

Inhoud | Contents

2	Colofon
3	Van de voorzitter <i>Eduard Looijenga</i>
4	Agenda
6	Nieuws
9	Van het WG

Afscheidsrede | Valedictory lecture

18	Inspirerend, vernieuwend, betrokken <i>Marinus Kaashoek</i>
----	---

Evenementen | Events

24	Laudatio for Paul Embrechts <i>Herold Dehling</i>
26	Did mathematics change finance? <i>Paul Embrechts</i>

Onderzoek | Research

34	Eurodiffusie <i>Michiel Hochstenbach</i>
38	Aanstekelijkheid gevangen in een getal <i>Odo Diekmann</i>
43	De p van primaliteit <i>Wieb Bosma, Jaap Top</i>

Geschiedenis | History

46	Snippers met formules <i>Gerard Alberts, Teun Koetsier, Godelieve Bolten</i>
51	Cardinael in de geschiedenis van de wiskunde <i>Jan van Maanen</i>

Onderwijs | Education

56	Gerommel aan de Tweede Fase <i>Anne van Streun</i>
----	--

Recreatieve wiskunde | Recreational mathematics

60	De Internationale Wiskunde Olympiade <i>Tom Verhoeff</i>
----	--

Opinie | Opinion

64	Hoe schrijf ik een veel geciteerd artikel? <i>Henk van der Vorst</i>
----	--

Boeken | Books

69	De parels van Indra <i>Jan van de Craats</i>
75	Boekbesprekingen

Rubrieken | Departments

17	Oud Archief <i>Danny Beckers</i>
58	TeX <i>Michael van Hartkamp</i>
74	From the Big Apple <i>Sandjai Bhulai</i>
91	Problemen/UWC

Een bijzonder jaar

Toen in 1999 het bestuur van het Wiskundig Genootschap het plan opvatte het Nieuw Archief in geheel vernieuwde vorm van start te doen gaan, was duidelijk dat dit diende te gebeuren onder leiding van een wiskundige met het hart van een uitgever en de neus van een hoofdredacteur. Daar zijn er niet veel van. Daarnaast moest de persoon in kwestie gedreven zijn en liefst ook nog over een uitgebreid netwerk aan contacten beschikken. Daarmee leek het een hopeloze opdracht. Gelukkig hoefden we niet echt te zoeken. We kenden die persoon al als degene die Pythagoras met succes in dezelfde geest onder handen had genomen: Chris Zaal. De gevolgen van zijn inspanningen voor vorm en inhoud van het NAW zijn zo groot, dat ik daar verder niet veel over hoeft te zeggen. Niet alleen het bestuur, maar heel wiskundig Nederland is hem hiervoor veel dank verschuldigd.

Sedert 1 januari is Chris Zaal niet meer werkzaam als hoofdredacteur van dit blad. Zonder hem zou de vijfde serie van het Nieuw Archief niet zijn huidige vorm hebben gekregen, zelfs niet bij benadering. Voor zo'n transformatie is iemand als Chris nodig, maar het is natuurlijk niet goed als de gezondheid van een blad in hoge mate van één iemand afhangt. Daarbij was het vanaf het begin al duidelijk dat hij zijn bemoeienis zich niet over lengte van jaren zou uitstrekken. Om die reden is de organisatie en de productie van het NAW zo ingericht dat de continuïteit gewaarborgd is. De hoofdredactie was van meet af aan zo georganiseerd: die was steeds tweehoofdig. Nu Chris afscheid genomen heeft, zal Ger Koole de hoofdredactionele taken tot en met de zomer alleen voortzetten. Daarna zal Jaap Top zich bij hem voegen. Op het terrein van de productie is Chris Zaal het afgelopen najaar al 'dakpansgewijs' opgevolgd door Reinie Ern . Haar aantreden betekende een krachtige versterking van deze afdeling en zij is daar nu de spin in het web.

Onder meer vanwege zijn aankomend hoofdredacteurschap heeft Jaap Top met ingang van 1 januari zijn functie als redacteur boekbesprekingen beëindigd. Deze taak heeft hij voortreffelijk vervuld en ik zeg hem hiervoor hartelijk dank. Het beheer van deze rubriek is intussen overgenomen door Hans Cuypers en Hans Sterk. Beiden zijn verbonden aan de TUE en de secretariële ondersteuning die daar aan hen ter beschikking wordt gesteld, geeft vorm aan een institutioneel lidmaatschap van deze instelling. Sinds 1 januari heeft naast de TUE ook de UU zich als instituutslid gevoegd bij het CWI, de RUG, de UvA, de UL en de VU en zijn Kluwer en Eurandom bedrijfsleden geworden.

Zoals de lezer nu wel weet — ik geef toe, we verzuimen geen gelegenheid om daar op te wijzen — is het WG het oudste nationale wiskundige genootschap. Helaas is de oprichtingsakte verloren gegaan (hoe, is een verhaal apart, maar het komt er op neer dat de eerste secretaris, Strabbe, vanwege een wrok de begindocumenten tot kladpapier bestemde) en daardoor is de oprichtingsdatum nog altijd onbekend. Er heerste zelfs lange tijd misverstand over het jaar van oprichting. Aanvankelijk meende men dat dit 1779 was, totdat Van Haaften tachtig jaar geleden (in zijn boek over de geschiedenis van het WG) ondubbelzinnig aantoonde dat dit een jaar eerder heeft plaatsgevonden. En omdat 2003 min 1778 gelijk is aan 225, hebben we dit jaar iets bijzonders te vieren. De organisatie van het Nederlands Mathematisch Congres 2003 (dat plaats zal vinden op 1 en 2 mei te Nijmegen) is zich daarvan bewust en heeft voor de middag van de eerste congresdag een speciaal programma samengesteld dat in het teken van dit jubileum zal staan.

Het Genootschap treedt ook af en toe naar buiten als beroepsvereniging. Zo trachten we naar vermogen onze Nijmeegse collega's bij te staan in hun strijd tegen de kaalslag (zie het bericht van Wieb Bosma in het vorige nummer). En hieronder valt ook ons pleidooi voor een bachelorgraad in de wiskunde met 'ingebouwde' tweedegraadslesbevoegdheid met een vervolg van hooguit een half jaar leidend tot een eerstegraadsbevoegdheid. De voordelen hiervan worden genoemd in een notitie ter zake, geschreven ten behoeve van de KNAW (zie onze nieuwe dossierpagina: <http://www.wiskgenoot.nl/nieuws/dossier>).

Vorig jaar meldde ik dat de Amsterdamse instellingen (UvA, VU en CWI) gevolg hebben gegeven aan ons verzoek een *bid* uit te brengen voor het vijfde Europese Mathematisch Congres in 2008, te organiseren in Amsterdam. De betrokkenen, Jan Wiegerinck, André Ran en Herman te Riele, hebben zich hiervoor het afgelopen jaar flink ingespannen en een *bidbook* gereed gemaakt dat er indrukwekkend uitziet. In de loop van dit jaar horen we of het ons gegund wordt.

:

Eduard Looijenga
voorzitter van het Wiskundig Genootschap
Disciplinegroep Wiskunde, Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
looijeng@math.uu.nl

Agenda

maart 2003

28 maart 2003

Mathematical PhD-day 2003

Een ontmoetingsdag voor aio's van het MRI en het Stieltjes instituut. Sprekers zijn Henk Barendregt, Frits Beukers, Jan van der Craats, Floris Takens en Jaap Molenaar.

plaats Universiteit Groningen, Academiegebouw

info www.math.rug.nl/~phdday

april 2003

11 april

Optiver open dag

De optiehandelaar Optiver opent zijn deuren. Programma: bedrijfspresentatie, lunch, college *optie-theorie* en interactieve sessie *arbitrage strategieën en positie management*.

plaats De Ruyterkade 112, Amsterdam

info <http://www.optiver.com>

15 april

Statistische dag 2003

Jaarlijks congres van de Vereniging voor statistiek en operationele research (VVS).

plaats Vrije Universiteit, Amsterdam

info www.vvs-or.nl/actueel

23–24 april

Statistical Datamining

Workshop, georganiseerd door Eurandom en Pro-Enbis (een Europees netwerk dat zich inzet voor toepassingen van statistiek in het bedrijfsleven).

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl/workshops/2003

24 april

Conferentie ICT in het wiskundeonderwijs

Thema's: voorbeelden uit de klassenpraktijk van de basisvorming, vmbo en Tweede Fase, overzicht van de actuele stand van zaken, integratie van applets in de bestaande wiskunde methoden.

plaats APS, Utrecht

info www.aps.nl/wiskunde/K2.htm

mei 2003

1–2 mei

Nederlands Mathematisch Congres

Openingsvoordracht door Robin Hartshorne en slotvoordracht door Robbert Dijkgraaf.

Hugo Brandt Corstius is een van de sprekers op het symposium *Wiskunde, nodig en in nood*.

plaats Katholieke Universiteit Nijmegen

info www-math.sci.kun.nl/nmc2003

12–16 mei

Minicourse on Public Key Cryptography

Minicourse door Victor Shoup van het Courant Institute, New York University.

plaats EIDMA, Eindhoven

info www.win.tue.nl/math/eidma/courses

17 mei

Negende Symposium van de Historische Kring Reken- en WiskundeOnderwijs

Reflecties op het didactische werk uit de jaren '50 en '60 van Pierre van Hiele, Wim Bos, Rudolf Troelstra en Jan Nieland.

plaats Hogeschool Domstad, Utrecht

info ed@fi.uu.nl

19–21 mei

PhD students in Stochastics meeting

Jaarlijkse bijeenkomst van het netwerk Stochastiek.

plaats Conferentiecentrum De Hoorneboeg, Hilversum

info <http://www.cs.vu.nl/~stochgrp/aionetwerk/meeting/02.html>

29–31 mei

Information Theory and Combinatorics

Symposium over informatietheorie in de Benelux.

plaats Université catholique de Louvain, Leuven

info <http://uclcrypto.org/benelux2002>

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

juni 2003

23–27 juni

☐ **Minicourse on Total Positivity**
plaats EIDMA, Eindhoven**info** www.win.tue.nl/math/eidma/courses

23–28 juni

☐ **Mathematical Techniques for Data Analysis and Modelling of Intermittent Structures**

Workshop gewijd aan het onderzoek naar coherente structuren in turbulentie en in chaotische processen.

plaats Lorentz Center, Leiden**info** <http://www.lc.leidenuniv.nl>

juli 2003

22–26 juli

☐ **International Conference on Differential Equations**

Tweejaarlijks aan differentiaalvergelijkingen gewijd Europees congres.

plaats Hasselt (Belgie)**info** www.equadiff.be

28 juli–2 augustus

☐ **Conference diophantine approximation**

Symposium ter ere van de zestigste verjaardag van Robert Tijdeman, gewijd aan hoogtepunten van zijn werk.

plaats Lorentz Center, Leiden**info** <http://www.lc.leidenuniv.nl/lorentz.center>

augustus 2003

4–8 augustus, 11–15 augustus

☐ **Wiskunde zomerkamp voor kinderen**

Zomerkampen georganiseerd door de stichting Vierkant voor Wiskunde. met voor jongeren vanaf 10 jaar. Het eerste kamp op 4–8 augustus is bedoeld voor kinderen uit de groepen 6–8 van de basisschool en de brugklas, het kamp op 11–15 augustus voor middelbare scholieren. (Kosten: €195)

plaats De Wildval, Lunteren**info** <http://www.vierkantvoorwiskunde.nl>

22–23 augustus

☐ **Vakantiecursus Wiskunde voor leraren**
De cursus heeft het thema *Wiskunde in het dagelijks leven*.**plaats** CWI, Amsterdam**info** www.cwi.nl/events/2003/VC2003

25–27 augustus

☐ **Special Functions, Representation Theory and Applications**

Conferentie ter ere van de zestigste verjaardag van Tom Koornwinder.

plaats Korteweg-de Vries Instituut, Amsterdam**info** <http://staff.science.uva.nl/~jstokman/workshop.html>

22–23 augustus

☐ **Vakantiecursus Wiskunde voor leraren**
De cursus heeft het thema *Wiskunde in het dagelijks leven*.**plaats** Technische Universiteit Eindhoven**info** www.cwi.nl/events/2003/VC2003

september 2003

1–5 september

☐ **Minicourse on Approximation Schemes for Geometric Problems**

Cursus gegeven door Sanjeev Arora van Princeton University.

plaats EIDMA, Eindhoven**info** www.win.tue.nl/math/eidma/courses

oktober 2003–december 2003

1–3 oktober

☐ **2003 Conferentie van Numeriek Wiskundigen**

Conferentie van de Nederlandse en Vlaamse numerieke wiskunde gemeenschappen. Thema's: bewegende-randproblemen en matrixfuncties.

plaats Woudschoten, Zeist**info** <http://www.cwi.nl/events/2003/NumAnalysis.html>

4 december

☐ **Benelearn 2002**

Jaarlijkse Nederlands–Belgische conferentie op het gebied van zelflerende algoritmen.

plaats Utrecht**info** www.cs.uu.nl/people/marco/benelearn2002

9–13 december

☐ **Workshop Representations of Lie groups**

Internationale conferentie over harmonische analyse en homogene ruimten.

plaats Lorentz Center, Leiden**info** <http://www.lc.leidenuniv.nl/lorentz.center>

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland.

Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien?

Stuur dan uw bijdrage ($\pm$ 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar naw@math.leidenuniv.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Nederlands Mathematisch Congres 2003 in Nijmegen

Het Wiskundig Genootschap organiseert jaarlijks het Nederlands Mathematisch Congres (NMC). Omdat het Wiskundig Genootschap dit jaar 225 jaar bestaat, heeft het congres een feestelijke tint met op 1 mei een speciale lustrummiddag. Het programma begint met een speciale voordracht van prof. dr. M. Veltman, natuurkundige, pionier op het gebied van de computeralgebra en Nobelprijswinnaar. Aansluitend volgt een symposium *Wiskunde, nodig en in nood* met als thema de slechte situatie van de wiskunde in Nederland. Sprekers zijn de schrijver Hugo Brandt Corstius, prof. dr. P. Nijkamp, voorzitter van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO) en drs. J. Veldhuis, voorzitter van het College van Bestuur van de Universiteit van Utrecht.

Het Nederlands Mathematisch Congres wordt gehouden op 1 en 2 mei aan de Katholieke Universiteit Nijmegen. Een uitgebreid programma vindt u op de www.math.kun.nl/nmc2003 Mascha Honsbeek

Veelvlakkenwedstrijd Pythagoras

In samenwerking met de stichting *Ars en Mathesis* organiseert het tijdschrift *Pythagoras* in het voorjaar van 2003 een *veelvlakkenprijsvraag*. Opdracht is het ontwerpen van een ruimtelijke figuur met een bijzondere en kunstzinnige symmetrie. Deelname aan de prijsvraag staat open voor iedereen, jong en oud. De inzendtermijn is van 15 april tot en met 15 juni 2003. Voor de winnaar is de hoofdprijs van 1000 euro, maar er zijn ook vele andere prijzen te winnen, waaronder kostbare software-pakketten. Meer informatie: www.science.uva.nl/misc/pythagoras Bron: Pythagoras

Veiling van wiskundeboeken

Ruim een jaar geleden vond de opening van het WereldWiskundeWeb (WWW) plaats. Het WereldWiskundeWeb is een internetboekenveiling ten bate van het Wereldwiskunde Fonds (WwF), een werkgroep van de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren (NVvW). De werkgroep stelt zich onder andere ten doel ondersteuning te bieden van het wiskundeonderwijs in derdewereldlanden.

In 2001–2002 bracht de veiling meer dan €3000 op voor wiskunde(onderwijs)projecten in de derdewereld. Op 1 februari 2003 gaat de volgende veilingronde van start. Meer informatie: www.nvww.nl/www Ger Limpens

WiskundE-brief 250 verschenen

November 2002 is de tweehonderdvijftigste aflevering van de *WiskundE-brief* per e-mail naar meer dan 1300 adressen verstuurd. Het is ruim zes jaar geleden dat het eerste nummer verscheen in een zeer bescheiden oplage. De *WiskundE-brief* is in de loop der jaren uitgegroeid tot een belangrijk informatie- en communicatiemiddel voor het Nederlandse wiskundeonderwijs. Zie: www.digischool.nl/wi/WiskundE-brief bron: WiskundE-brief

Subsidie-aanvraag toetsenbank toegekend

De Stedelijke Scholengemeenschap Nehalennia te Middelburg heeft in samenwerking met het Willibrord College te Goes, het Zwin College te Oostburg en een subsidie verworven voor het ICT-project *WisBase*, een toetsenbank voor middelbare scholen. De toetsenbank wordt gevoed

door de deelnemers zelf: inschrijving gaat gepaard met inlevering van drie originele toetsen in digitale vorm. Tevens heeft elke deelnemer de verplichting minimaal één toets per jaar in te leveren. Deelnemers kunnen 24 uur per dag en zeven dagen per week op ieder moment van de dag gratis gebruik maken van deze complete toetsenbank, die inmiddels meer dan duizend toetsen omvat. Het platform groeit nog steeds: elke week komen er nieuwe scholen bij.

De toekenning van de subsidie zal tot gevolg hebben, dat WisBase de service aan de deelnemers kan verbeteren. Het netwerk zal — zo mogelijk — uitgebreid worden met aanvullende deelsites. Informatie: www.wisbase.com

Bram Theune

Leo Coolen nieuwe algemeen directeur NWO

Prof. ir. L.A.A.M. (Leo) Coolen wordt per 1 maart de nieuwe algemeen directeur van NWO. Hij volgt Eduard Klasen op die vanaf 1 januari lid is van de Raad van Bestuur van het Leids Universitair Medisch Centrum.

Leo Coolen (1949) studeerde in 1974 cum laude af aan de Technische Universiteit Eindhoven. Vanaf 1975 tot 2002 bekleedde hij diverse functies bij de PTT en bij KPN. Van 1994 tot 2000 was hij algemeen directeur van KPN Research. Van 2000 tot 2002 was hij algemeen directeur van het KPN Software Huis, de centrale afdeling voor het ontwikkelen van software. Coolen is in onze kringen geen onbekende. Hij is voorzitter van het NWO-instituut CWI. Tevens is hij lid van de raad van toezicht van de Technologiestichting STW. Ook is hij lid van de Raad voor Technische Wetenschappen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Coolen is sinds 1997 bijzonder hoogleraar aan de Universiteit van Maastricht. Zijn leeropdracht is multimedia, in het bijzonder de ontwikkeling en invoering van diensten.

Gerard Alberts

Nationale Wiskunde Dagen 2003

Op 31 januari en 1 februari 2003 werden voor de negende keer de Nationale Wiskunde Dagen (NWD) gehouden, net als vorige jaren in het Leeuwenhorst Hotel in Noordwijkerhout. Dit jaar trok het evenement een recordaantal van 620 deelnemers, waarvan het grootste deel leraar is in het middelbaar onderwijs. De NWD dragen op een essentiële wijze bij aan het versterken van de banden tussen het middelbaar en het hoger onderwijs, waaraan ook voor de wiskunde grote behoefte is. De NWD worden georganiseerd door het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht.

Het NWD programma bestond uit vier plenaire lezingen en tien parallelle sessies van drie of vier lezingen elk. Daarnaast was er een informatiemarkt, een *funrun*, een muzikale happening en waren er tal van andere omliggende activiteiten. In de lezingen kwamen alle aspecten van de wiskunde aan bod, met oog voor zowel de nieuwsgierige onderzoeker, de gedreven toepasser, de didacticus als de puzzelaar.

De vier plenaire lezingen werden dit jaar verzorgd door Arjen Doelman, Marjolein Kool, Mike en Wendy Douglas en Shlomo Vinner.

De parallelle sessies waren dit jaar aan diverse thema's gewijd waaronder wiskunde en sport. Jan Magnus (Tilburg) vertelde over statistiek rond Wimbledon. Hij beschouwde vragen als "Is beginnen met serveren in een set is een voordeel?" en "Is er een optimale opslagstrategie?". Statistische methoden kunnen op deze vragen antwoord bieden. Ruud Koning (Groningen) bracht de statistiek over naar het schaatsen en liet zien hoe 'extreme-waarden-theorie' een aantal systematische effecten kon detecteren, zoals steeds korter wordende schaatstijden, invloed van de baan en de rol van het type toernooi. Hans van Maanen (Amsterdam) vertelde over de Elo-ranglijst voor het internationale schaken.

Hij legde uit hoe deze ranglijst wordt bepaald, toonde aan dat er een aantal reken- en denkfouten in de methode verborgen zit, maar liet vervolgens zien dat de methode toch goed zijn doel bereikt.

Vele prachtige lezingen vonden plaats in de andere parallelle sessies, waarvoor de geïnteresseerde lezer verwezen wordt naar de website van de NWD: www.fi.uu.nl/nwd

De recente ontwikkelingen rond het middelbare wiskunde-onderwijs, waarbij een forse reductie van wiskunde wordt voorgesteld, wierpen een schaduw over de NWD. Dit onderwerp werd uitvoerig besproken en een groot aantal deelnemers heeft een protestpetitie ondertekend.

De tiende editie van NWD is gepland op 6 en 7 februari 2004. Dit lustrum zal zeker spectaculair worden. *Frank den Hollander, Dirk Siersma*



Koninklijke onderscheiding voor prof.dr. Marinus Kaashoek

Bij zijn afscheid van de Vrije Universiteit als hoogleraar zuivere wiskunde is prof.dr. M.A. Kaashoek benoemd tot Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw. Deze onderscheiding, Nederlands oudste orde, wordt toegekend aan mensen met zeer uitzonderlijke verdiensten voor de samenleving. De uitreiking van de bijbehorende versierselen vond plaats op vrijdag 29 november 2002, na afloop van het afscheidscollege van Kaashoek (zie pagina 18 in dit nummer).

Marinus Kaashoek was sinds 1966 verbonden aan de VU en heeft in de loop der jaren gebouwd aan een belangrijk internationaal onderzoeksnetwerk en aan een wetenschappelijk oeuvre met een hoge impact. Kaashoek was onder meer grondlegger en voorzitter van de door de KNAW erkende Onderzoeksschool Stieltjes Instituut. Hij was de eerste decaan van de Faculteit der Exacte Wetenschappen van de VU. Samen met Henk van der Vorst en Lex Zandee schreef hij op verzoek van de onderzoeksscholen wiskunde en de NWO Adviescommissie voor de Wiskunde het rapport *Nieuwe Dimensies, ruimer beleid*, dat een strategie voor het wiskundeonderzoek in Nederland formuleert.

Rianne Lindhout

Financiering Eurandom gecontinueerd

De financiering voor het internationale onderzoeksinstituut op het gebied van de stochastiek Eurandom is voor de komende planperiode geaccordeerd door alle betrokken partijen. Financiering komt van de Technische Universiteit Eindhoven en het NWO. Samen zijn deze drie bronnen goed voor ongeveer vijf miljoen euro voor de periode 2004 tot en met 2007. Behalve deze financiering ontvangt Eurandom financiële middelen uit diverse andere bronnen zoals industriecontracten en Europese grants.

Sinds de start van Eurandom in september 1998 werkten er ongeveer 60 postdocs en aio's op het instituut, in het algemeen met een aanstelling voor twee jaar.

Connie M.M. Catrijn

Van der Waerden Centennial Celebration

Vrijdag 7 februari werd B.L. van der Waerden (2 februari 1903 – 12 januari 1996) geëerd met een serie lezingen in het Academiegebouw van de Rijksuniversiteit Groningen. Van der Waerden is de auteur van het bekende werk *Moderne Algebra* (1931) en wordt algemeen beschouwd als de evangelist van de door vader en dochter Noether ontwikkelde algebra en ook als een van de grondleggers van algebraïsche meetkunde.

De eerste lezing werd verzorgd door Yvonne Dold (Universität Heidelberg) die een mooi overzicht van het leven van Van der Waerden verzorgde. Speciaal hierbij waren geluidsfragmenten van een college van Van der Waerden over een klassieke toepassing van algebraïsche meetkunde met 'live' visuele ondersteuning door de spreker. Vermakelijk waren ook filmbeelden uit de jaren 30 met erop bekende wiskundigen uit zijn 'Leipziger periode', waaronder David Hilbert.

Henk Bos (Universiteit Utrecht) trok parallellen tussen Van Der Waerden en Descartes. Beiden spannen zich in om algebra en meetkunde nader tot elkaar te brengen. De lezing door Kevin Buzzard (Imperial College, Londen) was van meer getaltheoretische aard en T.A. Springer (Universiteit Utrecht) gaf een helder overzicht van de algebraïsche meetkunde *à la* Van der Waerden.

Norbert Schappacher (TU Darmstadt), tenslotte, ging in op de ietwat problematische en vooral wisselvallige verstandhouding die Van der Waerden had met de Italiaanse meetkundigen van die tijd zoals Severi. Met name de veranderende mening van Van der Waerden over de vraag of algebra (Duitsland) of juist meetkunde (Italië) en topologie de beste taal leveren om de grondslagen van de algebraïsche meetkunde mee te beschrijven, kreeg daarbij aandacht. *Meinte Boersma*

Wintersymposium van het WG: wiskunde in techniek

Al vele jaren organiseert het Wiskundig Genootschap in januari het Wintersymposium. Voor mij als docent wiskunde was het laatste symposium een eerste kennismaking, die uitermate goed is bevallen. Het thema was: wiskunde in techniek. Aan de hand van een drietal voordrachten kregen de aanwezigen een goed beeld van de rol die wiskunde speelt in technische toepassingen.

De eerste voordracht is van Jaap Molenaar (TUE/UT) en gaat over de kracht van dimensieanalyse. In de dimensieanalyse zoekt men naar schalingsverbanden tussen bepaalde (meestal fysische) grootheden in een mathematisch model. De stelling van Buckingham zegt dat alle eigenschappen van zo'n model beschreven kunnen worden door een aantal dimensieloze grootheden, dat wil zeggen, combinaties van machten van variabelen en parameters die dimensieloos zijn. Deze dimensieloze grootheden zijn vaak met enig proberen te vinden. Aan de hand van een viertal voorbeelden wordt geïllustreerd hoe deze methode werkt. Zo wordt bij een omhoog gegooide steen afgeleid dat de maximale hoogte evenredig is met het kwadraat van de beginsnelheid en dat de tijd die de steen in de lucht doorbrengt evenredig is met de beginsnelheid.

De tweede voordracht is van Patrick Ooninx (KIM). Hij legt uit hoe lastig het is om een internet-zoekmachine gelijkende afbeeldingen te laten zoeken van een persoon of voorwerp op basis van een afbeelding van de persoon of het voorwerp. Deze op het eerste gezicht simpele opdracht leidt direct tot vele problemen. Zo moet het voorwerp door de zoekmachine ook herkend worden als het verplaatst of gedraaid wordt. Roel Verstappen (RUG), tenslotte, praat ons bij wat betreft de recente ontwikkelingen op het gebied van simulatie van stromingen.

Terugkijkend ervaar ik dit symposium als een leerzame gebeurtenis, waarbij je er als docent wiskunde weer eens aan herinnerd wordt dat aan het front van de hedendaagse technologie een belangrijke rol is weggelegd voor wiskundigen.

Maris van Haandel

Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2003

De jaarlijkse *Studiegroep Wiskunde met de Industrie* werd dit jaar georganiseerd in het Lorentz Center in Leiden van 17 tot 21 februari. Een week lang stortte een groep van 50 wiskundigen, van aio tot professor, uit Yerseke tot Toronto, zich op vijf problemen die door het bedrijfsleven waren aangedragen: Japanse oesters die woekeren in de Oosterschelde, de storingsbestendigheid van de vluchtschema's van de KLM, het gedrag van druppeltjes in de inkjetprinter van Philips, het optimaal ophangen van de staaldraden van een carillon en de betrouwbaarheid van de 'match' van een schoenafdruk in rechtszaken.

Op maandag presenteerden vertegenwoordigers van de bedrijven de problemen, de een wat meer geïntimideerd door een zaal vol wiskundigen dan de ander. Daarna gingen de deelnemers aan de slag, waarbij pittige discussies niet gemedend werden. Het was al weer de vijfde keer dat zo'n week in Nederland plaats vond en naast de inmiddels doorgewinterde studiegroepgangers waren er veel nieuwe gezichten en een groot contingent buitenlanders. Een groep ging op locatie een carillon bekijken, anderen experimenteerden met het maken van schoenafdrukken. Gedurende de week werden de ideeën wat meer gestroomlijnd en op donderdag zat achter elke computer wel iemand driftig aan een algoritme of simulatie te werken.

