzoek (inclusief EURANDOM), voor een hogere vrouwenparticipatie in de wiskunde, en nog veel meer behartigenswaardige zaken. Het valt alleen daarom al diep te betreuren dat de politieke geesten in Nederland niet voldoende wakker zijn geschud door deze constructieve bijdrage aan de beleidsvorming over de wiskunde in ons land. Verwijzing naar 'survival'-strategieën in onder meer Duitsland, de VS en Engeland hebben evenmin veel uitgehaald. Beleidsmakers hebben de bal weer teruggekaatst naar de universiteiten met een beroep op het zelf-organiserend vermogen en de decentrale competentie van de universitaire instellingen. Frappant is echter dat universiteiten niet zo gemakkelijk te

mobiliseren zijn, zelfs niet als het water hen aan de lippen staat. Er zijn gelukkig recentelijk enige positieve bewegingen te signaleren die duiden op interuniversitaire samenwerking, maar deze hoopgevende geluiden worden later weer overstemd door wanhoopsgeluiden uit andere universiteiten die soms wiskunde-afdelingen dreigen te sluiten. Ik constateer hier dat de aard en de intensiteit van het zelf-mobiliserend vermogen van de universiteiten om met een daadkrachtig en realistisch wiskundeplan te komen, achterblijven bij de mijns inziens catastrofale ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs en -onderzoek in Nederland. De paradoxale situatie doet zich voor dat de toenemende erkenning van het belang van de wiskunde gepaard gaat met een neerwaartse ontwikkeling in deze discipline. Overigens dreigen ook de natuurkunde en de scheikunde steeds meer in de gevarenzone te komen.

De golven van klaagzangen houden intussen aan, maar is er breder in de maatschappij nog wel een willig oor? Het gevaar is groot dat de wiskunde verzeild raakt in de situatie van de kettingroker die —nadat hij elke dag in de krant geconfronteerd werd met waarschuwingen over de gezondheidsrisico's van het roken— uiteindelijk maar besloot de krant niet meer te lezen. Hoe houden we de belangstelling voor de wiskunde levend? Welke wervende campagne dient te worden opgezet? Mijns inziens is er behoefte aan twee overtuigende zaken van hoog strategisch gehalte, namelijk een heldere probleemanalyse en een pakkende marketingstrategie.

Wiskunde en de productlevenscyclus

De sterk teruggevalen belangstelling voor de wiskunde, alsmede voor andere delen van de natuurwetenschappen, is uiteraard betreurenswaardig, maar zeker niet uniek in de geschiedenis van de wetenschappen. Het ontwikkelingspatroon van vele disciplines (bijvoorbeeld sociologie, macro-economie, pedagogiek, moderne talen, kleine letteren) vertoont een niet-lineaire dynamiek die vergelijkbaar is met die van de wiskunde. Disciplines komen en gaan; zij vertonen de standaardkenmerken van een normale productlevenscyclus. Zowel de absolute niveaus als de relatieve aandelen van disciplines, in termen van studentenbelangstelling en besta-fing, zijn aan permanente verandering onderhevig. Als zodanig geen reden tot zorg, want de academia heeft hiermee al eeuwen lang moeten worstelen. Wetenschapsinnovatie wordt nu eenmaal gekenmerkt door wat een van de grootste economen uit de vorige

eeuw, Schumpeter, heeft genoemd 'creatieve destructie'.

Wel wordt een groot probleem gevormd door de koppeling van bekostiging en financiering van staf en faciliteiten aan studenten-aantallen, in plaats van aan kwaliteit. Daardoor wordt een faculteit of onderzoeken-heid kwetsbaar voor de conjunctuurencyclus van studentenbelangstelling. Om de capaciteit in stand te houden, kan NWO soms de rol van een 'deus ex machina' spelen, maar de tweede-geldstroommiddelen zijn uiteraard ook beperkt.

Als de op- en neergang van de wiskunde zich niet onderscheidt van de dynamiek in andere disciplines, waarom maken we ons dan extra zorgen over de positie van de wiskunde? In het verleden is het vooral de theologie geweest die de rol opeiste van de 'regina scientiarum', maar er is geen enkele wetenschaps-intrinsieke reden om thans voor de wiskunde zo'n geprivilegieerde positie op te eisen. Theologie, archeologie, astronomie, natuurkunde, pedagogiek en wiskunde vormen allemaal, zonder uitzondering, onontbeerlijke elementen van onze westerse wetenschaps-cultuur.

Maar daar is niet alles mee gezegd, wat de wiskunde betreft. De wiskunde neemt om twee redenen een bijzondere plaats in te midden van de andere wetenschappen. In de eerste plaats heeft de historie van de wetenschapsmethodologie een ontwikkeling te zien gegeven in de richting van een meer kwantitatieve, op wiskunde en statistiek gebaseerde onderzoeks-aanpak. Dat geldt uiteraard voor het geheel van de exacte wetenschappen (wat zou de astronomie zijn zonder wiskunde?), maar in toenemende mate ook voor de levenswetenschappen (wat zou experimenteel hematologisch onderzoek zijn zonder statistiek of wat zou de studie van ecologische dynamiek zijn zonder de toepassing van wiskundige biologie?). De gedragswetenschappen en sociale wetenschappen hebben de weg naar de wiskundig-statistische analyse inmiddels ook gevonden, getuige de populariteit van subdisciplines als econometrie, psychometrie, sociometrie en zelfs jurimetrie. Dankzij de ontwikkelingen in de ICT-sector beginnen nu ook de humaniora steeds meer de voordelen van gekwantificeerde en empirisch toetsbare benaderingswijzen te ontdekken (bijvoorbeeld digitale informatieverwerking in de letterkunde, 'content analysis' in mediastudies, statistische cognitieve analyses, of trendanalyses in de historische wetenschappen). Veel doorbraken in de moderne wetenschapsbeoefening mogen op het conto

van wiskundige en statistische toepassingen worden geschreven. Het valt dan ook moeilijk in te zien hoe de ontwikkeling van de wetenschap in den brede haar momentum in Nederland kan behouden zonder adequate ondersteuning vanuit de wiskundediscipline. Een afbraak van de wiskunde kan niet zonder serieuze gevolgen blijven voor het geheel van onze wetenschapscultuur. De afkalving van de eerste-geldstroom steun acht ik zeer zorgwekkend.

Er is nog een tweede reden waarom het behoud van de wiskunde een zaak van levensbelang is. De moderne industrie- en dienstensector (inclusief de ICT sector) heeft behoefte aan kwantitatief geschoolde academici met een groot probleemoplossend vermogen. In onze netwerkeconomie is behoefte aan geavanceerde deskundigheid op het terrein van logistiek, distributie, geïntegreerde pro-

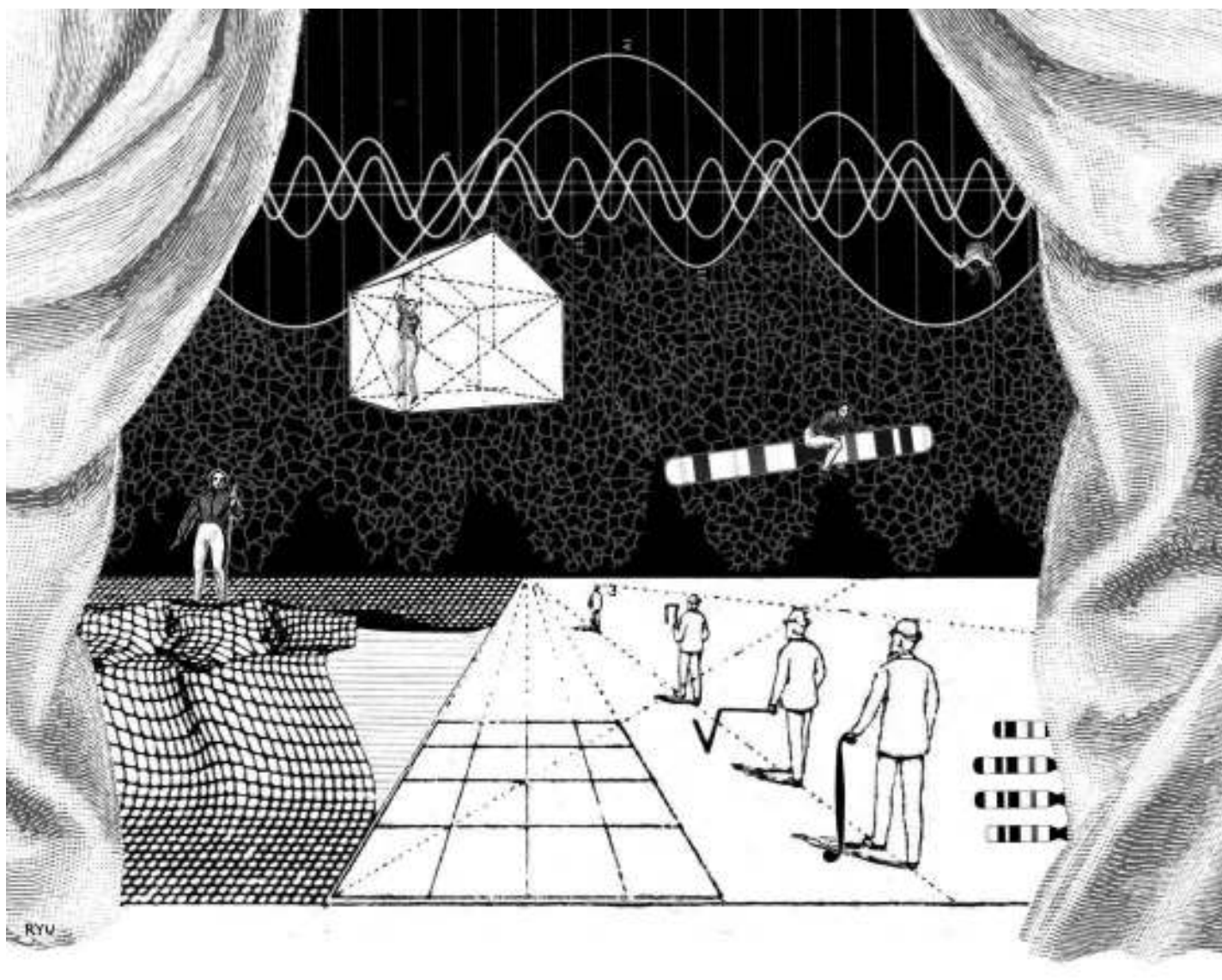
ductieplanning, informatietechnologie, nanotechnologie, risico- en onzekerheidsanalyses, financiële en actuariële vraagstukken, operations research toepassingen en vele andere beslissingsondersteunende technieken. Er is een duidelijk aanwijsbaar nationaal economisch belang om wiskunde op een meer dan voldoende niveau in Nederland 'in de lucht te houden'. Men kan zich moeilijk een hoog ontwikkelde economie voorstellen zonder een duidelijke aanwezigheid van een hoog gekwalificeerde wiskundekennisinfrastructuur.

De geprononceerde positie van de wiskunde als basisdiscipline voor andere vakgebieden en als motor voor de oplossing van complexe vraagstukken in onze moderne economie brengt me tot de formulering van de volgende stelling: *Nederland heeft als kennisland geen schijn van kans indien de wiskun-*

de niet een sterke positie inneemt die op zijn minst gelijk is aan die uit omringende landen.

Over wiskunde en wasmiddelen

De wiskunde gaat ons ter harte. Maar hoe bevorderen we de noodzakelijke stijging in de belangstelling hiervoor? Er is mijns inziens behoefte aan een uitgekende marketingstrategie. De vergelijking met de wasmiddelenbranche dringt zich op. Een significant deel van de uitgaven van de wasmiddelenindustrie wordt gespendeerd aan marketing. Op macro schaal gezien lijkt dit weinig zinnig, want er is vrijwel niemand die extra wasmiddelen gebruikt of extra gaat wassen vanwege de reclameboodschappen. De totale wasbehoefte is min of meer een gegeven. De kritieke parameters worden echter gevormd door de marktaandelen per wasmiddel. En zolang de extra revenuen uit een verhoging van het



marktaandeel maar hoger zijn dan de reclamekosten, zullen de advertenties blijven verschijnen. Dit gaat zelfs zo ver, dat verschillende wasmiddelen van een en dezelfde fabrikant met elkaar concurreren ('kruiskannibalisme'). Ook dan geldt weer dezelfde afweging van kosten en baten.

Iets soortgelijks geldt voor de wiskunde. Het totaal aantal studerende of potentiële studenten is min of meer een gegeven. De vraag is alleen: hoeveel studenten weten de wiskundefaculteiten naar zich toe te trekken? Het gaat dus om marktaandelen. Uit de marketingtheorie weten we dat een succesvolle campagne moet voldoen aan een aantal voorwaarden, namelijk uitstraling van een aantrekkelijk imago, focus op de goede doelgroep en uitbuiting van netwerkmarketing voordelen.

Wervende imago-elementen voor potentiële studenten zijn onder meer:

- wiskunde als een intellectueel uitdagende studie, niet alleen voor bollebozen, maar voor ieder met een gezonde analytische inslag; Pierre de Fermat (17de eeuw) was van huis uit jurist, maar had wel een wiskundige knobbel die hem ertoe bracht ondermeer de laatste stelling van Fermat te poneren, die overigens pas in 1995 werd bewezen;
- wiskunde als voorportaal voor tal van interessante functies bij het bedrijfsleven, inclusief het management en strategieontwikkeling;
- wiskunde als bruggenbouwer naar en tussen andere disciplines ('wiskunde op raakvlakken'), niet alleen de harde bètawetenschappen, maar ook de levenswetenschappen, en in toenemende mate de alfa- en gammawetenschappen;
- wiskunde als springplank naar een wetenschappelijke carrière in binnen- of buitenland, met veel mogelijkheden in het licht van de demografische compositie van het huidige hoglerarenkorps.

Een wiskundeloopbaan dient ook de nodige uitstraling te hebben. Daar hoort in het bijzonder bij:

- een enthousiasmering van middelbare scholieren voor de wiskundestudie door gekwalificeerde academisch gevormde docenten;
- etalering van succesvolle rolmodellen uit de wiskunde bij het vwo, bijvoorbeeld bij voorlichtingsbijeenkomsten: ook wiskundehoogleraren zullen de vensters open moeten zetten;
- een professioneel *Human Resource Management*, met een duidelijk motiverend

systeem, voor gekwalificeerde onderzoekers bij universitaire instellingen, uitmondend in een gunstig carrièreperspectief (bijvoorbeeld via een 'dakpanconstructie').

Doelgroep

Niet iedere student is geschikt voor een wiskundestudie. Maar door een te eenzijdige nadruk op de wiskundetalenten van briljante studenten, wordt de doelgroep te zeer uitgedund. Wiskunde bestaat uit meer dan getaltheorie of algebraïsche meetkunde en kent ook boeiende toepassingsvelden, bijvoorbeeld in de cryptografie, de snarentheorie of de coderingstheorie. Naast het fundamentele onderzoek zijn er talloze andere, mede op wiskunde gestoelde analysevragen, bijvoorbeeld de toepassing van 'self-organized criticality' theorie op dynamische economische systemen, de modellering van klimaat-effecten, de ontrafeling van complexe cognitieprocessen, de toepassing van chaostheorie op aandelenkoersen, of netwerkanalyses in de telecommunicatie. Wiskunde is er voor ieder met een gezond stel hersens. En als we het noodzakelijke potentieel niet in Nederland kunnen vinden, moeten we maar over de grens gaan zoeken. Daar is gelukkig reeds een begin mee gemaakt, maar een meer doelgerichte marketing en wereldwijde scouting als marketingstrategie zou zonder meer aan te bevelen zijn. Een goede studiefinanciering zou daarbij wellicht een extra dienst kunnen bewijzen, alsmede een extra facilitering vanuit het bedrijfsleven (men denke aan het Jetset-initiatief).

Netwerk-marketing

Goede producten worden vaak niet verkocht dankzij reclame, maar door mond-tot-mond informatie. Wiskundestudenten en -docenten zullen dus meer de markt op moeten gaan, virtueel en fysiek. Actieve acquisitie is dus een 'must'. Het wiskundegebied zou eens te ra- de moeten gaan bij hotels en luchtvaartmaatschappijen die buitengewoon interessante strategieën ontwikkeld hebben om het laatste bed of de laatste stoel gevuld te krijgen. Creatieve instrumenten als groepskorting, loyaliteitsprogramma's en aanbrenghpremies blijken daar echt te werken. Er is behoefte aan – wat de reeds geciteerde econoom Schumpeter genoemd heeft – 'neue Kombinationen', of in uw eigen woorden: wiskunde op raakvlakken. Dat geldt zeker voor een goed samenspel met de overige bèta-wetenschappen en andere disciplines waarvoor de wiskunde een basisfunctie vervult. Waar mogelijk gezamenlijk aan acquisitie te doen (inclusief het

risico van 'kruiskannibalisme') lijkt beter te werken dan solistisch gedrag. Wiskunde behoort zich weer te positioneren als een noodpunt in het geheel van de wetenschap-netwerken. Deze centrale positie valt alleen waar te maken als universiteiten kwaliteit laten prevaleren boven kwantitatieve normen van studentenaantallen. Maar we kunnen niet goed in alles zijn. Selectie is nodig. Daarom zal deze sector niet kunnen ontkomen aan scherpe keuzes, met een duidelijke profilering. En daarmee kom ik tot de volgende stelling: *De schaal van Nederland dwingt de wiskundeopleidingen en het wiskundeonderzoek tot verwerving van excellentie door focussering, waarbij ook buitenlands talent een grote rol kan spelen.*

U zult uit mijn toespraak begrepen hebben dat de zorg voor de wiskunde mede de zorg van NWO is. NWO heeft die verantwoordelijkheid vorm gegeven door niet alleen via het Gebiedsbestuur Exacte Wetenschappen, het CWI en EURANDOM financiële faciliteiten te verschaffen, maar ook door extra inzet van middelen via grensoverschrijdende thema's en programma's. Het moge bekend zijn dat het Algemeen Bestuur bereid is tevens, onder nader gedefinieerde voorwaarden, een centrumsubsidie beschikbaar te stellen als een extra incentive om excellentie, clustering en profilering in de Nederlandse wiskunde te helpen bevorderen. Uiteraard kan ik het in deze omgeving niet nalaten te vermelden dat de Spinozapremie 2002 ten deel is gevallen aan een wiskundige en logicus uit Nijmegen, Henk Barendregt. Hij symboliseert de hoge staat van dienst van de Nederlandse wiskunde, die mede dankzij 225 jaren onafgebroken inzet van het Nederlands Wiskundig Genootschap tot stand is gekomen. 

Jan Veldhuis

Bestuur van de Universiteit Utrecht

Heidelberglaan 8

3584 CS Utrecht

voorzitter@cvb.uu.nl

Wiskunde, nodig en in nood (2)

De basis van de kenniseconomie

Jan Veldhuis, de tweede spreker op het symposium 'Wiskunde, nodig en in nood', studeerde geschiedenis met economie en staats- en administratief recht in Utrecht en, als Fulbright scholar, in Minnesota. Na enkele jaren op het Ministerie van Buitenlandse Zaken gewerkt te hebben, bekleedde hij uiteenlopende functies in het onderwijs, waaronder die van plaatsvervangend secretarisgeneraal van het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen, directeur-generaal Diensten Onderwijs en Inspectie, en inspecteur-generaal van het Onderwijs. Begin jaren zeventig was hij secretaris van het College van Bestuur van de Rijksuniversiteit Leiden. Sinds 1986 is hij voorzitter van het College van Bestuur van de Universiteit Utrecht.

Volgens hem staat de universitaire wiskundebeoefening aan de rand van de afgrond. Het losmaken van wiskunde (en van de andere bètawetenschappen) uit het op studentenaantallen gebaseerde onderwijs-bekostigingssysteem is een onmisbare voorwaarde voor een realistische reddingsoperatie. Hij komt tot de stelling dat zonder op wiskunde gebaseerde wetenschapsbeoefening er geen kenniseconomie en geen kennismaatschappij kan bestaan.

Geschiedenis en grondslagen van de wetenschappen waren en zijn belangwekkende onderwerpen. Veel is er reeds onderzocht en over gepubliceerd. De stroom blijft doorgaan en, naar het lijkt, in versterkte mate. Dit is ook begrijpelijk in een tijdsgewricht waarin weer een 'clash of civilizations' verondersteld wordt. Meer dan ooit is weer de vraag prangend waarom 'the western mind' zo 'passioned' was (Richard Tarnas), 'Europeanen de wereld domineren' (Jared Diamond) en juist 'het Westen rijk werd' (David S. Landes). Waarom is vijf-, zes- en zevenhonderd jaar geleden (West-)Europa de wereld gaan domine-

ren via kruistochten, ontdekkingsreizen, kolonialisme en imperialisme? Waarom overheersen de westerse economieën nu al ettelijke eeuwen de gehele wereld? Waarom is Engels de lingua franca van de gehele wereld geworden? Revoluties in Europa, agrarische, industriële en sociale (Frankrijk, Rusland), veranderden de samenleving wezenlijk en ontwikkelden concepten en producten die hun dwingende weg over de gehele wereld vonden.

Velen nemen aan —en ik doe dit ook— dat de ontwikkeling van wetenschap en technologie hierin, zo niet basaal (er is te veel interdependentie van factoren), toch in elk geval essentieel geweest is. En in de 21ste eeuw meer dan ooit is: kennis is productiefactor nummer één geworden. Kenniseconomie en kennismaatschappij.

In de ontwikkeling van wetenschap en technologie was 'meten is weten' essentieel. Wiskunde, mathematica was en is het belangrijkste instrument: rekenkunde en meetkunde met toepassingen in mechanica en informatica.

Natuurwetenschappelijke revoluties

Al vele eeuwen geleden begon men wiskunde te gebruiken voor landmeten en gewichts- en prijsbepalingen in de handel, voor de bouwkunst bij gewelven en koepels en meer 'wetenschappelijk' voor geometrie en astronomie, die met geografie en cartografie de ontdekkingsreizen mogelijk maakten. Natuurlijk waren hier ook schepen voor nodig en telescopen, en zijn wapens ontwikkeld via fysica, optica en mechanica. En toen werd het fundamenteler: Descartes, Huygens, Newton, Einstein en Veltman en 't Hooft, ontrafelden de geheimen van de 'dode natuur', de fysica; en de chemie ervan: Lavoisier, Gay Lussac, Van 't Hoff, Curie, Debye, Pauling. En ook de levende organismen en levende wezens werden objecten: Harvey, Van Leeuwenhoek, Swam-

merdam, Darwin en Crick en Watson. Ook hier was de scheikunde onontbeerlijk: de biochemie van grote wetenschappers als Eijkman, Fleming, en opnieuw Watson en Crick, Sanger, Jacob en Monod, droeg bij aan belangrijke doorbraken in de levenswetenschappen. Dit alles leidde tot de industriële revolutie: van stoommachines en elektriciteit tot straaljagers en Nuclear Magnetic Resonance (NMR); via moleculen en atomen tot gas, olie en radiumstraling, tot nylon, plastic en polymeren. Het leidde tot de agrarische revolutie: van teeltmethoden en kunstmest tot veredeld en gemodificeerd voedsel. Het leidde tot de medische revolutie door de vaccins, gebaseerd op ontdekkingen van Jenner, Semmelweis, Pasteur en Koch tot riolering en schoon water, tot anticonceptiepillen, harttransplantatie en DNA-technologie. De wereld is vertechnologiseerd in verkeer en communicatie: straalvliegtuigen, hoge snelheidstreinen en ICT; de voedselproductie is in honderd jaar vervijftig- of verhonderdvoudigd, de kindersterteft is enorm gedaald, zeven van de tien kinderen sterven niet meer voor hun eerste levensjaar, zoals honderdvijftig jaar geleden het geval was; de gemiddelde leeftijd van de mens is de laatste honderdvijftig jaar verdubbeld. En ook wapens: atoombomben en biochemisch wapentuig. Een wetenschappelijke en technologische ontwikkeling die ondenkbaar is zonder cijfers en getallen, zonder meten, zonder wiskunde.

Waarom deze doorbraken in de westerse wereld? En niet in China, India, Mesopotamië en Egypte, landen die aanvankelijk een à twee millennia voor lagen, ook in de wiskunde? Waarom niet in de Arabische wereld, die van 700 tot circa 1400 een forse voorsprong kreeg? Zeker, de Grieken waren ook niet slecht in wiskunde, bepaald niet, maar deze door India beïnvloede wiskunde ging van Griekenland naar de Arabische wereld: de Arabische

cijfers, het getal 0, algebra, algoritmen. Wat gebeurde er in Griekenland en Rome, wat gebeurde er in de Joods-christelijke wereld? Wat leverden ze aan en over dat vanaf ongeveer 1050 ontwikkelingen in Europa op gang kwamen, die via Renaissance en Reformatie tot de diverse wetenschappelijke revoluties leidden? (Zie David Lindberg; Marcia L. Colish.) Mijn stelling is dat vijf onderling samenhangende factoren een rol spelen.

1. Zoektocht naar algemeen geldende, universele principes en wetten. Invloed van monotheïsme, in het bijzonder het 'katholieke' christendom?
2. Het alfabet en de Arabische cijfers.
3. De formalisering, dat wil zeggen het gebruik van cijfer- en letterformules, wiskundige formules, die het meten zoveel gemakkelijker maakten.
4. De methode: theorie, hypothese, experimenten, aan zekerheid grenzende waarschijnlijkheid, principia en wetten, algemeen geldend, universeel.
5. Voortdurende toepassing in de werkelijkheid: technologie en techniek. De stormachtige successen, bovenaangeduid, universeel, dat wil zeggen wereldwijd, stimuleerden het geloof en vertrouwen in de wetenschap en haar toepassing, en daardoor weer het fundamentele onderzoek, de theorievorming.

Centraal hierin is: het meten, het gebruik van formules, de wiskunde.

De uitbreiding naar de gedrags- en maatschappijwetenschap

De wetenschap schrijdt voort. Niet alleen de natuur (de *φυσικη*: fysica) en het leven (de *βιολογικη*: biologie), maar inmiddels ook de mens (*βιολογικη* en *ψυχολογικη*: biologie en psychologie) en de samenleving (*societas* —sociale wetenschappen) zijn object van de zo succesvolle wetenschappelijke benadering geworden.

Sommigen verzetten zich hiertegen: "mens en samenleving lenen zich niet voor de natuurwetenschappelijke benadering, daarvoor zijn ze te complex." Maar de benadering is niet per se natuurwetenschappelijk, ze is wetenschappelijk. De natuur, de zogenaamd doode natuur, was wel haar eerste object: fysica met astronomie en geologie, en met fysische chemie! Een zeer complex object, maar toch nog minder complex dan het leven, dan de mens en zijn gedrag en dan de samenleving. Daarna volgde de levende natuur, inclusief die mens: biologie (inclusief biochemie) en haar toepassingen in landbouw en geneeskunde. Nu zijn de gehele mens, zijn gedrag, en zijn samenleving aan de beurt, óók aan

de beurt. De gehele mens, neuro- en sociaal-psychologisch. En de samenleving: algemeen (antropologie en sociologie) en de diverse facetten en domeinen: recht, economie, bestuur, politiek, enzovoorts, en ook in de dimensies ruimte (geografie) en tijd (geschiedenis). Opnieuw: velen houden het voor onmogelijk of vinden het ongewenst. Ze houden vast aan bestaande benaderingen: geleerdheid, rationaliteit, geletterdheid, descriptie, narratie, of zelfs intuïtie, invoelen. Ik veroordeel dit niet. In het menselijk bedrijf zeker een zinnige en waardevolle benadering. Maar waarom zich verzetten tegen de beproefd, zo succesvol gebleken wetenschappelijke benadering? In diverse disciplines gebeurt het al, en de eerste resultaten zijn perspectiefvol: psychologie en economie zijn de beste voorbeelden. Maar ook in de sociologie, de politologie en zelfs de sociaal-economische geschiedbeoefening werpt de wetenschappelijke benadering de eerste vruchten af. Centraal hierin is het meten: econometrie en psychometrie. Niet voor niets zijn grondleggers en dragers van de moderne economie wiskundigen: Tinbergen, Koopmans, Ritzen, Van Wijnbergen, Van der Ploeg. Wiskunde is en blijft onmisbaar. Ook de taal is meer exact geworden en terecht: de taal was en is het zusje van het rekenen, de wiskunde en het wordt tijd dat het zusje zich ook emancipeert. Kortom: *Wiskunde blijft een essentiële basis voor de wetenschapsbeoefening en de hierop gebaseerde technologieën, niet alleen voor de natuur- en de levenswetenschappen, maar geleidelijk ook meer en meer voor de gedrags- en maatschappijwetenschappen.*

Bedreigingen

Hoe succesvol de rol van de wiskunde in de ontwikkeling van wetenschap en technologie ook is geweest, hoe noodzakelijk de wiskunde ook is en blijft, we kunnen er niet om heen dat we met een groot probleem zitten: de wiskunde in Nederland wordt bedreigd. Er is een dramatische terugloop van studenten, niet sinds gisteren. Het is een tendens die al ruim tien jaar gaande is. Inmiddels heeft deze terugloop een spiraal omlaag in werking gezet: minder studenten, minder geld voor opleiding van wiskundigen, minder disseminatie van kennis, enzovoorts. In het onderwijs, voortgezet onderwijs, hbo en wetenschappelijk onderwijs, speelt dit bijzonder sterk. En dit is fataal, omdat dit de productie van wiskundig geschoolden geleidelijk volledig stop zal zetten. Hoe komt dit? Vele factoren zijn te noemen. Ik doe vandaag geen poging tot

zo'n opsomming. Ik beperk me tot twee factoren waarvan ik denk dat deze tot nu toe te veel onderbelicht zijn gebleven, namelijk: de 'overrijpe economie', en de beeldvorming en feitelijke presentatie van wiskunde als een moeilijk en zwaar vak.