Bij de presentatie van de resultaten op vrijdag waren natuurlijk niet alle problemen geheel opgelost, maar in alle gevallen was een duidelijk eerste stap gezet en soms zelfs een tweede. De meeste 'industriële' waren dan ook zeer tevreden en contacten voor diepgaander onderzoek zijn gelegd.

Jan Bouwe van den Berg



Boze Bèta's

Door diverse groeperingen is fel stelling genomen tegen het rapport *Ruimte laten en keuzes bieden in de tweede fase havo en vwo* van het ministerie van onderwijs. In het rapport wordt voorgesteld om het wiskunde- en natuurkundeonderwijs sterk te verminderen, deels ter verlichting van het programma en deels ten gunste van alpha- en gamma-vakken. (Zie ook Van Streun, pagina 56 van dit nummer.)

De internetsite www.bozebetas.nl, opgestart in januari van dit jaar, geeft een goed overzicht van de diverse reacties in de maatschappij op het plan van de minister. Het ministeriële rapport is ook daar te vinden.

Derk Pik

van het WG

| WG activiteiten

Algemene Ledenvergadering van het Wiskundig Genootschap

De 226ste Algemene Ledenvergadering van het Wiskundig Genootschap zal gehouden worden te Nijmegen tijdens het Nederlands Mathematisch Congres 2003 op vrijdag 2 mei 2003.

1 Agenda

- 1 Opening
- 2 Verslag van de 225ste Algemene Ledenvergadering van het Wiskundig Genootschap
- 3 Mededelingen
- 4 Besprekingen van de jaarverslagen over 2002. De in dit nummer ontbrekende verslagen worden ter vergadering uitgereikt.
 - a. Verslag van de secretaris
 - b. Verslag van de penningmeester
 - c. Verslag van de kascommissie
 - d. Verslag van het Nederlands Mathematisch Congres
 - e. Verslag van de inspecteur der boekerij
 - f. Verslag van de publicatiecommissie
 - g. Verslag van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde
 - h. Verslag van de archivaris
 - i. Verslag van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen
 - j. Verslag van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde
- 5 Begroting 2003
- 6 Vaststelling contributie voor 2004
Het bestuur stelt voor de contributiebedragen voor 2004 ongewijzigd vast te stellen (gewone leden €70, Reciprociteitsleden €50, aio/oio's en studenten €25, en gepensioneerden €35). Voor buitenlandse leden stelt het bestuur voor om een portoheffing van 5 euro in te voeren.
- 7 Samenstelling kascommissie 2003
- 8 Samenstelling van het bestuur
drs. H. Bakker, dr. L. Florack, prof.dr.ir. J. Molenaar, en prof.dr.ir. O.J. Vrieze treden af als bestuurslid; het bestuur is nog op zoek naar nieuwe kandidaten om de vrijgevallen posities te vullen. De resterende leden van het bestuur zijn
 - dr. G. Hek (UvA), publicaties
 - M. Kamminga (Hogeschool Leeuwarden), contacten met leraren
 - drs. A.C. Kik (CWI), PR
 - prof.dr. E. Looijenga (UU), voorzitter
 - dr. M.A. Peletier (CWI/TUE), secretaris en inspecteur der boekerij
 - dr. M. Vellekoop (UT), contacten met studenten
 Leden die interesse hebben in een van de drie openstaande bestuursposities wordt verzocht contact op te nemen met de secretaris.
- 9 Rondvraag
- 10 Sluiting

2 Ad punt 2 van de Agenda

Hieronder volgen de notulen van de vorige Algemene Ledenvergadering, tezamen met de bijbehorende verslagen die niet eerder gepubliceerd zijn: het financieel verslag over 2001 en het verslag van de kascommissie over 2001.

2.1 Notulen van de 225ste Algemene Ledenvergadering van het Wiskundig Genootschap, gehouden tijdens het NMC te Eindhoven op 5 april 2002.

De vergadering werd bijgewoond door 48 leden.

- 1 De voorzitter opent de vergadering om 12.02 uur.

2 Notulen van de vorige vergadering.

De heer Barning merkt op dat zijn vraag naar de status van de penningmeester

Deze rubriek is een kroniek van de activiteiten van het Wiskundig Genootschap. Van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan en toekomstige activiteiten worden aankondigd.

niet begrepen moet worden als kritiek op de penningmeester zelf; integendeel, het Genootschap mag zijns inziens verheugd zijn met de persoon van Luc Florack.

3 Mededelingen van het bestuur.

De voorzitter deelt mede dat gedurende het jaar 2001 Jaap Seidel, erelid van het WG, is overleden.

Over 2001 is een financieel tekort vastgesteld van € 9668, een derde van hetgeen in de begroting was voorzien. Het bestuur heeft goede hoop dat de doelstelling om in 2003 in de zwarte cijfers te komen verwezenlijkt zal worden. Een instrument dat hiervoor in het leven is geroepen is het institutionele lidmaatschap; institutionele leden zijn op dit moment de universiteiten UL, UvA, VU, RUG, en het CWI; zij dragen in het algemeen bij in natura, bijvoorbeeld in de vorm van salariskosten. Daarnaast is het bestuur van plan bedrijfslidmaatschappen in het leven te roepen; het ligt in de lijn der verwachting dat in de komende maanden een aantal van zulke lidmaatschapsovereenkomsten aangegaan zal worden.

De ledenadministratie zal ondergebracht worden bij Giethoorn ten Brink, de drukker van zowel Pythagoras als het Nieuw Archief voor Wiskunde. Voor Pythagoras doet Giethoorn ten Brink reeds de abonnenmentenadministratie, en de ervaringen hiermee zijn zeer positief. De verwachting is dat Giethoorn ten Brink deze administratie zowel goedkoper als doelmatiger zal kunnen voeren.

Nederland bevindt zich nu in de één-na-hoogste categorie van lidmaatschap van de International Mathematical Union, met de bijbehorende contributie van f 12.150 per jaar. Traditioneel worden deze kosten door de KNAW gedragen, maar de contributieverhoging viel bij de KNAW niet in goede aarde; afgesproken is dat het WG hieraan een bijdrage levert van € 750 per jaar. Het is echter te verwachten dat deze bijdrage in de toekomst zal moeten toenemen.

De voorzitter maakt de leden attent op de folder, de poster, en het setje ansichtkaarten, die onlangs zijn vervaardigd. De voorzitter dankt de stichting Activiteiten Besliskunde Eindhoven voor de subsidie van € 1250. Chris Zaai vraagt of de ansichten te koop zijn. De voorzitter antwoordt dat dit nog niet het geval is.

4 Verslagen.

De verslagen over 2001 worden besproken (de verslagen van de secretaris, de Publicatiecommissie, de Inspecteur der Boekerij, de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, de archivaris, de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen, en van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde zijn gepubliceerd in het Nieuw Archief voor Wiskunde (vijfde serie, jaargang 3, nummer 1); de verslagen van de penningmeester en de Kascommissie zijn hieronder opgenomen).

– Naar aanleiding van het verslag van de Inspecteur der Boekerij merkt de voorzitter op dat in tegenstelling tot wat vermeld is in het convocaat niet hij maar de secretaris (Mark Peletier) Inspecteur der Boekerij is.

De heer Barning vraagt naar de archivering van de Boekerij; Mark Peletier antwoordt dat de afspraak is met het CWI, waar de lopende abonnementen van de Boekerij gehuisvest zijn, dat het CWI zorg draagt voor bundeling, catalogisering, en archivering.

– De voorzitter van de Publicatiecommissie, Jan Karel Lenstra, licht de activiteiten van de Publicatiecommissie toe. Chris Zaai zal per 1 januari 2003 de taak van hoofdredacteur neerleggen; het bestuur zoekt een opvolger die samen met Ger Koole de hoofdredactie zal vormen. Samen met het bestuur streeft de commissie ernaar om uit de rode cijfers te komen, onder andere door het benaderen van bedrijven voor advertenties of bedrijfslidmaatschappen.

– Naar aanleiding van het verslag van de ITW meldt de voorzitter dat het op dit moment nog onduidelijk is of ITW-Nieuws blijft voortbestaan.

5 Financiën.

De penningmeester licht het financiële verslag op een aantal punten toe.

– Als gevolg van een omschakeling naar commerciële boekhoudsoftware is de vorm van het verslag anders dan in voorgaande jaren.

– Het saldote kort over 2001 bedraagt € 9668, aanzienlijk minder dan het-

geen begroot was (ongeveer € 29.000). De vermindering van het saldote kort is het gevolg van zowel verminderde kosten als verhoogde baten. De kosten zijn lager dan begroot doordat het CWI de porti van de ruilabonnementen op het NAW voor zijn rekening neemt, de contributieverhoging voor de IMU voor een groot deel door de KNAW wordt gedragen, en doordat het WG minder aan sponsoring heeft uitgegeven dan begroot. De eerste twee redenen zijn structureel van aard.

Daarnaast is sprake van een eenmalige verhoging van de baten; het WG heeft in 2001 relatief veel donaties ontvangen, en met een herinneringsmailing is een aantal achterstallige contributies geïnd.

– In de begroting van 2002 neemt het tekort nog verder af. De inkomsten uit contributies zullen verder toenemen, als gevolg van de contributieverhoging; daar staat tegenover dat de inkomsten uit advertenties in 2001 tegen zijn gevallen.

De heer Te Riele vraagt of niet-betaalde contributies niet als debiteuren zijn opgevoerd. De penningmeester antwoordt dat in de oude administratie dit niet gebeurde; bij de overgang naar Giethoorn ten Brink zal dit mogelijk wel het geval zijn.

De heer Van Emde Boas vraagt wat de rechten en plichten zijn van bedrijfs- en institutionele leden. Jan Karel Lenstra antwoordt het volgende: Institutionele leden krijgen voor hun bijdrage aan het WG (bijvoorbeeld secretariële ondersteuning voor één dag in de week) twee toegangsbewijzen voor het Nederlands Mathematisch Congres (die het congres bij het WG in rekening kan brengen), een stand op dit congres, vijf exemplaren van de publicaties, 25% korting op de advertentietarieven, en vermelding van hun naam en logo in de publicaties en op de web site. Bedrijfsleden zijn er nog niet, en de tegenprestatie zal in het algemeen in onderhandeling worden bepaald; de standaardregeling zal zijn dat een bedrijf € 500 betaalt, en daarvoor een stand krijgt op het congres, een vermelding in de publicaties en op de web site, en een korting van 10% op de advertentietarieven. Als zij ook hun logo in de publicaties en op de web site vermeld willen hebben komt daar € 500 bij.

De heer Koornwinder vraagt naar de hoge post crediteuren. De penningmeester licht toe dat dit wordt veroorzaakt doordat rekeningen over 2001 pas in 2002 binnenkomen. De post is ieder jaar van een vergelijkbare grootte.

6 Contributie.

De contributie voor 2003 wordt vastgesteld conform het bestuursvoorstel:

gewone leden	€ 70
reciprociteitsleden	€ 50
gepensioneerden	€ 35
aio/oio's en studenten	€ 25

7 Decharge van de penningmeester en samenstelling van de Kascommissie 2001.

De penningmeester wordt gedechargeerd; de voorzitter bedankt de heren Barning en Beukers voor hun inspanningen, en benoemt beide heren tot de Kascommissie 2002.

8 Samenstelling van het bestuur.

De voorzitter legt uit dat Mariette Knaap, Jan Karel Lenstra, en Peter Stevenhagen aftreden. Annette Kik staat ten onrechte niet in het convocaat genoemd als reeds zittend bestuurslid (sinds juni 2001). Het bestuur draagt voor als nieuwe leden Koos Vrieze, Metha Kamminga, en Geertje Hek. Dit voorstel wordt bij acclamatie aangenomen.

Hiermee is de samenstelling van het bestuur:

drs. H. Bakker (RUG/HBO Friesland), contacten met leraren

dr. L. Florack (UU), penningmeester

dr. G. M. Hek (UvA), publicaties

drs. M. Kamminga (Noordelijke Hogeschool Leeuwarden), contacten met leraren

dr. A. Kik (CWI), PR

prof.dr. E. J. N. Looijenga (UU), voorzitter

prof.dr. J. Molenaar (TUE), industriële en toegepaste wiskunde

BATEN	f	€	LASTEN	f	€
betalrekeningen	61.013,09	27.686,53	openstaande rekeningen	146.509,00	66.482,89
spaarrekeningen	326.099,51	147.977,51	reservering adresboek	20.000,00	9.075,60
deposito's	25.246,30	11.456,27	bijzondere reserve	24.000,00	10.890,73
effekten	11.064,03	5.020,64			
NAW adverteerders	5.902,65	2.678,51			
Pi sponsors	41.892,20	19.009,85			
deelname Epsilon Uitgeverij	18.740,00	8.503,84			
overbrugging Pythagoras	23.385,93	10.612,07	kapitaal eind 2000	322.834,71	146.496,00
513.343,71	232.945,22		513.343,71	232.945,22	

Tabel 1 Eindbalans 2000 volgens oude rubricering

ACTIVA	f	€	PASSIVA	f	€
vlottende activa:			vreemd vermogen:		
<i>vorderingen:</i>			<i>crediteuren:</i>		
NAW adverteerders	5.902,65	2.678,51	crediteuren totaal	146.509,00	66.482,89
Pi sponsors	41.892,20	19.009,85	eigen vermogen:		
deelname Epsilon Uitgeverij	18.740,00	8.503,84	algemene reserve	20.000,00	9.075,60
overbrugging Pythagoras	23.385,93	10.612,07	bijzondere reserve	24.000,00	10.890,73
<i>liquide middelen:</i>					
Postbank	36.658,02	16.634,68			
ABN AMRO Bank	24.355,07	11.051,85			
deposito	25.246,30	11.456,27			
vaste activa:					
<i>financiële vaste activa:</i>					
aandelen	11.064,03	5.020,64			
Postbank Kapitaalrekening	200.000,00	90.756,04			
ABN AMRO Kapitaalmarktindex	126.099,51	57.221,46	kapitaal begin 2001	322.834,71	146.496,00
513.343,71	232.945,22		513.343,71	232.945,22	

Tabel 2 Beginbalans 2001 volgens nieuwe rubricering. Afgezien van de rubricering komt deze overeen met tabel 1.

ACTIVA	f	€	PASSIVA	f	€
vlottende activa:			vreemd vermogen:		
<i>vorderingen:</i>			<i>crediteuren:</i>		
debiteuren	6.715,00	3.047,13	crediteuren totaal	141.694,01	64.297,94
dubieuze debiteuren	1.830,50	830,64	eigen vermogen:		
deelname Epsilon Uitgeverij	16.840,00	7.641,66	algemene reserve	20.000,00	9.075,60
overbrugging Pythagoras	5.575,62	2.530,11	bijzondere reserve	24.000,00	10.890,73
<i>liquide middelen:</i>					
Postbank	47.604,76	21.602,10			
ABN AMRO Bank	87.220,97	39.579,15			
vaste activa:					
<i>financiële vaste activa:</i>					
aandelen	9.312,39	4.225,78			
Postbank Kapitaalrekening	179.000,52	81.226,89			
ABN AMRO Kapitaalmarktindex	131.371,86	59.613,95	kapitaal eind 2001	299.777,61	136.033,15
afrondingsverschillen		0,01			
485.471,62	220.297,42		485.471,62	220.297,42	

Tabel 3 Eindbalans 2001

dr. M. A. Peletier (CWI/TUE), secretaris, archivaris en Inspecteur der Boekerij dr. M. Vellekoop (UT), contacten met studenten prof.dr.ir.drs. O. J. Vrieze (UM), lid.

Het bestuur zal bij de volgende bestuursvergadering een ondervoorzitter uit zijn midden kiezen.

9 Rondvraag.

De heer De Bruijn stelt aan het bestuur voor een commissie voor popularisering van de wiskunde op te richten. Het bestuur neemt deze suggestie mee.

De heer Koorwinder vraagt naar de ontwikkelingen rond het graf van Brouwer. De voorzitter legt uit dat hij contact heeft gehad met de burgemeester van Blaricum. Het plan is een plaque bij het graf en een bordje aan de ingang van de begraafplaats te plaatsen. Het bestuur verwacht dat het plan dit jaar of begin komend jaar tot uitvoer zal worden gebracht. De heer Koorwinder geeft het bestuur de suggestie mee een tuinman aan te stellen of te betalen om het graf in enigszins betere toestand te brengen en te houden.

De heer Van Emde Boas vraagt of er nog spectaculaire events gepland zijn. De voorzitter antwoordt dat er niets op stapel staat.

10 De voorzitter sluit de vergadering om 12.40 uur.

2.2 Financieel verslag 2000 en begroting 2001

Met ingang van 1 januari 2001 is de financiële boekhouding grotendeels geautomatiseerd. Het Microsoft Excel-werkblad, dat voorheen gebruikt werd, heeft plaats gemaakt voor professionele boekhoudsoftware van Davilex Business. Dit garandeert interne consistentie (debet- en creditzijde zijn altijd in evenwicht, rekenfouten behoren tot het verleden, overeenstemming met kasboektotalen wordt bij invoer afgedwongen, enzovoort) en zal op den duur de taak van de penningmeester en de overdracht van het penningmeesterschap vereenvoudigen. Daarnaast bieden de vele rapportagemogelijkheden een vollediger beeld ter ondersteuning bij kascontroles.

De nieuwe werkwijze heeft implicaties voor de vorm van het financieel jaarverslag. Zo is de rubricering in overeenstemming gebracht met boekhoudkundige conventies en daardoor afwijkend van die uit voorgaande jaren. Waar nodig zullen wijzigingen in rubricering toegelicht worden.

Balans begin 2001

De Beginbalans 2001 is afgeleid uit de Eindbalans 2000. De rubricering is echter gewijzigd. De huidige balans bevat de balansposten *vaste activa*, *vlootende activa*, *eigen vermogen* en *vreemd vermogen*. De relatie tussen oude en nieuwe rubrieken volgt eenvoudig door tabel 1 met tabel 2 te vergelijken. De Eindbalans 2000 is ongewijzigd overgenomen uit het Financieel Jaarverslag 2000 (tabel 1). De Beginbalans 2001 is inhoudelijk gelijk, maar maakt gebruik van de nieuwe rubricering (tabel 2).

Merk op:

- NAW adverteerders, Pi-sponsors, deelname Epsilon Uitgeverij en overbrugging Pythagoras zijn specificaties van *vorderingen* (of *debiteuren*) en zullen in de toekomst, voor zover van toepassing, onder die verzamelrubriek in de balans bijengebracht worden. De ad hoc post Pi-sponsors is ingevoerd als verzamelpost voor sponsors van het Pi-evenement en keert op de Eindbalans 2001 niet meer terug. Merk op dat er geen overeenkomstige specificatie voor Pi-gerelateerde crediteuren bestaat; deze vallen onder de verzamelpost *crediteuren*.
- De oude posten betaalrekeningen en deposito's vallen onder de nieuwe rubriek *liquide middelen*, waarbij de eerste voortaan uitgesplitst wordt naar de afzonderlijke courante rekeningen. De deposito komt in de loop van 2001 tot uitkering en zal daarom niet meer op de Eindbalans 2001 figureren.
- De oude post effecten heet voortaan aandelen en maakt onderdeel uit van de rubriek *financiële vaste activa*, tezamen met de spaarrekeningen Postbank Kapitaalrekening en ABN AMRO Kapitaalmarktindexrekening. Deze laatste twee worden voortaan uitgesplitst naar de afzonderlijke spaarrekeningen in tegenstelling tot voorgaande jaren.

- De voormalige balanspost openstaande rekeningen blijft bestaan onder de nieuwe naam crediteuren totaal of kortweg *crediteuren*.
- De reservering adresboek heet voortaan algemene reserve. De bijzondere reserve blijft als zodanig bestaan. Reserveringen vormen tezamen met het kapitaal het *eigen vermogen*. Het kapitaal (dus eigen vermogen zonder de reserves) zal, net als in voorgaande jaren, als maatstaf voor de resultatenrekening gehandhaafd worden.

Balans eind 2001

De balans over het boekjaar is in tabel 3 gegeven.

Resultatenrekening 2001

Het eigen vermogen is over het boekjaar 2001 (na koerswinstcorrectie) met f 21.305,46 oftewel € 9.668,00 afgenomen: zie tabel 4.

Toelichting op de resultatenrekening 2001

1. De rubriek 'dubieuze debiteuren' betreft onzekere vorderingen (d.w.z. vorderingen gebaseerd op onzekere informatie). In de loop van 2002 zal meer zekerheid hieromtrent verschaft worden.
2. Epsilon Uitgaven betaalde in 2001 f 1.900,00 aan aflossing. De deelname van het WG in Epsilon Uitgaven is hierdoor gedaald van f 18.740,00 naar f 16.840,00: tabel 5.
3. Pythagoras loste in 2001 f 12.810,31 af aan het WG. Dit bedrag is tezamen met het jaarlijkse sponsorbedrag van het WG aan Pythagoras van f 5.000,00 in mindering gebracht op de overbrugging Pythagoras. Deze is daardoor afgenomen van f 23.385,93 (begin 2001) tot f 5.575,62 (eind 2001): tabel 6.
4. De aandelenportefeuille is per ultimo 2001 als volgt samengesteld: 165,9772 aandelen Rolinco à € 25,46: € 4.225,78, d.i. f 9.312,39.
5. Er is in voorgaande jaren f 20.000,00 gereserveerd tbv. het adresboekje. Deze reserve is in 2001 niet verhoogd, omdat de kosten van toekomstige productie dit bedrag naar alle waarschijnlijkheid niet zullen overstijgen.

Begroting en kosten 2001 en begroting 2002

Tabel 7 toont de begrote en werkelijke kosten over het boekjaar 2001 en de kosten zoals die begroot zijn voor het boekjaar 2002.

Toelichting bij tabel 7:

1. Ad 4125: De salarisverdeling is als volgt:
 - hoofdredactie NAW: 35% (0.3 fte),
 - eindredactie NAW: 29% (0.2 fte),
 - bureauredactie NAW: 21% (0.4 fte),
 - secretariaat WG-ledenadministratie: 15% (0.2 fte).
 De salarisbegroting voor 2001 is te laag ingeschat.
2. Ad 4151: Dit betreft het WG-aandeel in de portokosten; de bijdrage van het CWI (in 2001 f 8.635,09 oftewel € 3.918,43) is hierin reeds verdisconteerd. De totale uitgaven aan porti door WG en CWI samen bedraagt derhalve f 15.498,49 oftewel € 7.032,91. In de begroting voor 2001 was de CWI bijdrage niet voorzien; dit verklaart het verschil met de werkelijke kosten.
3. Ad 4157, 4160: De relatie tussen de nieuwe rubriek overige kosten en de oude rubricering is enigszins arbitrair. Hierdoor is een strikte vergelijking tussen werkelijke kosten en de begroting voor 2001 moeilijk te maken. Dit geldt in mindere mate overigens ook voor enkele andere rubrieken.
4. Ad 4154: De begroting gaat uit van de veronderstelling dat de reservering van € 4.000 toereikend is.
5. Ad 4170: Het WG heeft in 2001 de volgende sponsorbijdragen verstrekt:
 - najaarssymposium: f 1.500,00,
 - wintersymposium: f 700,91,
 - Stichting Vierkant: f 3.000,00,
 - Abacus: f 1.000,00.

Het totaal hiervan bedraagt f 6.200,91 oftewel € 2.813,85. In de begroting is, naast een schatting op basis van feitelijke sponsoring in 2001, ook een sponsorbijdrage aan Pythagoras (€ 2.250), aan het NMC (€ 900) en ten behoeve van de Brouwerlezing (€ 2.000) opgenomen. Uitgangspunt is dat

	<i>f</i>	€
kapitaal eind 2000	322.834,71	146.496,00
koerswinst	-1.751,64	-794,86
	321.083,07	145.701,14
saldo	-21.305,46	-9.668,00
af rondingsverschillen		0,01
kapitaal eind 2001	299.777,61	136.033,15

Tabel 4 Resultatenrekening 2001

deelname Epsilon Uitgeverij begin 2001	18.740,00
Af: door Epsilon Uitgeverij aan WG afgelost	1.900,00-
deelname Epsilon Uitgeverij eind 2001	16.840,00

Tabel 5 Mutaties in deelname Epsilon Uitgeverij: de vetgedrukte bedragen zijn terug te vinden in de Beginbalans 2001 respectievelijk Eindbalans 2001.

overbrugging Pythagoras begin 2001	23.385,93
Af: door Pythagoras aan WG betaald	12.810,31-
Af: WG sponsoring 2001 aan Pythagoras	5.000,00-
overbrugging Pythagoras eind 2001	5.575,62

Tabel 6 Mutaties in overbrugging Pythagoras: de vetgedrukte bedragen zijn terug te vinden in de Beginbalans 2001 respectievelijk Eindbalans 2001.

de overige kosten verbonden aan laatstgenoemde door derden gedragen zullen worden. De oorspronkelijke begroting voor 2001 is aanmerkelijk hoger dan de feitelijke kosten. Voor een deel is dit te verklaren doordat de sponsoring aan Pythagoras over 2001 op een andere wijze verrekend is, namelijk via de overbrugging aan Pythagoras (zie tabel 6).

6. Ad 4200: De premie voor de bestuursverzekering voor 2002 is feitelijk ten laste gekomen van 2001. Dit verklaart zowel de begroting voor 2002 als het verschil tussen werkelijke kosten en begroting voor 2001.
7. Ad 4252: Door late facturering van voorgaande jaren is er feitelijk een bedrag aan IM afgedragen over 1999/2000 dat hoger is dan de reservering van f 6.000 die daarvoor gemaakt is, namelijk f 8.543,60. Het verschil van f 2.543,60 is ten laste gebracht van 2001. De afdracht IM over 2001 bedraagt f 3.932,60, zodat de totale afdracht IM ten laste van 2001 f 6.476,20 bedraagt, oftewel € 2.938,77.
8. Ad 4253: De KNAW heeft het grootste deel van de jaarlijkse kosten op zich genomen van het IMU-lidmaatschap van Nederland (dit was niet geanticipeerd in de begroting voor 2001). Het WG draagt € 750 per jaar bij.
9. Ad 7250: De afdracht SDF wordt niet als kosten beschouwd. De donaties SDF worden niet als baten beschouwd. Deze twee posten zijn per definitie in balans. De afdracht SDF is in 2001 niet uitgevoerd. Het bedrag uit voorgaande jaren (f 4.377,69) is tezamen met de in 2001 binnengekomen donaties (f 1.919,50) ondergebracht als 'afdracht SDF' in de verzamelpost *crediteuren* op de Eindbalans 2001. Het totaalbedrag zal in 2002 daadwerkelijk worden afgedragen.

Begroting en baten 2001 en begroting 2002

Tabel 8 toont de begrote en werkelijke baten over het boekjaar 2001 en de baten zoals die begroot zijn voor het boekjaar 2002.

Toelichting bij tabel 8:

1. Ad 5150: Het aantal contributie verschuldigde WG-leden bedraagt 1290 (peildatum: 26 maart 2002). Deze zijn verdeeld over vier tariefgroepen (per 1 januari 2002): € 70 (gewone leden: 885), € 50 (reciprociteitsleden: 155), € 35 (gepensioneerde leden) en € 25 (studentleden). Door de nieuwe tarieven wordt er over 2002 een hogere bate uit contributies verwacht. De werkelijke inkomsten over 2001 zijn hoger dan begroot door het innen van achterstallige

contributies middels herinneringsfacturen.

2. Ad 5151: In de begroting is uitsluitend de structurele bate van het Godefroy legaat opgenomen. Baten uit donaties wijken in 2001 in gunstige zin af van voorgaande jaren, maar dit wordt als een eenmalige meevaller beschouwd.
3. Ad 5153: De begroting is gebaseerd op de op dit moment lopende contracten met adverteerders voor NAW jaargang 2002. Het staat vrijwel vast dat advertentie-inkomsten in 2002 aanmerkelijk lager zullen uitvallen dan in 2001.
4. Ad 9000, 9052, 9090: De rente-inkomsten over 2002 zullen lager zijn dan in 2001 als gevolg van de afname van het spaartegoed. De tot uitkering gekomen deposito leverde in 2001 bovendien extra rente-inkomsten op.

Samenvatting

Tabel 7 en tabel 8 tonen een saldotekort over 2001 van € 9.668,00 (€ 101.612,85 minus € 91.944,85) en een begrotingstekort voor 2002 van € 3.250 (€ 99.250 minus € 96.000).