Economische situatie

Is het de overrijpe economie die een rol speelt? Opvallend is dat veel wiskundigen, in elk geval in het laatste decennium, uit gezinnen met laagmiddelbaar tot middelbaar opgeleide ouders afkomstig zijn (zie enquête Elsevier, gehouden onder afgestudeerden van het studiejaar 1999–2000, juni 2002). Wiskunde is een van de manieren om je te verheffen, een vehikel voor sociale opstijging. Dit geldt overigens ook voor de natuurwetenschappen. Dit was kennelijk ook vroeger al het geval. Een groot deel van onze Nobelprijswinnaars (natuurkunde, scheikunde en ook geneeskunde en zelfs economie: Tinbergen en Koopmans waren natuurkundigen!) is afkomstig uit een middenklasse of zelfs laagmiddenklasse milieu. Ze hadden vaak een HBS-vooropleiding! Waar zit de kern van deze overeenkomst? In vele landen in de westerse wereld zien we teruggang in belangstelling voor wiskunde en voor de harde natuurwetenschappelijke en technische vakken. Gevolg van rijpe, overrijpe economieën? Hebben deze zo'n succesvolle externe democratisering gebracht dat er minder sociale opstijging is? In de Verenigde Staten is deze dalende belangstelling al vele decennia goed zichtbaar. Nu is er ook een teruggang in diverse West-Europese landen. Wel is er een toename in belangstelling voor biomedische vakken. Maar de echte stijging zit vooral in de gedrags- en maatschappijwetenschappen (in het bijzonder psychologie en economie en bedrijfswetenschappen). De terugloop van studentinstroom in de wiskunde en dergelijke is in de Verenigde Staten opgevangen door import. Dit begint zich thans ook hier af te tekenen. En we moeten dat als een noodzakelijke en wenselijke ontwikkeling zien en deze import stimuleren. Er is veel belangstelling van studenten uit Centraal- en Oost-Europese landen en Azië (China, India). Met de arbeidsmarkt voor wiskundigen is niets aan de hand: deze is en blijft zeer goed. Anderhalf jaar na afstuderen heeft 97% van de wiskundigen een baan. Zij komen relatief vaak terecht in banen die in een andere sector liggen. Het bruto uurloon dat wiskundigen kort na afstuderen verdienen ligt relatief hoog: na de informatici komen de wiskundigen op de tweede plaats van de afgestudeerden in het bètacluster (uit: ar-

beidsmarktmonitor UU 2001). Conclusie: het arbeidsmarktperspectief is zo gunstig dat dit op zich voldoende zou moeten zijn om aantrekkingskracht op studenten uit te oefenen. Nu we een economische stagnatie zien optreden, lijkt het alsof er inderdaad weer iets meer belangstelling begint te ontstaan voor het 'beroep van wiskundige'. Ik hoorde dat op de voorlichtingsdagen die in maart zijn gehouden er voor het eerst weer de vraag is gesteld: "wat kun je met wiskunde worden?". De voor-aanmeldingscijfers van eind maart 2003 laten geen verdere terugloop zien. Maar ook geen stijging. De lage instroom is naar mijn opvatting derhalve een realiteit. Natuurlijk moeten we alles op alles zetten (scholen, universiteiten, overheid, bedrijfsleven) om de belang-

stelling te vergroten, maar we zullen blij mogen zijn als we het stabiel houden. En dit betekent blijvend een te lage instroom en dus is een sterkere instroom van buiten nodig om wiskunde kwantitatief en kwalitatief op peil te houden.

Aristocratische arrogantie

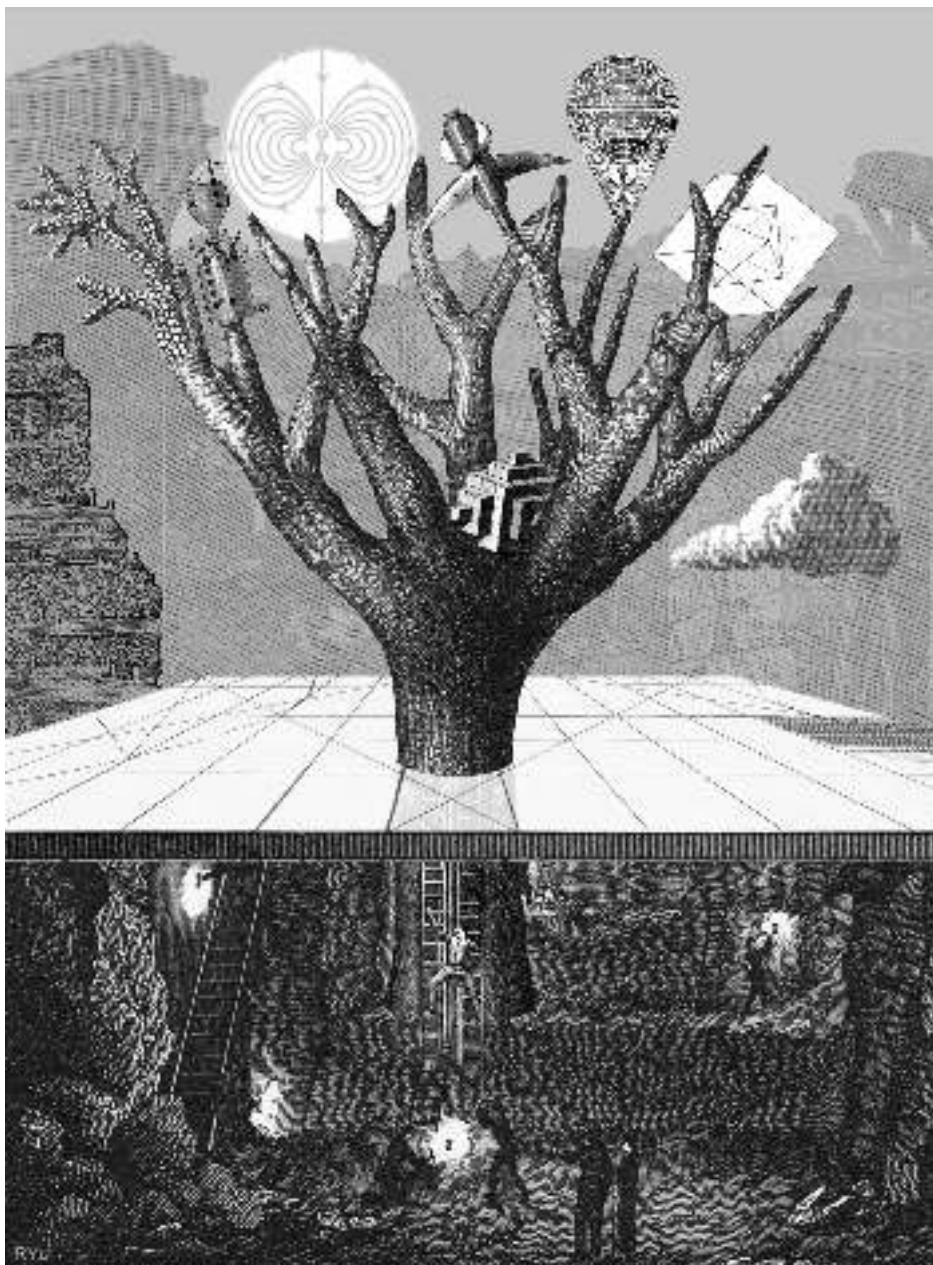
De beeldvorming, het imago, van de wiskunde is de tweede belangrijke factor die de keuze van vwo-scholieren bepaalt om wiskunde te gaan studeren. Vwo-scholieren hebben geen realistisch beeld van de wiskundestudie, laat staan van de werkzaamheden van professionele wiskundigen. Maar niet alleen onder scholieren is er sprake van een stereotipe beeldvorming. Vraagt u maar eens om u

heen. En het volgende heb ik neergeschreven vóór de burgemeester van Nijmegen haar wiskundeprestaties op school hier etaleerde. In veel kringen, óók in academisch gezelschap, is het bon ton om zonder schaamte en met een zekere vanzelfsprekendheid te zeggen dat men vroeger slecht was in wiskunde. Wiskunde heeft het imago van moeilijk en zwaar. En dat beeld wordt gekoesterd en naar mijn mening zelfs gecultiveerd. Het komt ook voort uit de 'aristocratische' arrogantie van de wiskundigen zelf, zowel van wiskundeleraren als van academische wiskundigen. Daarmee kom ik op mijn tweede stelling: *Ook de aristocratische arrogantie van de wiskundigen zelf heeft zich tegen de wiskunde gekeerd.*

Dit is misschien niet welbewust gebeurd, maar het effect is er wel. Als we kijken naar de rendementscijfers, zien we dat er een sterke selectie optreedt. *Crème de la crème* komt van het vwo —uit onderzoek komt naar voren dat vwo-scholieren met de hoogste cijfers kiezen voor wis-, natuur- en sterrenkunde— maar hiervan laten onze universiteiten geleidelijk liefst meer dan de helft 'afvloeien'. Het studierendement na acht jaar ligt bij de algemene universiteiten tussen de 37% en 43%. Bij de technische universiteiten ligt dit 10 á 15% hoger: tussen de 48% en 59%. De wiskundestudie in Nederland is al veel te lang een te elitaire studie, in de zin dat alleen de allerknapsten die wiskunde gaan studeren kans op een einddiploma hebben. De heer Ger Koole, hoofdredacteur van *Nieuw Archief voor Wiskunde*, zegt in een redactioneel commentaar bij het najaarsnummer vorig jaar: "In Engeland zijn de wiskundeopleidingen minder elitair en komen vele studenten op het breder beroepsperspectief af." Koole onderkent hier niet, of te weinig, het effect van kwaliteitsranking in het Engelse hoger onderwijs. Maar ik ben het geheel met hem eens als hij vervolgens zegt dat we in Nederland voor een keuze staan: óf we blijven ons richten op de happy few, óf we bieden bredere opleidingen voor een grotere groep studenten. En natuurlijk moeten we naar een bredere, of beter: meer gedifferentieerde opleiding. Juist in het Nederlandse stelsel, dat publiek is, en daarom tot een nagenoeg gelijk kwaliteitsniveau van de diverse opleidingen leidt.

Vrouwen

Tot slot van dit onderwerp wil ik iets zeggen over het effect van deze beeldvorming op meisjes. Reeds op jonge leeftijd vormen kinderen zich een beeld over wiskunde via andere mensen. Via mensen die zelf nooit wiskunde hebben gehad en alleen maar onbegrijpe-



Illustratie: Ryu Tajiri

lijke formules zien staan en het vak afdoen als onbegrijpelijk. Of via mensen die wel wiskunde hebben gedaan, maar er zelf geen plezier aan hebben beleefd. Meisjes krijgen in hun opvoeding een dubbele boodschap mee. De ene boodschap luidt: "Doe goed je best op school!". De andere boodschap luidt: "Zorg ervoor dat je aardig en aantrekkelijk gevonden wordt". Als het gaat om een exact vak als wiskunde komen deze opdrachten met elkaar in botsing. Hard werken en veel belangstelling hebben voor wiskunde en daar ook nog goed in zijn, degradeert ze bijna als vrouw. Opmerkelijk is dat meisjes op meisjesscholen tot betere resultaten komen in wiskunde dan meisjes op gemengde scholen. Daar komen ze niet direct in conflict met de dubbele boodschap.

Er zijn weinig vrouwelijke wiskundigen bekend. Uit boeken over de geschiedenis van de wiskunde komt de indruk naar voren dat vrouwen zich in het verleden niet bezig hielden met de wiskunde. Een belangrijke oorzaak daarvan is het feit dat vrouwen minder aan het openbare leven deelnamen en men de noodzaak van ontplooiing niet inzag. Toch is het een aantal vrouwen gelukt om door te dringen tot de wiskunde, ik noem bijvoorbeeld Hypatia die eind vierde eeuw na Christus in Egypte leefde, of Maria Agnesie een Italiaanse vrouw uit de achttiende eeuw en Emilie de Breteuil, een Franse wis- en natuurkundige uit de achttiende eeuw. In Nederland kennen we uit die tijd geen bekende vrouwelijke wiskundige. Wel weten we dat Johanna de Timmerman zeer geïnteresseerd was in de wiskunde en natuurwetenschappen. Haar man, Johan Frederik Hennert was hoogleraar in de wiskunde, sterrenkunde en filosofie aan de Universiteit Utrecht. In zijn biografie spreekt Hennert zijn bewondering uit voor de kwaliteiten van zijn vrouw op wiskundig gebied en pleit hij voor beter ontplooiingsmogelijkheden voor vrouwen. Beperkte ontplooiingsmogelijkheden vormen tegenwoordig niet meer het obstakel, gelukkig, maar wel de negatieve beelden. Daar moeten we dus nog meer aan doen.

Kansen en maatregelen

Waar liggen de kansen om te zorgen dat de wiskunde aanwezig blijft in onze universiteiten? De sterke terugloop van het aantal studenten en het feit dat universiteiten voor een belangrijk deel gefinancierd worden op basis van in- en uitstroom van studenten, heeft tot gevolg dat de wiskundefaculteiten hardholend op weg zijn naar een faillietverklaring. En dat is onwenselijk. Er zijn diverse (structurele)

maatregelen nodig als reactie op de crisis. Ik beperk me tot mogelijkheden met betrekking tot de twee door mij specifiek behandelde factoren, namelijk de overrijpe economie en de arrogantie van de wiskundigen in het voortgezet onderwijs en wetenschappelijk onderwijs. En dan als afsluiting een voorstel voor een noodmaatregel, hic et nunc.

1. Al eerder in mijn verhaal noemde ik de 'import' van buiten, bijvoorbeeld vanuit Centraal- en Oosteuropese landen en Azië. Dat moeten we serieus gaan nemen en stimuleren. Niet alleen moeten we onze opleidingen openstellen voor studenten uit deze landen, maar ook belemmeringen wegnemen zoals het verkrijgen van visa, de hoge kosten voor leges, onvoldoende huisvestingsmogelijkheden, onvoldoende gastvrij onthaal, et cetera. Ook belangrijk is het aanbieden van 'masterclasses', zoals dit aan de Universiteit Utrecht gebeurt om te zorgen dat studenten op een zelfde golf lengte en ingangsniveau aan een masterprogramma kunnen beginnen.

2. Het huidige rendement van 45% (na circa 8 jaar!) zullen we omhoog moeten brengen. Nog steeds kunnen we aanbod blijven bieden aan de bijzonder getalenteerde en ambitieuze studenten die belangstelling hebben voor de wiskunde als zodanig. Maar niet alle studenten behoeven de diepte in; 25% is ook al mooi, én voldoende. De overigen kunnen we een 'bredere', een gedifferentieerdere opleiding aanbieden, via verbinding met bijvoorbeeld informatica, biologie of economie. De markt schreeuwt hierom en het bachelor-mastermodel maakt het mogelijk: differentiatie in de masterfase. Een rendement van 75–80%, wenselijk in het wetenschappelijk onderwijs, is dan ook mogelijk! We zetten dan geen in wiskunde geïnteresseerde en begaafde studenten aan de kant. Neen, we leiden dan bijna twee keer zoveel wiskundigen op in een mooie differentiatie!

Wiskundeopleiding

De opleiding van wiskundeleraren dient ook een plaats binnen het bachelor-mastermodel te krijgen. De toekomstige wiskundeleraren behoeven heus geen toekomstige hoogleraren te zijn. In het BaMa-model moet ook een realistische tweejarige master communicatie en educatie ontwikkeld worden. En met de voorzitter van het Wiskundig Genootschap, professor Looijenga, ga ik nog verder: waarom niet, na een bachelor wiskunde, ook een éénjarige master, half theorie-half praktijk, en dan een eerstegraads bevoegdheid? Een dergelijke andere aanpak van aankomende studenten op de universiteit zal hand in hand

moeten gaan met een soortgelijke aanpak in het primaire en secundaire onderwijs. Het Freudenthal Instituut kan daar een belangrijke rol in spelen. En het onhebbelijke getwist in de wiskundewereld over de juiste wiskundededidactiek moet dan afgelopen zijn: de zogenaamde 'realistische wiskunde' versus de zogenaamde 'echte wiskunde'. Het op elkaar blijven afgeven en het elkaar eindeloos verwijten maken is verspilling van tijd en energie tot nadeel van de wiskunde.

De universitaire wiskundebeoefening staat aan de rand van de afgrond: het losmaken van de wiskunde (en van de harde bètawetenschappen) uit het op studententaallen gebaseerde onderwijsbekostigingssysteem is een onmisbare voorwaarde voor een realistische reddingsoperatie.

Er is snel een aanpassing van de huidige bekostiging noodzakelijk, zodat noodlijdende studies (waaronder ook enkele andere harde natuurwetenschappelijke en technische opleidingen, alsmede enkele noodlijdende letteren-opleidingen, denk aan enkele talenstudies) veel minder afhankelijk zijn van studententaallen. Dit vraagt grote druk op beleid en politiek. De inzet en samenwerking van alle betrokkenen zijn hierbij nodig. We hebben geen tijd te verliezen. Snelle consensus over de aanpak ervan is vereist. Anders: *Scholis et universitatibus, consulibus et senatoribus, et hominibus fabricationis servitiique deliberantibus, mathematica perit.*

En dit kan niet. Als we niet de noodzakelijke maatregelen treffen, zullen we onder ogen moeten zien dat er over tien á twintig jaar geen opleiding wiskunde in Nederland meer aanwezig is. Dit zal grote gevolgen hebben voor de Nederlandse wetenschap, en daarmee voor de Nederlandse economie. Dit alles vergt een gedifferentieerde aanpak in de opleiding, maar geen gedifferentieerd enthousiasme: alle studenten moeten even enthousiast en intensief gestimuleerd en begeleid worden, niet alleen de bijzonder getalenteerden, maar ook de 'gewoon' getalenteerden. Ja, juist de laatsten misschien toch zelfs wat meer. Is dit niet de opdracht voor de onderwijsgevende? En zoals gezegd, deze gewoon getalenteerden behoren altijd nog tot de crème de la crème van het vwo! Het is twee voor twaalf... voor de Nederlandse wiskunde, en daarmee voor het wetenschappelijk onderwijs en onderzoek, en hieruit voortvloeiend voor de Nederlandse economie en samenleving, want: *Zonder op wiskunde gebaseerde wetenschapsbeoefening en technologie is er geen kenniseconomie en geen kennismaatschappij.*



Hugo Brandt Corstius

Wiskunde, nodig en in nood (3)

Wiskunst

Hugo Brandt Corstius was de derde spreker van het symposium 'Wiskunde, nodig en in nood'. Hij heeft wiskunde en later algemene taalwetenschap gestudeerd aan de Universiteit van Amsterdam en is in 1970 gepromoveerd op een onderwerp uit de computerlinguïstiek. Hij publiceert onder vele pseudoniemen: Victor Baarn, J. Trapjes, Maaïke Helder, Peter Malenkov, Battus, Raoul Chapkis, Piet Grijs, Jan Eter, drs. G. van Buren, Stoker en Joop den Uyl en heeft vele literaire prijzen ontvangen. In maart 2003 is de tweede editie van Battus' 'Opperlandse taal- en letterkunde' verschenen, met de titel 'Opperlans! Taal- en letterkunde'. In dit werk wordt op encyclopedische wijze met eigenschappen van woorden en zinnen van het Nederlands gespeeld.

Hugo Brandt Corstius stelt dat wiskunde vergelijkbaar genot verschaft als kunst en natuur en net als kunstbeoefening en natuurbeheer gesubsidiëerd dient te worden.

Zestig jaar geleden gebeurde iets dat me mijn hele leven is bijgebleven. Ik was zeven jaar oud. Een jongen die bij ons in huis woonde vertelde mij drie dingen.

Eerst —we hadden het over het vermenigvuldigen en delen van gehele getallen— legde hij me uit wat een priemgetal was. "Vijf is priem want vijf kan door geen enkel ander getal gedeeld worden met een nette uitkomst".

Vervolgens bewees hij dat er geen grootste priemgetal bestaat. Het bekende bewijs uit het ongerijmde dat Euclides herhaalt. Ik was opgewonden, verrast, getroffen, ontroerd zoals later nooit meer. Ik had nooit eerder een strikt bewijs gehoord. Alles wat ik wist wist ik omdat het me verteld of overkomen was. Niets stond absoluut vast. Maar dat er geen grootste priemgetal kon zijn, dat stond nu voor altijd en overal vast. Dat het een bewijs uit het ongerijmde was, het eerste waar ik van hoorde, was ook al ongelooflijk. Dat je over reuzengetallen die heel ver weg lagen, kon redeneren, dat was verrukkelijk. Dat je

over priemgetallen, die ik net had leren kennen, met zekerheid iets kon beweren, dat trof mij die zaterdagmiddag. Ik kan het meestal niet laten om het bewijs te herhalen, maar voor dit gezelschap van wiskundigen moet ik van dat genoeg afzien.

Het derde wat mijn vriend me vertelde was dat er een vak bestond dat zich geheel met dit soort vragen en bewijzen bezig hield. Dat vak heette wiskunde. Rekenen was maar een klein onderdeel van wiskunde. Vanaf dat moment wilde ik alles van wiskunde weten.

Vijftig jaar geleden ging ik in Amsterdam wiskunde studeren. Op school was ik met dat vak niet al te gelukkig geweest. Ik hield van meetkunde en vond dat de analytische meetkunde daar alle aardigheid uit wegnam. Het kruis van Cartesius beschouwde ik als een kruis voor de meetkunde. Ik hield van algebra maar gonio vond ik stom. Wiskunde was op het gymnasium geen populair vak. Ik was niet al te gelukkig met mijn wiskundelaren, die ook niet gelukkig waren met mij en met mijn ongezeglijkheid.

Maar er kwam in die schooltijd nog net zo'n gelukservaring als op mijn zevende jaar. Een werkweek in Maarn, waarin mijnheer Menk ons de integraalrekening uitlegde. Ik geloof dat in 1952 de bèta's wel leerden differentieëren, maar niet hoefden te integreren. Toen mijnheer Menk bewees dat integreren het tegenovergestelde proces was van differentieëren, toen voelde ik weer dat wonderlijk gelukzalige gevoel.

Met vier of vijf andere eerstejaars begon ik in Amsterdam aan mijn eerste jaar bij vier of vijf professoren —Heijting, De Groot, De Bruijn, Beth— en ontdekte ik dat ik, die op school natuurlijk tien voor wiskunde had gekregen, hier omringd werd door studenten die allemaal op school óók tien hadden gekregen, maar die betere wiskundigen waren dan ik. Ik ken geen ander vak waarin je de meerderwaardigheid van een ander zo onmiskenbaar kunt zien en daarvan nog kunt genie-

ten ook. Ik bleef de wiskundestudie heerlijk vinden en studeerde af op dezelfde dag als ledje de Miranda. Zij werd hoogleraar wiskunde, ik deed niets meer aan wiskunde. Gelukkig was de onvermijdelijke voorbestemming van het leraarschap ingehaald door de spannende belofte van de informatica.

Ik heb een zalige wiskundestudie gehad en los nog graag elke maandag het logisch-mathematische puzzeltje in *Le Monde* op. Voor mij is de echte wiskunde de rubriek die Martin Gardner in de *Scientific American* had. De bewijzen van de vierkleurenstelling en de stelling van Fermat maken mij niet blijer dan de ontdekking dat aapjeskoop en spookaapje anagrammen zijn met plaatswisseling van klinkers en medeklinkers, of dat in het woord vanitasstilleven elke letter precies twee keer voorkomt. Dit najaar wil ik, vijftig jaar na de vorige keer, weer de wiskundestudie opvatten om te zien of er veel veranderd is.

Waarom vertel ik dit? Omdat ik er een nieuw argument aan ontleen in de kwestie die ons hier bijeen brengt. Mijn gelukservaringen bij het bewijs dat er geen grootste priem is en dat integreren het omgekeerde is van differentieëren zijn alleen te vergelijken met de grote esthetische ontroeringen die de schilderkunst, de muziek, en de literatuur je kunnen brengen. Er is geen verschil tussen die kunstzinnige ontroeringen en de rationele ontroeringen van de wiskunde.

Helaas heeft de wiskunde ook praktisch nut en daarom wordt de wiskunde niet tot de kunsten gerekend. Ten onrechte. Schilders schilderen onze huizen, militairen zingen marcheerliederen, en de bijbel is hier en daar mooi opgeschreven, maar die praktische toepassingen maken ons niet blind, doof of ongevoelig voor de pure kunsten van schilders, zangers en schrijvers.

Voor velen is wiskunde geen praktisch vak. Het is wiskunst. De staat geeft miljoenen uit aan de kunsten. Waarom? Omdat het zo hoort. Omdat de regeerders graag cultureel willen

doen. Omdat het de bevolking rustig houdt. Omdat ze het in buurlanden ook doen. Omdat musea en orkesten prestige geven. Al die argumenten gaan ook op voor de wiskunde. En dan is wiskunde nog goedkoop ook.

In de zeventiende eeuw was wiskunde populair. Spinoza hult zijn filosofie in de kleding van Euclides en zijn lezers smullen ervan. René Descartes zit in het leger van Prins Maurits en kijkt op 10 november 1618 in Breda naar een in het Nederlands gesteld opgeplakt wiskundig probleem. Hij vraagt de betekenis van een enkel Nederlands woord aan een muurlezer die naast hem staat en die Izaak Beekman blijkt te zijn. Zulke tijden moeten weerkeren.

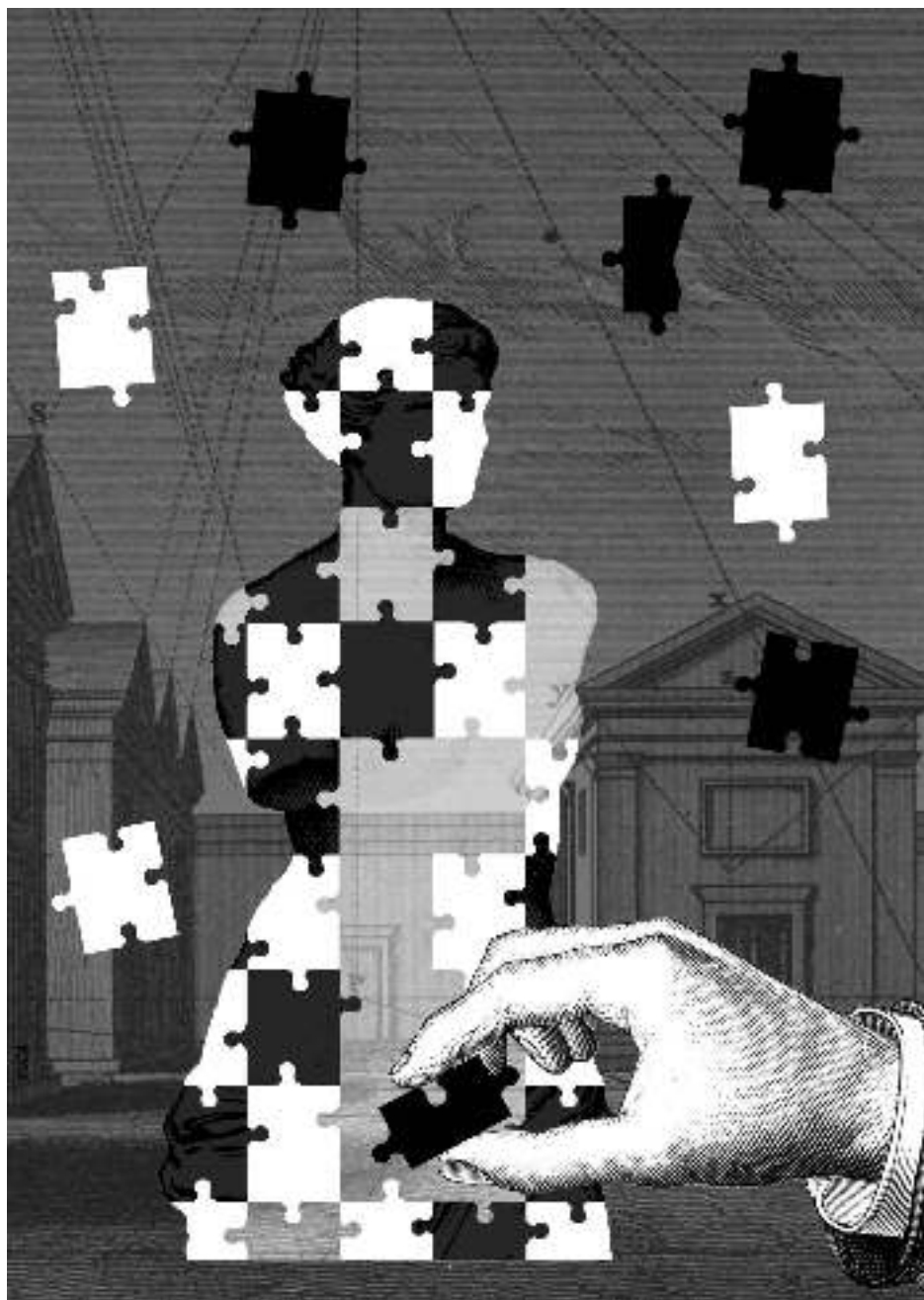
Op dit moment dreigt filosofie massaal in de gunst van studenten te komen. Maar waar redeneert men dieper en zuiverder dan in de wiskunde? Wiskunst moet weer in de mode komen. De regering moet de wiskunst steunen zoals zij ballet, film, concertgebouw en de vertaling van Nederlandse literatuur steunt.

Laat de wiskundigen tot ons komen

Ik spreek tot mensen die al overtuigd zijn dat wiskunde niet uit Nederland mag verdwijnen. Ik heb naar een nieuw strijdmiddel gezocht en er een gevonden.