Het feitelijke saldotekort € 9.668,00 is aanzienlijk kleiner dan aanvankelijk begroot (f 65.000, oftewel € 29.495,71, zie Financieel Jaarverslag 2000). Ondanks hogere salariskosten is er sprake van een aanzienlijke kostenreductie op de posten porti (dankzij het CWI aandeel hierin), afdracht IMU (dankzij de forse KNAW bijdrage) en sponsoring. De eerste twee zijn structureel van aard. Ook zijn er meevallende eenmalige baten, met name uit donaties en achterstallige contributies.

Het tekort neemt volgens de begroting verder af tot € 3.250 over het boekjaar 2002. Helaas is de significante stijging van de baten uit contributies en de daling in salariskosten niet voldoende om het tekort geheel op te heffen. De verwachte tegenvallende inkomsten uit advertenties NAW zijn de belangrijkste oorzaak. Desalniettemin kan men constateren dat het WG zijn weg gevonden lijkt te hebben naar een gezondere financiële positie.

Utrecht, 4 april 2002, Dr. L.M.J. Florack, penningmeester

2.3 Verslag van de kascommissie

De kascommissie verklaart hierbij het financiële verslag van de penningmeester over het boekjaar 2001 te hebben gecontroleerd. Na inzage van de boeken en verdieping in de gevoerde boekhouding kon worden geconstateerd dat het verslag een getrouw beeld geeft van de financiële situatie van het wiskundig Genootschap.

Het nieuwe boekhoudsoftware-systeem dat door de penningmeester in gebruik is genomen beantwoordt in belangrijke mate aan de toegenomen complexiteit van de boekhouding van het Genootschap. Tevens heeft de penningmeester voor een bijzonder heldere verslaggeving zorg gedragen, die van gunstige invloed was op de uitvoering van het controlewerk.

Utrecht, 3 april 2000, F.J.M. Barning, F. Beukers

3 Ad punt 4 van de Agenda

3.1 Verslag van de Secretaris

3.1.1 Leden De vereniging had op 1 januari 2003 1409 leden, waarvan 117 gebruik maken van het tarief voor gepensioneerden, 165 van het gereduceerde tarief (reciprociteitstarief), en 148 van het studenttarief; 68 leden hebben een introductielidmaatschap.

3.1.2 Verslag van het Najaarssymposium Op 22 november 2002 vond het najaarssymposium van het Wiskundig Genootschap plaats aan de Universiteit Nijmegen. Thema was dit jaar 'Wiskunde in breder verband'. De organisatie van het symposium was in handen van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde (ITW).

De sprekers waren

- Herman te Riele (CWI), *Toegepaste getaltheorie: de alomtegenwoordigheid van de priemgetallen*
- Rob Bisseling (UU), *Dataverdeling in grootschalig rekenen: van bolpakking*

tot Mondriaan

- Wieb Bosma (KUN), *Computer Algebra toegepast*
- Henk Nijmijer (TU/e), *Wiskunde in de werktuigbouwkunde*
- Paul van Batenburg (Deloitte & Touche), *Statistical auditing*

De middag werd afgesloten met een forum over de vraag *Wiskundestudie: de breedte in?*, met als forumleden Arjen Doelman (UvA), Rainer Kaenders (KUN en docent middelbaar onderwijs), Arie Langeveld (Shell), Hendrik Lenstra (UL en University of California at Berkeley), en Henk Nijmijer (TU/e).

3.1.3 Verslag van de Kaleidoscoopdag De Kaleidoscoopdag werd gehouden op woensdag 27 november 2002, georganiseerd door A-Eskwadraat. De voordrachten waren

- R. Núñez-Queija (TU/e, CWI), *Wachten of niet wachten: dat is de vraag*
- R. van der Mei (VU, KPN), *WWW... de World-Wide Wait*
- O. J. Boxma (TU/e), *Erlang's erfenis*
- N. Litvak (UT), *Travel time needed to collect n items on a circle*
- J. P. C. Blanc (UVT), *Correlaties in wachtrijprocessen*
- C. M. J. Tampère (TNO INRO), *Filevorming en fileontwikkeling: een kwestie van wachtrijen, veer-dempermechanismen of gasdeeltjes*

3.1.4 Verslag van het Wintersymposium Het Wintersymposium werd gehouden op 11 januari 2003 en was gewijd aan het thema 'Wiskunde in Techniek'. De sprekers waren

- J. Molenaar (TU/e, UT), *De kracht van de dimensie-analyse*
- P. J. Oonincx (KIM), *Surfen met plaatjes*
- R. W. C. P. Verstappen (RUG), *Turbulentie, golfballetjes en discrete afgeleiden*

3.1.5 Wiskunde PersDienst In 2002 is de Wiskunde PersDienst gelanceerd, een onderdeel van de website (url: www.wiskgenoot.nl/wpd) waar wiskundig geïntereerd nieuws verzameld en verspreid wordt. Andere wiskundige websites in Nederland maken gebruik van deze informatie (bijvoorbeeld de sites van Pythagoras en van het Freudenthal Instituut).

3.2 Verslag van de Penningmeester

3.3 Verslag van de Kascommissie

3.4 Verslag van het 38ste NMC, Eindhoven, 4 en 5 april 2002.

Net als bij de voorgaande afleveringen was er dit jaar de nodige aandacht voor tradities. Zo zijn er weer hoofdvordrachten gehouden door wiskundigen van naam: L.A. Peletier (Toegepaste analyse), M. Aizenman (Mathematische fysica, Brouwerlezing), G. Woeginger (Combinatorial optimization) en A. Blokhuis (lezing ter herinnering aan J.J. Seidel).

Er zijn drie speciale voordrachten gehouden, en wel door B. Poonen (Getaltheorie, Beegerlezing), F. den Hollander (Stochastiek) en E. de Schutter (Mathematische biologie).

Bepaalde activiteiten waren speciaal gericht op het wiskunde-onderwijs. Zo was er de prijsuitreiking van de Wiskunde Scholen Prijs.

Wat er zoal gaande is in Nederland (waarbij de eigen universiteit en Euran-dom vooral niet vergeten werden) klonk door in de 13 minisymposia: Wiskunde toegepast, Statistiek, Getaltheorie, Social choice and welfare, Visualisatie van de wiskunde, Cryptologie, Zwaarstaartige kansverdelingen, Interactieve leeromgevingen voor wiskunde-onderwijs, Discrete wiskunde, Numerieke analyse en Systeem- en regeltheorie.

Opvallend waren de volgende twee activiteiten:

- Speciaal voor aio's (en oio's) bestond de mogelijkheid om hun onderzoek in zeer kort tijdsbestek (5 minuten!) naar voren te brengen. Hiervan is door 15 promovendi gebruik gemaakt.
- Over de vraag of publiceren al of niet via de gevestigde papieren tijdschriften en uitgevers dan wel via bibliotheken en elektronische weg moest plaatsvinden is gediscussieerd in een forum over (elektronisch) publiceren. In totaal waren er 254 deelnemers, onder wie 35 studenten en ongeveer 20 leraren.

De organisatie was in handen van Arjeh M. Cohen (voorzitter), Jan Dijkstra, Hans van Duijn, Paul de Haas, Hannie Horvath, Anita Klooster, Jaap Molenaar, Rudy Pendavingh, Thieu Rietjens (penningmeester), Berry Schoenmakers en Anton Stoorvogel.

3.5 Verslag van de Inspecteur der Boekerij

In 2002 is een totaal van 76 nieuwe werken aan de boekencollectie toegevoegd, voornamelijk bestaande series monografieën, dissertaties en rapporten. Deze werken werden als geschenk of in het kader van ruil ontvangen.

Aan de tijdschriftencollectie zijn de volgende titels toegevoegd:

1. TASK Quarterly - Scientific Bulletin of Academic Computer Centre in Gdansk
Ruil met: Academic Computer Centre, Gdansk, Polen.
2. Vestnik Belorusskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya 1. Fizika, Matematika, Informatika
Ruil met: Belarussian State University Library Minsk, Russia.

Mark Peletier, Inspecteur der Boekerij

3.6 Verslag van de Publicatiecommissie

De publicatiecommissie werd in de herfst van 2000 ingesteld. Zij adviseert het bestuur inzake het publicatiebeleid en de aanstelling van hoofdredacties en zij adviseert de hoofdredacties inzake alle organisatorische, financiële en technische aspecten betreffende de totstandkoming van de publicaties. De hoofdredacties zijn verantwoordelijk voor de inhoud van de publicaties; het bestuur draagt de algehele en in het bijzonder de financiële verantwoordelijkheid.

De commissie bestond op 1 januari 2002 uit Luc Florack, Nicky Hekster, Jan Karel Lenstra (voorzitter), Michiel Vermeulen en Arjen Vestjens. In de loop van het jaar traden Geertje Hek en Rob Schrauwen toe tot de commissie. In september is het voorzitterschap overgedragen aan Geertje Hek en trad Jan Karel Lenstra af. De commissie hield zich vooral bezig met het scheppen van voorwaarden die nodig zijn voor het voortbestaan van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* en van *Pythagoras*, sinds enkele jaren een uitgave van het WG. Een belangrijke slag die in 2002 gemaakt is, is de overdracht van de WG-ledenadministratie en de NAW-abonnementen naar de drukker van het NAW en Pythagoras, Giethoorn ten Brink. Deze drukker beheerde de abonnementen van Pythagoras al naar volle tevredenheid.

Van het NAW verscheen in 2002 deel 3 van de vijfde serie, bestaande uit vier nummers en 375 bladzijden. De hoofdredactie bestond tot 1 januari 2003 uit Ger Koole en Chris Zaal; eindredacteur is Derk Pik. In verband met het terugtreden van Chris Zaal als hoofdredacteur en 'manus van alles' zijn diens taken over verschillende personen verdeeld. Als hoofdredacteur wordt hij medio 2003 opgevolgd door Jaap Top, en voor veel alledaagse zaken en onder andere ook advertentieacquisitie is Reinie Ern  aangetrokken als *bladmanager*. Zij heeft een werkplek in Leiden, waar ook de NAW-bureau- en eindredactie zit. Gedurende de eerste maanden van 2003 draagt Chris Zaal het restant van zijn werkzaamheden aan haar en aan de publicatiecommissie over. Het NAW is in 2002 nog steeds een te kostbare operatie geweest. De publicatiecommissie heeft eind 2002 van het WG-bestuur een indicatie voor een bovengrens op de uitgaven ten behoeve van het NAW gekregen. Deze bovengrens wordt voor 2003 nader gespecificeerd.

Van *Pythagoras* verschenen in 2002 zes nummers van elk 32 bladzijden. Met de nieuwe hoofdredacteur Marco Swaen en eindredacteur Alex van den Brandhof is een goed vervolg gemaakt met de uitgave van *Pythagoras*. Reinie Ern  heeft ook voor Pythagoras enkele taken gekregen die voorheen vooral bij Chris Zaal lagen. De publicatiecommissie heeft een aanzet gemaakt om meer dan voorheen bij het reilen en zeilen van *Pythagoras* betrokken te raken. Het blad is financieel gezond, mits derden (i.c. universitaire wiskunde-instituten) bereid blijven substantieel bij te dragen in de kosten van hoofd- en eindredactie.

Naar aanleiding van een 'Organisatieadvies NAW' heeft de publicatiecommissie enkele in 2001 opgestarte activiteiten met succes voortgezet:

- diverse wiskunde-instituten zijn inmiddels institutioneel lid van het WG, d.w.z. ze steunen NAW, *Pythagoras* of het WG anderszins in materiële zin,
- de eerste bedrijfsleden zijn geworven,
- er zijn nieuwe advertentiekaarten gemaakt en -tarieven vastgesteld, en een start met de werving van nieuwe adverteerders is gemaakt,

- sommige artikelen vormen aanleiding voor een eenmalige advertentie
- het abonnee-beheer is eind 2002 volledig aan Giethoorn ten Brink overgedragen.

De financiële grondslag van het NAW is hiermee al verbeterd, maar het is nog steeds nodig hier verdere aandacht aan te besteden.

Tot slot is de publicatiecommissie naar aanleiding van haar ervaringen tot nu toe gestart met een heroverweging van haar taken, mede in het licht van de taken van de bladmanager.

Geertje Hek, voorzitter Publicatiecommissie

3.7 Verslag van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde

3.7.1 Samenstelling Commissie De NOCW is in 2002 uitgebreid. De samenstelling van de commissie is nu als volgt: R. van Asselt, F. Bosman (secretaris), H. Broer, J. v.d. Craats, J.G.M. Donkers, F. Goffree, T. Goris, C.P. Hoogland, C.J. de Jonge, M. Kamminga, W. Kleijne, M. Kollenveld, J.M. Notenboom (penningmeester), D. Siersma (voorzitter), A. van Streun, H. Verhage.

3.7.2 Activiteiten in het algemeen Met praktisch alle instituten en organisaties die in Nederland iets met wiskundeonderwijs te maken hebben, is in 2002 weer overlegd. Zo is er nogal wat tijd besteed aan het reageren op allerlei politieke voornemens en besluiten. Met name dienen te worden genoemd de bevoegdheidseisen voor zij-instromers en bachelors en de beperking van het aantal uren voor wiskunde in het VO. Na de afwijzing in 2001 van het projectvoorstel Wisnet-HBO is in 2002 een gelijksoortig projectvoorstel, maar dan van kleinere omvang ingediend. Ook dat werd weer niet gehonoreerd. Binnen de NOCW wordt voortdurend intensief overlegd over de inhoud van het wiskundecurriculum in de verschillende profielen van het VO. De onvrede in het veld over de omvang en het niveau blijft groeien. De commissie ziet het als één van haar taken om de discussie over 'inhoud en niveau' zo concreet mogelijk te voeren.

3.7.3 Nederlandse Wiskunde Olympiade In 2002 is het aantal deelnemers aan de Wiskunde Olympiade gelukkig weer iets toegenomen. Ruim 1900 leerlingen van bijna 170 scholen hebben meegespeeld. Naast de betaling van de kosten van deelname aan de Internationale Wiskunde Olympiade door OC&W zijn er verder bijdragen geleverd door Akzo Nobel, Educatieve Partners Nederland, Natuur en Techniek, het WG, de TU-Eindhoven en de Citogroep. De scholenprijs is in 2002 gewonnen door het Stedelijk Gymnasium in Breda. Bij de uitreiking daarvan heeft professor van der Blij, die daar zelf als docent heeft gewerkt, een gastcollege gegeven. Ruim 100 leerlingen hebben meegedaan aan de tweede ronde die, zoals gebruikelijk, in september in Eindhoven is gespeeld. Ook dit jaar zijn leerlingen die een hoge score in de Kangoeroe wedstrijd hebben behaald, uitgenodigd. De prijsuitreiking heeft op 15 november 2002 plaatsgevonden in Eindhoven. Eind 2002 is het boek 'De Nederlandse Wiskunde Olympiade, 100 opgaven met hints, oplossingen en achtergronden' verschenen. Dat boek zal, dankzij een legaat van Aegle Hoekstra en een bijdrage van Wiskids, gratis worden verspreid onder alle deelnemers aan de eerste ronde van De Nederlandse Wiskunde Olympiade 2003.

3.7.4 Internationale Wiskunde Olympiade In 2002 is bij de Internationale Wiskunde Olympiade in Glasgow een bronzen medaille gewonnen. Er werd dit jaar ook één eervolle vermelding verdiend. De winnaar van de bronzen medaille heeft een prijs van € 250,- gekregen. De NOCW zet daarmee de traditie van een geldprijs voor elke winnaar van een medaille bij de Internationale Wiskunde Olympiade voort.

3.7.5 Wiskunde A-lympiade en Wiskunde-B-dag De A-lympiade vond in 2002 voor de 14e keer plaats. De belangstelling groeit nog steeds. Ook uit het buitenland groeit de deelname. Er hebben 70 scholen uit Denemarken meegedaan en groepen uit Duitsland en de Antillen. In dezelfde geest als de A-lympiade is de wiskunde-B-dag opgezet: een wedstrijd tussen schoolteams door middel van internet. Deze vond in 2002 voor de derde keer plaats. De begeleiding van beide activiteiten is in handen van H. v.d. Kooij van het Freudenthal Instituut.

3.7.6 Kangoeroe Wedstrijd In 2002 bedroeg het aantal deelnemers ruim 30.000 (er waren ongeveer 34.000 aanmeldingen). De wedstrijd wordt georganiseerd voor de lagere klassen van het voortgezet onderwijs met drie verschillende versies opgaven. De logistieke organisatie en administratie is in handen van de Citogroep. In 2003 wordt een nieuwe indeling gebruikt. De 'jongste' groep zal bestaan uit deelnemers van de twee hoogste groepen uit het basisonderwijs en de eerste twee klassen van het VMBO. De daarop volgende groep bestaat uit de klassen 3 en 4 van het VMBO en de klassen 1 en 2 van HAVO en VWO. De 'oudste' groep bestaat uit de leerlingen van de hogere klassen van HAVO en VWO.

3.7.7 Wiskids Het project Wiskids wordt uitgevoerd door het Freudenthal Instituut. Wiskids fungeert als samenwerkingsverband van (bijna) alle activiteiten die op het gebied van wiskunde in verschillende min of meer buitenschoolse vorm worden georganiseerd. Naast de Wiskunde Olympiades en de Kangoeroe (zie boven) zijn dat de volgende activiteiten: Ratio, Wiskunde in Perspectief, De Vierkant zomerkampen en wiskundeclubs, het blad Pythagoras, de Scholenprijs en de website WisFaq. Voor meer en uitgebreide informatie zie de website van het Freudenthal Instituut: www.fi.uu.nl.

F. Bosman, secretaris NOCW

3.8 Verslag van de archivaris

Het archief van het Wiskundig Genootschap was in 2002 in goede handen bij het Rijksarchief in de Provincie Noord-Holland, Kleine Houtweg 18, 2012 CH Haarlem. Het archief is ontsloten via de uitgebreide *Inventaris van de archieven van het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven'*, opgericht te Amsterdam in 1778, (1782) 1798 - 1968 (1991) door S. Neugebauer (Haarlem, 1995).

M. A. Peletier, archivaris WG

3.9 Verslag van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen

3.9.1 Algemeen De archieven onder beheer bij de CPAW, zijn, m.u.v. Arch. 1 en Arch. 13, geplaatst bij het Rijksarchief in de Provincie Noord-Holland, Kleine Houtweg 18, 2012 CH Haarlem. Aldaar zijn zij voor onderzoek beschikbaar. Het betreft de volgende archieven: Arch.2 (H.B.A. Bockwinkel (1881-1960)), Arch.3 (R. Lijdsman), Arch.4 (G. Röhrman), Arch.5 (W.H.J. van der Stok), Arch.6 (H. Nyon), Arch.7 (L.W. Nieland (1901-1945)), Arch.8 (T. van Aardenne-Ehrenfest (1905-1984)), Arch.8 (vervolg) (C.C.J. de Ridder en P. Ehrenfest jr. (1880-1933)), Arch.9 (D.N. van der Neut (1904-1985)), Arch.10 (een 60-tal foto's van wiskundigen), Arch.11 (C.G.G. van Herk (1900-1982)), Arch.12 (J.H. Wansink (1894-1985)), Arch.14 (H. Freudenthal (1905-1990)), Arch.15 (D. van Dantzig (1900-1959)). Arch.1 W. Kapteyn (1849-1927), berust bij de bibliotheek van het Museum Boerhaave in Leiden (onder nr. Arch. 371). Arch.13 M.J. van Uven (1878-1959) berust bij het CWI.

3.9.2 Activiteiten

- Het promotieonderzoek van S. la Bastide-van Gemert over het didactisch werk van H. Freudenthal, mede gebaseerd op diens persoonlijk archief, vordert gestaag.
- Met de erven N.H. Kuiper zijn de onderhandelingen m.b.t. overdracht van diens persoonlijk archief in een vergevorderd stadium. De overdracht wordt in 2003 verwacht.
- dr. G. Alberts heeft in het verslagjaar onderzoek verricht naar de archieven van overleden wiskundigen. Dit heeft enkele veelbelovende aanknopingspunten opgeleverd, maar nog geen concrete resultaten.
- Tijdens het Nederlands Mathematisch Congres 2002 in Eindhoven hebben de commissieleden Bolten en Alberts voordrachten gehouden bij een minisymposium over archieven.
- In het verslagjaar heeft de commissie twee keer vergaderd en wel op 13 februari en 19 juni 2002. Tijdens de vergadering van 13 februari trad A.W. Grootendorst af als voorzitter en als lid. Hij werd opgevolgd door dr.ir. T. Koetsier.

3.9.3 Samenstelling van de CPAW per 31 december 2002 dr.ir. T. Koetsier, voorzitter, dr. G. Alberts, Mw.drs. G.J.A.M. Bolten, prof.dr. D. van Dalen, dr. M. Bakker, secretaris.

grootboekrek. nr.	omschrijving	begroot 2001 (f)	begroot 2001 (€)	werkelijk (€)	begroot 2002(€)
4125	salarissen	76.500	34.714,19	43.187,91	40.000
4151	porti	21.000	9.529,38	3.114,48	3.500
4153	ontwerpkosten	14.000	6.352,92	9.727,55	10.000
4154	PR/reclamekosten	5.000	2.268,90	4.000,00	0
4155	vergaderkosten	3.000	1.361,34	1.613,96	1.700
4157, 4160	overige kosten	23.250	10.550,39	7.584,06	7.500
4161	declaraties	2.000	907,56	1.922,98	2.000
4170	sponsoring	20.500	9.302,49	2.813,85	8.000
4200	verzekering	600	272,27	531,68	0
4251	afdracht EMS	3.500	1.588,23	1.545,00	1.500
4252	afdracht IM	3.000	1.361,34	2.938,77	2.000
4253	afdracht IMU	12.150	5.513,43	750,00	750
4152, 4950	drukwerk & papier	52.000	23.596,57	21.563,72	22.000
4980	bankkosten	1.500	680,67	318,89	300
7250	afdracht SDF	2.000	907,56	0	0
	afrondingsverschillen		0,01		
4+7	kosten totaal	240.000	108.907,25	101.612,85	99.250

Tabel 7 Resultatenrekening 2001 en begroting 2002: Kosten

grootboekrek. nr.	omschrijving	begroot 2001 (f)	begroot 2001 (€)	werkelijk (€)	begroot 2002(€)
5150	contributies WG-leden	117.000 ¹	53.092,29	65.450,12	77.500
5151	legaten en donaties	0 ²	0	2.471,20	250
5152	abonnementen NAW	16.700	7.578,13	8.347,18	8.500
5153	advertenties NAW	16.000	7.260,48	6.865,95	2.250
5160	overige baten	7.000	3.176,46	218,61	0
5251	contributies EMS-leden	1.300	589,91	508,23	500
5252	abonnementen IM	2.000	907,56	1.080,00	1.000
9000, 9052, 9090	rente	15.000 ³	6.806,70	7.003,56	6.000
	afrondingsverschillen		0,01		
5+9	baten totaal	175.000	79.411,54	91.944,85	96.000

Tabel 8 Resultatenrekening 2001 en begroting 2002: Baten. Het bedrag gemerkt met (1) is inclusief SDF donaties; legaten en donaties (2) zijn samengevoegd met rente, v.i; het bedrag (3) is inclusief legaten en donaties.

3.10 Verslag van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde

Gedurende het jaar 2002 had ITW de volgende bestuurssamenstelling: Arie Langeveld vzt., Frits van Beckum secretaris/penningmeester (UT), Hans Schumacher (UvT), Cor Kraaikamp (TUD).

Het besluit van eind 2001 de uitgifte van ITW-Nieuws te staken, werd herroepen. De redactie van het blad heeft echter nog geen kans gezien een volgend nummer uit te brengen.

De Studiegroep Wiskunde met de Industrie, de vierde in Nederland, werd van 18 tot 22 februari gehouden in de gebouwen van de Universiteit van Amsterdam, georganiseerd door UvA en CWI. Ruim veertig Nederlandse wiskundigen wier-

pen zich, samen met enkele buitenlandse deelnemers, een week lang op zes vraagstukken die uit industrie en maatschappij bijeengebracht waren.

Onder de titel 'Wiskunde in breder verband' werd het Najaarssymposium van het WG georganiseerd, in samenwerking met de KUN, waar het symposium op 22 november plaats vond. Sprekers waren: Herman te Riele (CWI), Rob Bisseling (UU), Wieb Bosma (KUN), Henk Nijmeijer (TUE), Paul van Batenburg (Deloitte & Touche). Aansluitend werd een forumdiscussie gehouden over de breedte van de wiskundestudie, in het licht van recente initiatieven tot herstructurering en samenvoeging van de traditionele exacte opleidingen.

Frits van Beckum, secretaris

Danny Beckers

Universiteit Nijmegen, Mathematisch Instituut
Postbus 9010, 6500 GL Nijmegen
dbeckers@sci.kun.nl

Oud Archief

Wiskunde van nu is voor een groot deel het werk van mensen die al lang geleden zijn gestorven. Wat waren dat voor mensen en wat hield hen bezig?, Hoe verdienden ze de kost en hoe keek de maatschappij tegen hen aan? Danny Beckers, aio in de geschiedenis van de wiskunde aan de Katholieke Universiteit Nijmegen, neemt ons mee in de archieven van de wiskunde.

Begin negentiende eeuw begon wiskunde zich te ontwikkelen tot een autonoom vakgebied. Tot die tijd boden de wiskundige wetenschappen een breed scala aan kunsten en kundigheden, waaronder het boekhouden. Ons huidige Wiskundig Genootschap werd in 1778 opgericht door een gezelschap van onderwijzers, ingenieurs en boekhouders. Eén van de boekhouders en leden van het eerste uur, de Amsterdammer Jacob Kneppel, publiceerde rond 1790 het hier afgebeelde *Olyslagers Handboek*.

Het *Olyslagers Handboek* behandelt het zogenaamde Italiaanse boekhouden in een aantal uitgewerkte voorbeelden met betrekking tot een oliehandel. In een brief aan het genootschapsbestuur, besproken tijdens een vergadering op 25 juli 1789, verzocht Kneppel het boek te mogen opdragen aan het Wiskundig Genootschap. Hij stelde dat er onder de genootschapsleden wel niemand zou twijfelen of het boekhouden tot de 'wiskundige wetenschappen' moest worden gerekend. Blijk-

baar vond hij het belangrijk eventuele twijfel weg te nemen, want hij haalde meteen een van zijn roemruchte zeventiende-eeuwse voorgangers aan om die bewering kracht bij te zetten. Een verwijzing naar iemand uit de illustere Gouden Eeuw deed het in de periode van economische en politieke ellende waarin Nederland rond 1800 verkeerde over het algemeen goed. Tijdens de zeventiende eeuw was Nederland immers een belangrijke Europese natie geweest, dus die mensen moesten toch iets goed gedaan hebben, was de achterliggende gedachtengang.

Kneppel werd door het bestuur toegestaan om het boek aan het Wiskundig Genootschap op te dragen. Helaas voor hem werd het geen kassucces. Dat weerhield hem er uiteraard niet van om actief te blijven binnen het genootschap. Op 22 april 1792 — het genootschap had inmiddels de beide delen van zijn boek ten geschenke gekregen — hield Jacob Kneppel een voordracht voor de vijftiende algemene vergadering. De algemene vergaderingen waren voor alle leden toegankelijk en vonden eenmaal per jaar plaats. Zijn voordracht had als titel "Eenige algemeene trekken van de voortreffelijkheid der wiskunde". De tekst van zijn voordracht is (voor zover ik weet) niet bewaard gebleven, maar afgaande op het voorwoord van zijn boek mogen we aannemen dat de voortreffelijkheid waar naar hij in zijn titel verwijst, onder andere gebaseerd was op het feit dat de wiskunde

(in de betekenis van wiskundige wetenschappen) tal van nuttige kunsten omvatte. Onder die nuttige kunsten stond, niet op de laatste plaats, het boekhouden.

Hoeveel boekhouders bevinden zich eigenlijk onder de huidige leden van het Wiskundig Genootschap?