Als wiskunde uit Nederland dreigt te verdwijnen dan moeten wij die dreiging weerstaan door wiskunde in Nederland binnen te brengen. Dat doen we door allen in de wereld die wiskundige belangstelling, dus wiskundige aanleg, hebben, in ons land welkom te heten. Nu al kun je in Amerika zien dat in de wiskunde-instituten het oriëntaalse uiterlijk de boventoon voert. Zouden werkelijk de Koreanen, Japanners of Chinezen meer wiskundig talent hebben dan wij in Europa? Nee, evenmin als in het verleden de Grieken, Duitsers of Fransen bij uitstek wiskundig talent hadden.

Maar er is wel een goede reden waarom er zoveel recente immigranten in de wiskundebanken zitten. Voor de meeste studies in Nederland is algemene ontwikkeling nodig, een inzicht in de geschiedenis en de denkwijze van dit land, een grondige kennis van de inheemse taal en letterkunde. Recente immigranten bezitten zulke kennis wel, maar dan van hun eigen land. In Nederland betekent 'Algemene Ontwikkeling' nu eenmaal: 'Batavo-Vaderlandse ontwikkeling'. Altijd al zag je daarom veel artsen en apothekers, veel voetballers en musici onder de mensen die naar een ander land verhuisden en minder advocaten en filologen. Voor wiskunde is algemene ontwikkeling niet nodig. Gezond verstand



Illustratie: Ryu Taji

en bereidheid tot abstractie zijn genoeg. Wiskundigen hebben de naam enigszins wereldvreemd te zijn. Laat de wereldvreemden dan ook tot de wiskunde in ons land bijdragen.

Geef aan elke Indiër, Pakistaan, Afghaan of Afrikaan die de priemgetalstelling in een kwartier begrijpt en waardeert, een studiebeurs voor Nederland. Velen zullen na hun studie weer verhuizen —des te beter voor de wereldwiskunde. Maar door hun loutere toestroom zullen ze de wiskundige voorzieningen in Nederland op peil houden. En als wij ze een prettig land bieden zonder de stompzinnige vooroordelen over buitenlanders die hier de laatste jaren onbeschaamd uitgetoe-

terd worden, zullen er ook velen hier blijven.

Natuurlijk leren ze Nederlands want wiskundigen zijn over het algemeen niet dom. Als ze dan ook nog veel met Nederlanders trouwen, dan wordt Nederland het beste wiskundeland ter wereld. Waarom niet? Amerika bezit het sterkste leger, Engeland de geestigste humor, Kenia de hardste lopers, Italië het lekkerste eten, Duitsland de stevigste auto's, Frankrijk de elegantste jurken, Japan de kleinste elektronica, en Nederland straks de wonderbaarlijkste wiskunde. Stevin en Huygens, Stieltjes en Brouwer zullen verbleken, maar Ramachandra en Nasutiputtri, Hoessein en Olafdottir zullen schitteren.

Wouter Waalewijn

De Roef 4

3904 PC Veenendaal

w.waalewijn@students.math.uu.nl

Schuifpuzzels

In 1870 was een groot deel van de Verenigde Staten en Europa in de ban van de 15-puzzel. Deze schuifpuzzel was bedacht door de beroemde puzzelmaker Sam Loyd, die duizend dollar uitloofde voor de eerste geldige oplossing. Dat dit bedrag nooit opgeëist is, ondanks het feit dat duizenden mensen beweren de puzzel te hebben opgelost, heeft een eenvoudige reden: de puzzel is niet oplosbaar. In dit artikel wordt eerst kort ingegaan op de geschiedenis van de 15-puzzel, waarna een criterium volgt voor de oplosbaarheid van schuifpuzzels van willekeurige afmetingen. Wouter Waalewijn is derdejaars student wiskunde en natuurkunde aan de Universiteit Utrecht.

Aangezien de 15-puzzel een schuifpuzzel is, zullen we eerst een korte beschrijving geven van schuifpuzzels in het algemeen, die later van pas zal komen. Een schuifpuzzel bestaat uit een rechthoek van vakjes, met op alle vakjes op één na een verplaatsbaar (genummerd) blokje. Zie figuur 1 voor een voorbeeld. Het doel is om vanuit een gegeven begintoestand door een reeks van zetten in de gevraagde eindtoestand te komen. Een zet is het verschuiven van één blokje.

Sam Loyds 15-puzzel is een schuifpuzzel van vier bij vier vakjes, die begint in



Figuur 1 De uitgangspositie van de 15-puzzel

toestand afgebeeld in figuur 1. De bedoeling is de blokjes 14 en 15 te verwisselen terwijl de andere blokjes in de eindtoestand op dezelfde plaats zitten als in de begintoestand. Zoals gezegd heeft deze puzzel tot de nodige hoofdbrekens geleid en er doen hier dan ook een flink aantal verhalen over de ronde. Zo zouden er winkeliers zijn die hun winkels niet open deden en machinisten die met hun treinen stations voorbij raasden. Een beroemde redacteur uit Baltimore vertelt hoe hij ging lunchen en pas ver na middernacht door zijn staf ontdekt werd, terwijl hij stukjes taart rondschoof over zijn bord. Opmerkelijk (en tevens uitgekookt) is dat Sam Loyd wist dat zijn puzzel niet oplosbaar is, waardoor hij zich geen zorgen hoefde te maken over zijn duizend dollar.

Deze puzzel heeft ook tot een aanzienlijk aantal wiskundige publicaties geleid, waarvan de eerste paar in 1879 werden uitgebracht door W.W. Johnson en W.E. Story. Terwijl W.W. Johnson aantoonde dat de 15-puzzel niet oplosbaar is, geeft W.E. Story een criterium voor de oplosbaarheid van vier bij vier schuifpuzzels. Het bewijs van dit criterium is echter in de meeste artikelen onnodig ingewikkeld en beperkt zich tot vier bij vier schuifpuzzels. Het in dit artikel gepresenteerde bewijs voor het criterium is daarentegen kort en gaat uit van een schuifpuzzel met willekeurige afmetingen. Voor een meer concreet bewijs voor een vier bij vier schuifpuzzel verwijzen we naar een artikel van A.F. Archer [1].

Een criterium voor oplosbaarheid

We bekijken een schuifpuzzel van m bij n vakjes. Een zet respectievelijk serie van zetten beschrijven we met een permuta-

tie σ van $m \cdot n$ elementen, waarbij $\sigma(a) = b$ betekent dat het blokje in vakje a naar vakje b wordt verplaatst. Op deze manier beschrijven we de toestand van de schuifpuzzel na i zetten met een permutatie σ_i . De plaats van het lege vakje na i zetten noteren we met de coördinaten (x_i, y_i) . We beschrijven de gezochte eindtoestand met een permutatie σ' , en de bijbehorende plaats van het lege vakje met coördinaten (x', y') . Met andere woorden: de schuifpuzzel is oplosbaar als hij in de toestand (σ', x', y') kan worden gebracht.

Iedere permutatie is op te bouwen uit paarwisselingen en dit kan in het algemeen op meerdere manieren. Voor elk van deze manieren is echter de pariteit (het even of oneven zijn) van het aantal paarwisselingen hetzelfde. Dit wordt de pariteit van de permutatie genoemd. Om notatie te vereenvoudigen definiëren we een functie p die aan een permutatie zijn pariteit toekent, en een functie ρ die aan een geheel getal zijn pariteit toekent. Deze functies nemen de waarde 0 voor even en 1 voor oneven permutaties/getallen aan.

We zullen nu aantonen dat als $m > 2$ en $n > 2$, de schuifpuzzel oplosbaar is dan en slechts dan als $\rho(x' + y' + p(\sigma')) = \rho(x_0 + y_0)$. Uit $x_0 + y_0 = x' + y' = 8$ en $\sigma' = (14 \ 15)$ volgt dan onmiddellijk dat de 15-puzzel niet oplosbaar is, aangezien $\rho(x' + y' + p(\sigma')) = 1 \neq 0 = \rho(x_0 + y_0)$. Voor de overzichtelijkheid hebben we het bewijs opgeknipt in twee lemma's en een stelling.

Lemma 1. $\rho(x_i + y_i + p(\sigma_i))$ is invariant.

Bewijs. De enige mogelijke zetten zijn het verschuiven van een blokje, in een vakje dat aan het lege vakje grenst, naar

het lege vakje. Maar dan is $\sigma_{i+1} = (ab)\sigma_i$, dus $p(\sigma_{i+1}) = 1 - p(\sigma_i)$. Verder is $x_{i+1} + y_{i+1} = x_i + y_i \pm 1$. Optellen geeft onmiddellijk dat

$$x_{i+1} + y_{i+1} + p(\sigma_{i+1}) = x_i + y_i \pm 1 + 1 - p(\sigma_i).$$

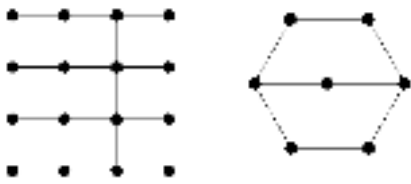
Hieruit volgt dan dat

$$\rho(x_{i+1} + y_{i+1} + p(\sigma_{i+1})) = \rho(x_i + y_i + p(\sigma_i)),$$

wat de gestelde invariantie aantoont. $\square$

Lemma 2. *Als $m > 2$ en $n > 2$, dan zijn iedere drie blokjes verwisselbaar.*

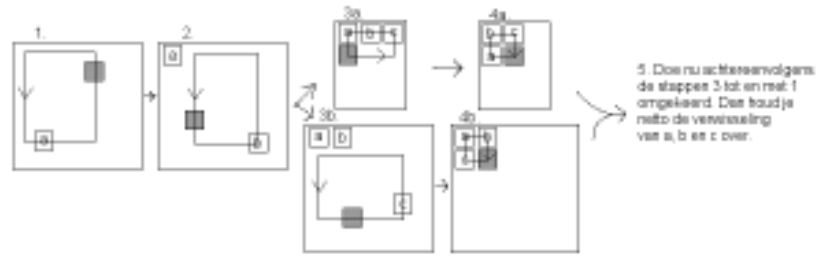
Bewijs. Het bewijs hiervan wordt gegeven door de procedure in figuur 3. Hierin zijn a , b en c de te verwisselen blokjes, en hebben we het lege vakje met grijs aangegeven. Er bestaat een soortgelijke procedure voor $m = 2$ of $n = 2$; hier zullen we verder niet op ingaan. $\square$



Figuur 2 Links: De graaf van de 15-puzzel, rechts: Een geval apart

Stelling. *Als $m > 2$ en $n > 2$, dan is de schuifpuzzel oplosbaar dan en slechts dan als $\rho(x' + y' + p(\sigma')) = \rho(x_0 + y_0)$.*

Bewijs. Stel dat de puzzel oplosbaar is, dan is er een reeks van zetten zodat voor een zekere k , $\sigma' = \sigma_k$ en $(x', y') = (x_k, y_k)$. De gestelde gelijkheid volgt dan onmiddellijk uit lemma 1; dit toont de implicatie aan. Veronderstel nu dat $\rho(x' + y' + p(\sigma')) = \rho(x_0 + y_0)$. Eerst verschuiven we in k zetten het lege vakje naar (x', y') . Uit lemma 1 volgt dan dat $\rho(x' + y' + p(\sigma_k)) = \rho(x_0 + y_0)$. Samen met onze aanname



Figuur 3 De procedure voor het verwisselen van drie blokjes. 1) Verplaats het eerste blokje (a) naar de linkerbovenhoek. 2) Plaats het tweede blokje (b) naast het eerste. 3a) Als het derde blokje (c) naast het tweede zit, plaats het lege vakje dan onder het eerste. Verschuif vervolgens de bovenste twee rijen zodat de drie blokjes en het lege vakje allen in de linkerbovenhoek zitten. 3b) Als het derde blokje ergens anders zit, plaats het dan onder het eerste blokje en plaats het lege vakje daar weer naast. 4a/b) schuif de drie blokjes cyclisch een plaats op. 5) Doe de stappen 3 tot en met 1 omgekeerd. Het resultaat is de verwisseling van de drie blokjes.

leidt dit tot $\rho(x' + y' + p(\sigma')) = \rho(x' + y' + p(\sigma_k))$. Dus $p(\sigma') = p(\sigma_k)$. Hieruit volgt dat $p(\sigma' \sigma_k^{-1}) = 0$. Verder houdt $\sigma' \sigma_k^{-1}$ het lege vakje op zijn plaats.

We kunnen hem dus zien als een element van A_{mn-1} , de deelgroep van even permutaties van $mn - 1$ elementen. Omdat de even permutaties voortgebracht worden door 3-cykels en een 3-cykel overeenkomt met het verwisselen van drie blokjes, volgt uit lemma 2 dat ieder element van A_{mn-1} dus in het bijzonder $\sigma' \sigma_k^{-1}$ verkregen kan worden door verschuivingen. Op grond hiervan concluderen we dat de puzzel oplosbaar is, waarmee de omgekeerde implicatie aangetoond is. $\square$

Zoals we reeds gezien hebben, volgt uit het bovenstaande criterium dat de 15-puzzel niet oplosbaar is.

Generalisatie van de schuifpuzzel

We zullen nu op een interessante generalisatie van de schuifpuzzel ingaan. Als eerste zullen we kort de nodige begrippen uit de grafentheorie bespreken. Een enkelvoudige graaf $G = (V, E)$ bestaat uit een verzameling punten V en lijnen $E \subseteq \{\{a, b\} | a, b \in V, a \neq b\}$. We zeggen dat de graaf G eindig is als V eindig is. Een pad met beginpunt v_1 en eindpunt v_{n+1} is een rij $(v_1, e_1, v_2, \dots, e_n, v_{n+1})$ waarvoor $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$. Als er tussen ieder twee-

tal punten een pad bestaat noemen we de graaf samenhangend. Een graaf is bipartiet als je zijn punten in twee disjuncte verzamelingen kunt verdelen zodat er geen lijnen zijn tussen punten uit dezelfde verzameling, zo is bijvoorbeeld de graaf links in figuur 2 bipartiet. Met behulp van de bovenstaande begrippen zijn we in staat deze generalisatie van schuifpuzzels te formuleren. Neem een enkelvoudige graaf G . Door de punten van G als vakjes te zien, en vakjes aangrenzend te nemen als de bijbehorende punten aangrenzend zijn, krijgen we een gegeneraliseerde schuifpuzzel. Zo wordt bijvoorbeeld de graaf corresponderend met de 15-puzzel gegeven links in figuur 2.

Voor deze generalisatie van de schuifpuzzel kunnen we ons afvragen of, gegeven een beginpositie, een bepaalde eindpositie bereikbaar is. Er blijkt hier een verrassend eenvoudig antwoord op te zijn. Het bewijs hiervan maakt gebruik van geavanceerde grafentheorie. R.M. Wilson [3] laat zien dat als G een eindige, samenhangende, enkelvoudige graaf is die niet gelijk is aan een polygoon of de graaf rechts in figuur 2, dan kunnen we iedere eindpositie bereiken, tenzij de graaf bipartiet is. In dat geval kunnen we alleen alle even permutaties maken. De theorie van de 15-puzzel en algemene schuifpuzzels kan hier uit worden afgeleid. $\Leftarrow$

Referenties

- 1 A.F. Archer, *A modern treatment of the 15 puzzel*, Amer. Math. Monthly 106 (1999), no. 9, p. 793–799
- 2 R.M. Wilson, *Graph puzzles, Homotopy and the Alternating Group*, J. Combinatorial Theory, Ser. B 16 (1974), p. 86–96

Kasper van Ommen

Universiteitsbibliotheek Leiden
Postbus 9501, 2300 RA Leiden
k.van.ommen@library.leidenuniv.nl

Henk Bos

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
bos@math.uu.nl

Geschiedenis

De Bibliotheca mathematica

David Bierens de Haan (1822–1895), redacteur van het Nieuw Archief voor Wiskunde en hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit Leiden, liet na zijn overlijden zijn gehele wetenschappelijke bibliotheek op het gebied van de wis- en natuurkunde na aan de universiteitsbibliotheek. De door Bierens de Haan aangelegde boekenverzameling vormde het werkmateriaal voor zijn wetenschappelijk onderzoek. Hij verzamelde naast vele honderden boeken over integraaltafels, zestig uitgaven van Euclides uit de zestiende tot en met de negentiende eeuw en vele duizenden andere boeken op het gebied van de Nederlandse bouwkunde, navigatie, vestingbouw, mechanica en sterrenkunde. Deze bijzondere collectie is in juli en augustus van dit jaar tentoongesteld in de Universiteitsbibliotheek van Leiden. Onderstaande tekst verscheen als introductie bij de catalogus.

Van Bierens de Haan is vrij weinig bekend. Van wat bekend is kan worden gesteld dat Bierens de Haan zekere tegenstrijdige eigenschappen worden toegedicht. Hij was als docent verbonden aan de Leidse Universiteit én bracht een van de grootste verzamelingen op het gebied van de pedagogiek bijeen, terwijl juist zijn eigen didactische vaardighe-

den veelvuldig door de studenten werden bekritiseerd. Hij was onder hen niet bijzonder geliefd, maar werd onder collega's en andere wetenschappers juist geprezen. Ook internationaal viel hem veel lof ten deel, zoals het eredoctoraat dat de Universiteit van Edinburgh hem verleende.

Zelfs in de normaalste zaken van het leven komen we bij hem tegenstellingen tegen. Zo veronderstelde men dat van Bierens de Haan tijdens zijn leven weinig portretten zijn vervaardigd omdat hij weinig geduld zou hebben getoond om te poseren. Toch blijken er verschillende foto's en zelfs een getekend portret van hem te bestaan, waaraan waarschijnlijk vele uren poseren vooraf zijn gegaan. Verder was Bierens de Haan een actief wetenschapper van zijn tijd met een bijzondere voorliefde voor de ervaringswetenschappen (mechanica, fysica, zogenaamde 'sterkteleer', astronomie en scheepsbouwkunde). De differentiaal- en integraalrekening is toepasbaar op deze ervaringswetenschappen. Bijzonder voor zijn tijd was echter dat hij ook een grote interesse voor de bronnen van deze ervaringswetenschappen aan de dag legde.

Eigenlijk komt de tegenstelling ook terug in de omgang met, en het gebruik van de schenking van Bierens de Haan. Het door hem ge-

schonken en nagelaten materiaal wordt zeker door de bibliotheek gekoesterd, en is, wat de boeken betreft, goed ontsloten en geconserveerd, en toch ontstaat de indruk dat de volledige waarde van het bezit door de onderzoekers nog niet wordt ingezien.

"Het is te verwachten, dat deze kostbare geschenken aan toekomstige beoefenaars van de historie van de wis- en natuurkundige wetenschappen in Nederland de grootste diensten zullen bewijzen, en dat daardoor de onverdroten nasporingen van den oorspronkelijken verzamelaar ook bij het nageslacht de meeste waardeering zullen blijven vinden." Deze woorden werden geschreven in het *In Memoriam* van Bierens de Haan dat verscheen in het tijdschrift *Nieuw archief voor wiskunde* [1]. De auteurs van dit artikel waren vol lof over het leven en werk van de overledene en prezen zijn rol in de bevordering van de geschiedschrijving van de wiskunde in Nederland. Zij vonden het bijzonder heugelijk dat Bierens de Haan zowel tijdens zijn leven als door een schenking die testamentair was vastgelegd een grote collectie boeken, kleine geschriften en overdrukken aan de bibliotheek van de Universiteit Leiden had geschonken. Het legaat wekte een zekere verwachting bij de redactieleden van het Nieuw archief

van Bierens de Haan

voor wiskunde, omdat men zich realiseerde dat de collectie minstens in twee opzichten waardevol was. Ten eerste was ze verzameld door een wetenschapper met een bijzonder historisch besef aangaande zijn vakgebied, die bovendien altijd goede (inter)nationale contacten met vakgenoten en andere wetenschappers had onderhouden. Ten tweede was ze qua omvang en verzamelgebied opzienbarend te noemen. Helaas is de hierboven aangehaalde verwachting niet of nauwelijks uitgekomen. Vandaag de dag staat een deel van de schenkingen van Bierens de Haan als een imposante verzameling zwarte portefeuilles in acht kasten opgesteld in het gesloten magazijn van de universiteitsbibliotheek. Uit de nog net leesbare etiketten valt op te maken dat het hier om drie collecties gaat: de Bibliotheca mathematica (het legaat), Bibliotheca paedagogica en Bibliotheca biographica (de twee schenkingen). Uit de laag stof op de portefeuilles moest worden opgemaakt dat de daarin opgeborgen boeken, overdrukken en archivalia zelden werden ingekeken [2]. Met deze publicatie en tentoonstelling hopen de samenstellers de nodige aandacht op de persoon en collectie van Bierens de Haan te vestigen. Zij spreken nogmaals de hoop en verwachting uit dat de toekomstige onderzo-

kers van de geschiedenis van de exacte wetenschappen ten volste gebruik van deze collectie zullen en kunnen maken.

Jeugd en studie

David Bierens de Haan werd op 3 mei 1822 te Amsterdam geboren. Zijn vader, Abraham Pieterszoon de Haan (1795–1880), was een vermogende koopman, die in 1821 te Amsterdam huwde met Catharina Jacoba Bierens (1797–1835) [3]. Vader De Haan besloot in 1841 om zijn zoon rechten te laten studeren. David werd datzelfde jaar ingeschreven als student aan de faculteit der rechten van de universiteit van Amsterdam. Bij hem openbaarde zich echter al gedurende zijn eerste studiejaar een bijzondere voorliefde voor de wiskunde — hij had zich in 1841 als lid van het Wiskundig Genootschap aangemeld — waardoor hij een jaar later besloot zich in de toekomst uitsluitend op de studie van de exacte wetenschappen te richten. In 1842 verhuisde Bierens de Haan naar Leiden, nadat hij zich op 2 januari 1841 al had laten inschrijven als ‘stud. Philos.’ aan de universiteit van Leiden [4]. Op 18 december 1843 behaalde hij zijn diploma, cum laude, om zich vervolgens aan zijn promotie te kunnen wijden. Hij promoveerde vier jaar later op 15 mei 1847

summa cum laude op het proefschrift *De lemniscata Bernouilliana* [5]. Het leven van Jakob Bernouilli (1654–1705) vertoonde, zo zou later blijken, ten dele grote overeenkomsten met de levensloop van Bierens de Haan. Bernouilli was net als Bierens de Haan door zijn vader voorbestemd een andere studie te volgen dan waar zijn hart lag. Tegen de zin van beide vaders begonnen zij aan een studie wiskunde en sterrenkunde en werden later benoemd tot hoogleraar in deze vakken. Het devies van Jakob luidt dan ook toepasselijk “Invito patre sidera verso” (Tegen de wil van mijn vader bestudeer ik de sterren). Ook Bernouilli richtte zich voor zijn onderzoek op de contacten met collega’s in het buitenland, met name in Frankrijk en Holland.

Na zijn promotie aanvaardde Bierens de Haan op 28 augustus 1848 de betrekking van docent in de wiskunde aan het Stedelijk Gymnasium van Deventer. Op 31 maart 1852 trouwde hij met Johanna Catharina Justina IJssel de Schepper (1827–1906) te Deventer. Uit het huwelijk werden negen kinderen geboren [12]. Bierens de Haan was als leraar slechts vijf jaar aan het gymnasium verbonden en legde zich na 1853 weer geheel op de studie van de exacte wetenschappen toe. Tijdens zijn



Figuur 1 Bewijs van inschrijving van David Bierens de Haan als student in de 'Philosophiae naturalis' aan de Universiteit van Leiden. Het bewijs is ondertekend door J.F. van Oordt, J. van der Hoeven, J.R. Thorbecke, J.H. Schrant en A.H. van der Boon Mesch (Familiearchief Bierens de Haan, Deventer).

aanstelling aan het gymnasium publiceerde Bierens de Haan een aantal publicaties over het lager onderwijs en de lagere wiskunde. Tevens vertaalde en bewerkte hij enkele lesboeken op het gebied van de wiskunde. Vervolgens zette Bierens de Haan zich vanaf 1857 in als schoolopziener in het derde schooldistrict van Overijssel en vanaf zijn benoeming in 1858 als raadslid voor verschillende terreinen van onderwijs te Deventer [13]. De mogelijkheid om zich geheel en onafhankelijk aan de studie te wijden, werd hem geboden door het familiekapitaal dat het vermogende handelsgeslacht van zijn voorvaderen had opgebouwd. Bovendien kwam zijn echtgenote ook uit de vermogende bovenlaag van de samenleving. Zijn hoofdwerk werd gevormd door zijn onderzoek naar 'bepaalde integralen' [6]. Gedurende een periode van vier jaar werkte hij aan dit onderzoek. De tafels werden in 1858 uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam onder de titel *Tables d'intégrales définies*. Een *Supplément* volgde in 1864 waarna drie jaar later een *Nouvelles tables d'intégrales définies* te Leiden zou verschijnen. Kenmerkend aan zijn arbeid is het teruggaan op het bronnenmateriaal en zijn voorliefde voor deze bronnen [7].

In 1860 had de hoogleraar in de wiskunde G.J. Verdam (1802–1866) het voorstel gedaan naast hemzelf een nieuwe hoogleraar te benoemen omdat hij te weinig tijd had voor het onderwijs in beschrijvende en analytische

meetkunde, differentiaal- en integraalrekening en analytische mechanica. In 1863 werd Bierens de Haan benoemd tot buitengewoon hoogleraar in de wiskunde aan de universiteit van Leiden [8]. Uitbreiding van de 'Philosophische Faculteit' met Bierens de Haan was hoogstnodig omdat de druk op het onderwijsprogramma van Verdam door zijn slechte gezondheidstoestand sterk was toegenomen. In die zin werd de komst van de nieuwe hoogleraar toegejuicht [9].

Ook meenden de studenten zich aan de diepe kennis van Bierens de Haan te kunnen laven, "doch verzwijgen mogen wij toch onze meening niet, dat Prof. Bierens de Haan den tact, die tot het onderwijs geven evenzeer als geleerdheid noodig is, niet in allen deele bezit" [10]. Dit oordeel zal ongetwijfeld hard aangekomen zijn bij de zo in pedagogie geïnteresseerde hoogleraar. In 1867 werd hij benoemd tot gewoon hoogleraar aan de universiteit van Leiden en daarmee volgde hij uiteindelijk Verdam op, die een jaar daarvoor was overleden. Bierens de Haan werd, op zijn beurt, als buitengewoon hoogleraar in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde opgevolgd door dr. Pieter van Geer (1841–1919). Was het oordeel van de studenten over Bierens de Haan in vergelijking met dat over Verdam niet gunstig, de vergelijking met Van Geer viel ook ten nadele van Bierens de Haan uit. "Zoowel zijne uitgebreide kennis, als zijne duidelijke voordracht, zoo zeer afstekende bij die van Prof. Bierens de Haan, wekken algemeene bewondering," stelde de *Almanak van het Leidse studentencorps voor 1868* ten voordele van Van Geer vast [11]. In de jaren daarna lijkt er sprake te zijn van een mildere stemming onder de studenten van Bierens de Haan en is er zelfs sprake van met zorg, waarde en nauwgezetheid gegeven colleges. Al snel echter nam de kritische houding van de toehoorders van Bierens de Haan weer toe [14]. Enkele jaren later zijn de studenten weer milder in hun oordeel.

Bierens de Haan verhuisde in deze periode naar Leiden en betrok het huis naast de Sociëteit Amicitia in de Breestraat, waar gedurende enkele jaren van de zestiende eeuw de stadssecretaris Jan van Hout had gewoond [15]. Vanaf 1876 tot aan zijn dood bewoonde Bierens de Haan met zijn gezin het huis aan het Rapenburg op nummer 26. In Leiden bekleedde hij ook talrijke openbare functies. Hij was lid van de schoolcommissie, bestuurslid van het genootschap *Mathesis Scientiarum Genetrix* en secretaris van de Commissie van toezicht op de bewaarscholen. Daarnaast was hij lid van



Figuur 2 Bewijs van inschrijving van David Bierens de Haan als student in de Rechten aan de Universiteit van Amsterdam (Familiearchief Bierens de Haan, Deventer).

vele binnen- en buitenlandse genootschappen en academies van wetenschappen. Bierens de Haan was vanaf 1866 als diaken verbonden aan de Vereenigde Doopsgezinde Gemeente te Leiden en was regent van het hofje Bethlehem, ook wel bekend onder de naam 'Den Houcksteen' [16]. Deze functie wordt tot op heden nog steeds ingenomen door een lid van de familie Bierens de Haan.

Wetenschappelijk werk: wiskunde

Toen Bierens de Haan in 1853 zijn leraarspositie in Deventer opgaf om zich aan wetenschappelijk onderzoek te wijden, was hij al enige jaren bezig aan een groot wiskundig onderzoek. Het werk betrof de zogenaamde 'bepaalde integralen'. Deze vormen een speciaal gebied binnen de differentiaal- en integraalrekening [17].

Zoals hij uitlegde in het voorwoord van het resultaat van zijn inspanningen, de *Tables d'intégrales définies*, uit 1858, had hij zich vier doelen gesteld. Ten eerste wilde hij alle bepaalde integralen die berekend waren in de meer dan honderd jaar dat het onderwerp bestond, en die verspreid waren in een zeer omvangrijke en veelvormige literatuur, verzamelen en systematisch ordenen in tafels. Ten tweede wilde hij bij de resultaten de methodes vermelden waarmee zij bereikt waren. Ten derde hoopte hij dat het werk tegelijk de historische ontwikkeling van het vakgebied zou documenteren. En ten vierde wilde hij alle resultaten die hij opnam kritisch onderzoeken en zo nodig corrigeren.

Het was een ambitieus programma, dat precies het doorzettingsvermogen en de verzamelaarsmentaliteit vereiste die Bierens de Haan bezat. Hij moest het werk geheel alleen doen. In het begin had hij in een aantal tijdschriften een oproep aan wiskundigen geplaatst om hem resultaten toe te zenden, maar daarop had niemand gereageerd. Bij elk der vier doelen die hij zich gesteld had ontmoette Bierens de Haan problemen. Het verzamelen van de resultaten om het historische overzicht te geven werd belemmerd doordat lang niet alle literatuur in Nederland aanwezig was; hij meldt in het bijzonder dat de Angelsaksische literatuur voor hem ontoegankelijk bleef. Voor het volledig controleren van de resultaten was gewoon geen tijd genoeg, en fouten in overschrijven en in de typografie bleken onvermijdelijk.

Maar de ernstigste problemen hingen samen met Bierens de Haans tweede doel, het overzicht van de methoden. Er was geen plaats genoeg om de methoden uit te leggen; de tafels zelf namen al heel veel plaats in. Toch was het essentieel om die methoden wel te vermelden, omdat de waarde van het resultaat afhing van de betrouwbaarheid van de gebruikte methode, en Bierens de Haan was zich ervan bewust dat verscheidene van de bestaande methoden aan twijfel onderhevig waren [18].

In het voorwoord van de tafels legde hij deze moeilijkheid uit, verklaarde zijn eigen standpunt erover en beschreef welke oplossing hij gekozen had in de presentatie van de methoden. Zijn uitleg is waard volledig geciteerd te worden omdat er een duidelijk beeld uit naar voren komt van de status van het wiskundige vakgebied van de Analyse (dat is het wiskundige vakgebied waarvan de differentiaal- en integraalrekening de basis-kennis uitmaakt) in het midden van de negentiende eeuw. In die periode was namelijk een beweging begonnen om de methoden en technieken van het vakgebied zo streng mogelijk te bewijzen, maar die beweging had nog lang niet overal de oude resultaten gezuiverd. Bierens de Haan schrijft in [19]:

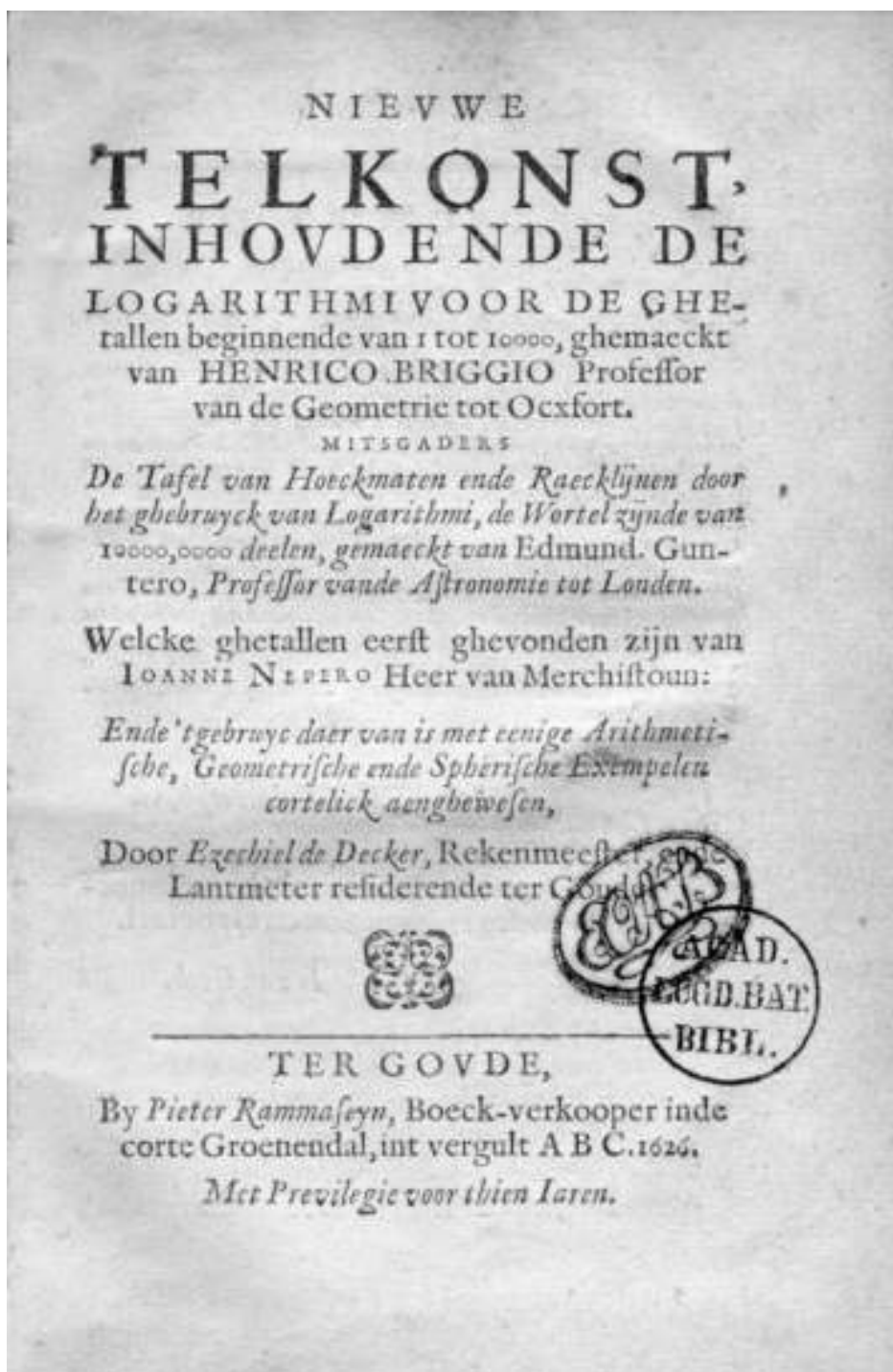
“een andere [moeilijkheid] was van een aanmerkelijk groter belang voor de redactie van deze Tafels. De bezwaren die ik eerder noemde zijn namelijk niet alleen tegen de oude methodes geopperd, hetzelfde is gebeurd bij verscheidene nieuwe of recent toegepaste methodes. In één woord, de ene methode wordt gebruikt, en dus geaccepteerd, door de ene Analyticus en verworpen als fout door de andere; de een geeft resultaten, de ander verschilt van mening en verwerpt ze als fout.

Moest ik me op de plaats van rechter stellen? Ik heb me vaak die vraag gesteld; maar ik durfde het niet te doen, ik geloofde niet dat de grondslagen van dit deel van de Analyse berustten op een voldoende stabiele basis om iemand het absolute recht te geven om zonder genade over de gedachten en onder-

zoekingen van een ander te oordelen. Dat is de reden waarom ik in de Tafels ook resultaten heb opgenomen die verkregen zijn met methodes die ik zelf niet als geldig zou beschouwen. Ik was temeer geneigd dit besluit te nemen omdat de toevoeging van de namen der auteurs die zulke op z'n minst twijfelach-



Figuur 3 Samuel Marolois, *Fortificatie, Dat is Sterckte bouwing: So wel tot offensive als defenſive Oorlogh beſchreven en voorgestelt. Overſien ende verbeteret door Albert Girard*. Amsterdam, Jan Janssen 1627 (collectie universiteitsbibliotheek Leiden).



Figuur 4 Henry Briggs, *Nieuwe Telkonst, inhoudende de logarithmi voor de ghetallen beginnende van 1 tot 10000 [...]* mitsgaders *De Tafel van Hoeckmaten ende Raecklijnen door het ghebruyck van Logarithmi [...]* door Ezechiel de Decker [...]. Gouda, Pieter Rammasfeyn 1626 (collectie universiteitsbibliotheek Leiden).

tige resultaten hebben afgeleid, om zo te zeggen de gewichten levert die de zekerheid en de waarheid ervan weergeven en meten.”

Zo was Bierens de Haan ertoe gekomen de volledige zekerheid en waarheid voor zijn tafels op te geven en de betrouwbaarheid van de afzonderlijke resultaten controleerbaar te maken door bibliografisch de weg te wijzen naar de oorspronkelijke berekeningen. De geciteerde woorden uit het voorwoord werden

geschreven in 1855, toen Bierens de Haan het meeste verzamelwerk gedaan had. De tafels zelf verschenen in 1858. Het is een indrukwekkend werk waarin, systematisch geordend, op 572 pagina's, de waarden vermeld staan van alle bepaalde integralen die Bierens de Haan in de literatuur opgespoord had.

De drie jaren voorafgaand aan de publicatie had Bierens de Haan besteed aan het controleren van de verzamelde uitkomsten.

Die onderneming bracht hem ertoe zich meer op de theorie te richten. Zodoende was hij, toen de tafels verschenen, al bezig aan zijn eigen theorie van bepaalde integralen, die hij publiceerde in zijn *Exposé de la théorie, des propriétés, des formules de transformation et des méthodes d'évaluation des intégrales définies* van 1862.

In dit werk is Bierens de Haan niet langer terughoudend met zijn oordeel over de methoden van andere wiskundigen. Zijn werk aan de tafels, schreef hij, had hem overtuigd van de noodzaak van een goed gefundeerde theorie. Veel bestaande methoden van berekening van de bepaalde integralen maakten gebruik van limietprocessen. Deze limietprocessen waren in de negentiende eeuw nog vaak onvoldoende begrepen en dat leidde tot de onbetrouwbaarheid van de methoden waarmee Bierens de Haan zich geconfronteerd zag. De theoretische studie nam bij hem veel twijfels weg, wat ook blijkt uit de tweede editie van de tafels uit 1867, waarin veel van de verwijzingen naar berekeningen in de vroegere literatuur vervangen waren door verwijzingen naar zijn eigen *Exposé*. Ook liet hij in de tweede editie van de tafels veel resultaten weg die eenvoudig afgeleid konden worden uit centrale resultaten van zijn nieuwe theorie. De gewonnen ruimte vulde hij met nieuwe, door hemzelf afgeleide resultaten.

De tafels en het *Exposé* werden goed ontvangen door de internationale wiskundige gemeenschap. Er kwamen vertalingen en nieuwe edities. Rond 1900 noemde de schrijver van een standaardartikel over bepaalde integralen [20] het *Exposé* als eerste van de vier belangrijkste overzichtswerken en verwees naar de tafels als een “waardevolle collectie”, waarbij hij overigens waarschuwde dat ze, vanwege vele kopieer- of drukfouten, toch niet volledig betrouwbaar waren. Later heeft de Zweedse wiskundige C.F. Lindman veel tijd en energie gestoken in de correctie en aanvulling van Bierens de Haans tafels. Het werk bracht Bierens de Haan algemene erkenning als wiskundige.

In 1856 werd hij gekozen tot lid van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen; de Keizerlijke Akademie in Kazan maakte hem buitenlands lid in 1859, de *Académie Impériale des Sciences, Inscriptions et Belles Lettres de Toulouse* eerde hem met een gouden medaille in 1860, een jaar later werd hij lid van de *British Association for the Advancement of Science*. De erkenning zal ook hebben bijgedragen aan zijn benoeming tot buitengewoon, en later gewoon hoogleraar te Leiden [21].

Bierens de Haan aanvaardde zijn ambt als buitengewoon hoogleraar in 1863 met een rede *Over de magt van het zoogenaamd onbestaanbare in de wiskunde*. Het is een overzicht van ontwikkelingen in de wiskunde waarbij nieuwe soorten getallen of andere wiskundige entiteiten werden ingevoerd. Daarbij was regelmatig de vraag opgekomen of, en in welke zin, die nieuwe entiteiten echt bestonden. Bierens de Haan behandelt negatieve getallen, irrationale getallen, complexe getallen, quaternionen van Hamilton, oneindig kleine grootheden, afgeleiden met gebroken index [22] en dergelijke. De rede is helder en goed aangepast aan een publiek dat grotendeels uit niet-wiskundigen zal hebben bestaan. Maar, karakteristiek voor de auteur, de gedrukte versie van de rede [1863] bevat uitvoerige noten die eigenlijk volledige bibliografieën zijn van de verschillende onderwerpen. Zo vormt de publicatie een waardevolle bron voor de historicus die, bijvoorbeeld, de vroege geschiedenis van de complexe getallen of van de grondslagen der Analyse in de eerste helft van de negentiende eeuw wil bestuderen.

Wetenschappelijk werk: geschiedenis van de wiskunde

De verzamelaarsmentaliteit die we in Bierens de Haans wiskundige activiteiten tegenkwamen is nog duidelijker aanwezig in zijn werken over de geschiedenis en de bibliografie van de wiskunde, waaraan hij na de vroege jaren 1870 het grootste deel van zijn tijd besteedde. Zijn interesse voor deze zaken was al ouder; in feite was zijn benadering van de bepaalde integralen sterk historisch-bibliografisch gericht. Hij was een liefhebber van boeken, getuige in het bijzonder de grote collectie die hij naliet aan de Universiteitsbibliotheek van Leiden en die de aanleiding vormt voor deze regels. Onderdeel van zijn bibliotheek was een grote collectie logaritmetafels.

Bierens de Haans interesse in deze tafels leidde tot twee bibliografieën van zulke tafels in 1862 en 1875. Van eendere aard, maar veel uitgebreider was Bierens de Haans *Bibliographie néerlandaise historique-scientifique des ouvrages importants dont les auteurs sont nés aux 16e, 17e et 18e siècles, sur les sciences mathématiques et physiques avec leurs applications* [23] uit 1883, dat wiskundige en fysische werken beschrijft van auteurs geboren tussen 1500 en 1800. Het is nog steeds een belangrijke en veel gebruikte bron; 'Bierens de Haan' is een veel voorkomende verwijzing in antiquariaatscatalogi

die zonder nadere uitleg begrepen wordt. De *Bibliographie* verscheen eerst in afleveringen in het *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* van de prins Boncompagni (1821–1894); een versie in boekvorm werd in 1883 gepubliceerd.

Bierens de Haan had toen al verscheidene andere artikelen gepubliceerd, onder meer in het *Bullettino*, over Nederlandse wiskundigen uit de zestiende en zeventiende eeuw, almanakken, wiskundige polemieken uitgevochten in pamfletten, en dergelijke. In 1874 begon Bierens de Haan een regelmatige reeks van zulke artikelen in de *Verslagen en mededelingen van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen*, de *Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden*. Uiteindelijk omvatte de reeks 33 artikelen, het laatste verscheen in 1893. Ook publiceerde Bierens de Haan een keuze uit de artikelen in boekvorm [24]. Bierens de Haan was vele jaren eerste secretaris van het Wiskundig Genootschap te Amsterdam onder de zinspreuk 'Een Onvermoeide Arbeid Komt Alles te Boven'. Een jaar na het honderdjarig bestaan van dit genootschap in 1878 werd bij Johan Enschedé en Zonen een herdruk uitgegeven van een zeldzaam Leids pamflet dat zich in het Gemeentearchief van Leiden bevond. Deze *Corte onderrichtinghe*

schappen, de *Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden*. Uiteindelijk omvatte de reeks 33 artikelen, het laatste verscheen in 1893. Ook publiceerde Bierens de Haan een keuze uit de artikelen in boekvorm [24]. Bierens de Haan was vele jaren eerste secretaris van het Wiskundig Genootschap te Amsterdam onder de zinspreuk 'Een Onvermoeide Arbeid Komt Alles te Boven'. Een jaar na het honderdjarig bestaan van dit genootschap in 1878 werd bij Johan Enschedé en Zonen een herdruk uitgegeven van een zeldzaam Leids pamflet dat zich in het Gemeentearchief van Leiden bevond. Deze *Corte onderrichtinghe*



Figuur 5 Joannes Neperus, *Eerste deel vande Nieuwe Telkonst, inhoudende verscheide manieren van rekenen, waer door seer licht kunnen volbracht worden de Geometrische ende Arithmetische questien*. [...] uyt het Latijn overgheset door Adrianum Vlack. Gouda, Pieter Rammasseyn 1626 (collectie universiteitsbibliotheek Leiden).



Figuur 6 Portretfoto van David Bierens de Haan in de *Almanak van het Leidsche Studentencorps* voor 1873.

was in 1599 gedrukt op het Stadhuis van Leiden door Janus Dousa [25]. Bij de herdruk voegde men de tekst van de raadpensionaris Johan de Witt betreffende de *Waerdye van lijfrenten naer proportie van los-renten*, gedrukt te 's Gravenhage in 1671. In 1884 verzorgde Bierens de Haan een uitgave van twee niet eerder gepubliceerde geschriften van Simon Stevin, twee wiskundige verhandelingen van Spinoza en een algebraïsch werk van Albert Girard.

De *Bouwstoffen*, en de andere bibliografische en historische werken van Bierens de Haan, bevatten veel nuttig materiaal voor specialisten in de geschiedenis van de Nederlandse wetenschap, maar door hun specialistische aard zijn ze nog bij weinigen bekend. Veel belangrijker voor de wetenschapsgeschiedenis werd een onderneming waaraan Bierens de Haan vanaf 1880 tot zijn dood de meeste tijd besteedde, namelijk de uitgave van de *Oeuvres complètes* van Christiaan Huygens. Het plan voor de uitgave ontstond in 1880. De Koninklijke Akademie benoemde Bierens de Haan als voorzitter van een commissie die de mogelijkheden van zo'n uitgave moest onderzoeken, en de Hollandse Maatschappij der Wetenschappen was bereid de financiering te verzorgen. Men besloot eerst Huygens' briefwisseling uit te geven. Het voorbereidende werk was enorm; het eerste deel verscheen in 1888, en onder Bierens de Haan's leiding verschenen nog vijf volgende delen. Uiteindelijk kwam de uitgave

22 delen te omvatten; het laatste verscheen in 1950. Huygens' *Oeuvres* worden gezien als een van de beste Opera-edities van natuurwetenschappers, vooral door de uitvoerige annotaties en inleidingen. Veel van de reputatie van het werk is te danken aan Bierens de Haan, die in het begin het editoriale beleid vastlegde.

Voorts is zijn benoeming als lid van het Internationale Congres voor de Bibliographie der Wiskundige Wetenschappen in 1889 van belang. Deze benoeming is van groot belang geweest voor Bierens de Haan en de bestudering van de geschiedenis van de wiskunde in Nederland. Samen met dr. Pieter Hendrik Schoute (1846–1913) vormde hij tevens de *Commission permanente du répertoire bibliographique des sciences mathématiques*.

Door het overlijden van Bierens de Haan bleef een andere belangrijke uitgave onvoltooid liggen. Het lag namelijk in de bedoeling een brede bibliografie van de Nederlandse mathematië uit te geven onder auspiciën van het Frederik Mullerfonds. Maar, zo dachten na de schenking van de bibliotheek van Bierens de Haan, er waren voldoende bouwstoffen aanwezig om deze studie voort te zetten. Tot op heden is er echter geen aanvulling op de bibliografie van Bierens de Haan verschenen.

Het Legaat Bierens de Haan

Bierens de Haan overleed op 12 augustus 1895 te Santpoort aan de gevolgen van een hartkwaal. De oorzaak van deze kwaal lag in een besmetting met tyfus die hij had opgelopen in het jaar 1872. Hij verbleef regelmatig te Santpoort sinds zijn zeventigste verjaardag in 1892 en bracht zijn laatste levensjaren teruggetrokken van de buitenwereld door. Bierens de Haan werd op 16 augustus op de begraafplaats aan de Groenesteeg in Leiden bijgezet in het graf waar ook zijn vier overleden dochtertjes, Elize Charlotte Adolphe Jeanette (†1865); Hester Anthonia (†1865); Susanna Maria Petronella (†1865) en Petronella Hermance Johanna (†1872) lagen begraven. In 1906 werd ook de weduwe van Bierens de Haan, die te Haarlem kwam te overlijden, in het eenvoudige familiegraf op deze begraafplaats bijgezet [26].

Bierens de Haan had een grote bibliotheek bijeengebracht met hoofdzakelijk boeken op het gebied van de exacte en technische wetenschappen, maar hij had bijvoorbeeld ook een groot aantal boeken over de geschiedenis van de muziek. Wat het verzamelen van boeken betreft valt Bierens de Haan eigenlijk in een traditie van het opbouwen van

een geleerdenbibliotheek. Deze traditie was in de negentiende eeuw onder veel hoogleraren aan de universiteiten vrij algemeen [27]. Wat de bibliotheek van Bierens de Haan wél bijzonder maakt, is dat het hier gaat om een op de bètawetenschappen georiënteerde bibliotheek. Ook de omvang van de bibliotheek mag wellicht uitzonderlijk worden genoemd. De bibliothecaris van de Leidse universiteitsbibliotheek Willem Nicolaas du Rieu (1829–1896) memoreerde Bierens de Haan als een geachte stadgenoot en groot boekenvriend [28]. “Groote werken en kleine geschriften of overdrukken over cijfer- en meetkunde, over algebra of werktuigkunde kocht hij aan op boekverkoopingen of bij boekhandelaars, voor eene kleinigheid als zij door den handel versmaad werden, voor groot bedrag, als de antiquaren tegen de geleerden gingen opbieden. [...] En die verzamelingen zijn door den boekenvriend, die duizenden en duizenden daaraan ten koste had gelegd, —want vooral hier werd het spreekwoord bewaard, dat vele kleintjes één groote maken—bestemd voor de zalen van het boekenmagazijn, dat hij in de laatste jaren dagelijks placht te bezoeken.”

Na het overlijden van Bierens de Haan kwam het overgrote deel van de boeken overeenkomstig zijn wilsbeschikking in het bezit van de Universiteitsbibliotheek van Leiden. Eind januari 1896 bracht men het eerste gedeelte van het legaat naar de bibliotheek over. Het tweede gedeelte volgde op 13 maart [29]. Een paar dagen later trof de biblio-



Figuur 7 Francisus van Schooten, *Tractaet der perspective, ofte Schynbaare Teycken-konst. Waer in de fondamenten derselve konst op het kortste verhandelt en betoont worden*. Amsterdam, Gerrit van Goedesbergh 1660 (collectie universiteitsbibliotheek Leiden).



Figuur 8 Euclides, *Elementorum Geometricorum liber primus, cui ex sequentibus libris accesserunt Propositiones selectae atque ita ordinatae, ut demonstrari queant observata Geometrarum Methodo* [ed. Val. Nabod]. Keulen 1556. Deze zestiende-eeuwse uitgave van Euklides is de oudste uit de bibliotheek van Bierens de Haan. Hij bezat nog vier andere zestiende-eeuwse edities van het werk van deze wiskundige (collectie universiteitsbibliotheek Leiden).

theek voorbereidingen om de schenking te kunnen plaatsen. Het ging hierbij in totaal om elfduizend monografieën, waaronder 3500 boeken die betrekking hadden op de exacte wetenschappen in Nederland, 70 edities van Euclides uit de periode 1533–1800, 244 logaritmische tafels uit de achttiende en negentiende eeuw, meer dan 300 biografieën van Nederlandse wis- en natuurkundigen en duizenden overdrukken. Het overige deel van zijn bibliotheek werd geveild bij het Leidse veilinghuis Burgersdijk & Niermans van 15 tot en met 20 februari 1897 [30]. Het niet gelegateerde deel van de bibliotheek werd geschat op 2550 gulden [31]. In de veiling kwamen duizenden boeken en een groot aantal ‘manuscripts autographes’, waaronder brieven van en aan Boncompagni, Buys Ballot en Kneppelhout, onder de hamer. Tevens werden tijdens de veiling 11 boekenkasten en verschillende gelithografeerde portretten van wetenschappers ten verkoop aangeboden.

Du Rieu was met gepaste trots vervuld van de schenking van Bierens de Haan, omdat “er nergens zulk een volledige reeks van Nederlandsche reken- en cijferboeken van de lagere mathesis tot aan de allerhoogste is bijeen geweest; het is de vrucht van een lang en werk-

zaam leven, en een met liefde en beleid geopende beurs. Wordt tot nu toe de bibliotheek der Russische Sterrewacht op de Pulkowa genoemd als de rijkste in de vele beroemde werken van Nederlandsche wiskunstenaars en sterrekundigen, voortaan zal men zich tot de Leidsche bibliotheek moeten wenden, als de mannen van de geschiedenis der wiskunde en hare vele toegepaste richtingen iets willen weten van de cijfermeesters, uit het kleine, maar energieke Nederland afkomstig, alsook als zij wat zoeken omtrent de door vreemde mathematici geschrevene, maar in Holland uitgegevene of in de Hollandsche taal overgezette wis- en natuurkundige werken. [...] Het is een vorstelijk geschenk van groote waarde zoowel voor de wetenschap als voor hetgeen er aan ten koste is gelegd om die verzameling tot zulk een grooten omvang te brengen.”[32]

In de Nederlandsche spectator werd Bierens de Haan geprezen als groot beoefenaar van de wiskunde, maar vooral toch om het geschiedkundige en bibliografische werk dat hij had verzet voor de door hem beoefende wetenschappen [33]. P.A. van der Lith herdacht in het *Jaarboek der Rijks-Universiteit te Leiden 1894–1895* Bierens de Haan als “Langer tijd [...] aan onze Hoogeschool verbonden, daar hij niet minder dan 32 jaren zijne beste krachten te Leiden aan de beoefening der wetenschap mocht wijden. [...] de Haan bleef tot kort voor zijn verscheiden in ons midden en niet licht zal ons uit de gedachte gaan die statige figuur, welke soms kort na hevige aanvallen van de kwaal die hem sloopte, dagelijks zich naar de Bibliotheek begaf om zijn lievelingsarbeid: de uitgave van Huygen’s werken, te voltooien”. [34]

In 1879 had de bibliotheek van Bierens de Haan al de zogeheten *Bibliotheca Paedagogica* mogen ontvangen [35]. Deze verzameling bestaat uit 35 kwarto en 120 octavo portefeuilles met daarin meer dan 8.000 brochures over het gehele Nederlandse onderwijsbestel waarin geschriften over de wetten met betrekking tot onderwijs, de diverse schooltypen en methoden van onderwijs zijn samengebracht. Het *Leidsch Dagblad* maakte melding van de schenking op de voorpagina en schreef: “Om eenig denkbeeld van deze verzameling te geven is het niet ondienstig mede te deelen dat zij in 60 octavo- en 28 kwarto- portefeuilles is vevat, welke te zamen eene lengte van 23 meter beslaan, terwijl een reeks boekwerken van grooteren omvang, welke daarom in die portefeuilles niet werden opgenomen, doch over dezelfde onderwerpen handelen, een breedte van 8 meter innemen [...] daaronder zijn eenige zeldzaam



Figuur 9 Getekend portret door de kunstenaar Hendrik Johannes Haverman (1857–1928) in de *Almanak van het Leidsche Studentencorps* voor 1896.

voorkomende stukken.”[36] Ook werden bij deze schenking enkele tijdschriftreeksen aan de bibliotheek overgedragen. De verzameling werd apart in de bibliotheek bewaard en regelmatig door Bierens de Haan aangevuld. Louis D. Petit (1847–1918), conservator bij de Universiteitsbibliotheek, omschreef de *Bibliotheca Paedagogica* in zijn *Bibliotheek van Nederlandsche pamfletten* als volgt: “de wellicht eenige verzameling brochures en kleine geschriften met betrekking tot onderwijs en opvoeding, sedert een reeks van jaren door Prof. Bierens de Haan verzameld en in 1879 aan de Universiteits-Bibliotheek geschenken. [...] Van deze verzameling is thans bij mij een catalogus in bewerking, die uitsluitend voor bezoekers der Bibliotheek bestemd zal zijn.”[37]

“In 20 portefeuilles zijn de vlugschriften over ons onderwijs vereenigd, terwijl in anderen zijn bijeengebracht de brochures over scholen in het algemeen en bepaalde scholen, over methodes van onderwijs en levens van onderwijzers, over gymnasia en middelbare scholen, over technische en polytechnische scholen, over hogere en lagere burgerscholen, en dat alles afzonderlijk over die inrichtingen van onderwijs hier te lande en daarbuiten; verder zijn tal van geschriften over de wetten betreffende de verschillende takken van onderwijs met hare geschiedenis en discussies met zorg verzameld, alsmede verslagen en rapporten van lager en middelbaar onderwijs in Nederland en het buitenland, evenals een menigte paedagogische geschriften. Het hoger onderwijs wordt door tal van oraties en werken over de wetten dien-aangaande vertegenwoordigd; daaronder zijn eenige zeldzaam voorkomende stukken. Bovendien heeft professor Bierens de Haan zijn

exemplaar der ‘Mémoires de l’Académie des Sciences, Inscriptions et Belles Lettres de Toulouse’, der Deensche ‘Bulletins de l’Académie Royale de Copenhague’ en der Italiaansche ‘Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti’ op de bibliotheek geplaatst, ten einde deze geschriften door belangstellende beoefenaren der verschillende wetenschappen kunnen geraadpleegd worden, en dus in ruimeren kring nut verspreiden.”[38]

Bierens de Haan ontving van de universiteit voor deze schenking een voor dit doel speciaal ingestelde medaille.

Drie jaar later volgde de schenking van de Bibliotheca Biographica. Ook van deze schenking maakte het Leidsch Dagblad melding. “Thans heeft hij [...] zijne Bibliotheca biographica, op dezelfde loffelijke wijze afgegaan, met uitzondering van de levens der wis- en natuurkundigen, welke hij nog op zijn studeervertrek wilde bewaren ten gerieve van zijn biographische studiën over de beoefenaren van zijne lievelingswetenschap [...]”[39] Deze bibliotheek bestond uit biografieën van voornamelijk Nederlandse personen in verschillende portefeuilles en nam zes kasten ruimte in.