Literatuur

Jacob Kneppel, *Olyslagers Handboek, of Het Italiaansch Boekhouden, voor dezelve, en in soortgelijke Fabricquen en Traficquen, gemaklyk gemaakt*, Amsterdam (1789–1792)



Marinus Kaashoek

*Divisie Wiskunde en Informatica,
Faculteit der Exacte Wetenschappen,
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081A, 1081 HV Amsterdam
kaash@cs.vu.nl*

Afscheidsrede

Inspirerend, vernieu

Vrijdag 29 november 2002 heeft Rien Kaashoek zijn afscheidsrede 'Wiskunde: inspirerend, vernieuwend, betrokken' gehouden bij zijn aftreden als gewoon hoogleraar wiskunde aan de faculteit der exacte wetenschappen van de Vrije Universiteit. Hij is sinds 1966 aan de Vrije Universiteit verbonden en heeft naast zijn wetenschappelijke carrière veel voor de wiskundige gemeenschap betekend. Hij zet zich nadrukkelijk in voor een goede positionering van het Nederlandse wiskundige onderzoek. Vorig jaar heeft hij samen met Henk van der Vorst en Lex Zandee het rapport 'Nieuwe dimensies, ruimer bereik' geschreven, dat uitgebracht is door het nationaal Overleg Onderzoekscholen Wiskunde in samenwerking met de NWO Advies Commissie Wiskunde.

Morgen eindigt mijn dienstverband met de Vrije Universiteit, aanstaande zondag ben ik emeritus, en vandaag neem ik afscheid. Met velen van u heb ik mijn leven gedeeld: op verschillende niveaus hier binnen de universiteit, in het Thomas Stieltjes Instituut, in operator theory days en in andere nationale en internationale verbanden. Ik ben blij dat u gekomen bent. Dank ook voor de voordrachten die sommigen van u gisteren en vandaag ter gelegenheid van mijn afscheid hebben gegeven.

Dear Friends from abroad

Thank you for being here. Originally, I planned this occasion to be mainly a national affair. My sixtieth birthday, five years ago, had been an exciting international event [1], and I in-

tended my VU-farewell to have a local character. Your presence here is a very pleasant and highly appreciated surprise. Thank you also for the lectures that you presented yesterday and earlier today. I am touched by the fact that Trevor West, Lothrop Mittenhal and David Lay came to Amsterdam specially for this occasion. The four of us met in the academic year 1965–1966 at the University of California at Los Angeles, which I was visiting on a ZWO-stipend. Since then, we have been friends.

Co-operation with Israel Gohberg

I am particularly happy with the presence of Israel Gohberg. With him I shared the greater part of my mathematical life. I want to recall briefly how our co-operation started and how it flourished. I knew his name from the very beginning of my mathematical research at Leiden, and his seminal work [2] on operator theory was a constant source of inspiration. We first met in 1971 at an international operator theory conference in Tihany organized by the famous Hungarian mathematician Szökevalvi-Nagy. Our meeting was not a great success. Gohberg, who at that time was the head of the functional analysis department of the Moldavian Academy of Science at Kishinev, did not speak English and I did not speak Russian, which made communication difficult. Completely unexpected and certainly not planned, we met again in the beginning of 1975 at the University of Maryland at College Park. I had just arrived at College Park for a sabbatical leave from the VU and intended to work with my host David Lay. Gohberg had

left the Sovjet Union in 1974, had emigrated to Israel, and was in College Park for the first two months of 1975 as a guest of Seymour Goldberg, who I am happy to say is also here today.

During the two months that our visits overlapped, we had many discussions on problems in operator theory. Plans for a visit of Gohberg to the VU were developed. Early February of that year I wrote a letter to Nieuwland, who at that time was the chairman of our department of mathematics, and proposed to invite Gohberg for the Autumn semester of 1976. Nieuwland arranged the matter in less than two weeks. Gohberg's first period in Amsterdam ended with two large papers of the two of us, one on linearization appeared in the Journal of Functional Analysis [3] and was written jointly with David Lay, and the second [4], with Harm Bart, was the beginning of a new line of research in operator theory influenced by mathematical system theory.

At the end of 1976 it was decided that each year Gohberg would come to Amsterdam for two or three short periods, ranging from two to eight weeks. The contract would be for three years. In 1983 the three year contract was replaced by an appointment as a part time professor (buitengewoon hoogleraar in Dutch), which lasted until 1998 when Gohberg retired from the VU at the age of 70.

When I look back at my collaboration with Gohberg it is with great pleasure and satisfaction. The title of this lecture certainly fits this period. Many new ideas emerged, new students were attracted and joined our operator theory group, new connections were



Marinus Kaashoek

wend, betrokken

made, with colleagues in transport theory, with the mathematical system theory people and electrical engineers, and dissertations were written. Gohberg and I co-authored more than 100 papers, many jointly with other colleagues, among others Leonia Lerer and Peter Lancaster who also are here today. We co-authored five books, two jointly with Seymour Goldberg, one with Harm Bart, one with Freek van Schagen, and one with Ciprian Foias and Art Frazho (see [5]). Two other books are still in the pipeline, one was finished this week and is now in the hands of the publisher; the other still requires substantial work.

A long and successful collaboration cannot be based on common mathematical interests only; it requires also a basic mutual understanding and mutual trust. Both were present from the beginning and have been developed further over the years. It created a secure and enjoyable working environment. We, and many with us, had a great time.

Nieuwe dimensies, ruimer bereik

Vernieuwing en inspiratie in de wiskunde ontstaan vaak in interactie tussen verschillende gebieden, hetzij van binnen de wiskunde of van buiten. Grote doorbraken zijn op deze manier tot stand gekomen. Er zijn beroemde woorden die deze interactie tot uitdrukking brengen. *Geometrie* is zo'n woord. Algebraïsche meetkunde is ontstaan door een algebraïsering van de meetkunde en de naam verwijst dus naar een interactie tussen wiskundige deelgebieden onderling. Ook woorden als econometrie, mathematische fysica, wiskundige economie, mathematische logi-

ca, psychometrie brengen die interactie tot uitdrukking. Opvallend is dat in de loop van de tweede helft van de 20ste eeuw de interactie met wiskunde zich naar steeds meer wetenschapsgebieden heeft uitgebreid. Er wordt in dit verband zelfs gesproken van een revolutie [6].

De universitaire wiskundecurricula vermelden nu ook vakken als financiële wiskunde, wiskunde van bedrijfsprocessen, mathematische biologie. Onze faculteit kent een opleiding *Bedrijfswiskunde en informatica*. Op mijn bureau ligt een boek over mathematische fysiologie [7]. Men spreekt van een voortschrijdende mathematisering, van een ruimer bereik van de wiskunde. Er is niet alleen sprake van verbreding maar ook van verdieping. De interactie speelt zich af op een hoger niveau. Het oude onderscheid tussen zuivere en toegepaste wiskunde heeft aan betekenis ingeboet; meer dan voorheen vindt er verkeer in twee richtingen plaats. Wat ik u beschrijf is een internationaal verschijnsel dat men ook terug vindt in de omvangrijke nieuwe investeringen die de National Science Foundation in de VS doet ten behoeve van de wiskunde [8].

De Adviescommissie Wiskunde van NWO, de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek, heeft voor die interactie tussen wiskundige gebieden onderling en met verwante gebieden daarbuiten de mooie naam *Wiskunde op Raakvlakken* bedacht. De attitude die dit label veronderstelt, plaatst de wiskundige in een aantrekkelijke positie. Het vergroot automatisch zijn betrokkenheid bij het gehele wetenschappelijke ge-

beuren en het maatschappelijk gebruik van de wiskunde.

Vrijere opvatting van wat axioma's zijn

Het groeiend betrokken-zijn van de wiskunde bij andere disciplines heeft een principiële kant. Die betrokkenheid werd mede mogelijk dankzij een ingrijpende verandering in het wiskundig denken die stap voor stap plaats vond in de 19de en het begin van de 20ste eeuw. Een aspect van die verandering is een vrijere opvatting van wat een axioma is.

In de moderne wiskunde zijn axioma's niet meer, zoals oorspronkelijk in de Euclidische meetkunde, de voor iedereen onmiddellijk duidelijke elementaire waarheden die verder geen bewijs behoeven. Ze zijn gereduceerd tot afspraken, niet bewezen proposities, die de onderlinge relaties tussen de wiskundige objecten vastleggen. Deze veranderde opvatting van wat axioma's zijn, verschaft de wiskundige een enorme vrijheid in het wiskundig modelleren. Immers wanneer men voor een stelsel objecten inzielt, ontdekt, dat deze voldoen aan alle afspraken vastgelegd in de axioma's van een wiskundige theorie, dan gelden voor dat stelsel objecten ook alle stellingen, alle conclusies, die uit die axioma's binnen de betreffende theorie zijn afgeleid. Het verklaart het multi-inzetbaar zijn van een wiskundige theorie, het altijd weer verrassende feit dat verschillende verschijnselen met eenzelfde mathematisch model kunnen worden behandeld.

Een schokkende waarneming

De nieuwe dimensies en het ruimer bereik



In 1964 promoveerde Marinus Kaashoek cum laude op het proefschrift *Closed linear operators on Banach spaces*. Zijn promotor A.C. Zaanen feliciteert hem met het resultaat.

waar ik eerder over sprak zijn ook duidelijk waarneembaar in het gebied waarvoor ik aan deze universiteit ben benoemd. Ik zal u daar iets over vertellen.

Mijn leeropdracht aan de VU betreft functionaalanalyse en operatorentheorie, met een accent op het tweede gebied. Beide gebieden behoren tot het grotere gebied van de wiskundige analyse waarin van oudsher integraal- en differentiaalvergelijkingen en vergelijkingen met oneindig veel onbekenden een belangrijke plaats innemen. Kenmerkend voor de analyse is een fatsoenlijke omgang met oneindig. Het belang daarvan illustreer ik met een schokkende waarneming.

Hier is een voorbeeld van een oneindig stelsel lineaire vergelijkingen met oneindig veel onbekenden:

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{2}x_2 &= 0 \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 &= 0 \\ \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{8}x_4 &= 0 \\ \frac{1}{8}x_4 - \frac{1}{16}x_5 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

De drie stippeletjes daar onderaan staan voor enzovoorts, enzovoorts, ad infinitum. Als we voor x_1 één of ander getal nemen, bijvoorbeeld $x_1 = 2$, dan kunnen we de tweede onbekende x_2 oplossen uit de eerste vergelijking en vinden $x_2 = 4$. Nu x_2 bekend is, lossen we x_3 op uit de tweede vergelijking; we

vinden $x_3 = 8$. Met $x_3 = 8$ en de derde vergelijking berekenen we dat $x_4 = 16$. We gaan zo recursief verder. We vinden op deze manier een oplossing van dit oneindige stelsel vergelijkingen; een oplossing die begint met $x_1 = 2$. Laten we nu eens voor de aardigheid al die vergelijkingen bij elkaar optellen. In het rechterlid staan alleen maar nullen. De som van de rechterleden is dus gelijk aan nul. In het linkerlid valt de x_2 in de eerste vergelijking weg tegen de x_2 in de tweede vergelijking. Evenzo valt de term met x_3 uit de tweede vergelijking weg tegen de term met x_3 in de derde. Enzovoorts en enzovoorts. De som van de linkerleden is dus x_1 . Na optelling van alle vergelijkingen vinden we dus dat $x_1 = 0$. Maar x_1 was gelijk aan 2. We moeten concluderen dat $0 = 2$. Hier is iets mis. Ik laat het aan u over te bedenken wat er mis is. Doel van dit voorbeeld was u een oneindig stelsel lineaire vergelijkingen met oneindig veel onbekenden te laten zien en tevens duidelijk te maken dat in het omgaan met zulke stelsels voorzichtigheid geboden is [9].

Functionaalanalyse en operatorentheorie

Ik zal nu enkele karakteristieken van functionaalanalyse en operatorentheorie bespreken. Eerst twee korte omschrijvingen. Functionaalanalyse betreft de studie van rij- en functieruimten, zoals Lebesgue- en Hardyruimten, of meer in het algemeen van Hilbert- en Banachruimten en andere abstracte meetkundige structuren zoals topologische vectorruimten. In deze context is een operator een transformatie werkend tussen rij- of functieruimten.

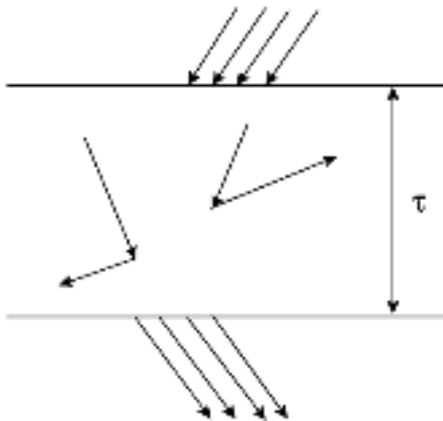
Deze twee omschrijvingen zullen voor velen weinig betekenen. Duidelijk zal zijn dat er een directe relatie tussen deze twee deelgebieden is, met de woorden rijruimte (ruimte van rijen) en functieruimte (ruimte van functies) als verbindende schakel. Tot 1967 vormden functionaalanalyse en operatorentheorie in de *Mathematics Subject Classification* zelfs één gebied, en het is nog steeds zó dat een inleiding in de operatorentheorie ook heel goed dienst kan doen als een inleiding in de functionaalanalyse.

Eenvoudige voorbeelden van operatoren zijn differentiëren, integreren en verschuiven:

- differentiëren: $\frac{d}{dx}$, $f(x) = 2x^3 + 1$, $f'(x) = 6x^2$,
- integreren: $\int_0^a$, $f(x) = 2x^3 + 1$, $F(a) = \frac{1}{2}a^4 + a$,
- verschuiven: $(f_1, f_2, f_3, f_4, \dots) \xrightarrow{V} (0, f_1, f_2, f_3, \dots)$.

De eerste twee zijn de klassieke transformaties uit de differentiaal- en integraalrekening, de derde is de verschuivingsoperator die zeer tot de verbeelding spreekt. Het beeld bevat steeds een volledige kopie van het origineel, een effect dat velen zullen kennen van het beroemde cacaobusje van Droste [10].

De woorden rij- en functieruimte zijn karakteristiek voor functionaalanalyse en operatorentheorie. Het is hier niet de plaats precies uit te leggen wat die woorden betekenen. Ik volsta met een paar kanttekeningen. De introductie van rij- en functieruimten heeft verschillende achtergronden. De eerste is de constatering dat onaangename contradicties van het type zoals we eerder tegenkwamen, en nog erger, kunnen worden vermeden als we niet alle rijen of alle functies toelaten maar ons beperken tot geschikte klassen [11]. Een tweede element, dat ook goed aansluit bij het eerste, is het besef dat wiskundige objecten, in dit geval rijen en functies, soms beter bestudeerd kunnen worden als elementen van een groter geheel, als elementen van een collectief, waarbij afgezien wordt van specifieke individuele eigenschappen. Tenslotte door een klasse van functies of rijen een meetkundige structuur te geven, kunnen alle verworvenheden van de meetkunde gebruikt worden om analytische problemen op te lossen. Men ziet die trend al in een beroemde publicatie [12] van Erhard Schmidt uit 1908 over de oplossing van lineaire vergelijkingen met oneindig veel onbekenden. Het eerste hoofdstuk van dat artikel heeft als titel *Geometrie in einem Funktionenraum*, en de eerste paragraaf in dat hoofdstuk heeft als ondertitel *Die*



Figuur 1 Lineaire transporttheorie modelleert het transport van deeltjes in een fysisch medium.

Pythagoräische Lehrsatz und die Besselsche Ungleichung. De stelling van Pythagoras in functieruimten: is dat niet een fascinerende gedachte? Hier is volop gebruik gemaakt van de modelleringsvrijheid waarover ik eerder sprak.

Functionaalanalyse en operatorentheorie staan dus voor een meetkundige aanpak van analytische problemen. Woorden als verschuiving, draaiing, rotatie, spiegeling, symmetrie, isometrie, dilatie, projectie, contractie, gelijkvormigheid en dergelijke, die een typische meetkundige context hebben, deden daarmee hun intrede in de wiskundige analyse. Wiskunde op raakvlakken dus. Functionaalanalyse en operatorentheorie vertegenwoordigen ook een visie, een programma van fundamenteel onderzoek. Zij zijn krachtige instrumenten geworden om wiskundige problemen op te lossen. Is dat wel zo? Het is beter nu anderen aan het woord te laten.

Mechanica, functionaalanalyse en quantumfysica

Het eerste citaat betreft de mechanica en is afkomstig uit een bijdrage van H.J. Greenberg van het IBM Research Center aan het boek [13] *Curricula in Solid Mechanics* uit 1961. Ik citeer:

“ [The subject matter of functional analysis] is an aspect of modern mathematical analysis which is very much in vogue and with which we should become familiar.”

Merk op dat hier met ‘we’ niet de wiskundigen worden bedoeld maar de onderzoekers in solid mechanics, de mechanica van het gedrag van vaste lichamen in relatie tot hun fysische omgeving. Waarom zouden die zich verdiepen in functionaalanalyse? Hier is het antwoord van de auteur. Het bevat twee curieuze argumenten.

“For one thing, unless we do, we will soon be unable to converse with mathematicians

about topics which really concern us, such as the theory of differential equations, due to the introduction of much new terminology as well as new concepts. [Let op dat “which really concern us” : het gaat dus niet in de eerste plaats om functionaalanalyse.] For another thing, the emphasis in functional analysis on the operators and their abstract properties is closely related to, and, in fact, was in large part inspired by the problems of quantum mechanics in physics.”

Hier scoort de auteur een punt. Het abstracte begrip van een operator en de axiomatisering van het begrip Hilbertruimte hebben we te danken aan het wiskundegenie John von Neumann die beide in 1927 gebruikte voor zijn beroemde *Mathematische Begründung der Quantummechanik* [14] waarmee hij ook in één klap een lang lopende controversie in de theoretische natuurkunde beslechtte. De conclusie is (en ik citeer weer): “Thus we have here a promising new level of interplay between mathematical and physical ideas which may well provide a key to a deeper understanding of both, just as did calculus in a previous era.”

Transporttheorie

De betekenis van functionaalanalyse komt al beter naar voren in het voorwoord van het boek [15] over *Spectral methods in linear transport theory* van Kaper, Lekkerkerker en Hejzmanek uit 1982.

Het woord ‘transport’ slaat hier op migratie van deeltjes in een fysisch medium. Bijvoorbeeld een stroom van elektronen in een metalen strip, de diffusie van neutronen in een nucleaire reactor, de verstrooi-

ing van röntgenstralen in een levend weefsel of dat van lichtdeeltjes in een stellaire atmosfeer. Botsing van deeltjes kan resulteren in verstrooiing, absorptie of productie van nieuwe deeltjes. Het mathematische model voor de analyse van deze verschijnselen is een integro-differentiaalvergelijking. De onbekende is een dichtheidsfunctie. Er zijn randvoorwaarden: de dichtheid van de inkomende deeltjes en van de uitgaande deeltjes zijn beide bekend. Het probleem is uit te vinden wat zich afspeelt in het medium. Omdat verstrooiing in alle ruimtelijke richtingen kan plaats vinden wordt het probleem door oneindig veel parameters bepaald en heeft daarmee een oneindig dimensionaal karakter.

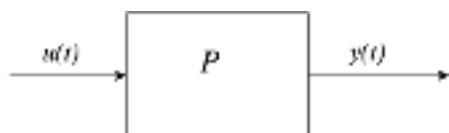
Nu het citaat: “Linear transport theory, as a branch of applied mathematics, has really come of age in the last decade. [We schrijven 1982.] It has lost the innocence it once had, when folklore provided the common wisdom and nobody was afraid to interchange limit and integral. Now, transport theory is serious business, and those who don’t see the beauty of Hilbert space fear to speak up, lest they be considered out of touch with reality.”

De auteurs hadden nog een andere reden hun boek te schrijven. “This development provided us with another motivation for writing a monograph, because nobody should doubt that there are indeed beautiful flowers to be found in Hilbert space (as well as Banach space). We have tried to make them visible, for our friends in transport theory and for other applied mathematicians who happen to stroll through our garden.”

Ik herinner me ook nog heel goed het enthousiasme waarmee we indertijd (22 novem-



Marinus Kaashoek (rechts) in College Park met Israel Gohberg (1975)



Figuur 2 Input-outputsysteem: $u(t)$ is de input op tijdstip t , $y(t)$ is de output op tijdstip t .

ber 1977) in ons wekelijks seminarium luisterden naar een voordracht van Lekkerkerker, toen hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam, over de lineaire transporttheorie en ook de daarop volgende uitvoerige discussie over relaties met ons eigen onderzoek. We herkenden één van zijn hoofdstellingen onmiddellijk als een bijzondere variant [16] (met onbegrensde operatoren) van een meetkundig ontbindingsprincipe dat wij eerder hadden bedacht, met andere toepassingen in gedachten. Van enige opwindung was zeker sprake. Vanaf dat moment had de transporttheorie mijn belangstelling.

Syteem- en regeltheorie

Mijn derde citaat betreft de mathematische systeem- en regeltheorie. Vorig jaar verscheen de bundel *Mathematics unlimited — 2001 and beyond* [17]. Een boek van meer dan 1200 pagina's waarin door verschillende auteurs in 63 artikelen een beeld wordt gegeven van, zoals in de inleiding wordt gezegd, “the great variety and the vitality of mathematics as we enter the new millennium”. Artikel 9 heeft de titel *New issues in the mathematics of control*, en is geschreven door Roger Brockett, één van de coryfeeën van de regeltheorie. De tweede paragraaf van dat artikel, direct na de inleiding, heeft als titel *Systems as Operators* en begint aldus:

“For us, a system is something that has inputs and outputs, coupled by dynamics. It is a common engineering idea which facilitates the design of television sets, jet engines, space stations, etc. The study of systems differs from the study of fields such as celestial mechanics in that autonomous behavior is only part of what is of interest; of equal or more importance is the way the system maps exogenous inputs to the effects, or outputs as they are usually called.”

Bij deze omschrijving hoort een plaatje dat standaard wordt gebruikt in de regeltheorie (zie figuur 2). De $u(t)$ boven de pijl links staat voor de input op het tijdstip t , het inkomende signaal; de $y(t)$ boven de pijl rechts voor de output, het uitgaande signaal. De doos met de hoofdletter P symboliseert de koppeling tussen de twee. De P staat voor proces of het Amerikaanse woord ‘plant’. Bij de doos kan men denken aan een industrieel of eco-

nomisch regelsysteem, een fysisch of biologisch netwerk en bijbehorende sensoren en aandrijvers. De signalen $u(t)$ en $y(t)$ zijn opgebouwd uit verschillende grootheden, zoals sturingsvariabelen maar ook ruis en storingen, die in de tijd veranderen.

Ruwweg gesproken is het doel van de regeltheorie er voor te zorgen dat met een zekere input u een gewenste output y wordt gegenereerd. Wat betekent dat wiskundig? Hier is het vervolg van het citaat.

“Mathematically speaking, [the study of systems] lies in a domain where the theory of differential equation of the evolutionary type meets functional analysis. Because systems have inputs and outputs there is the possibility of thinking of them as operators and making use, where possible, of composition and inversion as suggested by work on various operator algebras. Indeed, the composition of systems, inversion of systems, and the solvability of operator equations of this type immediately arise when one analyzes feedback systems [...]. This point of view has played an important role in many aspects of control theory and is basic to the systems point of view.”

Interdisciplinair onderzoek

Ik ben universitair getraind en opgeleid in functionaalanalyse en operatorentheorie, in Leiden gepromoveerd en leerling van A.C. Zaanen. De wereld van de ingenieurs was nieuw voor mij. Een aparte inspanning was nodig om daarin thuis te raken. Collega Malo Hautus van de TU-Eindhoven hebben we in-

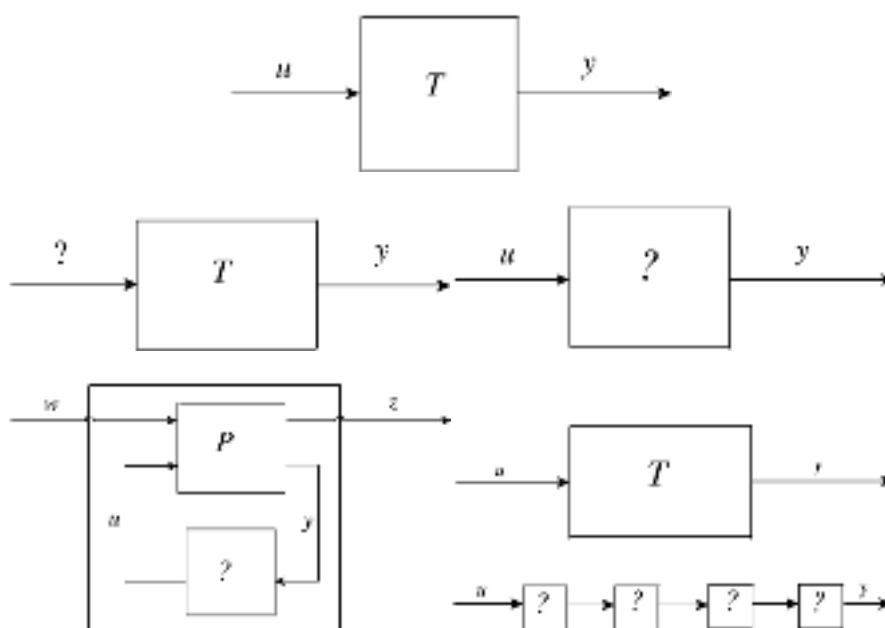
dertijd gevraagd om voor onze groep en andere geïnteresseerden een ‘crash course’ in moderne regeltheorie te geven (voorjaar 1979).

Gohberg reisde naar Zürich om Kalman, ook één van de coryfeeën van de regeltheorie, te ontmoeten. We ontdekten collega Patrick Dewilde van de afdeling Electrotechniek van de TU-Delft of misschien was het net andersom en ontdekte hij ons. Met hem en zijn groep hadden we in 1978 een eneroverende tweedaagse conferentie wat onder andere ons eerste artikel [19] in *SIAM Journal of Control* opleverde. We leerden alle moeilijkheden die aan interdisciplinair onderzoek zijn verbonden. Verschil in stijl en cultuur, verschil in doelstelling. Wij wiskundigen wilden de zaken wel goed wiskundig begrijpen en wiskundig goed behandelen; dat is niet altijd het eerste oogmerk van de ingenieurs die eerder denken aan ontwerp en gebruik dan aan theorie en bewijs. De gemeenschappelijke interesse, die onmiskenbaar aanwezig was, maakte veel goed.

Drie thema's

Ik besluit met een ruwe schets van drie thema's uit de operatorentheorie die centraal hebben gestaan in mijn onderwijs en onderzoek. Ik karakteriseer ze met de woorden *inverteren*, *reconstrueren* en *factoriseren* en breng ze in beeld met behulp van hetzelfde plaatje dat ik eerder voor een input-outputsysteem gebruikte, zie figuur 3, hieronder.

De doos met de hoofdletter T erin staat nu voor de transformatie, de operator. De u



Figuur 3 Bovenaan: een operator; midden links: het inverteren van een operator; midden-rechts: de reconstructie van een operator; linksonder: het vinden van een regelaar; rechtsonder: het ontbinden van een operator in factoren.

boven de pijl links staat voor het object, dat wordt getransformeerd en de γ boven de pijl rechts voor het resultaat van de transformatie.

In figuur 3, midden-links staat het plaatje dat past bij het eerste thema. De operator T en het object γ zijn gegeven. Het probleem is in de beginruimte een orgineel u te vinden dat door T in γ wordt omgezet. We noemen u dan de *oplossing* van de vergelijking $Tu = \gamma$. Denken we aan u als een inkomend signaal en aan γ als een uitgaande signaal, dan betekent het inverteringsprobleem niets anders dan de reconstructie van een inkomend signaal uit het waargenomen signaal en het belang van het thema is onmiddellijk duidelijk.

Het tweede thema breng ik in beeld met het plaatje in figuur 3, midden-rechts. Het probleem is een operator te reconstrueren op grond van partiële informatie over zijn gedrag. De operator is de onbekende. We willen in de doos kijken zonder deze te openen. In figuur 3, linksonder is een voorbeeld van zo'n probleem uit de regeltheorie: construeer een regelaar, de doos met het vraagteken erin, zó dat de invloed van het inkomend signaal w , nu op te vatten als een storing, op het uitgaande signaal z minimaal is. Dit regelprobleem heeft zeer boeiende aspecten, variërend van puur operatortheoretisch tot praktische pro-

blemen van ontwerp en constructie. Het kwam in de jaren tachtig op de agenda van functionaalanalyse en operatortheorie door het werk van Helton, Zames en een prachtig boekje van Bruce Francis (zie [20] en de verwijzingen daarin). Het heeft een groot aantal jaren de interactie tussen de operatortheoretici en ingenieurs gedomineerd.

In het derde thema gaat om het uiteenleggen, het ontbinden, van een operator in een product, een serieschakeling, van elementaire operatoren, de dozen met de vraagtekens erin (figuur 3, rechtsonder). Kan een operator ontbonden worden in eenvoudigere operatoren, zoals een getal ontbonden kan worden in priemfactoren of een veelterm in lineaire factoren? Welke operatoren zijn als eenvoudig aan te merken? Dit thema verschaft gereedschap om de twee andere te bewerken.

De drie thema's staan voor een wereld van vragen en problemen met als sleutelwoorden: oplosbaarheid, uniciteit, formules, algoritmen, numerieke procedures, kwalitatieve eigenschappen, modellering, approximatie en modelreductie, invariante deelruimten, kanonieke vormen en bijbehorende invarianten, robuustheid. Dit was in grote lijnen mijn werkterrein.

De drie woorden inspirerend, vernieuw-

end, betrokken heb ik overgenomen van een brochure [21] van de Vrije Universiteit uit 2002 waarmee de universiteit haar beleid voor de toekomst uiteen zet. Ik spreek daarmee tevens mijn dank uit aan deze universiteit waar ik zeer prettig gewerkt heb.

Instroom

Niet onvermeld mag blijven dat de Nederlandse wiskunde behalve nieuwe mogelijkheden ook een zeer groot probleem heeft. Dit probleem wordt veroorzaakt door de gestaag dalende instroom van studenten bij de exacte vakken en de koppeling van de financiering aan instroom en uitstroom van studenten.

De gestage daling van de instroom staat op gespannen voet met de onmiskenbare grotere vraag naar wiskundig onderzoek. Als de bron opdroogt, de fundamentele niet worden onderhouden, dan loopt het spaak. Het verbaast me hoe gemakkelijk de politiek aan deze bedreigende problematiek voorbij gaat. De onderzoekscholen op het gebied van de wiskunde hebben samen met de Adviescommissie Wiskunde van NWO een strategie ontwikkeld om het tij te keren. De nota *Nieuwe dimensies, ruimer bereik* [22], waarin deze nieuwe strategie wordt beschreven, biedt een aantrekkelijk scenario voor de toekomst.

Referenties

- 1 H. Bart, I. Gohberg, and A.C.M. Ran (Eds.), *Operator Theory and Analysis. The M.A. Kaashoek anniversary volume*, OT **122**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.
- 2 For a review of Gohberg's achievements, his curriculum vitae and list of publications see: Part A of *The Gohberg Anniversary Collection*, Volume I (Eds.: H.Dym, S. Goldberg, M.A. Kaashoek, and P. Lancaster), OT **40**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1989, and *Recent advances in operator theory* (Eds.: A. Dijksma, M.A. Kaashoek, and A.C.M. Ran), OT **144**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001, pages xiii–lvii.
- 3 I. Gohberg, M.A. Kaashoek, and D.C. Lay, Equivalence, linearization and decomposition of holomorphic operator functions, *J. Funct. Analysis* **28** (1978), 102–144.
- 4 H. Bart, I. Gohberg, and M.A. Kaashoek, *Minimal factorization of matrix and operator functions*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1979.
- 5 URL-adres van mijn web-pagina: <http://www.cs.vu.nl/~kaash>.
- 6 S.M. Verduyn Lunel, *In beweging*, tekst intreedende Vrije Universiteit, Amsterdam, 30 oktober 1998, pagina 16.
- 7 J. Keener, and J. Sneyd, *Mathematical Physiology*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- 8 De National Science Foundation (NSF) in de VS heeft de wiskunde uitgekozen als een gebied voor *priority area investment*, hetgeen de afgelopen twee jaar heeft geleid tot een jaarlijkse toename van het budget met meer dan 20%. Hiernaast heeft de NSF onlangs besloten tot de oprichting van drie nieuwe onderzoeksinstituten voor de wiskunde. Ook in ons omringende landen is sprake van extra investeringen voor het wiskundeonderzoek. In Duitsland is voor de wiskunde onlangs ME 50 extra beschikbaar gesteld vanuit de UMTS veiling. In Engeland heeft de EPSRC sinds 1997 het budget voor de discipline wiskunde met 139% verhoogd.
- 9 Een belangrijk opstakel is het feit dat het niet altijd mogelijk is oneindige matrices te vermenigvuldigen en zelfs als vermenigvuldiging wel mogelijk is dan moet men er op bedacht zijn dat het product van oneindige matrices niet associatief is.
- 10 H.Bart, *Verschuivingen*, tekst intreedende Erasmus Universiteit, Rotterdam, 7 februari, 1985, pagina 20 e.v.; het daar vertelde verhaal over het *Hilberthotel* kan men tegenwoordig in andere vorm ook vinden op het WEB (*Welcome to hotel infinity*, <http://www.c3.lanl.gov/mega-math/workbk/infinity/inhotel.html>). De verschuivingsoperator is wiskundig van groot belang, zie: N.K. Nikol'skiĭ, *Treatise on the shift operator*, Grundlehren **273**, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- 11 A.F. Monna, *Functional analysis in historical perspective*, Oosthoek Publ. Co., Utrecht, 1973.
- 12 E. Schmidt, über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Rend. del Circolo Matematica di Palermo* **25** (1908), 53–77.
- 13 H. Liebowitz and J. M. Allen (Eds.), *Curricula in solid mechanics*, bijdrage van H.J. Greenberg (IBM Research Center), Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1961, pagina 111.
- 14 J. von Neumann, Mathematische Begründung der Quantummekhanik, *Nachr. Gesell. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, (1927), 1–57.
- 15 H.G. Kaper, C.G. Lekkerkerker, and J. Hejtmánek, *Spectral methods in linear transport theory*, OT **5**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1982, pagina's ix, x.
- 16 Sporen van de discussie vindt men terug in paragraaf 5.1 van [15].
- 17 B. Engquist and W. Schmid (Eds.), *Mathematics unlimited — 2001 and beyond*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- 18 R. Brockett, *New issues in the mathematics of control*, in: [17], pp. 89–219.
- 19 H. Bart, I. Gohberg, M.A. Kaashoek, and P. Van Dooren, Factorizations of transfer functions, *SIAM J. Control and Optimization*, **18** (1980), 675–696.
- 20 B.A. Francis, *A course in H_∞ control theory*, Lecture notes in Control and Information Sciences **88**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- 21 *De Vrije Universiteit "Inspirerend, vernieuwend en betrokken"*, Vrije Universiteit, Dienst Communicatie, Amsterdam, februari 2002.
- 22 *Nieuwe dimensies, ruimer bereik*, uitgebracht door het nationaal Overleg Onderzoekscholen Wiskunde in samenwerking met de NWO Advies Commissie Wiskunde met ondersteuning van het bureau NWO (redactie: M.A. Kaashoek, H.J. van der Vorst, L. Zandee; eindredactie: C.G. Zaal en A. Hafkenscheid), april 2002.

Herold Dehling

Mathematik, NA 3/67

Ruhr-Universität Bochum

44780 Bochum, Germany

herold.dehling@ruhr-uni-bochum.de

Laudatio

Laudatio for Paul Embrechts

Op 21 mei 2002 heeft Paul Embrechts in de Aula van het Academieggebouw van de Universiteit Groningen de 2001/2002 Johann Bernoulli-lezing gehouden. Herold Dehling, hoogleraar stochastiek aan de universiteit in Bochum, sprak voorafgaand aan de lezing de onderstaande laudatio uit.

Mijnheer de Rector, ladies and gentlemen, it is a great and undeserved honor for me to have the opportunity to introduce the Johann-Bernoulli-lecturer for the academic year 2001/2002, *Professor Paul Embrechts* from the Eidgenössische Technische Hochschule in Zürich. Professor Embrechts is a well-known person in mathematics, known for his fundamental work on applied probability theory, insurance mathematics and the mathematics of finance, and hardly needs an introduction. Nevertheless, the Johann Bernoulli stichting voor de wiskunde has asked me to give a laudatio, maybe on behalf of the non-mathematicians in the audience, and thus I will try my best to tell you a little about the person Paul Embrechts and his work.

Paul Embrechts was born in Schoten in Belgium in 1953, he is married and has three children. He obtained his academic education in Belgium, first at the University of Antwerp and then at the Catholic University of Leuven, from where he graduated with a Ph.D. in Mathematics in 1979. His Ph.D. advisor in Leuven was Jef Teugels. Paul then spent two years as lecturer at Imperial College in London, was a *docent* at the University of Limburg in Diepenbeek

and in 1989 he obtained his present position as Full Professor of Mathematics at the ETH Zürich. There he holds a very prestigious chair in Insurance Mathematics that had previously been occupied by Hans Bühlmann, founder of the modern stochastic theory of insurance mathematics.

Insurance against extreme risks

The research of Paul Embrechts is at the interface of probability theory, more specifically applied probability theory, and its applications to insurance mathematics and mathematical finance. Paul Embrechts is one of the very few people in the world who combine profound mathematical research with the ability to talk to practitioners in banks and insurance companies. Paul finds inspirations for his mathematical research in the problems of modern day insurance and banking industry and is able to translate the results of his research into concrete advice for solutions.

Looking over the mathematical research of Paul Embrechts that by now spans a period of almost 25 years, one sees as a clear unifying theme the modelling of risks in insurance and finance and the rigorous mathematical analysis of such models. Topics that frequently appear in Paul Embrechts research are distributions with heavy tails, subexponential distributions, extreme value theory, regularly varying functions, ruin probabilities, themes arising from classical risk theory of non-life insurance mathematics. It is remarkable that Paul Embrechts is both an inspiring visionary and pathbreaker for new directions of research as

well as a master of the analytical techniques that are involved in the details of the studies — a great leader and a dedicated craftsman at the same time.

In the area of insurance mathematics, Paul is most notably interested in the difficult area of extreme risks, not the insurance against theft of our bicycles or against possible storm damage to the roofs of our houses but insurance against the risks of earthquakes, hurricanes, hail storms and other natural catastrophes. In such questions the classical approach of insurance mathematics, charging the expected claim plus a safety loading as premium, fails badly. The total claim size is not the average of a large number of small or moderate claims where classical laws of probability theory apply, but it is governed by a very small number or often just a single extreme claim. The analysis of such situations involves extreme value theory, an area of probability theory whose difficulty arises from the fact that extrapolation is required into a range where no data have ever been collected. In The Netherlands, this topic has a strong tradition in connection with flood data and the question of the heights of dikes required to guarantee a small probability of flooding. Lately Paul Embrechts research interests have also included the analysis of dynamical models that exhibit such extreme behaviour.

Concerning applications, during the last decade Paul Embrechts has focussed on the integration of insurance and finance. Roughly speaking the idea is to reinsure an extreme

risk for an insurance company by issuing a bond whose value on the day of expiry is contingent upon the occurrence of a certain catastrophic event, thereby spreading the risk that would ruin a single company among over many shoulders of small bond-holders. The valuation of such bonds is a topic on the border of insurance mathematics and mathematical finance.

In addition to his capacities already mentioned, Paul is an inspiring lecturer and a superb writer. His book *Modelling of Extremal Events for Insurance and Finance*, coauthored by Claudia Klüppelberg and Thomas Mikosch is an award-winning best seller. His recent book *Self-similar Processes*, written jointly with Makoto Maejima, will certainly become a classic, too.

Daniel Bernoulli

For the local audience it will be interesting to know that Paul Embrechts' research had at various moments ties with Groningen scientists from the past and present. The oldest tie I found in a reference to the Peter-and-Paul distribution as a counterexample to a theorem on dominated-varying distribution functions. The Peter-and-Paul distribution arises in the context of the St. Petersburg paradox which was for the first time seriously studied by the Groningen-born Daniel Bernoulli, son of Johann Bernoulli whose name is attached to today's lecture. Later reference is to the work of Aart Stam and Niels Kalma from the 1970s on subexponential distributions and on generalized renewal theory. Most recently Paul Embrechts had an extensive collaboration in the 1990's with then Groningen probabilist Thomas Mikosch.

It would go too far to cite all the honors that have been awarded to Paul Embrechts. He is a fellow of the Institute of Mathematical Statistics, an Elected Member of the International Statistical Institute and Honorary Fellow of the British Institute of Actuaries. He is Editor of *ASTIN Bulletin*, a leading journal on insurance mathematics, and an associate editor of several top journals.

As a result of his strong affiliation with the mathematics of insurance, finance and risk, Paul Embrechts holds in addition to his academic tasks top functions in private industry. Most notably he is member of the Board of Directors of Bank Julius Bär, Mathematischer Revisor for the Swiss Re Life insurance company and a founding member and the current director of RiskLab Zürich.



Paul Embrechts

Departement Mathematik
ETH Zürich, 8092 Zürich
Switzerland
paul.embrechts@math.ethz.ch

Johann Bernoulli lecture

The Wizards of Wall Street: did mathematics change finance?

Dit is een verkorte versie van de Johann Bernoulli-lezing uitgesproken door Paul Embrechts, hoogleraar verzekeringswiskunde aan de Eidgenössische Technische Hochschule in Zürich, op 21 mei 2002 in de Aula van het Academieggebouw van de universiteit in Groningen.

What field of science would one be talking about when hearing the following words: butterflies, eagles, rainbows, passports, Europeans, Americans, Asians, Parisians, Russians, knock-in, knock-out, barriers, swaps, swaptions, calls, puts, baskets, digitals, swings, down-and-under, ...? This rather strange zoology of terms comes from the realm of modern finance. All the words above refer to so-called financial derivatives. Most of them are options. A derivative is a financial product written on (derived from) another financial product. The latter is typically referred to as the underlying. A typical example is a so-called European call option written on a stock. This product (derivative) gives the holder the right (not the obligation) to exchange for the underlying stock at a predetermined date and price. The date is referred to as maturity, the price as strike. The buyer pays the seller a premium for this right. For instance, suppose a bank on March 28, 2002 writes a European call with maturity 1 year and strike 160.- CHF on Swiss Re N, then it promises the buyer (holder) of the call to deliver him one year from March 28, 2002 one stock Swiss Re N at the agreed price of 160.- CHF. A key question now concerns the calculation of a premium, fair for both buyer as well as seller. Swiss Re N closed on March 28 at 154.75 CHF. The *Wizards of Wall Street* mentioned in the title of this paper not only solved this problem, but also devised for the seller a perfect hedge; starting with the initial premium, they constructed a dynamic portfolio which allows the seller to exactly replicate the value of the call at maturity.

In this paper, I will discuss some mathematical techniques used in solving the above problem. Special attention will be given to the conditions underlying the solution. The world of derivatives will be placed in its historic context. Besides a brief excursion into the realm of risk management, I will also make some

comments on current and future research in the field.

Pricing a European call

Returning to the example above, denote by S_t the stockprice at time t ($t = 0$ is today), T stands for maturity and K denotes the strike, then, at maturity, the value of the European call is

$$C(T) = (S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0). \quad (1)$$

Given a risk free interest rate $r > 0$ in the market, a first intuitive guess of today's value of the claim $(S_T - K)_+$ at future time T is

$$C(0) = E\left(e^{-rT} (S_T - K)_+\right). \quad (2)$$

Here $E(X)$ denotes mathematical expectation of the random variable X defined on some basic probability space (Ω, F, P) where P stands for the (so-called physical) probability measure,

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega).$$

In order to make the latter point clear, I could have denoted $E^P(X) = E(X)$. It now turns out that (2) yields the wrong price (compare with (6))! A more intricate (so-called no-arbitrage) argument starting for instance from (6) yields the 'correct' price:

$$S_0 \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \Phi(d_2) \quad (3)$$

where

$$d_1 = \frac{\log(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Moreover,

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt, \quad (4)$$

the (cumulative) standard normal distribution function. The final parameter remaining unexplained is σ . The latter stands for the standard deviation (volatility) of the underlying stock. A more precise, mathematical definition will be given later, after the introduction of the model (10).

That the normal distribution function (4) has something to do with finance was early on clear to the Deutsche Bundesbank; see their old 10.- DM bank note with Karl Friedrich Gauss on it together with $\Phi(z)$ also referred to as the Gauss distribution. That Φ enters fundamentally in the pricing of derivatives, we owe to Fisher Black, Myron Scholes [4] and Robert C. Merton [22] and indeed very much depends on the conditions in the underlying model.

Formula (3) can without doubt be referred to as 'A Nobel formula', as indeed the 1997 Bank of Sweden Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel was given to Merton and Scholes (Black died some years earlier) "for a new method to determine the value of derivatives". As Keith Devlin wrote in 1997: "The award of a Nobel Prize to Scholes and Merton shows that the entire world now recognizes the significant effect on our lives that has been wrought by the discovery of that one mathematical formula." Little did Devlin realise how true his statement would become one year later.

There exist several ways to arrive at the Black-Scholes (-Merton) formula (3).

Solution 1. (PDE approach, Black and Scholes [4], Merton [22]) Denote the option price at time t ($0 \leq t \leq T$) by $C(t) = f(t, S_t)$, then $f(t, s)$ satisfies the so-called Black-Scholes partial differential equation

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + rs \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = rf \\ f(s, T) = (s - K)_+ \end{cases} \quad (5)$$

It is not difficult to show that (5) can be transformed into the heat equation and as such corresponds to one of the fundamental PDEs in physics. The reason for this will be given later.

Solution 2. (Martingale approach, Harrison and Kreps [15]; see Harrison and Pliska [16] for details on the early work)

So far we have only given one basic σ -algebra F of (measurable) events on Ω . In order to fully model financial markets, one has to introduce the notion of information. This is done through turning (Ω, F, P) into a filtered probability space $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$ where the σ -algebras F_t are increasing, i.e., for all $s \leq t$, $F_s \subset F_t$. The σ -algebra F_t can be viewed as the market information available at time t . One often takes the natural filtration $F_t = \sigma(S_s, s \leq t)$ generated by the underlying price process (S_t) . This choice is however less appropriate when one wants to model for instance insider information; in that case one may want to augment F_t above by some extra σ -algebra G denoting the extra information available. This then leads to interesting mathematical problems for properties of stochastic processes under augmented filtrations; see for

instance Amendinger et al. [1]. Given now a filtration, one can speak about the conditional expectation of X given all information up to and including time t , $E(X | F_t)$. The necessary correction to the intuitive formula (2) now becomes:

$$C(0) = E^Q \left(e^{-rT} (S_T - K)_+ \right) \quad (6)$$

or indeed more generally for the value $C(t)$ of the call at time $t \in [0, T]$:

$$C(t) = E^Q \left(e^{-r(T-t)} (S_T - K)_+ | F_t \right). \quad (7)$$

In (6) and (7), expectation with respect to the physical measure is replaced by expectation with respect to a so-called risk-neutral probability measure Q . Again, at this point, some fundamental conditions on the underlying model for (S_t) enter.

Solution 3. (Binomial tree pricing, Cox, Ross and Rubinstein [5]) Whereas Solutions 1 and 2 presuppose a continuous time model for (S_t) , Cox, Ross and Rubinstein came up with a discrete time solution which methodologically stands to the previous approaches as a random walk relates to its weak limit, Brownian motion (and hence the normal distribution). Assume that price processes can only go up or down with some (physical) probability $p, 1 - p$ respectively, i.e. for $t \in \mathbb{N}$,

$$S_{t+1} = \begin{cases} uS_t & \text{with probability } p \\ dS_t & \text{with probability } 1 - p \end{cases} \quad (8)$$

where $0 < d < 1 + r < u$. Then for $\tau = T - t$, time to maturity,

$$C(t) = (1 + r)^{-\tau} \sum_{j=0}^{\tau} \binom{\tau}{j} p^*{}^j (1 - p^*)^{\tau-j} \left(S_t u^j d^{\tau-j} - K \right)_+ \quad (9)$$

where

$$p^* = \frac{1 + r - d}{u - d} \in (0, 1).$$

Formula (9) is of the form (6) where Q corresponds to the binomial probabilities based on p^* . In general $p^* \neq p$, hence in (8) it is not important with which probability p prices go up or down. It is the stock's volatility (implicitly present in u and d) that plays the key role.

The above solutions are mathematically linked. The basic assumption on the underlying stock process (S_t) in Solutions 1 and 2 is geometric Brownian motion:

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t) \quad (10)$$

where μ is a drift parameter, σ the (assumed constant!) volatility and (W_t) stands for standard Brownian motion. The fact that the increments of Brownian motion are normally distributed,

$W_t - W_s \sim N(0, t - s)$, explains, after some calculations, the Φ in (3). Indeed, in micro-economic theory interacting agents (traders) are viewed as gas particles bombarding each other (or better said, the price of the stock). As Brownian motion has almost surely nowhere differentiable sample paths, the so-called Itô stochastic differential equation (10) has to be defined in a proper way. The solution to (10) is called a diffusion, properties of which can be studied via the theory of PDEs, leading to Solution 1, or via the (equivalent) theory of stochastic (martingale) calculus, leading to Solution 2. Solution 3 can be seen as a discrete time version of Solution 2, indeed, Solution 2 can be obtained through a central limit argument (weak convergence) of Solution 3. Also note the absence of μ (in (10)) from the formula (3).

I have refrained from giving detailed references to the results above. By now, a multitude of textbooks exists on the subject. For a mathematician, a good place to start is Bingham and Kiesel [3] for a fairly easy introduction. Mathematically more demanding are for instance Musiela and Rutkowski [23] and Karatzas and Shreve [18]. These texts contain numerous references for further reading. An excellent introduction in discrete time is Föllmer and Schied [12].

What about the conditions

There is no doubt that the Black-Scholes-Merton formula (3), and more importantly the methodology developed for the rational pricing and hedging of financial derivatives, changed finance. As such, the (mathematical) Wizards of Wall Street had a non-trivial impact on the developments of financial markets over the last couple of decades. Not only did the new option pricing formula (3) work, it transformed the market. When the Chicago Options Exchange first opened in 1973, less than thousand options were traded on the first day. By 1995, over a million options were changing hands each day. So great was the role played by the Black-Scholes-Merton formula in the growth of the new options market that, when the American stock market crashed in 1978, the influential business magazine *Forbes* put the blame squarely onto that one formula. Scholes himself has said that it was not so much the formula that was to blame, but rather that market traders had not grown sufficiently sophisticated in how to use it.

However, much more important it is to realise under what assumptions (mathematically as well as economically) does the formula hold. Already Black said that he found it difficult to apprehend that a formula like (3) based on so many unrealistic assumptions was so widely used and did so well. Here is a partial list of the key underlying assumptions:

- constant volatility
- independent, normally distributed relative returns
- no-arbitrage
- self-financing strategies
- no frictions (taxes, dividends, transaction costs)
- infinite liquidity
- stocks tradable at every fraction
- efficient, rational, complete markets
- perfect hedging.

One can show (partly statistically) that all of the above assumptions are violated to some extent in practice. For several of them (for instance constant volatility and frictions) the theory can be salvaged and necessary adjustments to (3) be made. In the end however, there always remain conditions that may not hold (even

approximately) for real markets. The ‘may not’ case typically occurs when markets are under stress, like the events surrounding the LTCM disaster in September 1998.

Long-Term Capital Management (LTCM) was a hedge fund set up around the former Salomon Brothers trader John Meriwether. With Merton and Scholes on the company’s board, LTCM was using highly quantitative techniques for taking advantage (through leverage) of, according to their methodology, mispriced products. For those (relatively few but big) investors allowed to join, a money machine seemed to emerge. A dollar invested in the fund around March ‘94 grew as follows: 3/94 (\$1), 3/95 (\$1.40), 3/96 (\$2.30), 3/97 (\$3.50), 3/98 (\$4), just short of its peak of around \$4.10. July ‘98 was down to \$3.50 before the lightening crash taking the fund down to about \$0.30 by early September 1998. By then, the fund reached a complete collapse and was saved from bankruptcy by a (still hotly debated) deal set up by the New York Fed and several large international banks. The latter deal was made out of fear for a worldwide financial meltdown. A ‘too big to fail’ situation surrounded LTCM in those crucial days. I am not saying that (3) was to blame for this; no doubt however, a far too optimistic view on the robustness for the methodology underlying (3) had an important role to play in the fall of LTCM. Readers interested in the more detailed non-technical story can read Dunbar [10] or Lowenstein [21]. For an excellent, more technical discussion on which conditions mainly caused the bad performance of LTCM’s risk management system as an early warning system, see Jorion [17].

In the aftermath of the 1998 LTCM (and other) disaster(s), the public transformed the *hailed* Wizards of Wall Street into the *failed* Wizards of Wall Street. My claim however is that not less, but *more* mathematical (critical) thinking is strongly needed. Mathematicians working in the field of finance (and insurance) have to communicate more forcefully the weaknesses/shortcomings and the assumptions underlying the models used. And let us not forget: mathematicians working in this area with a claim to applied relevance of their work *will have to study and understand the underlying economics!*

Some pricing techniques

By far the most useful economic device in the field of quantitative finance is the notion of no-arbitrage. An arbitrage opportunity is a self-financing strategy with zero initial value, which produces a non-negative final value with probability one and has a positive probability of a positive final value. By not allowing such strategies, economists can easily price new products exploiting their relationship with other existing ones. One example are the so-called currency triangles, as there is (US\$/€, €/£, £/US\$): these exchange rates must be perfectly linked, otherwise one could make a sure, riskless gain. A further example is the so-called put-call

Right: Oct 29 *Dies Irae*, 1929, James N. Rosenberg, litho, druk: George Miller. James Rosenberg was born in Pittsburgh, Pennsylvania, and grew up in New York City, attending Columbia University and graduating from Columbia Law School in 1898. Even after becoming a successful bankruptcy lawyer in Manhattan, Rosenberg nevertheless continued to cultivate a passion for art, which led to his becoming a collector. He painted and made prints in his spare time, discovering lithography under George Miller’s tutelage in 1919 (source: *Life of the people*, Washington, Library of Congress.) Copyright: Estate of James N. Rosenberg, permission granted by Anne Geismar.



parity. A European put is the right to sell a given stock at a given date for a given price, hence for the buyer it has a value at maturity of

$$P(T) = (K - S_T)_+. \quad (11)$$

Recalling from the first section the value of a call at time $0 \leq t \leq T$, $C(t)$ and denoting similarly by $P(t)$ the value of the corresponding put, then the put-call parity becomes, for $0 \leq t \leq T$,

$$S_t + P(t) - C(t) = Ke^{-r(T-t)}. \quad (12)$$

The easiest way of proving (12) is by assuming strict inequality for some $0 \leq t \leq T$ and then come up with a portfolio which shows a riskless profit by time $t = T$. Note that by the definitions of a European call and put ((1), (11)) one immediately has at maturity $t = T$, that

$$S_T + P(T) - C(T) = K. \quad (13)$$

An excellent reference on the use of arbitrage arguments in order to prove relationships like (12) is Cox and Rubinstein [6].

The early, main contribution of mathematics to finance is no doubt the formulation of a methodological foundation to the above economic no-arbitrage argument. The pricing equation (7) holds for general contingent claims Y (meaning $Y \in L^1(\Omega, F_T, P)$):

$$V_Y(t) = E^Q \left(e^{-r(T-t)} Y \mid F_t \right), \quad (14)$$

for $0 \leq t \leq T$ where V_Y denotes the value (or price) function of the claim Y . Applying now (14) to (13) and using a similar formula to (7) for a put yields:

$$E^Q \left(e^{-r(T-t)} S_T \mid F_t \right) + P(t) - C(t) = Ke^{-r(T-t)}.$$

At this point, a key observation has to be made, namely, for $0 \leq t \leq T$:

$$S_t = E^Q \left(e^{-r(T-t)} S_T \mid F_t \right)$$

or equivalently:

$$e^{-rt} S_t = E^Q \left(e^{-rT} S_T \mid F_t \right), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (15)$$

This means that the discounted price process $(e^{-rt} S_t)$ is a (Q, F_t) -martingale. It is this fundamental link between no-arbitrage for the price process and its martingale property (15) which lies at the heart of the importance of modern stochastic calculus for mathematical finance. This link, starting with Harrison and Kreps [15], found its culmination point in the so-called Fundamental Theorem of Asset Pricing as discussed in Delbaen and Schachermayer [9]. It is fair to say that early on, economists were able to derive pricing formulae for derivatives using the very powerful (and intuitive) device of no-arbitrage. By showing that the no-arbitrage concept is 'equivalent' with a martingale property of the underlying discounted price process, the doors were opened for the analysis of much more complex (so-called exotic) options. A whole stochastic calculus industry for finance emerged. It still largely

is a matter of taste to use stochastic calculus (martingale) techniques directly or go via the equivalent PDE theory. In order to get an idea on what type of options can be priced in practice, see for instance Lipton [20].