“Deze Bibliotheca Biographica bestaat uit 108 levens in quarto formaat gedrukt, en 547 in octava, alle afzonderlijke boekwerken; bovendien uit een lange reeks overdruk-

ken van biographies die op verschillende wijze het licht zagen, in 30 quarto- en octavoportefeuilles bewaard; het geheel neemt twee kasten in, want het beslaat ongeveer 10 ellen. De heer Bierens de Haan heeft wel is waar vooral van Nederlanders de biographies verzameld, maar er zijn tal van buitenlanders ook in opgenomen. Mag de Universiteits-Bibliotheek zich reeds verheugen in het bezit van vele der levensbeschrijvingen door prof. Bierens de Haan aldus verzameld, er worden toch honderden biographische schetsen en bijzonderheden, kleinere stukken, zoogenoemde personalia, catalogi der bibliotheken van geleerde mannen in aangetroffen, die men nergens anders vereenigd vindt, en die men slechts door ijverig opsporen en verzamelen bijeen krijgen kan. Het geschenk van deze Bibliotheca Biographica mag dus als een gewenschte aanwinst voor de Universiteits-Bibliotheek beschouwd worden.”

De verbintenis tussen Bierens de Haan en de universiteitsbibliotheek was zeer hecht. Bierens de Haan begaf zich dagelijks na zijn emeritaat in 1892 naar de bibliotheek, waar hem een kamer hem ter beschikking was gesteld om zich aan zijn onderzoeken te kunnen wijden. Hier werkte hij voornamelijk aan de uitgave van het verzameld werk van Christiaan Huygens. Als voorzitter van de redactie en als ‘medewerker’ van de universiteitsbibli-

otheek had hij direct toegang tot het archief van Huygens en verrichtte hij het grootste deel van het voorwerk van de publicatie van de eerste zes delen van de correspondentie van Huygens. Hij werd daarin bijgestaan door de bibliothecaris W.N. du Rieu. Met name de wijze waarop De brieven waren geordend en ontsloten, dwong respect af onder collega’s en andere academici.

Tot in zijn laatste levensjaar toe heeft Bierens de Haan zich ingezet voor de geschiedschrijving van de wis- en natuurkunde. Door zijn dood zijn vele projecten waar hij nog aan dacht te kunnen werken, tot op heden blijven liggen. Een enorm onderzoeksterrein strekt zich uit voor onderzoekers met een bijzondere interesse voor de geschiedenis in de wis- en natuurkunde en het onderwijs in Nederland. Door de schenking van zijn bibliotheek en de grote collectie portefeuilles op het gebied van de pedagogiek heeft David Bierens de Haan een basis gelegd voor toekomstig onderzoek. De Universiteitsbibliotheek van Leiden zal dit onderzoek waar mogelijk steunen en bevorderen.

Verantwoording

De secties *Wetenschappelijk werk: wiskunde* en *Wetenschappelijk werk: geschiedenis van de wiskunde* zijn voor het grootste gedeelte eerder in dit blad verschenen [40].

Noten en referenties

- 1 J.C. Kluyver, D.J. Korteweg en P.H. Schoute, ‘David Bierens de Haan. 1822–1895’, *Nieuw archief voor wiskunde*, tweede reeks, deel 2 (1896), p. IX. Bierens de Haan was lange tijd als redacteur aan het tijdschrift verbonden.
- 2 De collecties worden weliswaar vermeld op de website van de bibliotheek onder het kopje ‘Bijzondere collecties’ maar zijn nog niet gecatalogiseerd. Zie <http://bc.leidenuniv.nl/bc/wgw>.
- 3 *Nederlands patriciaat*. ’s Gravenhage 1949, jrg. 35 (1949), p. 47–54. De uit het huwelijk van Abraham de Haan en Catharina Jacoba Bierens geboren kinderen mochten volgens het Ko-

ninklijk Besluit van 20 juli 1822 de naam Bierens als geslachtsnaam vóór die van hun vader plaatsen.

- 4 *Album Studiosorum*, p. 1325.
- 5 Het proefschrift werd uitgegeven te Amsterdam bij de wetenschappelijke uitgeverij van C.G. Sulpe.
- 6 De ‘bepaalde integralen’ is een technische term, die men niet moet lezen als ‘zekere integralen die ik niet nader noem’, maar als ‘integralen waarvan de grenzen constant en expliciet gegeven zijn’. Deze integralen waren in de

tijd van Bierens de Haan verre van algemeen bekend.

- 7 Cf. W. Otterspeer, De wiekslag van hun geest. De Leidse universiteit in de negentiende eeuw. ’s Gravenhage 1992, p. 255: ‘Hoewel het opstellen van die tafels wiskundige inventiviteit vereist, was volledigheid toch voor Bierens de Haan het belangrijkste oogmerk.’
- 8 B. Willink, De tweede gouden eeuw. Nederland en de Nobelprijzen voor natuurwetenschap 1870–1940. Amsterdam 1998, p. 46. Na de invoering van een nieuwe wet op het middelbaar onderwijs in 1863 stemde de minister

- van Onderwijs met de benoeming van Bierens de Haan in, omdat de regering 'het ogenblik geacht gekomen te zijn, om voor het behoorlijk en volledig doen geven van onderwijs in de wiskunde zorg te dragen'.
- 9 De benoeming tot buitengewoon hoogleraar was volgens de Studentenalmanak van 1864 onverwacht, maar voorzag wel in een reeds lang gevoelde behoefte.
 - 10 Almanak van het Leidsche studentencorps voor 1865, p. 31.
 - 11 Almanak van het Leidsche studentencorps voor 1868, p. 221.
 - 12 Van de kinderen kwamen drie meisjes in 1865 op jonge leeftijd te overlijden ten gevolge van de door tyfus besmette bron van het woonhuis aan de Breestraat te Leiden. Later overleed nog een dochter aan dezelfde ziekte. Een andere dochter was al in het eerste levensjaar overleden (*Nederlands Patriciaat* 1949, p. 53–54). De jongste zoon, Johan Catharinus Justus (1867–1951), studeerde te Leiden en zou later bekendheid genieten als chirurg en verzamelaar van prenten. Het verzamelen en aflopen van antiquaren was duidelijk iets dat hij van huis uit had meegekregen. De verzameling van ruim 26.000 prenten en een uitgebreide bibliotheek werden door J.C.J. Bierens de Haan geschonken aan het museum Boymans te Rotterdam. Zie J.C. Ebbinge Wubben, 'Dr. J.C.J. Bierens de Haan. Zijn leven en zijn verzameling', *Bulletin Museum Boymans Rotterdam* 3 (1952), nr. 2, p. 23–52.
 - 13 J.C. van Slee, *De Illustre School te Deventer 1630–1878. Hare geschiedenis, hoogleraren en studenten, met bijvoeging van het Album Studiosorum*. 's Gravenhage, Martinus Nijhoff 1916, p. 187. Bierens de Haan werd op 25 september 1863 eervol ontslag verleend als schoolopziener in het derde schooldistrict van Overijssel. Op 17 december 1863 werd hij benoemd tot lid van de plaatselijke schoolcommissie te Leiden. Deze aanstelling werd door hem vervuld tot zijn overlijden. In 1871 volgde nog de benoeming tot lid van de Commissie van toezicht op de bewaarscholen, en in 1875 trad Bierens de Haan toe tot het bestuur van het Genootschap Mathesis Scientiarum Genetrix.
 - 14 Onder druk van de studenten wijzigde Bierens de Haan zijn onderwijsprogramma zelfs enkele malen: het onderdeel waarschijnlijkheidsrekening werd door hem vervangen door het onder de studenten meer populaire onderdeel differentiaalvergelijkingen. In de Almanak van het Leidsche studentencorps voor 1870 werd geschreven: "Vooral deze Hoogleraar schijnt van oordeel te zijn dat voor een student in de wis- en natuurkundige wetenschappen collegehouden het alleen zaligmakend middel is."
 - 15 W. Pleyte, *Leiden vóór 300 jaren en thans*. Leiden, E.J. Brill 1874, p. 14. Volgens Pleyte woonde Bierens de Haan omstreeks 1874 op het stukje Steenschuurtussen de Hoogewoerdsbrug en de Barbarasteeg. In 1876 woonde de familie in het huis Rapenburg 26. Het woonhuis van de familie Bierens de Haan op de Breestraat bevond zich naast het pand dat wij nu nog kennen als 'De Vergulde Turk'.
 - 16 De Doopsgezinde kerk bevindt zich in de Pieterskerkstraat en staat bekend onder de naam Lokhorstkerk. Zie voor de Doopsgezinde Gemeente te Leiden, L.G. Le Poole, *Bijdragen tot de kennis van het kerkelijk leven onder de Doopsgezinden ontleend aan het archief der Doopsgezinde Gemeente te Leiden*. Leiden, E.J. Brill 1905.
 - 17 Het betreft integralen $\int_a^b f(x)dx$ die niet op de gebruikelijke wijze te berekenen zijn als $F(b) - F(a)$ voor zekere primitieve functie F van f . In de periode sinds Euler (1707–1783) waren vele dergelijke integralen berekend langs onverwachte en soms aanvechtbare omwegen.
 - 18 De wiskundige lezer moge bedenken dat de tegenwoordig bekende strenge opbouw van de differentiaal- en integraalrekening, op basis van een precies gedefinieerd limietbegrip, nog pas kort geleden, ca. 1800, begonnen was. Als gevolg daarvan was het nog zeer moeilijk om de betrouwbaarheid te testen van de gecompliceerde limietprocessen die in veel methoden voor de berekening van bepaalde integralen gebruikt waren.
 - 19 *Tables*, p. VI (vert. HB).
 - 20 G. Brunel, artikel 'Bestimmte Integrale' in *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Leipzig, 1898, Vol. II.1.1, p. 135–188.
 - 21 Bierens de Haan was verder lid van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen, van het Bataafsch Genootschap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte en voorzitter van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem. Verder was hij naast eerste secretaris van het Wiskundig Genootschap ook verbonden als redacteur aan het Nieuw archief voor wiskunde, het officiële tijdschrift van het genootschap.
 - 22 Voor de wiskundige lezer: Het differentiëren van een functie f levert de eerste afgeleide f' van f op. Differentieert men f' dan krijgt men de tweede afgeleide f'' . De index van de eerste afgeleide is 1, die van de tweede 2 etc. Bierens de Haan doelt op de eerste aanzetten die in de negentiende eeuw werden ondernomen om ook afgeleiden met index $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, en in het algemeen willekeurige breuken $\frac{p}{q}$ te definiëren. Dit heeft geleid tot de theorie van afgeleiden met gebroken index, een gevestigd onderdeel van de moderne analyse.
 - 23 De bibliografie werd gedurende de jaren 1881–1883 afzonderlijk in drie delen (Tome XIV t/m XVI) gepubliceerd in het *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* van de prins Boncompagni. De losse delen werden gebundeld en als boek uitgegeven in 1883 te Rome bij de in de Via Lata nr. 3 gevestigde Imprimerie des sciences mathématiques et physiques. Baldassare Boncompagni (10 mei 1821–13 april 1894) was afkomstig uit een adellijk geslacht en studeerde wiskunde en fysica bij Santucci. Als oprichter van het *Bullettino* in 1868 onderhield hij contacten met wetenschappers over de gehele wereld. Hij zou het tijdschrift leiden tot 1887. Boncompagni publiceerde, net als Bierens de Haan, vele artikelen en bereidde menige heruitgave van belangrijke wiskundige bronnen voor. Met Baldassare Boncompagni onderhield Bierens de Haan ook vriendschappelijke contacten. Zij deelden de interesse voor de wetenschapsgeschiedenis en de integraaltafels. Zie verder voor Boncompagni: *The Catholic Encyclopedia. An international work of reference on the constitution, doctrine, discipline, and history of the Catholic Church*, Vol. II. New York (1907), p. 654–655.
 - 24 In deze reeks behandelde hij onder andere de wetenschappers Simon Stevin, Nicolaas Samuelsz. Cruquius en Constantijn Huygens. De *Bouwstoffen* zagen van 1878 tot 1887 in twee delen het licht.
 - 25 *Corte onderrichtinghe dienende tot het maecten vande reductiën vande jaer-custinghen tot gereede penningen* [...]. Gedrukt opt Raedhuys der stad Leyden, inden Jare 1599 [482 A 27]. Deze *Corte onderrichtinghe* werd opgesteld door een commissie waarin Jan van Hout, S.F. van Merwen, Ludolf van Ceulen, M. Mintens en Jan Pietersz. Dou zitting hadden. Van Merwen en Van Ceulen waren als hoogleraar in de wiskunde verbonden aan de ingenieursschool van de universiteit Leiden, die was opgezet door Simon Stevin.
 - 26 Zie *Leidsch Dagblad* 14 en 16 augustus 1895.
 - 27 Chantal Keijsper, ' "Geen boek kwam in zijne woning dat niet ijverig werd ingezien en doorsnuffeld". Particuliere bibliotheken in de negentiende eeuw', *De negentiende eeuw*, jrg. 24 (2000), nr 3–4, p. 205.
 - 28 W.N. du Rieu, 'Het legaat van Professor D. Bierens de Haan aan de Bibliotheek der Leidsche Universiteit' in *Leidsch Dagblad* 9 januari 1896.
 - 29 Bibliotheek Archief, H 9 Jaarverslag 1896 door W.N. du Rieu. In de *Inventaris van het archief van de Bibliotheek der Hoogeschool te Leiden* wordt het legaat door Du Rieu omschreven als Bibliotheca mathematica et physica (lijsten zijner boeken met bijgeschreven prijzen van inkoop). Een ander deel van het legaat betrof een door Bierens de Haan opgestelde catalogus van de door hemzelf geschreven werken.
 - 30 *Catalogue d'une précieuse collection de livres et journaux relative aux sciences exactes et naturelles provenant pour la majeure partie de la bibliothèque de feu M. le Dr. D. Bierens de Haan*. Leyde, Burgersdijk & Niermans 1897. De literaire en geschiedkundige werken uit de bibliotheek van Bierens de Haan werden in maart 1898 geveild.
 - 31 Th.H. Lunsingh Scheurleer, C. Willemijn Fock & A.J. van Dissel, *Het Rapenburg. Geschiedenis van een Leidse gracht. Dl. IVb: Leeuwenhorst*. Leiden 1989, p. 560.
 - 32 W.N. du Rieu, 'Het legaat van Professor D. Bierens de Haan aan de Bibliotheek der Leidsche Universiteit' in *Leidsch Dagblad* 9 januari 1896. De sterrenwacht op de heuvel Pulkowa bij St. Petersburg werd geopend in 1839. Het gebouw gold in de negentiende eeuw als een van de lichtende voorbeelden voor het inrichten van een moderne sterrenwacht. Zo ook voor die van de Hoogeschool van Leiden. Zie F. Kaiser, *De inrigting der sterrewachten, beschreven naar de sterrewacht op den heuvel Pulkowa en het ontwerp eener sterrewacht voor de Hoogeschool te Leiden*. Leiden, A.W. Sijthoff 1854 (in *Lectuur voor de huiskamer* 1 (1854)).
 - 33 *De Nederlandsche spectator* 1895, nr. 33, p. 265.
 - 34 P.A. van der Lith, 'Verslag van de lotgevallen der universiteit in het afgelopen jaar, uitgebracht den 17den September 1895', *Jaarboek der Rijks-Universiteit te Leiden 1894–1895*, Leiden, E.J. Brill 1895.
 - 35 Jaarverslag Universiteitsbibliotheek 1879–1880. Incidenteel werden door Bierens de Haan ook boeken en verzamelingen (onder andere op het gebied van het onderwijs) geschonken aan de Maatschappij der Nederlandse Letterkunde. Een van de meest opmerkelijke titels die aan de Maatschappij werden geschonken is van de hand van C.E. van Koetsveld, *Het Idiotisme en de Idiote-School. Eene eerste proeve op een nieuw veld van geneeskundige opvoeding en Christelijke philanthropie*. Schoonhoven, S.E. van Nooten 1856 [1123 E 17].
 - 36 *Leidsch Dagblad* 24 oktober 1879; later is in een bericht in dezelfde krant en bij Petit (*Leidsch Dagblad* 4 juni 1883) sprake van 214 portefeuilles.
 - 37 L.D. Petit, *Bibliotheek van Nederlandsche pamfletten. Verzamelingen van de bibliotheek van Joannes Thysius en de Bibliotheek der Rijks-Universiteit te Leiden*. 's Gravenhage, Martinus Nijhoff 1882. Dl. 1, p. IX. De aangekondigde catalogus is uiteindelijk niet verschenen.
 - 38 *Leidsch Dagblad* 25 oktober 1879.
 - 39 *Leidsch Dagblad* 4 juni 1883.
 - 40 *Nieuw Archief voor Wiskunde* derde serie, 26 (1978)4, pp. 65–73

Michael van Hartskamp

Venuslaan 405, 5632 HM Eindhoven

michael@vanhartskamp.com

T_EX-rubriek

Het internet op

Moderne wetenschap kan niet meer zonder internet. Tijdschriften communiceren met auteurs via webpagina's, onderzoekers plaatsen hun werk op internet en in het onderwijs wordt steeds meer van het web gebruik gemaakt. Het internet is echter niet ontworpen om wiskunde weer te geven en het omzetten van T_EX in html gaat niet zonder problemen. Michael van Hartskamp, topoloog, beschrijft de op dit moment beschikbare technologie.

Het wereldwijde web is, zoals de meesten weten, in de afgelopen jaren exponentieel in omvang gegroeid. Het web staat voor toegankelijke documenten en bevat daarmee een onschatbare waarde aan kennis. Het is dan ook vrijwel noodzakelijk om wiskunde op het web te plaatsen ten einde de wiskunde die plek te geven die ze hoort in te nemen: de spin in het wetenschappelijke web.

De 'echte' webdocumenten zijn evenwel opgemaakt in HTML (de zogenaamde Hypertext Markup Language), een taal oorspronkelijk door fysici op het CERN in Zwitserland ontwikkeld en nu onder beheer en verdere ontwikkeling van de W3C. W3C staat voor World Wide Web Consortium, een groep mensen en bedrijven geïnitieerd door web-uitvinder Tim Berners Lee.

Ondanks de wetenschappelijke/fysische achtergrond zijn het web en HTML van huis uit niet geschikt voor het presenteren van wiskunde. Omdat het web echter dusdanig aantrekkelijk is als publicatiemedium zijn al jaren lang diverse lapmiddelen beschikbaar om toch papers en boeken op het web te zetten. Veel bestaande papers en boeken zijn geschreven in T_EX en nog altijd worden er veel in T_EX geschreven. Het ligt dus voor de hand om eerst naar T_EX te kijken en hoe je van daaruit naar HTML en op het web komt.

De makkelijkste manier is op een webserver een DVI, postscript of PDF-file te plaatsen met een link. De beeldkwaliteit is redelijk tot excellent en het printen levert normaal gesproken precies wat de auteur in gedachten had. Belangrijk nadeel is dat het speciale leessoftware vereist die niet iedereen standaard heeft geïnstalleerd. Om een extra blokkade op de toegankelijkheid te leggen, pakt menig auteur zijn document vervolgens in met een platformspecifieke compressietool. Het werkt allemaal wel, maar met het oorspronkelijke idee 'al bladerend komt men eenvoudig verder' heeft het weinig te maken.

Een andere, soortgelijke manier om wiskunde enigszins op het web te zetten is het gebruik van afbeeldingen. Topology Atlas, bijvoorbeeld, introduceerde eind jaren negentig een zogenaamd AtlasImage formaat. Iedere bladzijde werd omgezet in een redelijk leesbaar GIF-plaatje.

Deze methode wordt tegenwoordig nog slechts zelden gebruikt.

Meer in de geest van HTML zijn de L^AT_EX₂HTML en TtH (T_EX to HTML) vertalers. De twee vertalen L^AT_EX respectievelijk T_EX, al kan TtH ook veel L^AT_EX vertalen. De eerste gebruikt afbeeldingen voor iedere wiskundige formule. Dat ziet er dus meestal niet goed uit. TtH probeert formules te realiseren middels bestaande HTML concepten zoals tabellen. Géén van deze programma's is echter de ultieme oplossing. Het onderliggende probleem is namelijk dat HTML zelf ongeschikt is voor wiskunde, ook al kan men een heel eind komen met de ruime mogelijkheden die het huidige HTML biedt.

Gelukkig is ook binnen de W3C bekend dat wiskunde eigen eisen stelt. Er is een *Math* werkgroep die zich al enige tijd bezighoudt met wiskunde voor gebruik op het web. Deze groep werkt aan MathML (de Math Markup Language). De huidige versie van de MathML specificatie is versie 2.0 uit 2001. Een tweede editie nadert de voltooiing.

MathML maakt voor gebruik van wiskunde een belangrijk onderscheid tussen presentatie en content. Omdat de presentatievariant het meest aansluit bij wat we kennen zullen we deze eerst beschouwen. Eigenlijk is een voorbeeld het meest geschikt om in met MathML kennis te maken.

```
<mrow>
  <mi>x</mi> <mo>=</mo>
  <mfrac>
    <mrow>
      <mrow>
        <mo>-</mo> <mi>b</mi>
      </mrow>
      <mo>&PlusMinus;</mo>
    <msqrt>
      <mrow>
        <msup>
          <mi>b</mi> <mn>2</mn>
        </msup>
        <mo>-</mo>
      </mrow>
      <mn>4</mn> <mo>&InvisibleTimes;</mo>
      <mi>a</mi> <mo>&InvisibleTimes;</mo>
      <mi>c</mi>
    </mrow>
  </mrow>
```

```

</msqrt>
</mrow>
<mrow>
  <mn>2</mn> <mo>&InvisibleTimes;</mo>
  <mi>a</mi>
</mrow>
</mfrac>
</mrow>

```

Waarschijnlijk valt het de lezer onmiddellijk op dat MathML erg breed-sprakig is. Dit voorbeeld komt overigens uit de MathML-specificatie en het is de welbekende abc -formule.

Hier blijkt ook een belangrijk verschil met $\text{\TeX}$. In plain $\text{\TeX}$ is de formule:

```
$$x = \{ -b \pm \sqrt{b^2-4ac} \over 2a }$$
```

en in $\text{\LaTeX}$

```
\[x = \frac{ -b \pm \sqrt{b^2-4ac} }{ 2a } \]
```

$\text{\TeX}$ was (en is) bedoeld om door mensen te worden gebruikt. De formule invoer bij $\text{\TeX}$ is aanmerkelijk korter en ook natuurlijker. Na de eerste syntactische barrières te hebben overwonnen, blijkt in $\text{\TeX}$ een formule vrijwel zo te worden ingevoerd als een wiskundige hem zou voorlezen. Dit is bij het $\text{\TeX}$ -voorbeeld met `\over` nog natuurlijker dan met $\text{\LaTeX}$'s `\frac`. (Dat $\text{\LaTeX}$ toch `\frac` gebruikt heeft te maken met $\text{\TeX}$ -interne problemen; met `\frac` is het meteen duidelijk dat de volgende twee termen kleiner moeten worden gezet, bij `\over` blijkt dit pas na de eerste formule.)

Waar $\text{\TeX}$ impliciet de a , b , c en x in *math italics* zet omdat het variabelen zijn, de $+$, $-$ en $=$ herkent als *math operators* en cijfers 2 en 4 als *math numbers*, moet dit in MathML expliciet worden gecodeerd door respectievelijk `<mi>`, `<mo>` en `<mn>` om de *tag* te openen, en `</mi>`, `</mo>` en `</mn>` om deze weer te sluiten. Van de tien tekens zijn er dus negen markup.

En er zijn nog meer tags nodig. Natuurlijk zijn er bijzondere symbolen. Deze worden in de bekende HTML vorm gepresenteerd met een `&` gevolgd door de naam van het symbool en een `;`. De `⁢` is natuurlijk een heel goede manier om overhead te genereren. De betekenis van `<msqrt>` en `<mfrac>` spreekt voor zich. Interessanter is `<mrow>` het wordt gebruikt om termen samen te stellen uit losse onderdelen.

Het spreekt voor zich dat mensen dergelijke markup niet willen schrijven noch lezen. Bij MathML is men er van uitgegaan dat de gebruiker niet zelf de formule zal intikken maar gebruik zal maken van speciale conversiesoftware. Dit formaat is juist bedoeld om door machines te worden gelezen en geschreven. Bij de ontwikkeling van MathML is dan ook speciaal gelet op de mogelijkheid van vertalers, en de bewering is dat het heel goed mogelijk is om een vertaler te bouwen die van $\text{\TeX}$ naar MathML vertaalt of omgekeerd. Helaas heb ik een echt goede vertaler nog niet gevonden.

Een belangrijke vraag is natuurlijk: zijn er ook browsers die MathML kunnen renderen? Een eerste probleem hierbij zijn de lettertypen die de wiskundige symbolen bevatten. Hier wordt aan gewerkt door onder

andere de AMS. Voorlopig kan men vaak $\text{\TeX}$ -fonts of Mathematica fonts gebruiken.

Een belangrijker probleem is de browser zelf. Microsoft Internet Explorer bijvoorbeeld, één van de meest gebruikte browsers, heeft geen eigen ondersteuning voor MathML [1]. Er zijn echter plugins: MathPlayer van Design Science [2] en TechExplorer van IBM die zowel MathML als $\text{\TeX}$ aankan [3]. De Mozilla Browser [4] daarentegen ondersteunt MathML zonder dat speciale plugins noodzakelijk zijn.

Hiermee is het laatste woord over MathML evenwel nog niet gezegd. Binnen de HTML, SGML, XML-gemeenschap van Markup-talen heeft men zich gerealiseerd dat opmaak en structuur twee verschillende problemen zijn. In de XML-wereld, XML is de extensible Markup Language, ligt de nadruk veel meer op structuur. Nadat de eerste stap naar structuur was gezet, gaat men nu naar betekenis. De droom van onderzoekers in de webtechnologie is het zogenaamde *semantic web*, een web waar de pagina's een wel gedefinieerde betekenis hebben zodat ze daadwerkelijk 'begrepen' kunnen worden door mens én machine.

MathML is feitelijk óók XML. De content variant, de tweede vorm van MathML, gaat over betekenis en structuur. Omdat MathML zo breed-sprakig is, hebben we hier een klein stukje uitgeknipt:

```

<apply>
  <times/>
  <cn>4</cn> <ci>a</ci> <ci>c</ci>
</apply>

```

We beschouwen de term $4ac$. We zien nu de nieuwe *tag* `<apply>`. Binnen deze tag staat nu een toe te passen operator `<times/>` die ook meteen wordt afgesloten (vandaar de `/` op het eind) gevolgd door de drie termen `<cn>4</cn>`, `<ci>a</ci>` en `<ci>c</ci>`. De termen zijn ook nu weer gecategoriseerd in *content number* en *content italics*. De `</apply>` sluit de toepassing van *times* op de tussenliggende termen af. Naast *times* zijn er meer dan honderd van dit soort operatoren gedefinieerd. De bedoeling van de content MathML is dan ook het overdragen van de betekenis van de formule, en niet enkel de vorm en weergave.

Vaak zullen beide vormen van MathML naast elkaar gebruikt worden. Deze tweede vorm van MathML maakt MathML echter goed geschikt als uitwisselingsformaat tussen wiskundige applicaties zoals bijvoorbeeld Maple en Mathematica. Deze applicaties kunnen vaak MathML importeren en exporteren. Het open formaat betekent dat men ook vrij is om van verwerkingsprogrammatuur te veranderen terwijl bestaande 'formules' kunnen worden meegenomen.

MathML [5] is een goed initiatief om wiskunde terug te brengen als spin in het web. Helaas is de meest gebruikte browser niet in staat om rechtstreeks met MathML om te gaan, en vermoedelijk blijft dat zo. De breedsprakigheid van MathML maakt het schrijven en lezen hiervan, behalve op kleine schaal, ongeschikt voor mensen. Hulpmiddelen zijn daarom een vereiste, zodat wiskundigen hun formules kunnen invoeren zoals ze zijn gewend. De grondige scheiding tussen vorm en inhoud maakt nieuwe uitwisselingen van wiskundige data tussen software mogelijk en opent daarmee wellicht wegen naar interessante nieuwe wiskundige toepassingen van de PC.

Referenties

- 1 Zie voor meer informatie bijvoorbeeld <http://msdn.microsoft.com/library/en-us/dnwebteam/html/webteam10012002.asp>
- 2 <http://www.dessci.com>

- 3 <http://www-3.ibm.com/software/network/techexplorer>
- 4 <http://www.mozilla.org>

- 5 Meer informatie over MathML is te vinden op <http://www.w3c.org/Math>

Herold Dehling

Mathematik, NA 3/67
Ruhr-Universität Bochum
Universitätsstrasse 150, 44780 Bochum
Duitsland
herold.dehling@ruhr-uni-bochum.de

Jan van Maanen

Initiële Opleidingen en Bètadidactiek
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 800, 9700 AV Groningen
maanen@math.rug.nl

Een plaquette voor Daniel Bernoulli

Kleine Groninger en grote wetenschapper

Op 8 februari 1700 werd in Groningen Daniel Bernoulli geboren. Ter herinnering hieraan werd 300 jaar later op de plaats waar zijn geboortehuis stond een plaquette aangebracht. De onthulling op 15 december 2000 werd vergezeld van een kleine tentoonstelling in de Openbare Bibliotheek waar onder andere de *Hydrodynamica* van Daniel Bernoulli te zien was. Bij de onthulling belichtten de initiatiefnemers het leven en het werk van Daniel Bernoulli. Dit artikel vormt de neerslag van hun inleidingen.

Daniel Bernoulli dankt zijn faam vooral aan het werk *Hydrodynamica* [1] uit 1738. De discipline hydrodynamica ontleent haar naam aan deze titel. De titelpagina (figuur 2) geeft een beknopt CV van de auteur, dat we hier uit andere bronnen nog iets zullen aanvullen.

De auteur begint met zijn naam "Daniel Bernoulli", en meteen voegt hij toe: "Joh. Fil." (Johannis Filii), de zoon van Johann. Johann

Bernoulli en Dorothea Falkner woonden sinds 1695 in de Oude Boteringestraat in Groningen, in een huis dat later huisnummer 16 kreeg en dat in de negentiende eeuw vervangen werd door een nieuw pand. Dit laatste moest rond 1990 plaats maken voor de nieuwbouw van de Openbare Bibliotheek. De plaquette is aangebracht aan de zuidelijke wand van de ingangspartij van de bibliotheek (figuur 5). Johann Bernoulli meldt in zijn autobiografie: "1700. De 29ste januari [volgens de oude tijdrekening], 's avonds om kwart voor acht heeft God ons met een tweede zoon verblijd, die ik de 31ste van diezelfde maand zelf in de Franse kerk ten doop heb gehouden, waarbij hij de naam Daniel heeft gekregen."

De titelpagina van de *Hydrodynamica* gaat verder: "Professor in de Geneeskunde te Basel". Inderdaad was Daniel vanaf 1732 hoogleraar in de anatomie en plantkunde in Basel, de plaats waar het geslacht Bernoulli zich een eeuw eerder had gevestigd en waar ook Johann Bernoulli in 1667 geboren was. Daniel studeerde in Basel, want in 1705 ging het gezin Bernoulli terug naar Basel. In Groningen waren ze in 1703 verhuisd naar de oostzijde van de Grote Markt. Daar zal Daniel wel met knikkers zijn eerste mechanische experimenten gedaan hebben.

Daniel maakte in zijn leven verschillende grote reizen. De eerste, van Groningen naar Basel, begon wel uitermate spectaculair. Op 18 augustus 1705 vertrekt de karavaan (vader en moeder Bernoulli, vier kinderen, een

dienstmeisje en Johann's neef Nikolaus, die een half jaar in Groningen gelogeed had) per koets naar Harlingen. Zware tegenwind maakt het onmogelijk om op dat moment over de Zuiderzee naar Amsterdam te varen. Daarom gaan ze eerst per koets verder naar Stavoren. Intussen heeft Daniel roodvonk, maar dat belet ze niet om op 21 augustus over te varen naar Enkhuizen, een overtocht die door de storm in plaats van een paar uur de hele dag duurde. De 22ste komen ze te Amsterdam aan. Van de 28 tot 31 augustus verblijven ze in Utrecht, waar de vroedschap Johann in het voorbijgaan tevergeefs een professoraat aanbiedt. Op 3 september bereiken ze Keulen om via Rijn en Main verder te reizen naar Frankfurt. Daar nemen ze op 11 september de koets die ze uit Basel tegemoet gekomen was. Op 13 september komen ze dan eindelijk in Basel aan. Alle kinderen zijn nog in leven hoewel dat voor twee van de vier onderweg bijna misgegaan was. Dit relaas danken we opnieuw aan de autobiografie van Daniels vader.

Post-doc en professor

Daniel studeert medicijnen en wiskunde in Basel, Heidelberg en Straatsburg. Als hij na zijn artsexamen in 1720 tot twee maal toe in Basel wordt afgewezen voor een professoraat besluit hij eerst nog de klassieke grote studiereis te maken, in zijn geval naar Italië. Het plan was dat hij zich in Venetië verder in de medicijnen zou bekwamen, maar Daniel doet liever wiskunde. In Venetië verschijnt ook in



Figuur 1 De plaquette

1724 zijn eerste wiskundige publicatie. In 1725 wint hij zijn eerste grote wetenschappelijke prijs, van de Parijse *Académie des Sciences*. Het levert hem het aanbod op van een baan, zeg maar een post-doc positie, in Sint Petersburg.

Op dit punt gaat het CV op de titelpagina weerverder want Daniel voegt aan de melding van zijn medische professoraat in Basel toe:

Voorheen gewoon hoogleraar in de hogere wiskunde aan de keizerlijke Academie van Wetenschappen te Petersburg, nu lid van deze academie en honorair hoogleraar.

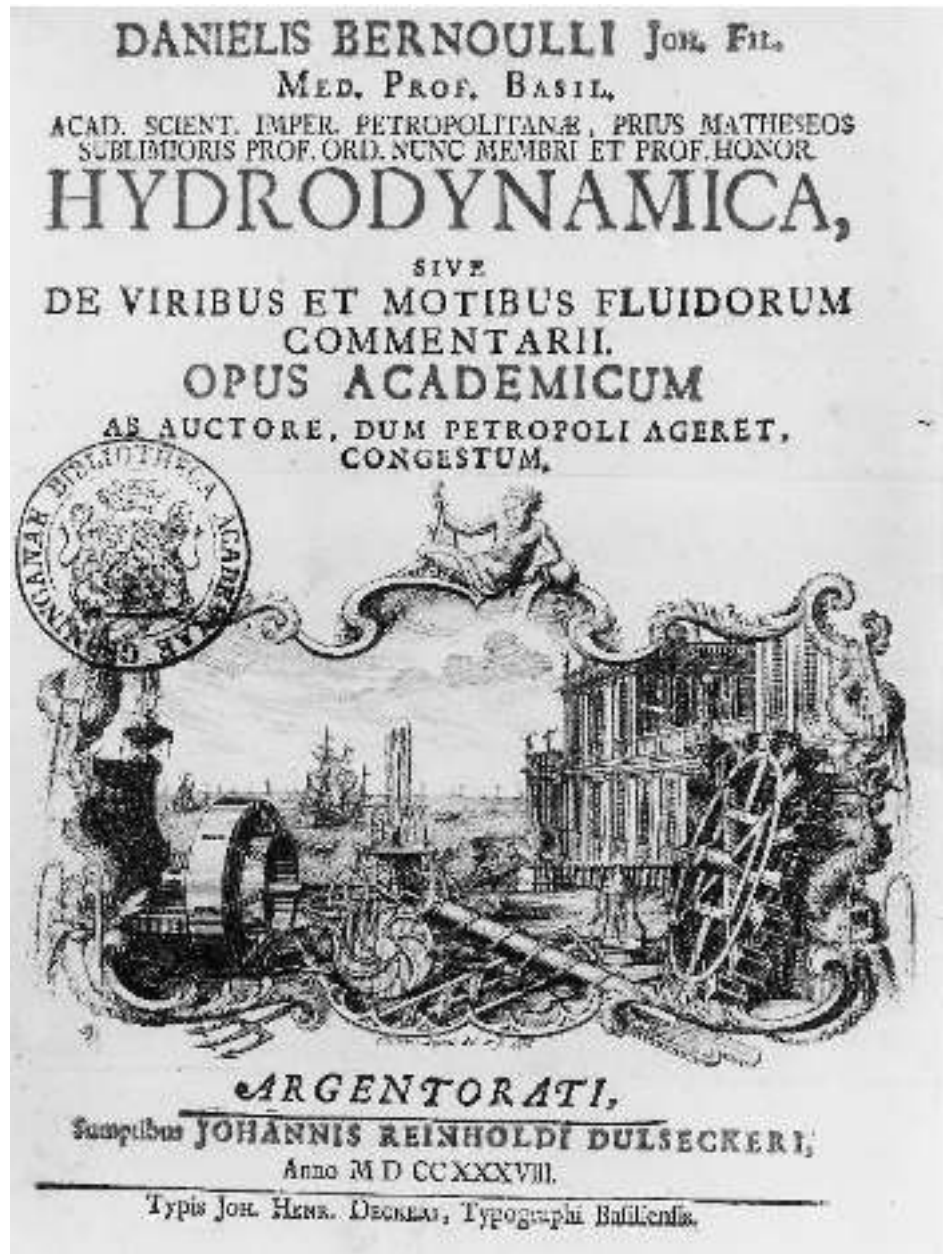
Voor de lezer — ook voor de toenmalige — is de boodschap duidelijk: Daniel is niet zomaar iemand. Hij heeft research-ervaring opgedaan in het buitenland. Als lid van de academie heeft hij een *netwerk*.

Daniel werkt van 1725 tot 1733 in Petersburg. In 1727 haalt hij zijn stad- en studiegenoot Leonhard Euler ook naar Petersburg. Er ontstaat een vruchtbare samenwerking. In Petersburg houdt Daniel zich met talrijke onderwerpen bezig. Een ervan, zijn studie van de ‘Petersburger Paradox’ uit de kansrekening, bespreken we hieronder iets gedetailleerder. Maar vooralsnog laten we ons leiden door de informatie van het CV. Want wat zegt Daniel over de *Hydrodynamica*? Het zijn “notities over de krachten en bewegingen van vloeistoffen”. “Opus Academicum”, voegt hij eraan toe, letterlijk vertaald: een Wetenschappelijke Publicatie. Het is weliswaar een boek, maar de lezer moet het niet opvatten als een vakpublicatie. Dit is wel degelijk wetenschappelijk werk. En verder: dit werk is “samengesteld door de auteur, toen hij nog in Petersburg werkte.”

En daar gebruikt Daniel niet “viveret”: ‘woonde’, of ‘verbleef’. Nee, hij schrijft “ageret”, van het zelfde werkwoord waarvan ons woord ‘actie’ afkomstig is.

Voorwaar, geen low-profile CV. Met deze man dient men rekening te houden.

De titelpagina gaat verder met een artistieke impressie van de hydrodynamische thematiek. De kunstenaar, I.M. Weis uit Straatsburg, heeft duidelijk niet de Rijn afgebeeld, dus zal hij zich wel hebben laten inspireren door krachten en bewegingen van vloeistoffen en door de plaatsnaam Petersburg. Er is zee op de achtergrond, rechts is een soort Hermitage in beeld, en er zijn talrijke vloeistofsymbolen: een turbine, een waterrad, een Archimedis schroef, waterspuwende vissen, een fontein en de drietand van Neptunus. Neptunus zelf troont boven het geheel, en wellicht was er nog een schone waternymf voordat het stempel van de Groningse Universiteitsbibli-



Figuur 2 De titelpagina van de *Hydrodynamica* (1738)

otheek haar aan het oog onttrok. Om de titelpagina nog even af te maken: de uitgever die het financiële risico nam was Dulsecker in Straatsburg, maar het boek werd in 1738 in Basel gedrukt. Basel was een papiermakers- en drukkersstad bij uitstek, en verder was het natuurlijk praktisch omdat Daniel er woonde.

Hier houdt het titelpagina-CV op. We besluiten deze biografische schets met enkele gegevens uit andere bronnen. Daniel is nog één keer in Groningen terug geweest. De terugreis in 1733 van Petersburg naar Basel ging namelijk via Gdansk, Hamburg, Bremen en Groningen. Vandaar ging hij verder via Amsterdam, Antwerpen en Parijs.

In 1750 stapt Daniel in Basel van de geneeskunde over naar de fysica. Zijn experi-

mentele colleges in het Zeughaus in Basel, naast het huidige hoofdgebouw van de Bazelse universiteit, trekken veel hoorders. Hij blijft fysica doceren tot 1776. Dan wordt hij door zijn oomzegger Daniel vervangen, en vervolgens door diens broer Jakob. Daniel blijft tot het laatst helder van geest, en overlijdt op 17 maart 1782.

De wetenschapper

Op dit moment is Daniel Bernoulli het best bekend als de grondvester van de hydrodynamica en degene die als eerste de wet van Bernoulli formuleerde

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.}$$

Deze beschrijft het verband tussen de druk p en de snelheid v in een buis waardoor stationair een vloeistof of gas stroomt met dichtheid ρ . Om verschillende redenen gaan we hier verder niet op in. In de eerste plaats is het resultaat goed bekend en draagt het reeds Bernoulli's naam. En in de tweede plaats wijkt Bernoulli's manier van werken in de hydrodynamica zo sterk af van de huidige aanpak dat ze zonder een uitgebreide inleiding niet te volgen zou zijn.

In plaats daarvan gaan we uitvoeriger in op een stukje kansrekening, en wel op Daniel Bernoulli's benadering van de zogenaamde Petersburg paradox. Deze paradox, die in ieder eerstejaars boek over kansrekening genoemd wordt, dankt zijn naam aan het feit dat Daniels oplossing in de *Annalen van de Petersburg Academie van Wetenschappen* verscheen. Dit gebeurde in 1738 [2], in hetzelfde jaar dus als de *Hydrodynamica*, maar het stuk dateerde al uit 1730/1731; het tijdschrift had een zeer grote achterstand met publiceren. Het manuscript van de *Hydrodynamica* heeft trouwens ook geruime tijd gelegen; Daniel had het in 1734 afgerond.

Bij de Petersburg paradox gaat het om een gokspel, in principe te spelen in een casino. Je gooit een eerlijke munt net zolang tot voor het eerst 'Kruis' verschijnt, en je krijgt een uitkering die verdubbelt bij iedere keer dat 'Munt' verschijnt. Je krijgt zo de volgende tabel van mogelijke uitkomsten, bijbehorende uitkeringen en kansen:

uitkomst	uitkering	kans
K	1	$\frac{1}{2}$
MK	2	$\frac{1}{4}$
MMK	4	$\frac{1}{8}$
MMM K	8	$\frac{1}{16}$
MMMM K	16	$\frac{1}{32}$
MMMMM K	32	$\frac{1}{64}$
MMMMMM K	64	$\frac{1}{128}$
MMMMMMM K	128	$\frac{1}{256}$
⋮	⋮	⋮

De vraag is nu wat een faire inzet voor zo'n spel zou zijn —of anders, welk bedrag zou een speler bereid zijn om voor deelname aan dit spel te betalen? Zou een speler voor 100 euro aan dit spel mee willen doen?

Een halve eeuw voor Bernoulli heeft Christiaan Huygens deze vraag voor algemene



Figuur 3 De jonge Daniel Bernoulli

kansspelen beantwoord. Hij introduceerde daartoe het begrip *waarde van het spel*; tegenwoordig spreken we over *verwachte waarde* of *verwachtingswaarde*. Voor een spel met uitkeringen $a_1, \dots, a_K$ en bijbehorende kansen $p_1, \dots, p_K$ is de verwachte waarde E gedefinieerd als

$$E = p_1 a_1 + \dots + p_K a_K.$$

De verwachte waarde kun je dus opvatten als een gewogen gemiddelde van de mogelijke uitkeringen met de bijbehorende kansen als gewichten. Voor een experiment dat bestaat uit het werpen van een dobbelsteen met als uitkering het aantal geworpen ogen, is de verwachte waarde dus

$$\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \dots + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3.5$$

Als je dit recept voor het St. Petersburg spel volgt, vind je als verwachte waarde

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty.$$

Daar is niets mis mee. Waarom zou een spel niet voor de afwisseling een oneindige verwachte waarde kunnen hebben. Maar: vind maar eens iemand die bereid is om bijvoorbeeld 100 euro inzet te betalen. De kans om de inzet terug te krijgen is tenslotte maar $1/128$, en dat is niet bijster groot.

Over deze paradox werd in het begin van de 18de eeuw uitvoerig gediscussieerd. Een van de voorgestelde oplossingen kwam van Cramer, eveneens een Zwitser. Cramer stelde voor om alle uitkomsten met een uitkering

hoger dan een bepaald groot bedrag maar te schrappen omdat ieder hoger bedrag voor hem toch even veel waard was —of je nu 50 miljoen of 500 miljoen opstrijkt maakt voor de pret niet erg veel uit. Bernoulli bouwde met zijn benadering hierop voort, maar hij ging veel dieper. Hij voerde voor geld een nutsfunctie u in en berekende vervolgens niet de verwachte uitkering maar het verwachte nut. Het nut zou volgens hem geen lineaire functie van het vermogen moeten zijn, want een extra euro is voor iemand met een vermogen van 100 euro veel meer waard dan voor een miljonair. Daniel Bernoulli postuleerde, preciezer gezegd, dat het toegevoegde nut van een kleine vermogensgroei recht evenredig moest zijn met de groei en omgekeerd evenredig met het initiële vermogen. Dat leverde hem de differentiaalvergelijking

$$u(x + \Delta x) - u(x) = C \frac{\Delta x}{x}$$

met de oplossing

$$u(x) = C \log x.$$

Deze functie heet in deze context vandaag ook wel de nutsfunctie van Bernoulli en is dus genoemd naar Daniel.

Bernoulli definieert nu de waarde van een geluksspel als het bedrag dat de speler een nut geeft dat gelijk is aan het verwachte nut verkregen door deelname aan het spel. Is a het initieel vermogen van de speler, zo luidt de formule voor de waarde v van een geluksspel met mogelijke uitkeringen $a_1, a_2, \dots$ en bijbehorende kansen $p_1, p_2, \dots$ dus

$$\sum_k p_k u(a + a_k) = u(a + v).$$

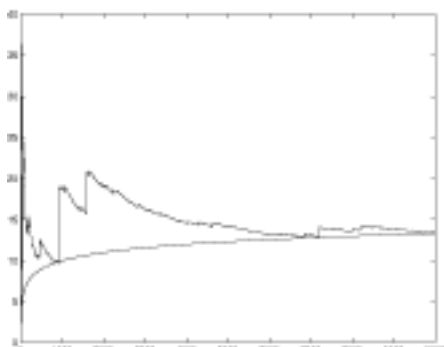
In het geval van Daniel's nutsfunctie $u(x) = \log(x)$ heeft deze vergelijking de expliciete oplossing

$$v = \prod_k (a + a_k)^{p_k} - a.$$

De waarde van een spel is op deze manier afhankelijk van het initieel vermogen van de speler. In het volgend tabel geven we de resultaten voor het St. Petersburg spel:

Vermogen	0	10	100	1000	10000
Waarde	4	5.5	7.9	11	14.2

Daniel Bernoulli gebruikt een aantal verschil-



Figuur 4 Verloop van de gemiddelde uitkering bij 10000 herhalingen van het St. Petersburg spel

lende namen voor de zo verkregen waarde van een spel, onder meer 'valeur' of 'esperance morale' en 'emolumentum' (persoonlijk voordeel).

De Petersburger paradox houdt scherpe denkers tot aan de dag van vandaag bezig. Ongeveer 50 jaar geleden heeft de kansrekenaar William Feller een interessante oplossing voorgesteld. Om deze te begrijpen, gaan we even terug naar het idee om de verwachte waarde als waarde van een spel te nemen. Feller's voorstel maakt gebruik van de wet van grote aantallen, die trouwens voor het eerst geformuleerd en bewezen werd door Daniels oom Jakob Bernoulli. Deze wet leert dat de gemiddelde uitkering na een groot aantal onafhankelijke herhalingen van een spel naar de verwachte waarde convergeert:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow EX.$$

Als je dus voor minder dan EX aan het spel mag deelnemen, maak je op den duur winst, en als de inzet groter is dan EX , maak je verlies. Hoewel je echte uitkering natuurlijk van het toeval afhangt, gaat deze redenering toch vrij snel op omdat de convergentie in de wet

van grote aantallen vrij hard gaat.

Hoe zit het nu met het St. Petersburg spel? Ook hier geldt de wet van grote aantallen, ofwel: de gemiddelde uitkering gaat naar oneindig:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \infty.$$

Maar deze convergentie is slepend langzaam (zie figuur 4).

Je gemiddelde uitkering gaat wel naar oneindig en dus krijg je een willekeurig hoge inzet op den duur terug —maar daar kun je heel lang op wachten.

Feller heeft dit fenomeen nader onderzocht en uitgevonden dat

$$\frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n) \rightsquigarrow {}^2\log n.$$

Daarop baseerde Feller het voorstel om de faire inzet te laten afhangen van het aantal keren dat je aan het spel deelneemt, en deze gelijk te stellen aan ${}^2\log n$:

Herhalingen	10	100	1000	10000
Waarde	3.3	6.6	10	13.3

Bij Feller neemt de waarde van een spel dus toe met het aantal herhalingen. Er is een zeker verband met de waarde volgens Bernoulli omdat een groter initieel vermogen het mogelijk maakt om langer te spelen.

Op dit moment wordt er veel onderzoek gedaan naar het gedrag van stochastische grootheden die zo'n grillig gedrag vertonen als de uitkeringen bij het St. Petersburg spel. Uitkeringen van schadeverzekeringen bijvoorbeeld lijken zich zo te gedragen: veel kleine schadeclaims en dan af en toe plotseling een gigan-



Figuur 5 De plaquette in de ingangspartij van de Openbare Bibliotheek te Groningen

tisch grote claim. Daniel Bernoulli stond met zijn 'nieuwe theorie om het lot te meten' aan de basis van deze ontwikkeling.

Balans

In de naar Daniels vader Johann genoemde Bernoulli-lezing voor het jaar 2000 [3] maakt Grattan-Guinness de balans op van Daniels werk. Hij constateert dat Daniel iets in de schaduw is gebleven van zijn vader Johann en zijn oom Jakob. Daniel werkte niet automatisch in de centrale onderzoeksgebieden van zijn tijd. Hij koos liever wat excentrischer thema's. Zijn studie van de Petersburger paradox getuigt hier ook van. Anderzijds bereikte hij met de thema's die hij bewerkte opmerkelijke resultaten. Vaak was hij zijn tijd ver vooruit. Wie de Groningse Openbare Bibliotheek bezoekt kan daar dankzij de plaquette nu even bij stilstaan. 

Referenties

- 1 Daniel Bernoulli, *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*, Straatsburg: Dulsecker 1738.
- 2 Daniel Bernoulli, 'Specimen theoriae novae de mensura sortis', *Commentarii Acad. Petrop.* 5, p. 1730–31 (1738), p. 175–192; opnieuw afgedrukt in *Die Werke von Daniel Bernoulli* Band 2, Basel etc.: Birkhäuser 1982.
- 3 Grattan-Guinness, I., 'Daniel Bernoulli and the varieties of mechanics in the 18th century',

Nieuw Archief voor Wiskunde 5/1 nr. 3 (2000), p. 242–249.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Alle in de vijfde serie van het NAW verschenen boekbesprekingen zijn te vinden op onze webpagina.

Tevens staat daar een lijst met ter recensie aangeboden congresverslagen en eventueel andere boeken.

Indien u er prijs op stelt een van deze verslagen te bespreken, meld dit dan binnen een maand na verschijnen van dit nummer (bij voorkeur per e-mail) op onderstaand adres.

*Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.10
Dept. of Math. and Computer Science
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
Webpagina: www.math.rug.nl/revwg/
e-mail: wgreview.win@tue.nl*

E. Menzler-Trott

Gentzens Problem. Mathematische Logik im national sozialistischen Deutschland

Basel: Birkhäuser Verlag, 2001

411 p., €43,-

ISBN 3-7643-6574-9

Voor de tweede wereldoorlog was mathematische logica vrijwel identiek met Göttingen. Hilberts programma, en zijn strijd tegen Brouwer, had een omvangrijke praktijk van logisch en fundamenteel onderzoek gegenereerd. Bijna iedereen die meetelde in de logica had wel een poosje in Göttingen gewerkt, of er op zijn minst een werkbezoek aan gebracht. Ackermann, Behmann, Bernays, Zermelo behoorden een tijd tot de vaste staf en bezoekers als Herbrand, Von Neumann, MacLane brachten en haalden inspiratie. De machtsovername door Hitler maakte daar resoluut een einde aan. Hilbert (die toen allang niet meer actief was) bleef vrijwel alleen achter. Het boek van Menzler-Trott beschrijft die korte maar desastreuze periode.

Het mag bekend geacht worden hoe Göttingen gezuiverd werd van joden en het regime onwelgevallige elementen. Hiermee was Göttingen in een klap gereduceerd van een wereldcentrum tot een middelmatige instelling. De logica overleefde in Duitsland voornamelijk door de inspanningen van Scholz, de tot de logica bekeerde theoloog. Maar Scholz bleef wel een verdacht element voor de nieuwe machthebbers. De auteur is uitvoerig nagegaan wat het lot van de logica en het grondslagenonderzoek was tussen 1933 en 1945. Binnen de wiskunde viel de nazi-invloed nog wel mee, Menzler-Trott verklaart dit door de afwezigheid van een erkende nazi-wetenschapsfilosofie waar het de grondslagen van vakken betrof (de bestrijding van de relativiteitstheorie was eerder het gevolg van de bestrijding van de 'internationale joodse samenzwering, de filosofische onderbouwing is niet erg overtuigend). Er was dus, wat de beoefening betreft, nogal wat speelruimte.

Dit was het milieu waar Gerhard Gentzen mee te maken had. Hij was geboren in 1909 in Greifswald als zoon van een vooraanstaand jurist. Hij studeerde grotendeels in Greifswald onder Helmuth Kneser, later zwierf hij, als rechtgeaarde Duitse student langs een aantal universiteiten, Berlijn, München, maar hij promoveerde in Göttingen bij Hermann Weyl, voornamelijk begeleid door Paul Bernays. Hij promoveerde in 1933 op zijn magistrale verhandeling "Untersuchungen über das logische Schlieszen". Geïnspireerd door het werk van Paul Hertz introduceerde hij zijn deductiesystemen, die de logica van een hacker's paradise veranderden in een fraaie systematische wetenschap. Daarna volgden in snel tempo zijn beroemde consistentiebewijzen. Het werk van Gentzen was van een ongewone schoonheid, waarmee hij een stempel op de nieuwere bewijstheorie zette.

Vanaf 1935 was hij assistent bij Hilbert. Deze onbetwistbaar geniale logicus paarde wetenschappelijke begaafdheid aan politieke naïviteit. In 1933 sloot Gentzen zich aan bij de SA, in 1936 werd hij lid van de Nationale Sozialistische Lehrer Bund, en in 1937 lid van de NSDAP. Zijn naïviteit mag wel blijken uit een briefkaart die hij aan zijn verdreven begeleider Bernays stuurde. Die kaart bestond voornamelijk uit technische details, met een terloopse mededeling "Ich bin auch in die SA eingetreten, da es mir von verschiedenen Seiten dringend angeraten wurde". Hoe wereldvreemd kan men zijn?

Nog in 1941, toen er geen misverstand meer mogelijk was over de politieke verhoudingen, beval Gentzen Gödel aan als de beste man voor een mogelijke vacature in de logica in Duitsland! En dat terwijl Gödel na de Anschluss Wenen ontvlucht was. Gentzen ontkwam niet aan de dienstplicht, de vroege jaren van de oorlog bracht hij door als telegrafist bij de luchtafweer. Toen hij geestelijk niet tegen de dienst opgewassen bleek, werd hij ontslagen uit de dienst. Vervolgens werd hij docent aan de Duitse Universiteit in Praag. Uiteindelijk kwam hij om in een Praagse gevangenis — hij had, in de zekerheid dat hij niemand had benadeeld, geweigerd om bij de nadering van de Russen Praag te verlaten. Slechte behandeling, ondervoeding en uiteindelijk tyfus betekenden zijn dood. De geschiedenis van Gentzen is uitvoerig gedocumenteerd door brieven en archiefstukken. De auteur heeft veel materiaal gevonden, zodat een betrouwbaar beeld van Gentzen ontstaan is, zij het dat het logische werk eerder als een historisch gegeven behandeld wordt, dan dat de analyse door de levensgeschiedenis verweven is. Dat aspect is ondergebracht in een aanhangsel van de hand van Jan van Plato.

Een belangrijk deel van het boek is gewijd aan de rol van het nationaal socialisme in de wiskunde. De negatieve rol van Bieberbach, met zijn rassentheorie van de wiskunde, was na zijn mislukte poging tot invoering van het Führerprincipe vrijwel uitgespeeld. Uiteindelijk won zijn mathematische hart het van zijn nazi-instelling. Hij verdedigde onder andere Scholz en Hilbert tegen aanvallen van notoire nazi-filosofen als Steck en Dingler. Deze heren bliezen de partij trompet door het formalisme als decadent af te schilderen, een on-arische manier van wetenschapsbeoefening. De politieke jungle was, getuige de documentatie, uiterst onfris. Het ontbreken van een duidelijke partijlijn was voor theoretische vakken als wiskunde uiteindelijk een meevaller. De enige gemeenschappelijke factor was de wat bleke slogan “efficiëntie”.

De Gentzen biografie is een leerzaam en boeiend geheel geworden. De hoofdpersoon, in al zijn wereldvreemdheid, komt goed uit de verf, en de beschrijving van —en commentaar op— het nationaal-socialistische milieu is uiterst verhelderend. Van harte aanbevolen.

Dirk van Dalen

De historische benadering maakt dat de lezer meer begrip krijgt voor de stand van de wetenschap op het moment dat een revolutionair idee werd geopperd, en daarmee meer waardering voor dat idee. Alle bijdragen zijn helder geschreven en de verscheidenheid aan auteurs is geenszins storend, al leggen sommigen meer de nadruk op de ontstaansgeschiedenis en andere meer op de impact van een doorbraak. De goede verstaander kan bovendien eigen verhaallijnen ontdekken, bijvoorbeeld de manier waarop de wiskunde en het experiment langzamerhand in het natuurkundig denken doordringen. Discussies als die tussen Newton en Descartes over de rol van hypothesen en die tussen Bohr en Heisenberg over de quantumwereld zijn boeiend en zeker niet achterhaald. Het boek geeft ook een inkijkje in de denkwereld van minder bekende pioniers, zoals Faraday en Carnot.

De valkuil voor wetenschapspopulariseerders om formules te vervangen door vage woordelijke omschrijvingen wordt kundig vermeden. Om meer over natuurkundige principes te leren is het boek echter niet bijzonder geschikt, juist vanwege het uitgebreide historische kader, het ontbreken van wiskunde en de uiteenzetting van eerdere onjuiste opvattingen. Op punten schieten de auteurs tekort. Bij de behandeling van de algemene relativiteitstheorie wordt bijvoorbeeld het centrale concept van de gekromde ruimtetijd niet genoemd, en de interpretatieproblemen van de quantummechanica (onder andere Schrödingers kat) krijgen nauwelijks een plaats. Het is bovendien jammer dat het de redactie niet gelukt is om een bijdrage op te nemen over moderne natuurkunde, bijvoorbeeld de snaartheorie of zelfs maar het Standaardmodel van de elementaire deeltjes.