Above we saw that mathematics enters very fundamentally in order to establish a coherent methodology for the rational pricing of contingent claims. This is however only the beginning, the theory has been extended in a variety of ways. Some of these extensions are fundamental for practice, as for instance the analysis of pricing and hedging in incomplete markets. Other extensions contribute to a beautiful mathematical theory but offer little (if any) to the solution of real problems in finance; I refrain at this point from discussing examples of the latter category. Returning to the former, incompleteness of financial markets is of fundamental importance and is more the rule rather than the exception. A typical example of an incomplete market is one where jumps in the price process with random size occur. Contingent claims cannot be perfectly hedged (replicated), there are infinitely many equivalent (pricing) martingale measures Q and consequently, investors will have to indicate their attitude to risk. Notions like utility pricing and non-perfect hedging enter. Most of the modern textbooks on finance contain excellent accounts of the (non-trivial) mathematical theory. A very readable review paper is Schweizer [26]. A more in depth discussion on the use of mathematical techniques in finance is for instance to be found in Schachermayer [25].

As so oft in modern applied probability, and indeed as shown above very much so in mathematical finance, solving a practical problem posed can essentially be reduced to 'spot the martingale'! In view of the ever occurring ups and (especially) downs of financial markets, one may recall in this context the words of that famous gambler Giacomo Casanova (Venice, 1754): "At this same time I was being ruined at cards. Playing by the *martingale*, I lost very large sums; urged on by M.M., I sold all her diamonds, leaving her in possession of only five hundred zecchini. There was no more question of an elopement." This story leads us nicely to the next section, putting the above sketched development in a wider historical perspective.

Is history repeating itself

In the Code of Hammurabi, 1800 BC, the following text can be found "If any one owe a debt for a loan, or the harvest fail, or the grain does not grow for lack of water; in that year he need not give his creditor any grain, he washes his debt-tablet in water and pays no rent for this year." As is explained in Dunbar [10] p. 25, the above can be viewed as the debtors having an option to call upon the lenders to cover their interest payments in the event of crop failure, which effectively put a cap on their grain price exposure.

Hence derivatives in general, and options more in particular are not so new. All too often they are viewed as inventions of the 'capitalistic devil' and mathematicians seriously working on them ought to be scorned. I take a completely different view; financial options are so much part of every day life that it is an absolute necessity for mathematicians to take a serious interest. Who has not yet considered a prepayment option in a mortgage or a change from a fixed interest rate agreement to a variable one, or vice versa (a so-called swap). I go along with Steinherr [27] who claims

in his excellent (pre LTCM) book that the development of derivatives markets, and the from this development established quantitative risk management tools, constitute no doubt one of the key innovations of the 20th Century. The main reason why the general public occasionally loaths these modern tools of finance is through their perceived triggering effects in crashes and bubbles. Let me at this point quote some, especially for the Netherlands relevant 'history is repeating itself' anecdotes.

The first concerns the well-known history surrounding the inflation and consequently steep drop in the price of tulip bulbs in 17th Century Holland. At the peak of Tulipomania (Amsterdam, 1636–1637) 1 bulb of viceroy was sold for:

Two lasts of wheat	448
Four lasts of rye	558
Four fat oxen	480
Eight fat swine	240
Twelve fat sheep	120
Two hogsheads of wine	70
Four tuns of beer	32
Two tuns of butter	192
One thousand lbs. of cheese	120
A complete bed	100
A suit of clothes	80
A silver drinking cup	60

amounting to the considerable total of 2500 florins. The reason that such prices were paid lay in the fact that homogeneous coloured tulips at some (random?) time in the future could 'break' and transform into a highly non-homogeneous multi-coloured very rare species. As such, the buyer was investing into the future random payout and prepared to pay handsomely for that. Just before the bubble burst, tulip bulbs were sold forward (like futures today). It may be disputed to what level irrationality was present in the tulip market of 17th Century Amsterdam. One of the ways prices were determined involved assistants of the buyer and the seller to negotiate the price standing in an inn within a small circle drawn on the ground. This circle was referred to as 'het ootje'. Hence linguistic history seems to have chosen for considerable irrationality if we are to go by today's interpretation of 'in het ootje nemen'. It was only realised on the 20th century that the magical breaking of tulips was due to a virus. A most readable account of the history of the tulip from an early day Turkish delight to the present day Dutch emblem is to be found in Pavord [24].

A second Dutch historical account showing that serious option trading has been with us for centuries is to be found in Joseph de la Vega's *Confusión de Confusiones* [13]. Joseph de la Vega was a 17th Century businessman living in an Amsterdam community of Portuguese Jews having fled from the Spanish Inquisition. He recounts the following discussion on the floor of the Amsterdam stockmarket ('beurs') by the end of the 17th Century:

"If I may explain 'opsies' [further, I would say that] through

the payment of the premiums, one hands over values in order to safeguard one's stock or to obtain a profit. One uses them as sails for a happy voyage during a beneficent conjuncture and as an anchor of security in a storm.

The price of the shares is now 580, [and let us assume that] it seems to me that they will climb to a much higher price because of the extensive cargoes that are expected from India, because of the good business of the Company, of the reputation of its goods, of the prospective dividends, and of the peace in Europe. Nevertheless I decide not to buy shares through fear that I might encounter a loss and might meet with embarrassment if my calculations should prove erroneous. I therefore turn to those persons who are willing to take options and ask them how much [premium] they demand for the obligation to deliver shares at 600 each at a certain later date. I come to an agreement about the premium, have it transferred [to the taker of the options] immediately at the Bank, and then I am sure that it is impossible to lose more than the price of the premium. And I shall gain the entire amount by which the price [of the stock] shall surpass the figure of 600.

In case of a decline, however, I need not be afraid and disturbed about my honor nor suffer fright which could upset my equanimity. If the price of the shares hangs around 600, I [may well] change my mind and realize that the prospects are not as favorable as I had presumed. [Now I can do one of two things.] Without danger I [can] sell shares [against time], and then every amount by which they fall means a profit. [Or I can enter into



A pamphlet that warns against the speculative trade in tulips. C. van der Woude: *Tooneel van flora.*, 1637. Copyright: Bibliotheek Wageningen UR, Speciale Collecties

another option contract. In the earlier case] the receiver of the premium was obliged to deliver the stock at an agreed price, and with a rise in the price I could lose only the bonus, so now I can do the same business (in reverse), if I reckon upon a decline in the price of the stock. I now pay premiums for the right to deliver stock at a given price."

Hence the above quote contains the notions of put and call together with the risk management consequences of buying or selling such products. De la Vega further discusses the notion of shortselling.

I would like to add that the edition [13] also contains the most interesting *Extraordinary Popular Delusions and the Madness of Crowds* by Charles MacKay, written in 1841. His text clearly shows that 'there is nothing new under the sun' when it comes to bubbles and crashes, greed, irrationality, herding and market psychology. Every student interested in financial markets ought to read these historical accounts. A final comment I would like to make however. In all analyses of bubbles and crashes one has to be careful in too quickly filing such events par default in the chapter on irrational behaviour. A much more detailed study on the specific case at hand is always warranted. This also holds true for the Tulip Bubble. Garber [14] offers a market-fundamental explanation of the latter, as well as for two other bubbles also discussed by MacKay [13], the Mississippi Bubble (1719–1720) and the closely connected South Sea Bubble (1720).

Some thoughts on the present and the future

By now, the mathematical theory of financial markets is highly developed and well understood. Without wanting to make a link to econophysics, many compare the present state of the theory with the power of Newtonian mechanics used for describing nature in a first approximation. I personally think that we are not there yet; too many really fundamental practical issues remain too little understood. We may understand markets in a 'normal' state, however we have little to go by with that same theory when the very important 'abnormal/extreme' situations occur. The whole field of international market regulation, through globally accepted principles for quantitative risk management, is precisely interested in these 'bad case scenarios'. For a brief introduction in some of the issues mathematicians ought to be aware about, see Embrechts [11]. Also the development of new markets puts a challenge on the mathematical theory now available. I am for instance thinking of derivatives in insurance markets (see for instance Lane [19]), the deregulation of energy markets and real option markets (Davis et al. [8]) to name some of the more important ones. In all of these, besides the modelling of a price process, one also has to model an underlying physical process with all the added intricacies; as a prime example in the case of energy derivatives, think of the modelling of electricity transportation and storage. Because there is no effective way to store electricity, one cannot construct arbitrage portfolios with the underlying commodity and hence one needs to model the so-called term structure of future prices directly. Also, supply and demand fundamentals translate directly into spot price behaviour leading to a mean reverting spot process with spikes. These markets also lead in a very natural way to highly complex contract structures with implicit options. An example are the so-called swing options which are American style and have a path-dependent pay-

off structure. A swing option gives the holder of the options the right to buy power on a daily basis during the lifetime of the contract (30 days, say). There is an upper limit for the number of days at which exercise is allowed (20 days, say). The strike price may be fixed (F , say) or floating and typically a distinguishing feature, like a volumetric constraint, is present. Examples of such constraints are:

- a maximum flow rate, R_t ;
- a monthly minimum demand m , maximum demand M and a daily maximum demand D , all quoted as percentages of the theoretically possible energy consumption over the respective time intervals ($M \leq 20$), and
- a 'take or pay' constraint: the failure to take m by the end of the month costs $(m - C)F_m$ where F_m is an agreed unit price,

$$C = \int_0^{30} V_s ds,$$

where V_t denotes the instantaneous consumption rate at time t .

Using these constraints, the swing option can now be defined precisely (mathematically). Let

$$T = \{(\tau_1, \dots, \tau_{20}) \mid \tau_i \text{ stopping times, } \tau_1 < \dots < \tau_{20}\}$$

Moreover,

$$\begin{aligned} K_\tau &= \left\{ V : [0, 30] \times \Omega \rightarrow [0, R_t] \mid V \text{ adapted,} \right. \\ &\quad V \equiv 0 \text{ on } \left(\bigcup_{i=1}^{20} [\tau_i, \tau_i + 1) \right)^c \cap [0, 30], \\ &\quad \left. C \leq M, \int_{\tau_i}^{\tau_i+1} V_s ds \leq D, \quad i = 1, \dots, 20 \right\}. \end{aligned}$$

With this notation, the value of the swing contract can be described as

$$\sup_{\tau \in T} \sup_{V \in K_\tau} E^Q \left[\int_0^{30} (S_t - F)_+ V_t e^{-rt} dt - (m - C)_+ F_m e^{-30r} \right].$$

The latter formula, and indeed the underlying spot market, are a far cry from their originators (1), (11) and (10). The mathematical theory however needed for the pricing of swing options is available. What is much less understood are for instance the properties of the spot market (S_t) and the appropriate choice of Q , to name just two.

These, and many more derivative products will be engineered further in the future. Besides the intrinsic modelling of the underlying markets, at the end of the day risks taken will have to be aggregated and managed. This is where integrated risk management enters; see Crouhy et al. [7] for an excellent account. In a banking context, at the close of trading each day, a so-called P&L (Profit-and-Loss) is determined and projected (estimated) as an unknown distribution function F , a specific number of days (typically 10) in the future. Based on this F , risk measures are calculated, like the famous VaR (Value-at-Risk) which, for a given level $0 < \alpha < 1$, is 'just' the quantile:

$$\text{VaR}(\alpha) = -F^{-1}(\alpha) \quad (16)$$

where α is typically small (corresponding to losses), $\alpha = 0.05, 0.01$. Mathematicians have contributed in a fundamental way to questioning and understanding the rationale behind the choice of (16) (see for instance Artzner et al. [2]). For Dutch scientists, the discussion around using (16) as a risk measure is a *déjà-vu*. Indeed, following the dyke disaster of February 2, 1953, the Delta project demanded as a safety margin (α) for the dyke heights a 1/4000-year level for the delta region and the north and a 1/10000-year level for the 'Randstad'. Recall that the storm causing the 1953 flood was a 1/300-year event! Also in this case, the estimation of risk measures (dyke heights) given an α level (1/ t -year) is one issue, equally important and much harder to set-

tle is the choice of α , respectively t .

I very much hope that my paper will contribute in making mathematicians also interested in the latter problem. Financial derivatives are here to stay. They form an integral part of our social welfare society/system and hence should be understood and risk managed in a scientifically sound way. If mathematicians can really contribute to the global understanding of modern financial markets, then these Wizards of Wall Street will no doubt have an impact. To what extent mathematics has changed (or is changing) finance will to a large extent depend on how deeply mathematicians are prepared to get involved with the wider issues. :

References

- 1 Amendinger, J., Becherer, D. and Schweizer, M. (2001) A monetary value for initial information in portfolio optimization. *Finance Stoch.* To appear.
- 2 Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. and Heath, D. (1999) Coherent measures of risk, *Math. Finance* 9, 203–228.
- 3 Bingham, N.H. and Kiesel, R. (1998) *Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives*. Springer.
- 4 Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *J. Political Economy* 81, 637–654.
- 5 Cox, J.C., Ross, A. and Rubinstein, M. (1979) Option pricing: a simplified approach. *J. Financial Economics* 7, 229–263.
- 6 Cox, J.C. and Rubinstein, M. (1985) *Options Markets*. Prentice Hall.
- 7 Crouhy, M., Galai, D. and Mark, R. (2001) *Risk Management*. McGraw-Hill.
- 8 Davis, M., Schachermayer, W. and Tomkins, R. (2002) The evaluation of venture capital as an instalment option: valuing real options using real options. Preprint. (www.fam.tuwien.ac.at/~wschach/pubs)
- 9 Delbaen, F. and Schachermayer, W. (1998) The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes. *Math. Ann.* 312, 215–250.
- 10 Dunbar, N. (2000) *Inventing Money*. Wiley.
- 11 Embrechts, P. (2003) Extremes in economics and the economics of extremes. *Proceedings SemStat 2001*. Gothenburg. Chapman & Hall. To appear.
- 12 Föllmer, H. and Schied, A. (2002) *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*. Walter de Gruyter.
- 13 Fridson, M.S. (Ed.) (1996) *Extraordinary Popular Delusions and the Madness of Crowds* by Charles Mackay (1841) and *Confusión de Confusiones* by Joseph de la Vega (1688). Wiley.
- 14 Garber, P.M. (2001) *Famous First Bubbles. The Fundamentals of Early Manias*. The MIT Press.
- 15 Harrison, J.M. and Kreps, D.M. (1979) Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *J. Econom. Theory* 20, 381–408.
- 16 Harrison, J.M. and Pliska, S.R. (1981) Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stoch. Proc. Appl.* 11, 215–260.
- 17 Jorion, P. (2000) Risk management lessons from Long-Term Capital Management. *European Financial Management* 6, 277–300.
- 18 Karatzas, I. and Shreve, E. (1998) *Methods of Mathematical Finance*. Springer.
- 19 Lane, M. (2002) *Alternative Risk Strategies*. Risk Waters Group.
- 20 Lipton, A. (2001) *Mathematical Methods For Foreign Exchange: A Financial Engineer's Approach*. World Scientific Publishing.
- 21 Lowenstein, R. (2000) *When Genius Failed. The Rise and Fall of Long-Term Capital Management*. Random House.
- 22 Merton, R.C. (1973) Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141–183.
- 23 Musiela, M. and Rutkowski, M. (1997) *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer.
- 24 Pavord, A. (1999) *The Tulip*. Bloomsbury.
- 25 Schachermayer, W. (2000) Introduction to the mathematics of financial markets. St. Flour Summer School 2000. Springer. To appear. (www.fam.tuwien.ac.at/~wschach/pubs/)
- 26 Schweizer, M. (1999) A guided tour through quadratic hedging approaches. Discussion paper 96–1999, Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät, Humboldt University, Berlin.
- 27 Steinherr, A. (1998) *Derivatives: The Wild Beast of Finance*. Wiley.

Michiel Hochstenbach

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Postbus 80010, 3508 TA Utrecht

hochstenbach@math.uu.nl

Studiegroep wiskunde met de industrie

Eurodiffusie

Een van de problemen bij de Studiegroep wiskunde met de Industrie in februari 2002 was het modelleren van het zogenaamde eurodiffusieproces. Dit probleem heeft landelijk veel aandacht getrokken. Gevraagd werd een model te maken voor de bewegingen van euromunten over de twaalf eurolanden. Hoe snel gaan euro's van het ene naar het andere land? Wanneer kunnen we verwachten dat de helft van de euro's in onze portemonnee buitenlands is?

Op 1 januari 2002 vervingen twaalf Europese landen hun nationale munteenheden door de euro. De euromunten zijn niet identiek: één kant van elke van de acht denominaties (2 en 1 euro, 50, 20, 10, 5, 2 en 1 eurocent) verschilt van land tot land. Tot 1 januari waren deze munten nog (vrijwel) strikt gescheiden, maar wanneer mensen reizen, mengen de munten. Het verspreiden van de nationale euromunten over de verschillende Europese landen geeft dus tevens unieke informatie over de 'diffusie' van mensen. Het mengen van guldens over Nederlandse regio's zou vroeger ook informatie over diffusie van mensen hebben gegeven, maar die menging was destijds niet meetbaar. Het unieke aan de euro-introductie is, dat menging van munten uit verschillende regio's (landen) nu wél meetbaar is.



Mozart op het 1 euromuntstuk van Oostenrijk

In dit artikel analyseren we dit verschijnsel en proberen we een wiskundig model voor de beweging van de munten te geven. Hiermee hopen we onder andere inzicht in de snelheid van het mengproces te krijgen. In de modellen komen bepaalde parameters voor, die we kunnen schatten met de door zo'n 4000 Nederlanders en Belgen ingevoerde data op de eurodiffusie-internetpagina (zie [3]).

De diffusiesnelheid hangt af van de waarden van de in het model voorkomende parameters. Tijdens de studieweek waren deze nog moeilijk te schatten omdat er nog maar weinig gegevens beschikbaar waren. Een eerste schatting was echter dat het zo'n anderhalf jaar zou duren voordat de helft van alle munten in Nederlandse portemonnees van buitenlandse afkomst zou zijn.

Gegevens van banken

Op 1 januari 2002 werd de euro officieel betaalmiddel in 12 Europese landen. Volgens gegevens van de Nederlandse Bank (DNB) zijn over heel Europa 64.9 miljard munten geproduceerd, waarvan 3.3 miljard Nederlandse. Niet al deze munten zijn meteen in circulatie gebracht: in Nederland bijvoorbeeld 1.6 miljard, grofweg de helft dus. Overigens is voor elk land het aantal munten in verhouding tot het aantal inwoners verschillend: Frankrijk maakte bijvoorbeeld ongeveer 190 munten per persoon, Duitsland 280 en Nederland 200. Van de kleine denominaties is veel meer geslagen dan van de grotere: het aantal centen is bijvoorbeeld 18% van het totale aantal munten, het aantal 1-euromunten 9% en het aantal 2-euromunten 5%.

Verliezen

Munten kunnen voor de circulatie verloren gaan, we spreken dan van verliezen. We onderscheiden drie soorten verliezen: besparingen, ver-

sterf en verzamelen. Bij *besparingen* moet gedacht worden aan allerlei potjes kleingeld die mensen hebben. Deze munten zijn niet voor altijd verloren, maar worden (soms jaren) later weer uitgegeven en zo weer in circulatie gebracht. Aan het einde van 2001 waren de meeste potjes geleegd van hun nationale munteenheden; nu worden ze weer langzaam gevuld met euro's. DNB verwacht dat hiervoor alleen al in Nederland meer dan 100 miljoen munten per maand nodig zullen zijn. DNB schat, dat in het 'guldentijdperk' (voor 2002) 1,5 miljard van de totaal 3,0 miljard guldenmunten waren gespaard. Daarom verwacht men nu ook dat uiteindelijk 50% van de munten gespaard zal worden.

Met *versterf* bedoelen we de munten die voor altijd verloren gaan, bijvoorbeeld omdat ze in een diepe put vallen of omdat niet-europese toeristen ze mee terug nemen naar hun thuisland. In het guldentijdperk bedroeg het versterf zo'n 50 tot 100 miljoen munten per jaar. Omdat toeristen de Nederlandse euromunten ook in andere Europese landen kunnen gebruiken, denken we dat het versterf lager zal uitkomen: 60 miljoen munten per jaar lijkt een redelijke schatting te zijn voor dit type verlies.

Een nieuw effect is het *verzamelen* van euromunten. In het guldentijdperk was het effect van verzameling verwaarloosbaar, maar nu lijken veel mensen buitenlandse euromunten te verzamelen: in het begin van 2002 waren de speciale euromapjes voortdurend uitverkocht. Waarschijnlijk zal een deel van deze munten weer in actieve circulatie worden gebracht. Kortom, verzameling valt deels onder versterf en deels onder besparing.

De banken zullen op beperkte schaal nieuwe munten in circulatie brengen om de verliezen te compenseren (in Nederland uitsluitend Nederlandse, enzovoort). Omdat er verder geen herverdeling van euromunten plaats zal vinden en omdat de productie van nieuwe munten klein is ten opzichte van het aantal munten dat in circulatie is, wordt verwacht dat op de lange termijn er in heel Europa een bijna perfecte mix van munten zal zijn.

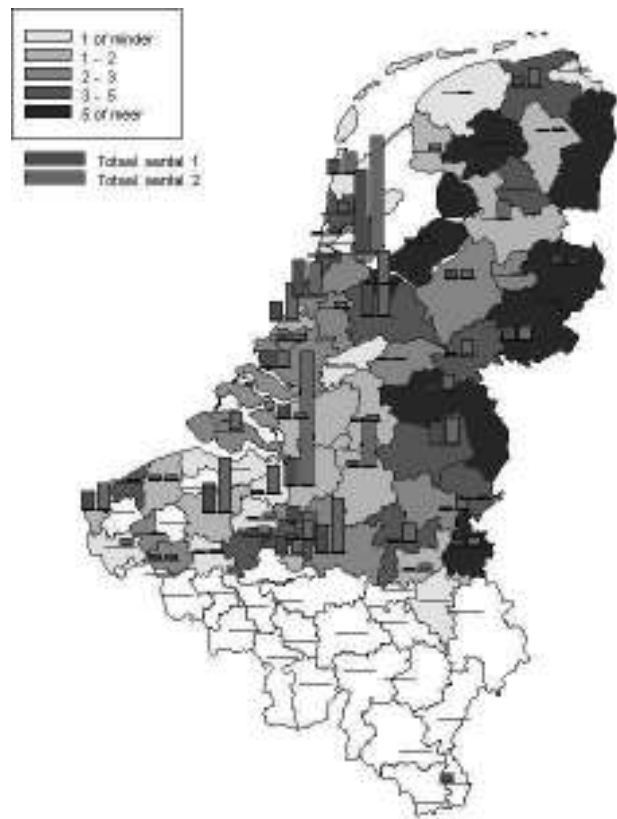
Portemonnee-inhoud

Uit studies van DNB in het gulden tijdperk bleek dat iemand gemiddeld zo'n 15 munten in de portemonnee heeft. Omdat per persoon zo'n 100 munten in circulatie gebracht zijn, is de overige circa 85% van alle munten kennelijk in kassalades in winkels en bij banken. Dit kan impliceren dat de beweging van de euromunten relatief langzaam is: slechts 15% van alle munten zal op enig tijdstip 'beweeglijk' zijn. Stel bijvoorbeeld dat 2/3 van de Nederlandse bevolking op zomervakantie naar het buitenland gaat en neem aan dat na het buitenlands bezoek de meegebrachte munten representatief zijn voor het muntenmengsel in het land wat bezocht werd (dit zal ook een klein percentage Nederlandse munten bevatten!). Dan wordt door deze reizen slechts 10% van alle Nederlandse munten door (voornamelijk) buitenlandse munten vervangen.

Overigens is het reizen van mensen die daarmee hun munten over de grens meenemen niet de enige mogelijke oorzaak voor de verspreiding van euromunten. Een andere mogelijkheid is, dat Nederlandse banken hun euromunten ergens anders dan bij DNB inkopen, omdat dat bijvoorbeeld goedkoper of dichterbij is. Dit zou een disbalans tussen de hoeveelheden munten in een land kunnen creëren, in de zin dat er een netto stroom munten in of uit het land gaat. Het lijkt echter redelijk om dit effect te verwaarlozen.

Data

Om de parameters in onze modellen te bepalen, gebruiken we de data verzameld op de eerder genoemde internetpagina die is opgebouwd

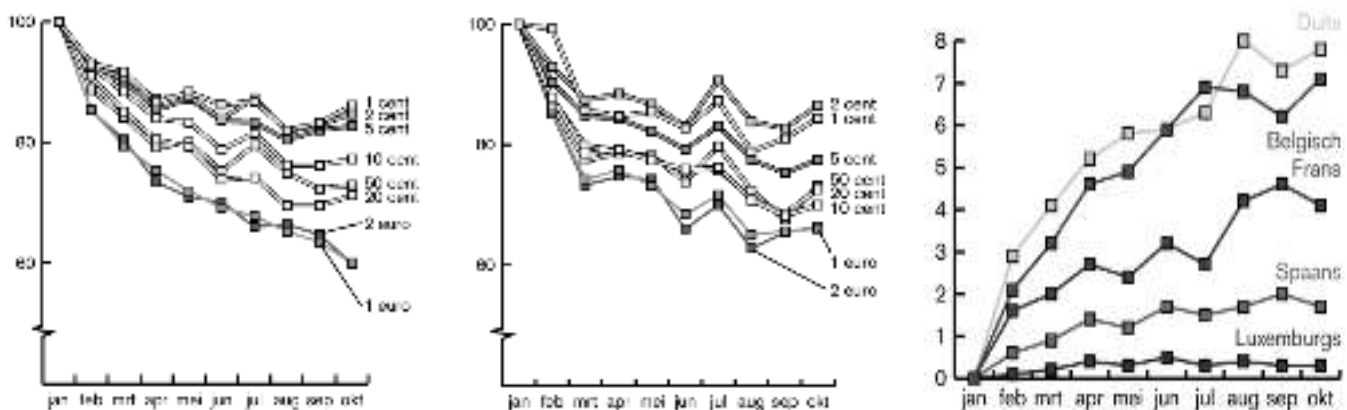


Figuur 1 Het percentage Duitse euro's per regio op 1 februari 2002, samen met het aantal 1-euro- en 2-eurostukken

door vrijwillige 'eurometers', vooral in Nederland en Vlaams België. Elke datapunt bestaat uit de datum en lokatie, en het aantal munten dat de correspondent heeft van elke denominatie en landen van oorsprong. Op de bovenstaande kaart van Nederland en België wordt bijvoorbeeld het percentage Duitse euro's in Nederland per 1 februari 2002 weergegeven, samen met het aantal gemeten muntstukken van 1-euro en 2-euro in iedere regio.

Uit bestudering van de data blijkt dat het percentage buitenlandse euromunten in Nederland een langzaam stijgende trend vertoont, maar wel met grote fluctuaties (zie figuur 2, derde grafiek). Die fluctuaties zijn verrassend, gezien het feit dat er via de site duizenden munten geteld worden. De metingen suggereren op het eerste gezicht al dat het mengproces waarschijnlijk meerdere jaren in beslag neemt. Verder is duidelijk dat munten van verschillende denominaties in verschillende mate mengen: het percentage buitenlandse munten is hoger naarmate de waarde van de munt hoger is. Zo was op 1 maart maar 8% van de 1-cent munten van buitenlandse origine, terwijl het voor 10 cent 12% was en voor 2 euro 20%. Tenslotte was de invloed van de wintervakanties duidelijk zichtbaar: op 1 maart hadden Nederland en België een groot aandeel Oostenrijkse munten, namelijk 2,3% en 1,7%, terwijl de verwachte lange-termijn limiet 3,1% is. Data van de Canarische Eilanden (Spanje) en Kreta (Griekenland) laten zien dat de buitenlandse munten daar bijna exclusief Duits zijn.

De sterke fluctuaties in de data deden ons vermoeden dat de data van de site mogelijk geen goed beeld gaf van de realiteit. Iedereen kan data invoeren zonder enige controle (hoewel echt vreemde metingen wel gefilterd worden), en het moment waarop mensen data invoeren kan ook sterk bepaald zijn: je kunt je voorstellen dat iemand vooral data invoert wanneer hij enkele 'bijzondere' munten in zijn portemonnee heeft. Enkele zelf uitgevoerde steekproeven eind februari (onder ande-



Figuur 2 Van links naar rechts: percentage Nederlandse munten in Nederland, percentage Belgische munten in Vlaanderen en percentage buitenlandse munten in Nederland (bron: [1]).

re de kassalade van een kantine) versterkten de indruk dat zeker niet alle gegevens op de site realistisch waren. Daarom hebben we op verschillende manieren de naar onze mening meest geloofwaardige data van de internetpagina gehaald. Dat leverde (gebaseerd op de eerste anderhalve maand van 2002) een eerste schatting op van 4% diffusie per maand, dat wil zeggen dat 4% van de munten in Nederland na een maand is vervangen door buitenlandse munten.