Oudere Studium Generalebezoekers waarderen een historische benadering doorgaans wel, maar in natuurkunde geïnteresseerde scholieren en studenten zullen in het algemeen meer worden aangesproken door een basale conceptuele behandeling die verbanden legt met hedendaagse relevante problemen, zoals in de Epsilon Uitgaven. Daar het zeker een goed idee is om natuurkundige revoluties in een andere dan leerboekvorm te presenteren is dit wellicht een gemiste kans.

W.K. Ma



Doorbraken in de natuurkunde

Uitgeverij Nieuwezijds, 2001

224 p., €17,95

ISBN 90-5712-167-0

Het boek is een verzameling omgewerkte lezingen van Studium Generale van de Universiteit van Amsterdam. Het behandelt de historische achtergrond van revoluties in de natuurkunde aan de hand van sleutelfiguren; aan de orde komen de bewegingsleer van Newton, Huygens' theorie van het licht, het elektromagnetisme van Faraday en Maxwell, de thermodynamica, de relativiteitstheorie en de quantummechanica. De auteurs zijn wetenschapshistorici; beoogde lezers zijn “een algemeen publiek, studenten en scholieren”.



George Greaves

Sieves in number theory

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Volume 43, Berlin: Springer-Verlag, 2001

304 p., €104,95

ISBN 3-540-41647-1

Sieves are combinatorial methods used to attack Goldbach's conjecture, the twin prime problem, the representation of primes as polynomial values, and so on. The author presents a self-contained account of the small sieve. No attention is paid to the large sieve. The book is comparable with the book *Sieve Methods* by Halberstam and Richert.

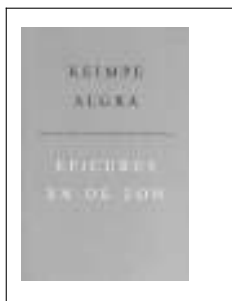
The small sieve is a sophisticated treatment of the principle of inclusion and exclusion. It was started by Brun in 1915 who used it to prove that the series $\sum 1/p$, where p is one of a pair of twin primes, is convergent. Selberg's method, which appeared in 1947, is simpler to understand and to implement than Brun's and in

many circumstances it leads to better results. In the book Selberg's method is treated first in chapter 2, followed by the combinatorial sieve which includes Brun's sieve, in chapter 3. Applications given in the book are the Brun-Titchmarsh theorem, an upper bound for the number of primes among $P(1), \dots, P(n)$ where P is a polynomial, and a proof that there are infinitely many n such that both n and $n + 2$ have at most eight prime factors.

In the later chapters no concrete applications are worked out. The most striking applications are mentioned in the notes which are quite precise as to the history of results. When Iwaniec introduced another combinatorial sieve in his thesis in 1968, Selberg dived for an unpublished manuscript by Rosser dating from the 1950's with the same construction. Chapter 4 is devoted to Rosser's sieve. Recent applications are that there are infinitely many primes of the form $x^2 + y^4$ (Friedlander and Iwaniec, 1998) and of the form $x^2 + 2y^3$ (Heath-Brown, to appear).

When it is too hard to prove a result for primes, it is proved for P_R -numbers. A P_R -number is a number of the form $p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ where $p_1, \dots, p_r$ are primes and $k_1 + \dots + k_r \leq R$. Some remarkable results have been obtained with weighted sieves treated in chapter 5. Chen (1973) showed that every large integer is expressible as a sum of a prime and a P_2 -number. Iwaniec (1978) proved that $n^2 + 1$ is infinitely often a P_2 -number. Chapters 6 (Remainder terms) and 7 (Lower bound sieves) are only technical.

This well-written book will become my primary source for the small sieve, although it will not fully replace the book by Halberstam and Richert. I recommend it to everyone who is interested in the technically complicated theory on sieve methods. *R. Tijdeman*



K. Algra
Epicurus en de zon
KNAW, 2001
39 p., prijs €71,-
ISBN 90-6984-323-4

De zon is zo groot als hij lijkt. Met deze bewering tekende Epicurus in de vierde eeuw voor Christus bezwaar aan tegen de mathematische astronomie uit die tijd. Voor zijn tijdgenoten was dit aanleiding tot de nodige hilariteit. Klaarblijkelijk, zo zeiden zij, is Epicurus' zon zo groot als zijn voet. Deze spot heeft zo zijn sporen nagelaten in de waardering voor Epicurus' bijdrage aan het denken over de verhouding tussen wiskunde en natuurwetenschap.

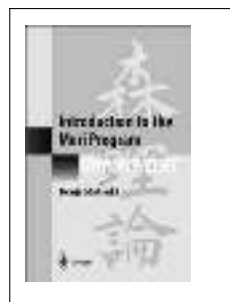
Algra heeft bij zijn aanvaarding van het hoogleraarschap in Utrecht "Epicurus' silliëste doctrine" nader bekeken. Hij poogt Epicurus' bewering wat milder te interpreteren door nog eens de bronnen te raadplegen en door de bewering te plaatsen in het geheel van Epicurus' betoog tegen de mathematische astronomie. Algra schetst de lijnen die hij door het betoog van Epicurus ziet lopen helder en aanstekelijk, waardoor interesse wordt gewekt naar de achterliggende vraag: wat is de betekenis van Epicurus' werk?

De rede van Algra is boeiend voor de filosofisch geïnteresseerde lezer, omdat hij in Epicurus' werkwijze motieven ontdekt die we ook elders in het filosofisch spectrum aantreffen. De gedachten van de lezer gaan onwillekeurig uit naar een vergelijking met een

aantal denkers uit de negentiende eeuw als Algra bij Epicurus de wens tot onttovering van het wereldbeeld aanwijst. Algra beschrijft daarnaast hoe Epicurus' methode eruit bestaat om over de verafgelegen zaken uit het heelal te spreken aan de hand van analogieën uit de nabije omgeving van de denker. Daarbij vormt het geen enkel probleem om met onderling behoorlijk verschillende analogieën over dezelfde zaken te spreken: de analogieën kunnen gerust naast elkaar blijven staan. Dergelijke gedachten vragen om een vergelijking met perspectivische standpunten zoals die van Nietzsche —en gezien de belangstelling waarin Nietzsche zich tegenwoordig verheugen mag, kan deze rede de relevantie doen inzien van hernieuwde studie van Epicurus.

Tenslotte, volgens Algra wil Epicurus' opmerking over de zon zeggen dat men in de Griekse tijd slechts vage kennis had omtrent de omvang van de zon, dit in tegenstelling tot de pretentie die uit het werk van de mathematisch astronomen uit die dagen spreekt. Zo relativeert Algra Epicurus' zon: van zijn hilariteit ontdaan blijkt hij 'slechts' een voorbeeld dat past binnen Epicurus' methode. Opdat de aandacht verlegd kan worden van anekdote naar methode.

G.J. van der Heiden



Kenji Matsuki
Introduction to the Mori program
Springer Verlag, 2002
478 p., prijs €74,95
ISBN 0-387-98465-8

This text of nearly 500 pages represents the author turning into book form the collection of personal notes he made when understanding the various aspects of what he refers to as the Mori program. This program, which evolved over the last quarter of a century, has produced extremely successful techniques for studying both the birational and biregular classification of higher dimensional varieties.

Itaka pioneered in the 1970s the use of pluricanonical forms for the birational study of varieties; he also foresaw that the log-category consisting of pairs of varieties and divisors would play a central role. This latter insight is a recurring theme in the current book, and is also vindicated by recent work of Shokurov giving inductive proofs for the existence of flips. The program started running in earnest in the 1980s. In dimensions larger than two, it was realised that one needed to allow certain singularities, and these were studied in dimension 3 by Reid. Mori studied the cone generated by numerical classes of curves on a variety, and related non-positivity of the canonical class to the existence of both rational curves and contraction morphisms —this paved the way for the Minimal Model program. Cohomological methods were developed by Kawamata, Kollár, Miyaoka and Shokurov for making this program (at least in dimension 3) a reality, and the vital step of proving that flips existed (again in dimension 3) was provided by Mori in 1988. Subsequent advances have included the study of uniruled varieties using Mori theory and the Sarkisov program.

This book covers most of the basic theory for the Mori program as outlined above, assuming a knowledge of algebraic geo-

metry at the level say of Hartshorne's book, and is self-contained short of the hard technical results involved in existence proofs for flips. The book is written in a very didactic style, but because of its length will not be read in a linear fashion. More suitable for that purpose is either the less exhaustive book by Debarre, or alternatively the condensed but elegantly written book by Kollár and Mori. The author does not claim originality for the material presented, but he does rework it in his own distinctive style, with many informal asides on the philosophy behind the theory. Readers without a background knowledge of the Mori program might wish to read the Introduction and chapters 2 and 3 first. Otherwise, they should choose which topic they wish to learn more about and read the appropriate sections. In this way, the book can serve as a user-friendly source for learning some of the detailed theory behind an important and active area of modern mathematics. The book starts and finishes with cogent illustrations of the theory, the first chapter being the surface case and the last chapter that of toric varieties.

W. Pelham

Victor P. Snaith

Algebraic K -groups as Galois modules

Progress in Mathematics, 206

Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.

x+309 pp. €98,-

ISBN 3-7643-6717-2

Dit boek gaat over het onderzoek van invarianten die via algebraïsche K -theorie aan zekere Galoisuitbreidingen van lichamen worden toegevoegd. De invarianten liggen in de klassengroep van de groepenring van de Galoisgroep en men verwacht verbanden met waarden van L -functies. De K -theorie levert eerst exacte rijtjes (2-extensies) waar de Galoisgroep op werkt. Door geschikte representanten van de klasse van zo'n 2-extensie te nemen, krijgen men de gezochte invariant als een Eulerkarakteristiek van het middenstuk van de extensie. Hiervan behandelt de auteur verschillende voorbeelden, met uitgebreide berekeningen. Hij sluit af door speculatieve verbanden te leggen met vermoedens van Coates-Sinnot en van Brumer. Volgens de omslag is dit boek van belang voor een wijde klasse van onderzoekers. Dat lijkt me wat overdreven. Dit is zware kost, maar de specialist moet er zeker naar kijken.

Wilberd van der Kallen

een algoritme wordt uitgedrukt als functie van een variabele die de invoergrootte representeert, dus het aantal punten of lijnstukken. Er wordt dan een bovengrens op de looptijd bewezen in een bepaald berekeningsmodel. Klassieke problemen die bestudeerd worden, zijn de convex hull van een verzameling punten, alle snijpunten van een verzameling lijnstukken, het Voronoi-diagram van een verzameling punten en een triangulatie van een verzameling punten of van een polygoon.

Het boek behandelt de computationele geometrie van een enigszins ander gezichtspunt dan gewoonlijk: niet het Euclidische platte vlak is de ruimte waarin de punten liggen, maar een cilinder, bol, torus of kegel. De consequentie is dat een lokaal kortste verbinding tussen twee punten niet meer uniek is, hetgeen zorgt dat begrippen als convexiteit en diameter een andere definitie behoeven. Ook zijn nieuwe of aangepaste algoritmen nodig. Verder moeten allerlei elementaire meetkundige eigenschappen opnieuw bewezen worden. Het is interessant om te zien dat deze aanpassingen lang niet altijd rechttoe rechtaan zijn. Naast de standaard problemen als convex hulls, Voronoi diagrammen en triangulaties worden ook algoritmen gegeven voor diameter, breedte en zichtbaarheidsproblemen.

In dit boek wordt vooral aandacht besteed aan de meetkundige aspecten die om de hoek komen kijken bij algoritmen op cilinders, bollen, torussen en kegels en minder aan nieuwe algoritmen. Voor de wiskundige die al enige kennis heeft van de computationele geometrie, maar ook geïnteresseerd is in algoritmen op oppervlakken is dit een interessant boek. Het is niet bedoeld en ook niet geschikt als introductie in het vakgebied der computationele geometrie. Daarvoor bestaan andere boeken.

M. van Kreveld



S.K. Donaldson

Floer homology groups in Yang-Mills theory

Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002

244p., £50,-

ISBN 0-521-80803-0

The so-called Floer homology groups are topological invariants of certain three-dimensional manifolds. They were introduced by Andreas Floer in 1985 in an attempt to refine the Casson invariant discovered shortly before. It was then realised that Floer theory is intimately connected to the theory of four-dimensional manifolds with boundary. The conceptual picture for this connection is provided by the topological quantum field theories propounded in the late 1980s by Segal, Atiyah and Witten. It is this aspect of the theory which is developed in Donaldson's book, which originates from a series of seminars held in Oxford in 1988, and which was being written over a period of 12 years.

As far as applications to four-manifold topology are concerned (where the general scheme is to use Floer theory in conjunction with cutting and pasting techniques in order to obtain instanton invariants of four-manifolds), the theory expounded in this book has largely been overtaken by the emergence of Seiberg-Witten theory. None the less, the author makes a strong case for the presentation of the described material, not least for the develop-



Clara I. Grima, Alberto Marquez

Computational geometry on surfaces. Performing computational geometry on the cylinder, the sphere, the torus, and the cone

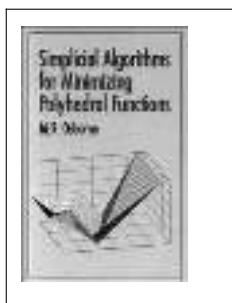
Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001

208 p., €81,- ISBN 1-4020-0202-5

Het vakgebied der computationele geometrie is een gebied dat zich bezig houdt met het ontwikkelen van efficiënte algoritmen voor meetkundige problemen. Meestal gaat het om problemen betreffende eindige verzamelingen punten of lijnstukken in het Euclidische vlak of de drie-dimensionale ruimte. De efficiëntie van

ment of certain differential-geometric and analytical techniques that have proved seminal beyond Floer theory in the narrow sense. This technical background is developed at great length, leading up to a complete definition of the Floer groups of a homology three-sphere. After discussing the connection with four-manifold invariants and describing the product structure on the Floer groups, the book ends with a hint at future directions, in particular extensions of the theory to wider classes of manifolds. By the author's own admission, this monograph gives an entirely 'theoretical' treatment; examples are conspicuous by their absence. In principle, the book gives an essentially complete exposition that should allow a graduate student with a strong background in analysis, differential geometry and algebraic topology to take it as a point of entry into Floer theory. However, it is certainly not for the feeble-minded, and there remains a niche in the market for a more leisurely introduction to Floer theory, as well as a monograph written from the viewpoint of symplectic and contact topology, where Floer theory has come to new prominence.

H. Geiges



M.R. Osborne
Simplicial algorithms for minimizing polyhedral functions

Cambridge: Cambridge University Press, 2001

272 p., prijs £37,50

ISBN 0-521-79133-2

De auteur is een veteraan op het gebied van optimaliseringsalgoritmen voor data-analyse problemen. De titel zette me op het verkeerde spoor. Het heeft niets van doen met de simpliciale algoritmen uit de speltheorie, zoals ik die van Dolf Talman heb geleerd. Het betreft algoritmen die net als de simplexmethode van hoekpunt naar hoekpunt lopen in een polyhedraal begrensde gebied. Aandacht gaat uit naar niet-differentieerbaarheid, subgradiënten en ontaarding. Het boek bouwt voort op het eerder gepubliceerd werk *Finite Algorithms in Optimization and Data Analysis* (1985) van dezelfde auteur. In feite verslaat het resultaten van (promotie-) onderzoek op het gebied van data-analyse. Het polyhedrale karakter komt voort uit het gebruik van 1-norm en 8-norm voor fitten. De lezer moet niet uitgebreide pseudocode en numerieke testen verwachten, maar vooral lemma's en stellingen over eigenschappen van specifieke problemen, ℓ_1 -fitting, rang-regressie en data-mining. De didactische ervaring geeft ruimte voor intuïtie, maar de lezer kan toch het spoor bijster raken in de vele detailleringen en moet niet zoeken naar algemene toepasbaarheid, maar geïnteresseerd zijn in separabele stuksgewijs lineaire functies, rang-regressie en kwantiel-regressie.

Het eerste hoofdstuk over convexe analyse is nog algemeen met nadruk op de epigraph met zijn hoekpunten, scheiding, subgradiënten en Fenchel dualiteit.

Het tweede hoofdstuk behandelt de eigenschappen van wat de auteur een polyhedrale functie noemt; maximum van een eindig aantal affine functies of de indicatorfunctie van een polyhedron. Daarbij wordt gedacht aan de 1-norm als foutencriterium, separabele stuksgewijs lineaire functies en LP. Ook wordt een voorbeeld

van een niet-convexe polyhedrale functie doorgenomen.

Hoofdstuk 3 bespreekt lineaire programmering vanuit het oogpunt van gereduceerde gradiëntmethoden. Een groot deel bespreekt remedies tegen ontaarding, dat wil zeggen het aantal actieve voorwaarden is groter dan gewenst.

Hoofdstuk 4 bespreekt algoritmen voor separabele stuksgewijs lineaire functies gebaseerd op gereduceerde gradiënten. Het toepassingsgebied is regressie gebaseerd op kwantielen. Ook hier wordt het niet-convexe voorbeeld behandeld.

Hoofdstuk 5 behandelt specifieke algoritmen voor rang-regressie problemen. In de doelfunctie worden de waarden van de residuen gerangschikt en krijgen een score toegevoegd naar rangnummer. Afhankelijk van de scores kunnen lelijke niet-convexiteiten ontstaan.

De titel van hoofdstuk 6, optimalisering met polyhedrale voorwaarden, zet de lezer weer op het verkeerde been. De indruk wordt gewekt dat het gaat om convexe doelfuncties op een level-set van een polyhedrale functie. Het hoofdstuk beperkt zich tot het Lasso algoritme, stapsgewijze regressie en een uitwijding over trust-region methoden.

Het boek is niet breed georiënteerd, maar bespreekt de genoemde problemen in de diepte. Het voegt daarmee een groot aantal artikelen samen.

E. Hendrix



P.J. Oonincx
Mathematical signal analysis: wavelets, wigner distribution and a seismic application

(CWI tracts; 130)

CWI, 2001

165 p., prijs €18,15

ISBN 90-6196-499-7

This tract is a revised re-publication of Oonincx' thesis with the same title. The author completely rewrote all his papers and integrated them as coherently as possible. Furthermore, he added an substantial introduction. The result is a book that reads well.

The introduction explains what is meant by the term mathematical signal analysis. Signals, like for example audio signals or seismic signals, are modelled as functions in $L^2(\mathbb{R})$, that is, square integrable functions on the real numbers. The book analyses such a signal by mapping it to another function, usually in $L^2(\mathbb{R}^2)$, and then considering this representation of the signal. The canonical example of this procedure is taking a Fourier transform of a signal to obtain frequency information. Other transforms that are studied are the windowed Fourier transform, the Wigner distribution, the Rihaczek distribution, the fractional Fourier transform and both the continuous and the discrete wavelet transform.

The second and third chapter of the book are a mathematical prelude to the research results described in the other four chapters. They introduce the Fourier transform and explain a major problem of this transform: it can only extract global frequency information but cannot localise frequency in time. Then, the book introduces the windowed Fourier transform, the Wigner distribution and the discrete wavelet transform, all of which overcome this time-localisation problem in one way or another. Chapter 3 introduces multiresolution analysis on $L^2(\mathbb{R})$, a concept that re-

lates the problem of finding wavelet bases in $L^2(\mathbf{R})$ to the important problem of finding semi-orthogonal bases in $l^2(\mathbf{Z})$.

Chapter 4 describes a framework that generalises the concept of multiresolution analysis to arbitrary separable Hilbert spaces and gives an example of using this theory to construct a semi-orthogonal spline wavelet basis on $L^2(\mathbf{R})$.

The Wigner distribution is a nonlinear transformation of a function in $L^2(\mathbf{R}^n)$ that can be used to obtain both time and frequency information of signals. Chapter 5 is devoted to the relation between the Wigner distribution and the fractional Fourier transform. It shows that the fractional Fourier transform, a unitary operator on $L^2(\mathbf{R}^n)$, corresponds to a symplectic transformation in the Wigner plane and that linear transformations in the Wigner plane that correspond to unitary operators on $L^2(\mathbf{R}^n)$ are necessarily symplectic. Furthermore, Ooninx classifies all unitary operators that correspond to symplectic transformations in the Wigner plane.

A famous problem in signal processing is that of maximising energy in both time and frequency. Chapter 6 discusses two problems in this area. The first problem is the maximisation of the energy of a time-limited signal within a compact frequency interval. The author shows how the eigenvalues of an energy localisation operator behave asymptotically, something which was conjectured by Slepian. For the second problem, maximisation of a signal's energy within a disk in the Wigner plane, Ooninx gives a new proof that Hermite functions are optimally localised. The second part of chapter 6 uses a generalisation of the fractional Fourier transform to relate several classes of energy maximisation problems in phase space to the two classical problems discussed in the first part of the chapter.

The last chapter of the book concerns an application in the field of seismology. It describes an algorithm involving the discrete wavelet transform, that can be used to automatically detect the secondary wave of an earthquake. This information can be used to estimate the distance to the epicentre. The algorithm was developed when the author was seconded at the Royal Dutch Meteorological Institute and is, as far as I know, still being used there.

All in all, this is a well-written book. It is not suitable as an introduction to the field of signal analysis, but readers interested in any of the subjects it covers will find it worth their while and worth the price. However, keep in mind that the book is rather theoretical in its approach and presumes a solid mathematical background.

L. Kamstra

lijnintegralen), die van Weierstrass (met nadruk op machtreeksen) en die van Riemann (met de nadruk op meetkunde). De schrijver kiest voor de manier van Cauchy met af en toe een uitstapje naar de manier van Riemann. Dit lijkt mij een goede keuze aangezien deze manier het meest 'calculus-achtig' is en dus het best aansluit bij wat de gemiddelde student al weet als hij aan een cursus complexe analyse begint. De uitstapjes naar de meetkundige manier van Riemann zijn essentieel om vat te krijgen op meerwaardige functies zoals de wortelfunctie en de logaritme. De auteur kiest ervoor om in de definitie van analytische functie op te nemen dat de afgeleide continu moet zijn (net als Cauchy dit deed) en pas op bladzijde 123 volgt de stelling van Goursat die zegt dat deze aanname overbodig is. Dit lijkt didactisch gezien de juiste keuze. Iedere sectie in het boek heeft één centraal idee. De auteur legt eerst dit idee (helder) uit en vervolgens volgt er een overvloed aan (goede) opgaven om dit idee te verwerken. Alweer didactisch juist. Het tweede deel van het boek bevat een selectie uit de 'modernere' complexe analyse. De onderwerpen die behandeld worden zijn: Conforme afbeeldingen met als hoofdstellingen de Riemann afbeeldingsstelling en de uniformisatie stelling. Harmonische functies met als hoofdstellingen de Poisson integraalformule en de stelling van Perron. Priemgetallen met als hoofdstellingen de stelling van Dirichlet en de priemgetalstelling. Normale families met als hoofdstelling de stelling van Montel en als toepassing Julia verzamelingen en de Mandelbrot verzameling. Approximatie met als hoofdstelling de stelling van Runge en als gevolgen de stelling van Mittag-Leffler en de productstelling van Weierstrass.

Ik denk dat dit een uitstekend boek is om complexe analyse uit te leren. De auteur heeft de juiste keuzes gemaakt, zijn uitleg is helder en de opgaven zijn bijzonder goed.

M. Opmeer

T.J. Aven, U. Jensen

Stochastic models in reliability

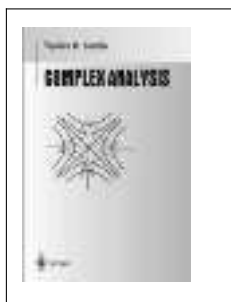
(Applications of mathematics)

Berlin: Springer-Verlag, 1999

270 p., prijs €82,95

ISBN 0-387-98633-2

In 1965 verscheen het standaardwerk Mathematical Theory of Reliability van Richard Barlow en Frank Proschan. Hoewel sindsdien belangrijke en fundamentele bijdragen tot de betrouwbaarheidstheorie gedaan zijn, vooral ook vanuit de hoek van de Russische kansrekenaars, ontbrak tot voor kort een boek waarin een up-to-date behandeling gegeven wordt van de ontwikkelingen in het vakgebied. Het onderliggende boek van Terje Aven en Uwe Jensen voldoet duidelijk in een behoefte aan een dergelijk boek. In het boek van deze auteurs wordt hoofdzakelijk aandacht besteed aan de theoretische grondslagen van het vakgebied en komen toepassingen minder aan bod. Deze doelbewuste keuze van de auteurs valt te billijken. Een zorgvuldige mathematische behandeling wordt gegeven van betrouwbaarheidsmodellen waarbij uit de theorie van stochastische processen niet alleen renewal theorie wordt gebruikt maar ook uitgebreid gebruik wordt gemaakt van martingaaltheorie en de theorie van de puntprocessen. Op deze wijze slagen de auteurs erin een unificerende aanpak te geven voor zowel repareerbare als niet-repareerbare systemen. De analyse van deze systemen is het onderwerp van het eerste deel van het boek inclusief asymptotische analyse om benaderingen te



T.W. Gamelin

Complex analysis

(Undergraduate texts in mathematics)

Berlin: Springer-Verlag, 2001

478 p., prijs €84,95

ISBN 0-387-95093-1

Dit boek is een introductie in de complexe analyse. Het eerste deel van het boek bevat het standaardmateriaal voor een eerste cursus in de complexe analyse. Deze theorie kan op ruwweg drie manieren onderwezen worden: die van Cauchy (met nadruk op

krijgen voor prestatie-maten in sterk betrouwbare systemen. Het tweede deel van het boek besteedt vooral aandacht aan optimalisatie van onderhoudssystemen. De auteurs zijn erin geslaagd het boek toegankelijk te houden, hoewel van de lezer een solide basis in de theorie van de stochastische processen vereist is. Voor specialisten in het vakgebied is het boek een aanrader maar ook toepassers kunnen het nodige van hun gading in het boek vinden.

H.C. Tijms

V.I. Elkin

Reduction of nonlinear control systems. A differential geometric approach

Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999

260 p., prijs €121,-

ISBN 0-7923-5623-3

"This monograph is devoted to methods of reduction of nonlinear control systems to a simpler form, for example, decomposition into systems of lesser dimension. The approach centres on the immersion of control systems into some differential geometric category. Within the framework of this category the reduction of control systems becomes a reduction to isomorphic objects, and subobjects. The theory of reduction of nonlinear control systems discussed here outlines the elements of the general theory of such systems, which is of necessity purely differential geometric by nature. This book will be of interest to graduate students as well as researchers who wish to gain insight into the modern differential geometric theory of nonlinear control systems." (*From the back cover of the book.*)

Overall I have found reading this book quite hardgoing. This is mainly due to the fact that the author insists on putting everything in the framework of quite heavy mathematical machinery, that is, category theory. This has led to an imbalanced book in which almost 100 of the 246 pages are dedicated to an introduction of the mathematical preliminaries. Even though this introduction has been nicely written, I really have my doubts whether this is necessary in a book that seems to claim to be at a somewhat introductory level (see the last line of the previous paragraph). Furthermore, after all this the application to 'real' control problems in chapter 6 is disappointing in the sense that only rather unconvincing problems are being treated (in the sense that techniques to tackle these problems without relying on category theory are available).

One of the things one would expect of a book that is targeting graduate students and researchers is that a good overview of (recent) literature is given. However, of literature that appeared after 1993, only work by the author has been cited. In spite of the fact that in this period quite some relevant literature by other authors has appeared. To give an example, the material in chapter 3 on normal forms of nonlinear control systems is strongly reminiscent of work by Jakubczyk and Respondek that appeared in this period.

Also other material in the book reminds of well-established nonlinear control concepts which can be introduced without taking recourse to the heavy machinery used in this book. For example, the material in chapter 5 on subsystems of nonlinear control systems is strongly related to the well-established concept of (controlled) invariant submanifolds, while the material in Section 6.2

on control under equality-type constraints is strongly related to the so-called zero-dynamics of a nonlinear control system.

Summarising, I would not recommend this book to graduate students and researchers wanting to read an introduction to the differential geometric approach to nonlinear control systems. For this purpose, the by now classical textbooks by Isidori and Nijmeijer & Van der Schaft are much more appropriate. Having studied these text books, however, I do feel that for more mathematically oriented readers the book under review does give a good introduction to a more abstract view of nonlinear control systems.

H. Huijberts



Klaus Jänich

Vector analysis

Heidelberg: Springer-Verlag, 2001

281 p., €39,95

ISBN 0-387-98649-9

This book is the English translation of an originally German text: *Vektoranalysis*, by Klaus Jänich, already published by Springer-Verlag in 1993.

The first half of the book is devoted to the basics of analysis on manifolds. Submanifolds, tangent space, differential forms, orientation, integration: all these concepts are introduced and defined for differentiable manifolds both with and without boundary. In the central chapter (7) the author takes a pause and provides the reader with some heuristics of Stoke's theorem and a digression into homological algebra, both meant as preparation for the coming chapters. Indeed, the second half of the book concerns itself with Cartan's derivative and Stokes' theorem for manifolds with boundary, subsequently providing a review of classical objects of vector analysis in three dimensional Euclidean space in the light of the new theory. The last three chapters cover the following topics: de Rham cohomology and analysis on (semi-)Riemannian manifolds, including tensor formalism (Ricci calculus).