Een discreet model: Markovketen

Geen enkel wiskundig model zal de totale 64.9 miljard euromunten kunnen volgen. Maar dat is ook niet nodig: de beweging van een enkele munt vertoont hetzelfde gedrag als die van enige andere munt, hoewel dit dus wel kan afhangen van het land van origine van de munt en de denominatie. Daarom concentreren we ons op een enkele munt en volgen die op een probabilistische manier op zijn reis door Europa met een *Markovketen*.

De eenvoudigste Markovketen heeft maar twee toestanden: een munt is of in Nederland of in het buitenland. Dit geven we aan met respectievelijk N en B . We verwaarlozen het versterf, en maken geen onderscheid tussen munten in actieve circulatie en gespaarde munten. We nemen ook aan dat de stromen munten van en naar Nederland gelijk zijn, ofwel dat het aantal munten in Nederland gelijk blijft. Laat d de diffusiegraad zijn, die correspondeert met een waarschijnlijkheid van d dat een willekeurige munt in Nederland in een bepaalde maand naar het buitenland gaat. Dan is p_{NB} , de waarschijnlijkheid van een overgang van N naar B , gelijk aan d . Met een actieve circulatie van 1.6 miljard munten in Nederland, is de in- en uitstroom in een maand $1.6d$ miljard. Wanneer we aannemen dat de verhouding geproduceerde munten tot munten die ook echt in roulatie zijn overal in Europa hetzelfde is als in Nederland, dan zijn er in heel Europa zo'n $1.6/3.3 \times 61.6 = 29.9$ miljard munten in roulatie. Dan is $p_{BN} = 1.6d/29.9$; met $d = 0.04$ (zie hierboven) volgt dan $p_{BN} = 0.00214$. Dit levert de volgende *overgangsmatrix* Q op:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 - p_{NB} & p_{NB} \\ p_{BN} & 1 - p_{BN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.04 \\ 0.00214 & 0.99786 \end{bmatrix}.$$

De interpretatie van Q is als volgt: de eerste rij geeft aan waar een munt, aanvankelijk in Nederland, na één maand is: met kans 96% is deze nog in Nederland, en met kans 4% over de grens. De tweede rij correspondeert met een munt die initieel over de grens vertoert. Deze is na een maand in Nederland met kans ongeveer 0.2% en dus

met kans 99.8% nog steeds in het buitenland. Evenzo geeft Q^n de overgangskansen voor n maanden. Bijvoorbeeld,

$$Q^{15} = \begin{bmatrix} 0.54841 & 0.45159 \\ 0.02639 & 0.97361 \end{bmatrix}.$$

Dus na 15 maanden, waarbij aangenomen is dat de diffusiesnelheid constant blijft, is 45% van Nederlandse munten over de grens verdwenen en vervangen door buitenlandse euro's. Men kan nagaan dat dit eenvoudige model de limiettoestand (0.05085, 0.94915) heeft. Dat wil zeggen dat uiteindelijk ruim 5% van de Nederlandse euro's in Nederland zal blijven. Dit is logisch, want dit is precies de verhouding $3.3/64.9$ tussen de in Nederland geslagen munten en het totaal aantal geslagen munten, waarvan we bij het opstellen van Q uitgegaan zijn.

Verfijningen

Het model kan realistischer gemaakt worden door het op allerlei manieren uit te breiden. We kunnen extra toestanden toevoegen, die staan voor *versterf* en *besparing*. Uit de toestand 'versterf' komen munten nooit meer vrij, uit de toestand 'besparing' komen ze pas na een lange tijd vrij. DNB zal extra munten *produceren* en in roulatie brengen. Ook dit kan met een extra toestand gemodelleerd worden. Simulaties laten zien dat al deze factoren de diffusie van munten langzamer maken. Men kan verschillende modellen maken voor elk van de afzonderlijke *denominaties*. Maar ook de 1-euro munten uit de diverse eurolanden zullen niet allemaal hetzelfde gedrag vertonen: munten uit Luxemburg zullen eerder door verzamelaars uit de roulatie worden gehaald dan die uit Duitsland. Ook kunnen we onderscheid maken tussen verschillende *landen* (bijvoorbeeld omdat Italianen veel munten in putjes laten vallen), of de landen opsplitsen in *regio's*. De data op de internetpagina is per regio beschikbaar (totaal 60 regio's in Nederland en België), dus een verfijnd model met diverse regio's kan ook daadwerkelijk getoetst worden. Ook *seizoensinvloeden* (vakanties) kunnen meegenomen worden. Op grond van al deze factoren hebben we de ruwe schatting gemaakt dat het percentage buitenlandse munten in Nederland ongeveer medio 2003 de 50% zal bereiken.

Parameter schatting

Er zijn intelligentere schattingen van de matrix Q mogelijk dan slechts een ruwe schatting zoals beschreven. Een veel gebruikte methode in dit type probleem is de *meest aannemelijke schatter*. Hierbij schrijven

we de waarschijnlijkheid op dat we de metingen (de data van internet) hadden gekregen als we wisten wat Q was. Vervolgens benaderen we Q door deze kans te maximaliseren. Dit is een probleem dat in het algemeen numeriek opgelost moet worden. Een complicerende factor is, dat we weliswaar metingen in Nederland en België hebben, maar niet in andere landen. In deze methode kunnen ook metingen van meerdere maanden tegelijk worden opgenomen.

Een continu model

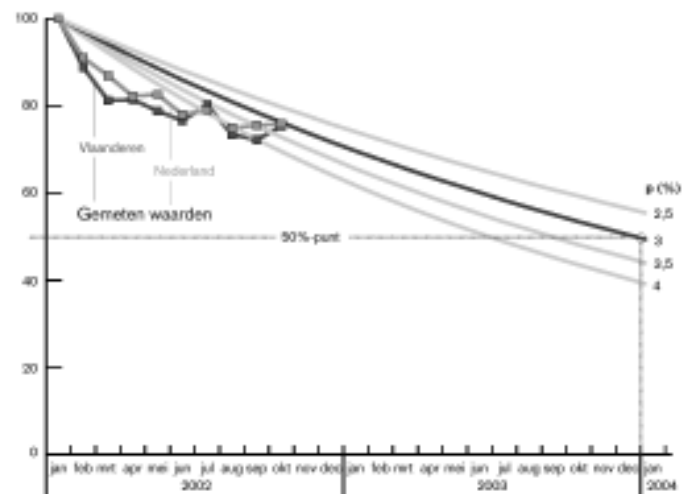
Zonder verdere toelichting vermelden we dat er tijdens de studieweek ook een continu model is opgesteld voor de eurodiffusie. Het betreft een stelsel differentiaalvergelijkingen om de diffusie te beschrijven. Deze vergelijkingen kunnen benaderd opgelost worden met de zogenaamde eindige elementen methode. Omdat diffusie een lokaal proces is, terwijl ook een belangrijk deel van het mengproces door niet-lokale vermenging (zoals vakanties) plaats vindt, is er een extra niet-lokale component toegevoegd.

De resultaten van de numerieke experimenten geven vertrouwen in het model: zo neemt het percentage Nederlandse munten in Nederland monotoon af tot de limietwaarde van 5%. Het percentage Belgische munten in Nederland neemt eerst toe voordat het monotoon daalt naar zijn limiet van 4%. Dit wordt veroorzaakt door het feit dat Nederland en België buurlanden zijn. Natuurlijk hangt het precieze diffusieproces af van parameters die we uit de internetdata kunnen proberen te schatten.

Nieuwe inzichten

Een Markovketen is het voor de hand liggende model om de beweging van euromunten te modelleren. Continue modellen zijn hiervan de natuurlijke benadering. Beide modellen suggereren met de in februari 2002 geschatte parameters dat circa midden 2003 de helft van de munten in onze portemonnee buitenlands zal zijn.

Nu, eind 2002, kunnen we een paar nieuwe inzichten noemen. In het eurotijdperk lijkt het aantal munten dat iemand in zijn of haar portemonnee heeft op te lopen: van 11 munten met een totale waarde van 4,5 euro in februari, tot 23 munten ter waarde van 10 euro een half jaar later. De verwachting dat de diffusie tijdens de vakantieperiode sneller zou gaan blijkt achteraf niet te kloppen.



Figuur 3 Percentage binnenlandse munten in Nederland en Vlaanderen waaruit een verband tussen de diffusiecoëfficiënt en de halfwaardetijd blijkt (bron: [1]).

Op grond van de data van de eerste negen maanden is de diffusiegraad d van 4% naar beneden bijgesteld naar 3%. Zie ook [1] en figuur 3. Dit correspondeert goed met het werkelijk aantal vreemde munten rond 1 december 2002: zowel in Nederland als in België was op dat moment zo'n 25% van de munten vreemd. De verwachting is dat rond januari 2004 de helft van de munten in Nederland van buitenlandse origine zal zijn. Blijkt dit niet te kloppen, dan denken we aan het credo van Finagle: *Wetenschap is waar, laat je niet misleiden door de feiten!* —

Dankwoord

Dit is een bewerking van een artikel [2] geschreven door de eurodiffusieprojectgroep: Piet van Blokland, Lorna Booth, Kirankumar Hiremath, Michiel Hochstenbach, Ger Koole, Sorin Pop, Marieke Quant en Djoko Wirosoetisno. We bedanken de eurodiffusie-internetpaginagroep voor het opzetten van de internetpagina die de data levert, Jeanine Kippers van DNB voor het verstrekken van extra informatie en Richard Gill en Andreas Kyprianou voor advies op het statistische deel van het project.

Referenties

- 1 Geertje Hek, Misja Nuyens, Bob Planque, Harmen van der Ploeg en Erick Vermeulen, *Het grote internationale eurodiffusie-experiment*, *Natuur & Techniek* jaargang 70, 11 (2002), 56–62.
- 2 P. van Blokland, L. Booth, K. Hiremath, M. Hochstenbach, G. Koole, S. Pop, M. Quant, D. Wirosoetisno, *the euro diffusion project*, *Proceedings of the Forty-second European Study Group with Industry* (2002)
- 3 De eurodiffusiesite: <http://www.wiskgenoot.nl/eurodiffusie>. Deze cite bevat veel verdere informatie, meer theorie en interessante links.

Odo Diekmann

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80010
3508 TA Utrecht
O.Diekmann@math.uu.nl

Vakantiecursus 2002

Aanstekelijkheid gevangen in een getal

Jaarlijks organiseert het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) onder auspiciën van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars een vakantiecursus voor wiskundeleraars en andere belangstellenden. Bij deze gelegenheid verschijnt steeds een syllabus met teksten bij de voordrachten. Het NAW heeft een serie gestart waarin geselecteerde teksten uit recente syllabi worden geplaatst. Het derde artikel is afkomstig uit de syllabus 'Wiskunde en Gezondheid' bij de Vakantiecursus 2002. Het onderwerp is het modelleren van besmettelijke ziekten. Odo Diekmann is hoogleraar analyse aan de Universiteit van Utrecht. Hij geldt als een van de pioniers op het gebied van de mathematische biologie in Nederland.

Stel een vrouw krijgt, gemiddeld genomen, R_0 dochters. Dan groeit, uitgaande van een constante man-vrouw verhouding, de populatie in n generaties met een factor R_0^n als $R_0 > 1$ (en neemt met deze factor af als $R_0 < 1$). R_0 wordt reproductiegetal genoemd en heeft drempelwaarde 1 in de zin dat het groter of kleiner zijn dan de drempelwaarde beslissend is voor het onderscheid tussen exponentiële groei enerzijds en exponentiële uitsterving anderzijds (ook wanneer we de populatie niet op generatiebasis maar in de reële tijd beschouwen). Het begrip R_0 is zinvol voor mens, dier en plant.

Stel een besmettelijke ziekte, veroorzaakt door een bacterie of virus, doet haar intrede in een populatie van gastheren. Naar analogie van het bovenstaande kunnen we spreken over een 'geboorte' als een gastheer besmet raakt en over 'nakomelingen' als een gastheer de besmetting overdraagt aan andere gastheren. De vergelijking gaat in zoverre mank dat het moeilijker wordt om nakomelingen te krijgen naarmate er al meer 'geboortes' zijn geweest (we gaan er hierbij van uit dat besmetting uiteindelijk resulteert in immuniteit, zoals bij kinderziektes als mazelen en rode hond, en dat de tijdschaal van demografische doorstroom (de vervanging van immune ouden van dagen door vatbare baby's) lang is

ten opzichte van de tijdschaal waarop overdracht van besmetting plaats vindt. Maar, zoals bij een oploeiend vuur het onvermijdelijke opraken van de brandstof in eerste instantie buiten beschouwing gelaten kan worden, zo kunnen we ook hier de reductie van het vatbare deel van de gastheerpopulatie bewust negeren als we vooral geïnteresseerd zijn in de vraag of ons een epidemische vloedgolf, een uitbraak, te wachten staat of slechts een paar incidentele gevallen. (Wiskundig gezien komt dit neer op het lineairiseren van een in essentie niet-lineair verband.) Daarom is R_0 ook als het over de verspreiding van besmettelijke ziekten gaat een kenmerkende grootheid.

Om een besmettelijke ziekte kwijt te raken moet je zorgen dat, in het gedachte-experiment waarbij je als het ware de ziekteverwekker (opnieuw) introduceert in een volledig vatbare populatie, $R_0 < 1$ is. (Het kan dan overigens, zoals in het geval van BSE, nog best lang duren voor de ziekte ook daadwerkelijk van het toneel verdwenen is.) Vandaar dat het effect van tegenmaatregelen (zoals vaccinatie) vaak afgemeten wordt aan de (ingeschatte) invloed op R_0 . Vandaar dat R_0 zo'n belangrijke grootheid is. Vandaar dat we graag willen weten hoe R_0 'opgebouwd' is uit verschillende factoren.

Sexueel overdraagbare aandoeningen

Laten we, om de gedachten te bepalen, een seksueel overdraagbare aandoening (SOA) beschouwen, bijvoorbeeld gonorrroe. Om het ons gemakkelijk te maken beperken we ons tot het strikt homoseksuele mannelijke deel van de populatie. Onder andere verwaarlozen we dus de invloed via biseksuele individuen van en op de heteroseksuele 'buitenwereld'. En nu we toch bezig zijn de waarheid geweld aan te doen, gooien we er een schepje boven op: we nemen aan dat contacten voortdurend wisselen. Met andere woorden: we verwaarlozen het effect van paarvorming.

Zij p de kans op overdracht bij een contact tussen een vatbaar

en een infectieus individu. Zij T de lengte van de infectieuze periode. Zij c het aantal contacten per eenheid van tijd per individu. Dan stellen we

$$R_0 = pcT. \quad (1)$$

De redenering hierachter is dat een besmet individu gedurende de infectieuze periode cT contacten zal hebben die, in de situatie dat er slechts heel weinig besmette individuen rondlopen, allemaal met vatbaren zijn. En van die cT contacten zal een fractie p dus tot besmetting leiden.

Hoewel vele details van de afleiding aanvechtbaar zijn (we komen hier zo op terug) geeft het resultaat inzicht. Als we via voorlichting bereiken dat symptomen sneller onderkend worden (waarna men naar de dokter kan gaan voor behandeling, hetgeen voor gonorroe eenvoudig is), zal T dalen. Het feit dat R_0 recht evenredig is met T toont aan dat je daar wat mee opschiet. Condoomgebruik heeft invloed op p en een soortgelijke conclusie volgt. De meest voor de hand liggende conclusie is uiteraard dat R_0 recht evenredig daalt als de graadmeter c voor de mate van seksuele activiteit naar beneden gaat.

In het bovenstaande zijn p , c en T gemiddelde grootheden (die trouwens niet zo gemakkelijk te bepalen zijn uit experimentele en veldgegevens). Bijvoorbeeld, bij sommige individuen verloopt gonorroe asymptomatisch en is bijgevolg de infectieuze periode extreem lang. En uiteraard is er een grote mate van variabiliteit in de mate van seksuele activiteit van individuen. Ook R_0 is een gemiddelde. Om het gemiddelde van een produkt gelijk te kunnen stellen aan het produkt van de gemiddelden hebben we onafhankelijkheid nodig. In de praktijk betekent dit: er mag geen aanleiding zijn om afhankelijkheid te veronderstellen. En inderdaad, als we het hebben over asymptomatisch verloop en mate van seksuele activiteit, dan is die aanleiding er niet. Tot op zekere hoogte is dat 'middelen' dus onschuldig, met name als het gaat om individuele verschillen in infectiviteit. Het wordt echter ingewikkeld als het gaat om individuele verschillen die zowel invloed hebben op vatbaarheid als op infectiviteit. En de mate van seksuele activiteit is hiervan een duidelijk voorbeeld: hoe meer contacten je hebt, des te meer kans loop je om de aandoening op te lopen, terwijl je eveneens des te meer nieuwe gevallen zult veroorzaken zodra je zelf infectieus bent. Het is dit 'dubbelop' effect dat in (1) ontbreekt. En het doel van deze bijdrage aan de vakantiecursus is te laten zien hoe met behulp van een extra beetje wiskunde een systematische methode ontwikkeld kan worden om het effect in rekening te brengen.

Heterogeniteit: de kunst van het middelen

Stel de populatie kan, op grond van het 'type' van individuen, opgesplitst worden in twee deelpopulaties ter grootte van, respectievelijk, $N_1 = 10^5$ en $N_2 = 10^7$ individuen. Type 1 heeft $c_1 = 100$ contacten per jaar en type 2 heeft $c_2 = 10$ contacten per jaar. Dan is de verhouding waarin de twee typen voorkomen $1 : 100$ en het gemiddeld aantal contacten per jaar is gelijk aan

$$\bar{c} = \frac{c_1 N_1 + c_2 N_2}{N_1 + N_2} = \frac{1}{101} c_1 + \frac{100}{101} c_2 \approx 11.$$

Stel nu dat er geen preferenties zijn voor het type van een part-

ner. Dan zal ieder individu contacten hebben met de twee typen in de verhouding van hun aandeel in het totaal aantal contacten, oftewel in de verhouding $c_1 N_1 : c_2 N_2 = 1 : 10$.

Bijgevolg zullen de twee typen in deze verhouding voorkomen onder de nieuwe gevallen van besmetting. En dus zal het gemiddeld aantal contacten van *besmette* individuen gelijk zijn aan $\bar{c} = (1/11)c_1 + (10/11)c_2 \approx 18$. Met de verkeerde manier van rekenen vinden we dus $R_0 \approx 11pT$ en met de goede manier $R_0 \approx 18pT$, een aanzienlijk verschil.

De definitie van R_0 : de wiskunde van het middelen

In het voorafgaande namen we aan dat het 'type' van een individu niet verandert in de loop van de tijd (hetgeen wel het geval is bij een kenmerk als leeftijd) en dat contacten symmetrisch zijn (zulk in tegenstelling tot de asymmetrie van, bijvoorbeeld, bloedtransfusie). Dat nemen we ook nu weer aan. Maar we laten nu 'preferenties' toe door te stellen dat een fractie q_{11} van de contacten van type 1 individuen met type 1 individuen is en een fractie q_{22} van de contacten van een type 2 individu met type 2 individuen. Er is dan een consistentie voorwaarde:

$$(1 - q_{11})c_1 N_1 = (1 - q_{22})c_2 N_2.$$

Immers, een fractie $1 - q_{11}$ van de totale hoeveelheid $c_1 N_1$ contacten per tijdseenheid van type 1 individuen is met type 2 individuen en een fractie $1 - q_{22}$ van de totale hoeveelheid $c_2 N_2$ contacten per tijdseenheid van type 2 individuen is met type 1 individuen en deze hoeveelheden betreffen dus allebei de contacten per tijdseenheid waarbij van beide typen een individu betrokken is, dus moeten ze aan elkaar gelijk zijn. (In de vorige sectie was $q_{11} = c_1 N_1 / (c_1 N_1 + c_2 N_2)$ en $q_{22} = c_2 N_2 / (c_1 N_1 + c_2 N_2)$ en is dus inderdaad aan deze voorwaarde voldaan.) Onze taak is R_0 te bepalen in afhankelijkheid van N_1 , N_2 , c_1 , c_2 , q_{11} , q_{22} , p en T .

Het is nu handig de intensiteit en het patroon van de contacten te rangschikken in een matrix

$$\begin{pmatrix} q_{11}c_1 & (1 - q_{22})c_2 \\ (1 - q_{11})c_1 & q_{22}c_2 \end{pmatrix}.$$

Op plaats ij staat hier het aantal contacten per tijdseenheid dat een type j individu heeft met type i individuen (een terzijde voor alle duidelijkheid: een contact tussen een type 1 individu en een type 2 individu wordt zowel geteld onder de index 12 als onder de index 21 en ook onder de indices 11 en 22 worden contacten dubbel geteld omdat we onze boekhouding baseren op individuen en niet op paren van individuen). Na vermenigvuldiging met de factor pT is dit de volgende generatie-matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} pTq_{11}c_1 & pT(1 - q_{22})c_2 \\ pT(1 - q_{11})c_1 & pTq_{22}c_2 \end{pmatrix}$$

in de zin dat m_{ij} gelijk is aan het gemiddelde aantal type i nakomelingen van een besmet individu van type j . We hebben nu dus vier R_0 -achtige getallen gerangschikt in een matrix en moeten daar door op de goede manier te middelen één getal van zien te maken dat de naam R_0 verdient.

Als intermezzo stellen we de vraag: hoe 'groot' is een matrix?

Een 2×2 matrix geeft een rekenrecept om een punt in het vlak (een vector) af te beelden op een ander punt. Zo beeldt de matrix

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ \frac{1}{1000} & 0 \end{pmatrix}$$

de eenheidsvector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ af op de vector $\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ met lengte 10, dus, in zekere zin, is het 'vergroten' effect een factor 10. En inderdaad, de standaard manier om de *norm* van $\mathbf{K}$ te definiëren is $\|\mathbf{K}\| = \max_{\|x\|=1} \|\mathbf{K}x\|$ en voor dit voorbeeld volgt dan $\|\mathbf{K}\| = 10$. Echter, als we $\mathbf{K}$ nogmaals toepassen wordt $\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ afgebeeld op $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{100} \end{pmatrix}$. In twee stappen is de vector dus gekrompen met een factor $1/100$. En omdat

$$\mathbf{K}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ \frac{1}{1000} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ \frac{1}{1000} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & 0 \\ 0 & \frac{1}{100} \end{pmatrix}$$

geldt dat laatste zelfs voor elke keuze van een startvector. Een factor $1/100$ per twee stappen is een factor $1/10$ per stap. Te bewijzen valt dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{K}^n\|^{\frac{1}{n}}$ bestaat en gelijk is aan $1/10$. De door $\mathbf{K}$ beschreven afbeelding heeft dus de eigenschap dat bij alsmaar herhaald toepassen de punten gemiddeld per stap een factor $1/10$ dichter bij de oorsprong komen te liggen. Als we geïnteresseerd zijn in het 'vergroten' (of, zoals in dit geval, 'verkleinen') effect bij herhaald toepassen dan is het juiste antwoord $1/10$ en niet 10. Het uitrekenen van $\|\mathbf{K}^n\|^{\frac{1}{n}}$ is hier eenvoudig, maar in het algemeen erg bewerkelijk. De vraag rijst of er een snellere manier is om die factor $1/10$ op het spoor te komen?

Einde intermezzo, terug naar SOA. Als we de coördinaten x_1 en x_2 interpreteren als de aantallen besmette individuen van het met de index overeenkomende type in een bepaalde generatie, dan vinden we deze aantallen in de volgende generatie door de matrix $\mathbf{M}$ los te laten op de vector x . De matrix is dus weer op te vatten als een rekenrecept om, gegeven een punt in het vlak, een nieuw punt te vinden. Het herhalen van deze afbeelding wordt beschreven door het iteratieschema $x(n+1) = \mathbf{M}x(n)$ waarbij het gehele getal n de generaties nummert.

Stel dat de twee typen van generatie op generatie in een vaste verhouding $x_1 : x_2$ zouden voorkomen, dan zouden we weer een gemiddelde $\tilde{c}$ kunnen uitrekenen volgens

$$\tilde{c} = \frac{x_1 c_1 + x_2 c_2}{x_1 + x_2} \quad (2)$$

en vervolgens $R_0 = pT\tilde{c}$ kunnen nemen. De verhouding correspondeert met een lijn door de oorsprong en dus met een richting in het (x_1, x_2) vlak. De door $\mathbf{M}$ beschreven afbeelding beeldt lijnen door de oorsprong op lijnen door de oorsprong af. We zijn op zoek naar de uitzonderlijke lijn die op zichzelf wordt afgebeeld omdat dan, zoals hierboven uitgelegd, de verhoudingen dezelfde blijven, hetgeen het middelen recht toe recht aan maakt. Dit betekent dat we op zoek zijn naar vectoren x waarvoor $\mathbf{M}x$ een veelvoud van x is, oftewel $\mathbf{M}x = \lambda x$ met λ nog nader te bepalen. Dergelijke x heten eigenvectoren van $\mathbf{M}$ behorende bij de zogeheten eigenwaarde λ (merk op dat als x een eigenvector is dat dan hetzelfde geldt voor elk veelvoud van x ; belangrijk is slechts de door x bepaalde richting, niet de grootte van x). Hoewel conceptueel eigenvectoren en eigenwaarden gelijktijdig op het toneel

verschijnen, is het rekentechnisch mogelijk eerst de eigenwaarden te bepalen en pas daarna, desgewenst, de eigenvectoren. Zonder veel moeite bewijst men dat λ een eigenwaarde van de 2×2 matrix $\mathbf{M}$ is dan en slechts dan als λ voldoet aan de kwadratische karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - S\lambda + D = 0$.

Hierbij is S het spoor en D de determinant van $\mathbf{M}$ (expliciet gegeven door $S = m_{11} + m_{22}$ en $D = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$). Er zijn dus, uitzonderingen daargelaten, precies twee eigenwaarden. Welke van de twee moeten we nu hebben?

Er zijn verschillende manieren om het onderscheid tussen de twee eigenwaarden nader uit te werken en zodoende tot een antwoord te komen. Gelukkig leveren die verschillende manieren hetzelfde antwoord op! De diagonaal matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

heeft als prettige eigenschap dat de invariante lijnen precies overeen komen met de coördinaatassen. Op de x_1 -as worden afstanden met een factor λ_1 vergroot (als $\lambda_1 > 1$) en op de x_2 -as met een factor λ_2 . Als $\lambda_2 > \lambda_1 > 1$ en we beginnen in een willekeurig punt van het (x_1, x_2) vlak en passen vervolgens alsmaar deze afbeelding toe, dan geldt $x_1(n) = \lambda_1^n x_1(0)$, $x_2(n) = \lambda_2^n x_2(0)$ zodat

$$\frac{x_1(n)}{x_2(n)} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^n \frac{x_1(0)}{x_2(0)}$$

De groei van x_1 in de loop der generaties is, relatief ten opzichte van de groei van x_2 , te verwaarlozen en de lijn door de oorsprong waarop het n -de punt zich bevindt kruipt, naarmate n groter wordt, steeds dichter tegen de x_2 -as aan. Asymptotisch voor $n \rightarrow \infty$ geldt, mits $x_2(0) \neq 0$, dat $x_1(n)/x_2(n) \rightarrow 0$ en dat de lengte van $x(n)$ in iedere generatie-stap een factor λ_2 groter wordt.

Het antwoord is dus: we moeten de grootste van de twee eigenwaarden hebben. Wat we precies met de grootste bedoelen is duidelijk als ze allebei positief zijn. In het algemeen kunnen eigenwaarden zeer wel negatief of zelfs complex zijn. De algemene karakterisering is daarom: de grootste in absolute waarde hebben (dat doet zich bijvoorbeeld voor bij de hierboven geïntroduceerde matrix $\mathbf{K}$). Bovendien moeten we ons realiseren dat de interpretatie vereist dat de eigenvector x positief is, in de zin dat de componenten x_1 en x_2 niet-negatief zijn. Met andere woorden, de invariante lijn die we zoeken moet door het eerste en derde kwadrant lopen en de bijbehorende eigenwaarde moet positief zijn. Welke garantie is er dat er een welgedefinieerde grootste eigenwaarde is en dat deze deze eigenschappen heeft?