According to the author's self-proclaimed intention of organizing the book "so that you can work through it on a desert island" and not hesitating "to throw line-saving elegance overboard and stick to time-saving elegance", this book is very easily accessible and self contained, clearly recalling at various points the facts from linear algebra which are needed in the progress. This does not mean, though, that we are dealing with a low-aiming text, on the contrary: a big effort is made to let the reader catch a glimpse of the way mathematical results are achieved. What kind of questions does one ask oneself and how does one try to answer them? How does one get the intuition for a proof and how does one make it precise? Moreover, the author constantly tries to make the less vigilant reader aware of possible subtle difficulties or not completely straightforward conclusions.

The book is divided into thirteen chapters and each chapter is followed by a set of multiple choice questions (texts) and some exercises. The texts and the exercises serve different purposes: the text questions are mostly straightforward and can help the reader check whether he worked through the material of the en-

tire chapter carefully enough. The exercises also are applications of the same material, but they combine more widespread knowledge and contexts, often yielding very interesting examples and complementary results. While providing the reader with detailed hints for the exercises, the book also includes tables with the answers to the multiple choice text questions. Unfortunately, to sets of ten questions, tables of thirteen answers are given, the first ten of which not matching the questions, either. This mistake is specific of the present translation, since the German original contains tables of ten answers, duly corresponding to the questions. I consider it a regrettably coarse slip for a hard cover edition, considering that the translation seems to be very accurate in several other respects.

F. Pasquotto



W. Arendt, C.J.K. Batty, M. Hieber,
F. Neubrander

Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems

Monographs in mathematics, vol. 96

Basel: Birkhäuser Verlag, 2001,

xi + 536 p., prijs €99,-

ISBN 3-7643-6549-8

This book offers a comprehensive and unified treatment of the theory of the vector-valued Laplace transform and its applications to the abstract Cauchy problem

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0$$

where A is a closed linear operator on a Banach space X and $f : [0, \infty) \rightarrow X$ is a given function. This area has witnessed significant developments over the past two decades, and the book under review is the first effort to organize all this material in a coherent way.

Part 1 develops the theory of vector-valued Laplace-Stieltjes transforms and its applications to well-posedness of Cauchy problems. Vector-valued versions of classical results such as the Riesz-Stieltjes and Widder representation theorem, the Post-Widder and complex inversion theorem, and Bernstein's theorem are presented. The final chapter of part 1 offers a panorama of applications to various aspects of the abstract Cauchy problem: for example a characterization, through Laplace transform techniques, of generators of C_0 -semigroups and k -times integrated semigroups by well-posedness conditions for the associated Cauchy problem; efficient proofs of the Hille-Yosida theorem and the Trotter-Kato approximation theorem; characterizations of holomorphic semigroups. Also, a wide range of recent developments is covered, like the Desch-Schappacher perturbation theorem, a section on boundary values of holomorphic semigroups with a proof of Hörmander's theorem on $i\Delta$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$, and sections on resolvent positive operators, second order problems, and sine and cosine families.

In part 2, the relation between Tauberian theorems for the Laplace transform and the asymptotic behaviour of the solutions of the abstract Cauchy problem is investigated. Abelian and Tauberian theorems for the vector-valued Laplace transform are developed and many recent results on total ergodicity and al-

most periodicity are presented in a systematical way. Historically, many of these results emerged as the end product of a series of developments that were initiated by the celebrated 1988 countable spectrum theorem by Arendt, Batty, Lyubich and Vu. Along the way, many old and recent results on asymptotic behaviour are proved like the more recent linear growth theorem for semigroups with bounded local resolvent in a right halfplane.

The third part works out in detail a number of applications. In the first chapter, an account is presented of Arendt's approach to the heat equation on $C_0(\Omega)$ via resolvent positive operators. The second chapter describes the cosine family approach to the wave equation in $L^2(\Omega)$. The book closes with a chapter on Fourier multipliers, where the question which differential operators with constant coefficients generate (integrated) semigroups in $L^p(\mathbb{R}^n)$ is studied.

The authors have succeeded admirably in bringing together a wealth of recent material, much of which appears in book form for the first time. This authoritative work is likely to become a standard reference on both the Laplace transform and its applications to the abstract Cauchy problem. As such it is a worthy successor of the classical texts by Widder, Doetsch, and Hille-Phillips.

The book is an excellent textbook as well. Proofs are always transparent and complete, and many topics that could have been considered as background material are covered as well. All this makes the text very accessible and self-contained. Applications to concrete differential operators are given throughout the text. Each chapter ends with historical and bibliographical comments. There are remarkably few misprints for a text of this size, and I found just one "editing related" error: the proof of Proposition 3.3.14 does not match with its statement.

In summary, this book will be of interest to a wide audience of (functional) analysts and it should have a place in every mathematics library. Warmly recommended!

J. van Neerven

P. Brémaud

Markov chains. Gibbs fields, Monte Carlo simulation and queues

(Texts in applied mathematics; 31)

New York: Springer-Verlag, 2001

444 p., prijs €59,95

ISBN 0-387-98509-3

Markov chains play a central role in probability theory and its applications. Brémaud's book is an attractive, modern introduction to the subject. Treated are discrete and continuous time Markov chains with chapters named recurrence and ergodicity, long run behavior, Lyapunov functions and martingales, eigenvalues and non-homogeneous Markov chains, Gibbs fields and Monte Carlo simulation, and Poisson calculus and queues. There is some emphasis on the rate of convergence of a chain to its stationary distribution.

Those whose primary interest lies in that aspect might also consider the book "Introduction to Markov chains: With special emphasis on rapid mixing" by E. Behrends (Vieweg Advanced Lectures in Mathematics, 2000). I can especially recommend Brémaud's book for its clarity of exposition, its interesting examples, and the problem sections. Concerning its level: the author states that the book is self-contained, and in fact there is hard-

ly any measure theory. However, readers should be acquainted with Fubini's theorem, and should be able to cope with a sentence like "Note that a continuous cumulative distribution function need not be absolutely continuous".

In the time I took to write this review, the corrected second printing appeared. The adjective "corrected" is hardly deserved. To mention an example: the formula for an upper bound on the probability of a return to the origin of a 3D-symmetric simple random walk still contains errors, and the example ends with the claim that $n^{-3/2}$ is the general term of a divergent series.

F.M. Dekking

K. Chen, P. Giblin, A. Irving

Mathematical explorations with MATLAB

Cambridge: Cambridge University Press, 1999

320 p., prijs £18,95

ISBN 0-521-63920-4

De naam MATLAB staat voor MATrix LABoratory, en dit is een al vele jaren bestaand computerprogramma waarmee op efficiënte wijze manipulaties met matrices kunnen worden uitgevoerd. Met name is een aantal matrix-decomposities standaard beschikbaar. Het is ook mogelijk MATLAB programma's te maken. Procedures die op deze manier gemaakt zijn kunnen dan als zogenaamde M-files aan het pakket worden toegevoegd, en zijn daarna op afroep beschikbaar. In deze vorm kan het programma een nuttig stuk gereedschap zijn bij met name cursussen lineaire algebra. Echter, zoals met zoveel andere pakketten ook gebeurd is, is MATLAB in de loop van de jaren enorm gegroeid door allerlei toevoegingen op te nemen.

In het voorwoord van het boek staat: "The course and this book were designed for students coming to grips with a typical first year honours mathematics course at a UK university." Wat je echter uit dit boek voor wiskunde zult leren is voor mij onduidelijk. Het boek bestaat uit drie delen.

Deel 1 heet *Foundations* en geeft een inleiding in het gebruik van MATLAB. De tekst is opgebouwd met opdrachten als: 'typ eens in en kijk wat er gebeurt'. Enige uitleg van de achterliggende lineaire algebra ontbreekt volkomen. En als je dan de eerste 100 bladzijden zittend voor een computer hebt doorgewerkt heb je van een groot aantal MATLAB commando's gezien wat het effect op het scherm is, maar of je wiskundig veel wijzer bent geworden?

Deel 2 heet *Investigations*. In dit deel worden de MATLAB mogelijkheden uit deel 1 toegepast op een collectie zeer uiteenlopende onderwerpen. Bij sommige is men dicht gebleven bij wat mijns inziens oorspronkelijk de bedoeling van MATLAB was. Zo is er uiteraard een paragraaf over stelsels lineaire vergelijkingen. Maar bij andere onderwerpen, bijvoorbeeld grootste gemene delers van gehele getallen, en permutaties vind ik dat MATLAB er met de haren is bijgesleept om te laten zien wat het programma allemaal kan. Voor deze laatste twee onderwerpen zijn er (computer-algebra) pakketten die daar veel meer op zijn toegesneden.

In het tweede deel is er wel wat uitleg over wiskundige achtergronden, maar deze uitleg blijft erg aan de oppervlakte. Al snel worden formules en stellingen zonder meer geponeerd, en wordt er gedictieerd hoe die verder gebruikt moeten worden. Deel 3, *Modelling*, is vrij kort, dit beslaat maar zo'n 40 bladzijden. Hier wor-

den suggesties voor modelleeropdrachten gedaan waar dan uiteraard bij de uitwerking MATLAB een rol kan spelen. Dit deel is wat opener dan de beide voorafgaande, en eigenlijk is dit het aardigste deel van het boek. Door het hele boek heen staan er verwijzingen naar beschikbare M-files; deze zijn via internet te verkrijgen, waarbij wel vermeld dient te worden dat het internetadres achterin het boek inmiddels niet meer werkt.

Er staan in het boek wel wat aardige ideeën over onderwerpen waar een computer zinvol gebruikt zou kunnen worden, en voor een aantal daarvan is bijvoorbeeld MATLAB goed bruikbaar. Hoe het boek echter in een cursus waarin het de bedoeling is dat studenten ook wiskunde leren, gebruikt zou kunnen worden is mij een raadsel.

A.G. van Asch



W.-P. de Roever, F. de Boer, U. Hanne-man, J. Hooman, Y. Lakhnech, M. Poel, J. Zwiers

Concurrency verification. Introduction to compositional and noncompositional methods

Cambridge: Cambridge University Press, 2001

778 p., prijs £80,-

ISBN 0-521-80608-9

Concurrency is de tak van software-ontwikkeling, waarin de taak van het systeem uitgevoerd wordt door met elkaar communicerende gelijktijdig actieve processen. De opdeling in processen heeft doorgaans goede redenen, maar het geeft ook problemen, doordat de snelheden waarmee de processen hun programma's doorlopen onvoorspelbaar zijn.

De ontwerper moet ervoor zorgen dat een samenloop van omstandigheden niet tot fatale interferentie kan leiden waarin het systeem iets verkeerd doet. Men kan denken aan regelsystemen in vliegtuigen, maar ook aan de software van banken of aan medische applicaties. Fatale interferenties moeten zelfs uitgesloten worden als ze uiterst zelden zouden voorkomen. Dit heet verificatie: het bewijs dat de software aan zijn specificatie voldoet.

Het uitgangspunt van dit boek is de methode van de inductieve beweringen. Een bewering over het systeem heet inductief als hij in het begin geldt en als elke stap van het systeem de bewering geldig laat. De bewering blijft dan natuurlijk gedurende de hele berekening geldig. Omdat de bewering reeds in het begin geldt, is er meer nodig om te bewijzen dat de berekening iets nuttigs oplevert: zorg dat het alleen eindigt als er iets nuttigs bereikt is en bewijs dat het eindigt.

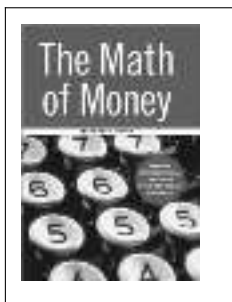
Het probleem bij software-ontwikkeling is dat men steeds ingewikkelder systemen maakt en steeds meer interactie wenst tussen systemen. Er valt natuurlijk alleen iets over een samengesteld systeem te zeggen als de deelsystemen goed gespecificeerd zijn en aan hun specificaties voldoen. Een bewijsmethode heet compositioneel als men de correctheid van een systeem bewijst op grond van de specificaties van de deelsystemen en hun correctheid, zonder informatie over de werking van de delen. De Roever en zijn medewerkers geven de voorkeur aan compositionele methoden, maar beseffen dat deze wel hun beperkingen hebben. Als de deelsystemen namelijk nauw met elkaar verweven zijn, is het soms ondoenlijk ze voldoende nauwkeurig te specificeren.

Het boek behandelt een aantal bewijsmethoden voor verschil-

lende types concurrency. Het concentreert zich daarbij op de vraag of de bewijsmethode gezond en volledig is. Gezondheid betekent dat de methode nooit onware stellingen oplevert. Deze eis spreekt voor wiskundigen vanzelf. Volledigheid betekent dat alle ware beweringen ook bewezen kunnen worden. Omdat Gödel bewezen heeft dat elke formalisatie van de rekenkunde onbewijsbare ware beweringen kent, houdt men hier een slag om de arm en bewijst slechts 'relatieve volledigheid'.

Hoewel ik mijzelf als een deskundige op dit gebied beschouw, bevat het boek veel nieuws voor mij. Het bevat anderzijds beslist niet alles wat er over concurrency-verificatie geschreven kan worden. Het doet zeer verzorgd aan en bevat een uitgebreide index en literatuurlijst. Van harte aanbevolen voor wie het gaat om de theorie en methodologie van de concurrency-verificatie. Voor een leerboek vind ik het wat zwaar.

W.H. Hesselink



M.D. Davis

The math of money. Making mathematical sense of your personal finance

Berlin: Springer-Verlag, 2001

199 p., prijs €27,95

ISBN 0-387-95078-8

Dit boek is geschreven door een emeritus hoogleraar wiskunde van de City College of New York (CUNY). Het is echter niet geschreven voor wiskundigen, het is zelfs niet geschreven voor lezers met een speciale belangstelling voor wiskunde. Het is gericht aan een algemeen lezerspubliek, en het is nu eenmaal zo dat, vooral in de USA, een algemeen lezerspubliek weinig op heeft met wiskunde.

De overduidelijke bedoeling van de schrijver is om zijn lezerspubliek te overtuigen van het gevaar dat er schuilt in het gebruik van onze natuurlijke intuïtie bij het regelen van financiële zaken, of tenminste bij het doorgronden ervan. Dit blijkt uit de opzet van het boek, want elk van de negen hoofdstukken begint met een paragraaf getiteld: "Test Your Intuition". Daarin wordt aan de hand van een of meer voorbeelden getracht te laten zien hoe makkelijk het is om op het verkeerde been te worden gezet. Aan het einde van het boek worden in een appendix de beredeneerde oplossingen gegeven van de in deze paragraaf gestelde problemen.

De elementaire wiskunde die wordt gebruikt om uit te leggen wat de betekenis en het gebruik is van investeringen, samengestelde interest, aandelen, hypotheek, opties (hoofdstukken 1, 2, 3, 4 en 9, in deze volgorde) overstijgt het niveau van de derde klas van de middelbare school zelden. Maar, als men zich daar eenmaal overheen heeft kunnen zetten, dan is er veel aardigs te lezen in dit boek.

Allereerst is de stijl bondig en zijn de beschrijvingen vaak verfrissend. De schrijver heeft een merkbare interesse voor en kennis van financiële zaken, en in elk hoofdstuk weet hij wel iets interessants te vertellen. De voorbeelden zijn ook meestal goed gekozen. Een leuk hoofdstuk vond ik hoofdstuk 6, waarin de schrijver aandacht schenkt aan de psychologie van het investeren. Hoofdstuk 5 geeft advies over pensioenen en is voor lezers in overheids-

dienst minder relevant. In de overgebleven twee hoofdstukken wordt iets verteld over speltheorie en statistiek.

Wie zal dit boek moeten aanschaffen en lezen? Ik ben bang dat degenen met een afkeer van (of angst voor) wiskunde dat niet zullen doen. Verder zijn wiskundigen in het algemeen niet zo geïnteresseerd in geldzaken, tenzij er geavanceerde begrippen zoals bijvoorbeeld dat van de stochastische differentiaalvergelijking mee kunnen worden geassocieerd. Wie dan wel? Van wiskunde kan men weinig leren uit dit boek. Voor wiskunde- of economieleeraren, die aardige voorbeelden zoeken voor hun lessen, zou dit wel een interessant boek kunnen zijn. En verder iedereen die belangstelling heeft voor financiële zaken, maar over weinig meer dan elementaire kennis beschikt op dit terrein.

R.J. Stroeker

T. Miwa, M. Jimbo, E. Date

Solitons. Differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras

(Cambridge Tracts in Mathematics; 135)

Cambridge: Cambridge University Press, 1999

118 p., prijs £29,95

ISBN 0-521-56161-2

Dit boek geeft een inleiding in de theorie van de Korteweg-de Vriesvergelijking (KdV-vergelijking), een niet-lineaire partiële differentiaalvergelijking die het gedrag van golven in ondiep water beschrijft. Het is bedoeld als studieboek voor ouderejaarsstudenten, en vereist naast bekendheid met elementaire analyse en lineaire algebra enige kennis van functietheorie.

Elementaire oplossingen van de KdV-vergelijking zijn de zogenaamde solitonen, geïsoleerde golven die zich onafhankelijk van elkaar gedragen. Dat betekent dat ze voldoen aan het principe van superpositie: een lineaire combinatie van oplossingen is zelf ook weer een oplossing. Voor niet-lineaire vergelijkingen is zo'n eigenschap zeer uitzonderlijk. De auteurs laten zien dat in het geval van de KdV-vergelijking de oorzaak gelegen is in de integreerbaarheid van het systeem, dat wil zeggen, in het bestaan van een (oneindig dimensionale) symmetriegroep.

Het boek begint met een inleiding over symmetrieën en de KdV-hiërarchie, dat is een oneindige rij van symmetrieën van de KdV-vergelijking. Vervolgens worden elementaire oplossingen van de KdV-vergelijking geconstrueerd met behulp van een speciale operator, de Hirota-afgeleide. Daarna wordt een beschrijving gegeven van de symmetriegroep en de bijbehorende oneindig dimensionale Lie-algebra. Daarbij spelen elementen uit de quantumveldentheorie een belangrijke rol, alsmede de theorie over Grassmannse variëteiten.

De auteurs hebben getracht de tekst 'down-to-earth' te houden en abstracties te vermijden. Helaas worden zodoende vele begrippen slordig ingevoerd, en verliest het boek aan overzichtelijkheid door de overdadige aandacht voor technische details. Een duidelijk onderscheid tussen hoofd- en bijzaken ontbreekt, en zowel het gehele boek als de afzonderlijke hoofdstukken hebben slechts zeer beknopte inleidingen. Mede hierdoor zijn de hoofdstukken nauwelijks afzonderlijk te lezen.

Al met al kan het boek nuttig zijn voor geïnteresseerden in de KdV-vergelijking, maar voor een college is het te technisch en te specialistisch.

M. van Noort

Editors: P. Imkeller, J.-S. von Storch

Stochastic climate models

(Progress in probability, volume 49)

Basel: Birkhäuser Verlag, 2001

432 p., prijs €105,80

ISBN 3-7643-6520-x

The atmospheric circulation is a process with properties that are typical for a nonlinear system; the butterfly effect is one of them. This form of chaotic behavior, and also other properties related with nonlinearity such as the existence of different stationary states ("Grosswetterlagen"), can easily be demonstrated with low-dimensional dynamical systems. This makes the subject interesting for mathematicians. Ways to come to a simple model are through heavy truncation of a Galerkin expansion of the circulation problem or through energy balance considerations leading to, for example, the 'Daisy world'. Stochastic elements can be added to the model to compensate for taking out terms that are responsible for the natural irregular fluctuation. This volume originates from the proceedings of the 1999 Chorin workshop on stochastic climate models. At this meeting there was a strong interaction between climatologists and mathematicians. This last group was certainly not only interested in the simpler models. Contributions from, among others, R. Temam, L. Arnold and Y. Kifer went into questions that arise in climate problems at a highly developed level. They dealt with issues like well-posedness and stochastic averaging. There are also various chapters in the book on phenomena that are specific for stochastic dynamical processes such as stochastic resonance and waves and transport in stochastic flow. The large body of problems, discussed in this volume, originates from an observation of the climatologist K. Hasselmann. He pointed out in the seventies that the variability of the climate is due to the interaction of processes taking place at different time scales. The irregular atmospheric motion at the short time scale can be seen as an internal random forcing; averaging is part of a way to deal with it. This method, developed by stochasticians, is rather complicated. It is quite a task to have it communicated to scientists of a different discipline. At the workshop they did a good job in this respect.

J. Grasman

rentiaalrekening niet meer uitgelegd") met de mededeling dat die echt overdreven was omdat men bij haar in de klas geen moeite had met percenten.

Wie les geeft aan eerstejaars aan een Technische Universiteit staat allang niet meer verbaasd als een student 6 maal 7 niet zonder calculator kan berekenen, of zich verbijsterd afvraagt wat hij fout heeft gedaan als hij $-a - b$ als uitkomst krijgt, terwijl er toch $-(a + b)$ uit zou moeten komen volgens de antwoorden achterin.

Daarom is het zinvol om alle zeilen bij te zetten om de vorming van wiskundig talent aan te moedigen. Dit boekje kan daar een goede hulp bij zijn. Het wiskundeonderwijs op school is sterk gericht op toepassingen die min of meer routineus kunnen worden aangepakt en waar geen enkele uitdaging van uit gaat, maar deze met zorg gekozen 100 opgaven (90 uit de eerste ronde en 10 uit de tweede) zijn echte puzzels.

Veel grondbeginselen van de wiskunde komen erin aan de orde: meetkunde, eenvoudige getaltheorie, decimale breuken (geen percenten trouwens), rijen, combinatoriek en vergelijkingen. Er is zelfs een half dozijn vragen over het onderwerp "redeneren". Een van de laatste opgaven vraagt te bewijzen dat elk geheel getal de som is van vijf derdemachten van gehele getallen. Bij de eerste 90 vraagstukken zijn er (in spiegelschrift!) korte aanwijzingen beschikbaar, en in elke groep één helemaal uitgewerkte opgave. Bij een aantal groepen wordt ook nog behoorlijk wat theorie uitgelegd, en er zijn in totaal 17 extra opgaven met uitvoerige oplossing bij de theorie. Vier pagina's over de kunst van het oplossen van (wiskundige) problemen completeren het geheel.

Met boekjes zoals dit kunnen leerlingen die wiskundig puzzelen leuk vinden zich oefenen voor de olympiadewedstrijden, en mogelijk plezier leren krijgen in abstracte wiskunde. Het boekje is fraai vormgegeven, en de enige kritische opmerking die ik wil maken is dat de elegante zogeheten uithangende cijfers en grote cijfers onsystematisch door elkaar gebruikt worden, en ik betwijfel of iemand dat zal merken.

Jan Willem Nienhuys



De Nederlandse Wiskunde Olympiade: 100 opgaven met hints, oplossingen en achtergronden

Arnhem: Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade

72 p., prijs €12,-

ISBN 90-76976-12-0

Al vele jaren is er een Wiskunde Olympiade, waarbij teams uit vele landen om de eer strijden. Het Nederlandse team wordt samengesteld uit de besten van een tweede ronde. De eerste ronde wordt op vele scholen gehouden, en in beginsel kan elke leerling aan de eerste ronde meedoen, als de school waar hij op zit wil meewerken. De wiskundige geoefendheid van Nederlandse kinderen baart vele wiskundigen zorgen. Nog onlangs reageerde een leerlinge van 5 vwo op een klaagzang in de krant ("ik krijg diffe-

Problemen/UWC

Universitaire Wiskunde Competitie

Met ingang van het dit jaar zijn de Universitaire Wiskunde Competitie en de problemenrubriek samengevoegd. De rubriek zal steeds drie problemen bevatten waar studenten op de gebruikelijke manier punten mee kunnen verdienen. De ladderstand is gewoon naar het nieuwe jaar getransporteerd. Niet-studenten worden uitgedaagd om *hors-concours* hun oplossingen in te zenden.

De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.

Opgave A

Let $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ be a non-decreasing sequence of real numbers such that $(n-1)a_n = na_{n-2}$ for $n = 2, 3, \dots$ with initial value $a_0 = 2$. Compute a_1 .

Opgave B

Let $S(n)$ be the sum of the remainders on division of the natural number n by $2, 3, \dots, n-1$. Show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{n^2}$$

exists and compute its value.

Opgave C

Consider four distinct points A, B, C, D in the plane such that the line segments AB, BC, CD, DA do not intersect. Let Z_1, Z_2, Z_3 be the centers of gravity of:

1. the four point masses in A, B, C, D .
2. the wire frame with vertices A, B, C, D .
3. the plate with corners A, B, C, D .

If A, B, C, D form a parallelogram then Z_1, Z_2, Z_3 coincide. Does the converse hold?

Ster-opgave

Determine the maximal area of a rectangle that can be covered by 6 disks of unit diameter.

Oplossingen van de Universitaire Wiskunde Competitie editie 2003/1

Op de ronde 2003/1 van de Universitaire Wiskunde Competitie ontvingen we als enige een inzending van Filip De Smet.

Opgave 2003/1-A

Een Pythagoreïsche driehoek is een rechthoekige driehoek waarvan alle zijden geheel-tallig zijn. Van een Pythagoreïsche driehoek is de straal van de ingeschreven cirkel ook geheel-tallig. Bepaal alle Pythagoreïsche driehoeken waarvan de straal van de ingeschreven cirkel N bedraagt ($N = 1, 2, 3, \dots$).

Oplossing Deze opgave is van de hand van Karel Post. Een oplossing is gegeven door L. Bleijenga, Ruud Jeurissen, H.T. Reuvers, Filip De Smet en Jaap Spies. Alle oplossingen zijn equivalent. Hieronder staat die van Jaap Spies.

Alle Pythagoreïsche driehoeken met zijden a, b en c en $a^2 + b^2 = c^2$ kunnen worden geparametriseerd met positieve natuurlijke getallen u en v ($u > v$), zodat $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ en $c = u^2 + v^2$.

Zoals bekend geldt voor de ingeschreven cirkel:

$$r_{in} = \frac{2A}{a+b+c},$$

oftewel

$$r_{in} = \frac{2uv(u^2 - v^2)}{2u^2 + 2uv} = v(u - v).$$

Bij elke deler v van het positieve natuurlijke getal n vinden we een u , zo dat $n = v(u - v)$ en dus $u = \frac{n}{v} + v$. Als we stellen $q = \frac{n}{v}$, dan vinden we na enig vereenvoudigen de Pythagoreïsche driehoek met zijden a, b en c :

$$(a, b, c) = (2n + q^2, 2n + 2v^2, 2n + q^2 + 2v^2).$$

Opgave 2003/1-B

Een rechthoekige tafel waarvan de vier poten precies even lang zijn staat in een historisch pand met een glooiende vloer. Is het mogelijk om de tafel ergens neer te zetten zodat dat deze niet wiebelt?

Oplossing Deze opgave is bedacht door Michiel de Bondt. Noteer de coördinaten van de vier poten kloksgewijs als a, b, c, d en de hoogte van de vloer ter plaats als $h(a), h(b), h(c), h(d)$. De tafel wiebelt niet als de volgende gelijkheid geldt: $h(a) + h(c) = h(b) + h(d)$. Als de tafel draait rond zijn middelpunt dan draaien de poten over een cirkel. Zet de tafel zo neer dat $h(a) + h(c)$ maximaal is. Dan is $h(a) + h(c) \geq h(b) + h(d)$ want a, c kan de plaats van b, d innemen. Draai nu b, d naar de positie van a, c . In de nieuwe positie is $h(a) + h(c) \leq h(b) + h(d)$. Volgens de tussenwaardestelling bestaat er een positie waarin de tafel niet wiebelt.

Opgave 2003/1-C

Het is algemeen bekend dat de oneindige rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ niet sommeerbaar is. Verwijder nu uit de rij alle getallen met negen aaneengesloten negens in hun decimale ontwikkeling. Houden we een sommeerbare rij over?

Oplossing Ook deze opgave is bedacht door Michiel de Bondt. Hieronder de oplossing van Filip de Smet. De overgebleven rij is sommeerbaar. Noteer 10^{10} met α en gebruik dit getal als basis. De getallen in het interval $[\alpha^n, \alpha^{n+1} - 1]$ zijn precies degene die over de nieuwe basis bestaan uit $n + 1$ cijfers. Verwijder de getallen waarin het cijfer $\alpha - 1$ voorkomt, dan blijven er $(\alpha - 1)^{n+1} - (\alpha - 1)^n$ getallen over. Al deze getallen zijn groter of gelijk aan α^n . Bijgevolg is de totale som van de rij naar boven begrensd door

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha - 1)^{n+1}}{\alpha^n} &= (\alpha - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right)^n \\ &= \alpha(\alpha - 1). \end{aligned}$$

Oplossingen

Uitslag Editie 2002/2

De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

<i>Naam</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>Totaal</i>
1. Filip De Smet (Gent)	10	6	10	104

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie

We vermelden alleen de top 5. Voor de complete ladderstand verwijzen we naar de UWC-website.

<i>Naam</i>	<i>Punten</i>
1. Team Hendrik Hubrechts	238
2. Mark Veraar	208
3. Team Filip Cools	199
4. Tom Claeys	138
5. Team Gerben Stavenga	136

Reglement

De Universitaire Wiskunde Competitie is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina <http://academics.its.tudelft.nl/uwc>

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Er worden drie editieprijzen toegekend, van 100, 50 en 25 euro. De puntentotalen van winnaars tellen voor 0, 50 en 75 procent mee in de laddercompetitie. De aanvoerder van de ladder ontvangt een prijs van 100 euro en begint daarna weer onderaan. Daarnaast wordt twee maal per jaar een ster-opgave aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 euro toegekend.

Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in $\text{\LaTeX}$ wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 november 2003. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

Optiver
H. J. J. VAN DER WERF