Die garantie is er, en wel in de vorm van een stelling van Perron en Frobenius:

Stelling. Zij $\mathbf{M}$ een $n \times n$ -matrix. Veronderstel dat $\mathbf{M}$ positief is, in de zin dat alle elementen groter of gelijk aan nul zijn. Veronderstel bovendien dat $\mathbf{M}$ primitief is, hetgeen wil zeggen dat voor een zekere macht k alle elementen van de matrix $\mathbf{M}^k$ strikt positief zijn. Dan is er precies één eigenwaarde met een bijbehorende eigenvector die positief is en alle andere eigenwaarden zijn strikt kleiner in absolute waarde.

Men spreekt van de ‘dominante’ eigenwaarde. De bijbehorende eigenvector is zelfs strikt positief onder de genoemde voorwaarden. De hier geformuleerde versie is niet de meest algemene. Een positieve matrix heet *irreducibel* als voor elk paar ij met $1 \leq i, j \leq n$ er een macht k te vinden is (die best van de beschouwde i, j mag afhangen) zo dat het ij -de element van $\mathbf{M}^k$ strikt positief is. Ook voor een irreducibele matrix geldt dat er precies één eigenwaarde is met een positieve eigenvector. Maar, tenzij de matrix in feite primitief is, zijn er andere eigenwaarden met dezelfde absolute waarde. Een 2×2 -matrix als

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & + \\ + & 0 \end{pmatrix}$$

treedt op bij een SOA model waarbij de populatie wordt onderverdeeld in mannen en vrouwen en waarbij men alleen strikt heteroseksuele contacten beschouwt. En, evenzo, bij malaria, waar de parasiet van mens naar mug en van mug naar mens overgaat. Dergelijke matrices zijn irreducibel maar niet primitief. De tweede eigenwaarde is negatief, maar heeft dezelfde absolute waarde als de eerste.

Uit de interpretatie volgt dat alle elementen van de volgende generatie-matrix $\mathbf{M}$ niet-negatief zijn. Het al dan niet primitief zijn van $\mathbf{M}$ heeft te maken met kieskeurigheid. Wanneer voor een willekeurige keuze van een tweetal, niet noodzakelijk verschillende, typen de overeenkomstige deelpopulaties contacten met elkaar onderhouden, dan zijn alle elementen van $\mathbf{M}$ strikt positief en is $\mathbf{M}$ dus zeker primitief.

Deze hele paragraaf was tot nu toe een lange inleiding tot, en motivatie van, de volgende uitspraak: $\mathbf{R}_0$ is, per definitie, de dominante eigenwaarde van de volgende-generatie-matrix $\mathbf{M}$.

Tijdens de motivatie gebruikten we formule 2 met x de bij R_0 horende eigenvector, als een stap in de berekening van R_0 . Echter, achteraf bezien is dat veel te omslachtig aangezien we eerst R_0 berekenen uit de karakteristieke vergelijking en pas daarna, eventueel, de eigenvector. De formule is dus meer een hulpmiddel bij het begrijpen van de verbanden, het hoe en waarom, dan een rekenmethode.

Nogmaals het SOA voorbeeld

Gewapend met een algemene definitie van R_0 die tevens een constructief rekenrecept levert, zullen we nu voor een algemene versie van het SOA voorbeeld wat conclusies afleiden.

Stel we hebben niet twee maar n verschillende typen individuen, gekarakteriseerd door het aantal contacten c_j , $j = 1, \dots, n$, per eenheid van tijd. Stel een fractie q_{ij} van deze contacten is met type i individuen, waarbij voldaan is aan de normalisering

$$\sum_{i=1}^n q_{ij} = 1 \quad (3)$$

en de consistentie condities

$$q_{ij}c_jN_j = q_{ji}c_iN_i \quad (4)$$

waarbij N_j de grootte van de deelpopulatie van type j individuen is. Dan heeft de matrix $\mathbf{M}$ elementen $m_{ij} = pTq_{ij}c_j$. In het speciale geval dat er geen enkele voorkeur in het spel is ligt de keuze

$q_{ij} = c_iN_i / \sum_l c_lN_l$ voor de hand. De matrix elementen zijn dan van de vorm $m_{ij} = b_i c_j$ met $b_i = pT / (\sum_l c_lN_l) c_iN_i$ hetgeen betekent dat $\mathbf{M}$ alle lijnen door de oorsprong afbeeldt op de ene lijn waarop b ligt. Immers

$$(\mathbf{M}x)_i = b_i \sum_{j=1}^n c_j x_j \Rightarrow \mathbf{M}x = \left(\sum_{j=1}^n c_j x_j \right) b$$

In het bijzonder volgt uit

$$\mathbf{M}b = \left(\sum_{j=1}^n c_j b_j \right) b \quad \text{dat} \quad R_0 = \sum_{j=1}^n c_j b_j = pT \frac{\sum_{j=1}^n c_j^2 N_j}{\sum_{l=1}^n c_l N_l}$$

(Alle overige eigenwaarden zijn nul in dit geval en de meetkundige interpretatie werkt veel sneller dan de algebraïsche rekenpartij via de karakteristieke vergelijking.) Herschrijven van deze uitdrukking levert extra inzicht op $R_0 = pT (\bar{c} + \bar{c}/\bar{c})$ waarbij

$$\bar{c} = \text{gemiddelde } c = \frac{\sum_{k=1}^n c_k N_k}{\sum_{l=1}^n N_l},$$

$$\bar{c} = \text{variantie van } c = \frac{\sum_{k=1}^n (c_k - \bar{c})^2 N_k}{\sum_{l=1}^n N_l} = \frac{\sum_{k=1}^n c_k^2 N_k - \bar{c}^2}{\sum_{l=1}^n N_l}.$$

Deze uitdrukking laat expliciet zien hoe de fout die we maken door R_0 gelijk te stellen aan $pT \bar{c}$ afhangt van de verdeling van c , met name van de variantie. Merk ook op dat de echte R_0 altijd groter is dan de schatting op basis van een gemiddelde c . Dit brengt ons op het idee dat het verwaarlozen van heterogeniteit wel eens heel algemeen tot een onderschatting van R_0 zou kunnen leiden en nooit tot een overschatting. De volgende stelling toont aan dat dit vermoeden juist is.

Stelling. Zij R_0 de dominante eigenwaarde van de matrix $\mathbf{M}$ met elementen $m_{ij} = pTq_{ij}c_j$ waarbij q_{ij} voldoet aan (3) en (4): dan geldt: $R_0 \geq pT \bar{c}$

Bewijs. Definieer $\mathbf{T} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ door $(\mathbf{T}x)_i = x_i / \sqrt{N_i}$ dan geldt dat de elementen van de matrix $\mathbf{TMT}^{-1}$ gegeven worden door $pTq_{ij}c_j (\sqrt{N_j} / \sqrt{N_i})$ zodat op grond van de consistentie conditie (4), de elementen met de indices ij en ji aan elkaar gelijk zijn. Oftewel, $\mathbf{TMT}^{-1}$ is een symmetrische matrix. Voor een symmetrische matrix $\mathbf{S}$ geldt dat alle eigenwaarden reëel zijn en dat de grootste gelijk is aan $\max_{\|w\|=1} (w, \mathbf{S}w)$ waarbij $(v, w) = \sum_{i=1}^n v_i w_i$ en $\|w\| = \sqrt{(w, w)}$. De vector met de componenten

$$v_i = \frac{\sqrt{N_i}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n N_k}}$$

voldoet aan $\|v\| = 1$ en verder geldt, mede op grond van (3) dat

$$\begin{aligned} (v, \mathbf{TMT}^{-1}) &= pT \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{N_i}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n N_k}} \sum_{j=1}^n q_{ij}c_j \frac{\sqrt{N_j}}{\sqrt{N_i}} \frac{\sqrt{N_j}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n N_k}} \\ &= pT \frac{\sum_{j=1}^n c_j N_j}{\sum_{k=1}^n N_k} = pT \bar{c} \end{aligned}$$

□

Het belang van een wiskundige formulering

Op zich is R_0 een grootheid die binnen een populatie-dynamische dan wel epidemiologische context zinvol geïntroduceerd kan worden. Als onderdeel van de definitie komt dan het woordje 'gemiddeld' voor en daarin kan een zekere subtiliteit schuil gaan. Met name is dat het geval wanneer de verdeling waarover gemiddeld moet worden niet a priori vast staat, maar juist mede bepaald wordt door de generatie-op-generatie dynamica die we willen modelleren. Op dat moment levert de wiskundige invalshoek een systematische methode: de onbekende verdeling wordt gekarakteriseerd als de dominante eigenvector van een positieve matrix en R_0 is de bijbehorende eigenwaarde (zodat we desgewenst R_0 kunnen uitrekenen op basis van de matrixelementen zonder ook daadwerkelijk de verdeling uit te rekenen). Door specifieke eigenschappen van de matrix te benutten kunnen we van alles en nog wat aan de weet komen over de manier waarop R_0 bepaald wordt door de ingrediënten van het model.

Daarnaast is er de praktijk. Recentelijk had Nederland te kampen met uitbraken van varkenspest en mond-en-klauwzeer. Op intensive care eenheden van ziekenhuizen zijn resistente bacteriën in opmars. Geslachtsziekten, die sterk teruggedrongen werden toen het besef van de verschrikkingen van AIDS het condoomgebruik omhoog stuwde, nemen weer toe, hetgeen te denken en te vrezen geeft. Wereldwijd zijn tuberculose en malaria in snel tempo het verloren terrein aan het heroveren. Wiskundige modellering is één van de vele onderdelen van de strijd tegen besmettelijke ziekten. Het aspect van 'conceptuele verheldering' stond centraal in dit artikel. Ook in brainstormsessies met veterinaire deskundigen en medici is dikwijls de belangrijkste bijdrage gelegen in het feit dat een wiskundige formulering dwingt tot helderheid over wat voorondersteld wordt met betrekking tot de

aard van de variabelen en hun onderlinge verbanden.

De volgende voorbeelden, van werk waar de auteur van dit hoofdstuk in de loop van vele jaren bij betrokken was, illustreren dit algemene patroon.

- De snelheid waarmee een landbouwpest zich verspreidt over verschillende ruimteschalen (een veld, een gebied, een land, een continent) hangt af van de productie, in de loop der tijd, van kiemen en de verplaatsing van deze kiemen door het luchtruim; met wiskundige hulpmiddelen kan men het verband in kaart brengen.
- Zeehonden houden als ze uit het water komen om te rusten min of meer een constante afstand van elkaar; daardoor verandert de populatiedichtheid niet als een epidemie van Phocine Distemper Virus slachtoffers maakt (zoals in 1988 en nu weer); via een wiskundig model valt na te gaan wat dat voor gevolgen heeft voor het percentage dat besmet wordt.
- Naar aanleiding van de varkenspest epidemie is software in ontwikkeling om, op basis van beschikbaar komende gegevens, in te schatten hoeveel bedrijven al wel besmet maar nog niet gedetecteerd zijn.
- In toenemende mate komen data beschikbaar over ziekenhuis bacteriën als MRSA en VRE die resistent zijn voor allerlei antibiotica; de kunst is via data-analyse inzicht te verkrijgen en conclusies te trekken; daarbij zijn wiskundige modellen onontbeerlijk.

Kwalitatief inzicht in ketens van oorzaak en gevolg is de basis voor zowel de 'educated guess' van de expert als het betekenis toekennen aan kwantitatief rekenwerk in het kader van wiskundige modellen. Het feit dat kwantitatief accurate voorspellingen een wensdroom blijven, doet hier niets aan af. :

Referenties

- 1 H. Andersson, T. Britton, *Stochastic Epidemic Models and Their Statistical Analysis*, Springer Lecture Notes in Statistics 151 Springer, New York, 2000.
- 2 R.M. Anderson, R.M. May, *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control*, Oxford University Press, Oxford, 1991.
- 3 N.J.T. Bailey, *The Mathematical Theory of Infectious Diseases and its Applications* Griffin, London, 1975.
- 4 N.G. Becker, *Analysis of Infectious Disease Data* Chapman & Hall, London, 1989
- 5 A.D. Cliff, P. Haggett, *Atlas of Disease Distributions: Analytical Approaches to Epidemiological Data*, Blackwell, London, 1988.
- 6 D.J. Daley, J. Gani, *Epidemic Modelling: an Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- 7 O. Diekmann, J.A.P. Heesterbeek, *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation*, Wiley, Chichester, 2000.
- 8 D. Mollison (ed.), *Epidemic Models: Their Structure and Relation to Data*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995
- 9 N. Shigesada, K. Kawasaki, *Biological Invasions: Theory and Practice*, Oxford University Press, Oxford, 1997.

Wieb Bosma

Mathematisch Instituut
Katholieke Universiteit Nijmegen
Postbus 9010, 6500 GL Nijmegen
bosma@sci.kun.nl

Jaap Top

Instituut voor wiskunde en informatica
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 800, 9700 AV Groningen
top@math.rug.nl

De p van primaliteit

Op 6 augustus 2002 publiceerden Manindra Agrawal, Neeraj Kayal en Nitin Saxena van het Indian Institute of Technology een preprint op hun website met als titel 'PRIMES is in P'. Al snel verbreidde zich het nieuws dat nu eindelijk bewezen was dat priemgetallen en samengestelde getallen in polynomiale tijd te onderscheiden zijn. Dezelfde maand berichtten diverse kranten en tijdschriften hierover. Veel lezers zullen zich afgevraagd hebben wat de betekenis van dit resultaat is — was zo iets niet eigenlijk al bekend? Hoe werkt het algoritme, en wat zijn de praktische consequenties? En kunnen we nu sneller getallen in factoren ontbinden? Op dergelijke vragen geven de auteurs een antwoord.

Het is de laatste 25 jaar gebruik een artikel over primaliteitstests te beginnen met een citaat van Gauss, waarin hij 200 jaar geleden aangaf hoe belangrijk het herkennen van priemgetallen en het ontbinden van getallen in factoren is.¹ In het citaat worden twee problemen aangestipt. Voor het eerste probleem, om van een gegeven getal N vast te stellen of het priem is of niet, hebben de Indiase wiskundigen voor het eerst een algoritme gegeven dat deterministisch is met een rekkentijd die polynomiaal in de grootte $\log N$ begrensd is zonder dat in het bewijs daarvan onbewezen vermoedens gebruikt worden. Voor het tweede probleem, om van gegeven N alle factoren te bepalen, heeft dit geen directe gevolgen. Een polynomiaal factorisatie-algoritme zou verstrekkende gevolgen hebben voor de complexiteitstheorie, de cryptografie, enzovoorts.

Op het eerste gezicht is het verrassend dat de twee problemen verschillend zijn: is een priemgetal immers niet een getal waarvoor het onmogelijk is een ontbinding te vinden?

Delers

Laten we, bij wijze van voorbeeld, de multiplicatieve 'geaardheid' van de getallen in de verzameling $\{314021, 314721, 314821, 314921, 315021\}$ proberen te bepalen. We doen het op een manier die vergelijkbaar is aan wat een modern computeralgebra-pakket zal proberen.

Omdat machten vaak tot complicaties leiden, is het verstandig allereerst te onderzoeken of een getal een echte macht is; zo loopt $m = 314721$ als eerste tegen de lamp, als 561^2 . Het uitproberen of $\sqrt[k]{N}$ geheel is, voor $k = 2, 3, \dots, \sqrt[2]{\log N}$, kan zeer efficiënt gebeuren.

Een *deler* is natuurlijk het meest overtuigende argument voor samengesteldheid — op heterdaad, mogen we wel zeggen. Soms zijn delers overduidelijk aanwezig, zoals de deler 3 in $o = 315021$. Helaas is dat niet altijd zo — wij kennen geen methode om aan de schrijfwijze in ons positionele stelsel eenvoudig een deler van elk samengesteld getal af te lezen. Het eenvoudigste argument is niet altijd het makkelijkst te vinden argument; immers een samengesteld getal dat geen macht is hoeft niet meer dan twee echte delers te hebben. Dat is zoeken naar een speld in een hooiberg. Natuurlijk is het nuttig, bijvoorbeeld door test-deling, uit te proberen of er 'kleine' factoren zijn (zeg onder de 10^6 ; in onze mini-voorbeelden vinden we onder de 10^1 alleen factoren 3 in m en o).

Getuigen

Gelukkig zijn er ook andere, vaak gemakkelijker te vinden argumenten die samengesteldheid aangeven. We draaien als het ware de bewijslast om: ga er vanuit dat je met een onschuldig priemgetal van doen hebt en verkrijg dan een tegenspraak voor samengestelde N omdat een bepaalde eigenschap van priemgetallen niet geldt. Een veel gebruikte mogelijkheid biedt de kleine stelling van Fermat: als N priem is en a niet deelt, zal $a^{N-1} - 1$ deelbaar zijn door N . Machtsverheffen kan efficiënt door herhaald kwadrateren en vermenigvuldigen, en (tussen)resultaten blijven klein omdat we modulo N rekenen. Dit geeft daarom een efficiënte test, die garandeert dat als N er niet aan voldoet, N niet priem is. Zo'n a is dan een *getuige* voor de samengesteldheid van N . Zo is $n = 314921$ een niet-priem in ons lijstje, omdat $2^{314920} \equiv 227428 \pmod{314921}$. De getuige 2 vertelt ons niets over de factoren van n . Hebben we de getuige in handen, dan is de correctheid van zijn aantijging eenvoudig te verifiëren. Maar hoe eenvoudig is het vinden van een getuige?

Quasi

De overgebleven getallen 314021 en 314821 uit ons lijstje hebben beide de eigenschap dat er geen Fermat-getuigen te vinden zijn die met het getal onderling ondeelbaar zijn. Volgens het adagium *if it looks like a prime and it behaves like a prime, it must be a prime* zouden beiden gemakkelijk voor priem uitgemaakt worden. Toch is één van deze getallen niet priem. Wiskunde is welhaast uitgevonden om dergelijke drogredeneringen te weerleggen, dus we gaan op zoek naar een methode om ook zulke quasi-priemgetallen te ontmaskeren.

Het probleem is dat niet elke a voldoet als Fermat-getuige voor een samengesteld getal. Sterker nog, er bestaan samengestelde getallen waarvoor zulke getuigen net zo moeilijk te vinden zijn als factoren: voor zulke *Carmichaelgetallen* voldoen alleen a die een deler met N gemeen hebben niet aan de Fermat-identiteit $a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$.

Fermat-getuigen leveren eigenlijk een groepentheoretisch argument: de met N onderling ondeelbare restklassen modulo N vormen een groep $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ onder vermenigvuldiging. Priemgetallen onderscheiden zich doordat de orde van deze groep $N - 1$ is, want voor samengestelde N is de orde kleiner. In een eindige groep deelt de orde van elk element de groepsorde. Voor een Carmichaelgetal N geldt de curieuze eigenschap dat de orde van elk element $N - 1$ deelt, hoewel $N - 1$ niet de groepsorde is. Enkele jaren geleden werd aangetoond dat er oneindig veel Carmichaelgetallen bestaan.

Nauwkeuriger kijken

Het ligt voor de hand een verfijnder argument te zoeken om na te gaan of de orde van de groep $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ kleiner dan $N - 1$ is. Het gevaar doemt dan op dat men eigenschappen van $N - 1$ wil gebruiken die slechts aan de factorisatie af te lezen zijn, maar $N - 1$ zou wel eens moeilijk in factoren te ontbinden kunnen zijn! Gelukkig volstaat het om alleen gebruik te maken van factoren 2 in $N - 1$: schrijf $N - 1 = 2^k \cdot r$, met r oneven. In plaats van direct naar $a^{N-1} \pmod{N}$ te kijken, kan men eerst $a^r \pmod{N}$ bepalen. Als dit de restklasse van 1 of van $-1 \pmod{N}$ oplevert krijgen we geen nuttige informatie over de aard van N ; vinden we een andere restklasse b , dan gaan we kwadrateren, om $b^2, b^{2^2}, \dots, b^{2^k} = a^{N-1} \pmod{N}$ te bepalen. Is de laatste niet 1, dan is N samengesteld volgens het Fermat argument. Is de laatste wél 1, dan zijn we ergens een restklasse c tegengekomen die zelf niet gelijk aan die van 1 was maar het kwadraat wel; als c de restklasse van -1 was kan N priem zijn, maar is $c \neq -1 \pmod{N}$ dan moet N samengesteld zijn. De reden is dat $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ een lichaam vormt als N een priemgetal is, en in een lichaam kan de vergelijking $x^2 - 1 = 0$ slechts de twee oplossingen ± 1 hebben.

De primaliteitstest volgens Agrawal, Kayal, Saxena en Lenstra

Gegeven: een geheel getal N .

1. Test of er gehele getallen m, e groter dan 1 bestaan met $m^e = N$; als dat zo is dan is N samengesteld.
2. Laat v het dichtst bij $(2 \log N)^2$ gelegen gehele getal zijn; bepaal de priemgetallen $2, 3, \dots, p_i, \dots$ maar stop zodra ofwel p_i een deler van N is ofwel p_i geen der getallen $N-1, N^2-1, \dots, N^v-1$ deelt en $p_i \geq 5$. In het eerste geval is N priem als $p_i = N$ en anders samengesteld, in het tweede geval gaan we verder met $r = p_i$.
3. Test voor $a = 1, 2, \dots, r-2$ of $(x+a)^N \equiv x^N + a \pmod{(x^r-1)/(x-1)}$ in $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}[x]$; als dit voor een a niet geldt is N samengesteld. Als het voor alle a geldt is N priem.

Het blijkt dat $q = 314821$ snel doorslaat wanneer we hem op dergelijke wijze aan de tand voelen: voor $a = 2$ vinden we nog dat $a^{(q-1)/2} \equiv -1 \pmod{q}$ maar voor $a = 3$ is $c = a^{(q-1)/4} \equiv 290603 \pmod{q}$ en $c^2 \equiv 1 \pmod{q}$. We hebben dus een quasi-priemgetal q in de lijst gevonden!

Spelden te over

Het aardige is nu dat we kunnen bewijzen dat er voor elke samengestelde N heel veel a bestaan waarmee dit verfijndere argument werkt: minstens $3/4$ van alle restklassen modulo N doet het. We kunnen rustig spreken van *kroon*-getuigen. Onze quasi-priem q valt bij haast 85% van de bases door de mand, zoals bij 3, 5, 11, maar niet bij 2 of 7.

Plotseling zijn we terechtgekomen in een hooiberg waar de *meeste* sprietten speld blijken. Door *willekeurige* restklassen a te 'ondervragen' kan de kans dat bij een samengestelde N geen getuige wordt gevonden klein gemaakt worden; maar, behalve voor piepkleine N , vinden we uit zo'n 'buurtonderzoek' nooit een bewijs voor de primaliteit omdat het testen van minstens 25% van de restklassen ondoenlijk is. Onder aanname van een gegeneraliseerde Riemann-hypothese is echter bewezen dat in de kleine verzameling van alle restklassen met representant tussen 0 en $2(\log N)^2$ altijd een getuige zit, voor samengestelde N . Dat levert dan een deterministische test op met polynomiale rekentijd, waarvan de correctheid helaas alleen bewezen is onder aanname van een onbewezen vermoeden.

Spelden zoeken

Het getal $p = 314021$ doorstaat alle genoemde tests glansrijk; en hoewel we misschien geneigd zijn dan te *geloven* in de onbezoeedheid van p , nemen we niet met minder genoegen dan onomstotelijk *bewijs*.

Bij het toekennen van de predicaat priem en samengesteld moet als leidraad gelden, om maar eens een ander afgeklonden angelsaksisch bon-mot te gebruiken, dat *justice not only has to be done, but also has to be seen to be done*. Er spelen dan dus drie kwesties: wat is de waarheid, welk argument toont dit aan, en hoe vind ik dat argument? Dat laatste is bij uitstek een algoritmische vraag. Het is de enige vraag die we voor samengegestelde N niet on-conditioneel in polynomiale tijd hebben opgelost.

Vormen (kroon)getuigen het eenvoudig te verifiëren argument voor samengesteldheid, datzelfde kunnen priemcertificaten betekenen voor priemgetallen. Het certificaat voor de primaliteit van N kan bijvoorbeeld bestaan uit een rij van alle priemdelers p van $N - 1$ en bij elke p een restklasse a waarvoor a^{N-1} wel maar $a^{(N-1)/p}$ niet de restklasse van 1 mod N is. Dat toont aan dat de orde van $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ precies $N - 1$ is, mits we recursief bewijzen dat de priemdelers p inderdaad priem zijn. Voor verificatie moeten we laten zien dat $N - 1$ opgebouwd is uit de gegeven priemdelers en dat de restklassen a aan de genoemde eisen voldoen. Het probleem met zo'n 'certificaat van onbesmet blazen' is natuurlijk weer om het te vinden — we hebben bijvoorbeeld hier de factorisatie van $N - 1$ nodig.

Priembewijzen

Dit is het moment om een *primaliteitsbewijzer* aan te roepen. Door computerpakketten worden soms eventuele speciale eigenschappen (herkenbare vorm, zoals bij Mersenne-getallen $2^m - 1$) in combinatie met een database gebruikt, waarna zonodig een algemene primaliteitsbewijzer wordt aangeroepen. Van dat laatste bestaan twee praktische methoden: het *Jacobisom*-algoritme of het *elliptische kromme*-algoritme. Het eerste maakt gebruik van eigenschappen van cyclotomische uitbreidingen van $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$. Het tweede algoritme gebruikt het aantal punten op elliptische krommen over eindige lichamen. Van beide bestaan



Nitin Saxena, Neeraj Kayal en Manindra Agrawal, de ontdekkers van de polynomiale primaliteitstest.

deterministische versies (maar worden in de praktijk probabilistische versies gebruikt); van de eerste is een preciese rekentijdanalyse bekend (met $\log \log \log N$ in de exponent), de tweede is conceptueel iets eenvoudiger en kan een certificaat opleveren, dat in de praktijk onhandelbaar groot is. Beide methoden zijn gebruikt voor priemgetallen tot een omvang van zo'n 2500 decimale cijfers en leveren routinematig bewijzen voor priemgetallen van enkele honderden cijfers.²

Tenslotte is er nog een theoretisch resultaat, gebaseerd op een generalisatie naar abelse variëteiten van de elliptische krommen test. Dat is een probabilistisch algoritme met een *verwachte* polynomiale rekentijd. Hiervan is geen praktische versie bekend.

De bijdrage uit India

De preprint van de Indiërs toont het bestaan aan van een methode aan waarmee *deterministisch in polynomiale tijd* bepaald kan worden of een gegeven getal priem of samengesteld is. Het maakt dus in theorie het zoeken naar getuigen en het aanroepen van de eerder genoemde priembewijzers overbodig. Eén van de grote verrassingen is hoe simpel het uiteindelijke algoritme is: het kan aan middelbare scholieren uitgelegd worden, en de correctheid kan voor tweedejaars wiskundestudenten begrijpelijk gemaakt worden.

De elementaire gedachte achter het algoritme is een andere eigenschap van priemgetallen dan de stelling van Fermat te gebruiken, en wel dat in de polynoomring $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}[x]$ voor een a onderling ondeelbaar met N geldt dat $(x + a)^N = x^N + a$ dan en slechts dan als N priem is.

Dat de identiteit geldt als N priem is volgt direct uit het binomium van Newton, de deelbaarheidseigenschappen van binomiaalcoëfficiënten en de kleine stelling van Fermat. Dat hier ook de omkering geldt, is eenvoudig te bewijzen door voor samengestelde N een binomiaalcoëfficiënt aan te geven die niet door N deelbaar is.

Het algoritme

In de gegeven vorm is de polynoomidentiteit natuurlijk niet te gebruiken, omdat het op een of andere manier de evaluatie van de $N + 1$ coëfficiënten inhoudt. In plaats daarvan wordt de vergelijking genomen modulo het cyclotomische polynoom $(x^r - 1)/(x - 1)$, voor een hulp-priemgetal r ; anders gezegd, we verifiëren een identiteit in een uitbreiding van $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ met een r -de eenheidswortel (hetgeen lijkt op wat er gebeurt in de Jacobisomtest), en dat kan weer heel efficiënt. In het algoritme wordt r geschikt gekozen en wordt de identiteit gecontroleerd voor voldoende waarden van a .

Het correctheidsbewijs toont aan dat in de geconstrueerde ring de identiteiten voor de gekozen waarden van a alleen kunnen gelden voor N die priemmacht zijn; dat N een echte macht is kan snel worden uitgesloten, zoals we zagen. In de complexiteitsanalyse bestaat het werk er voornamelijk uit te laten zien dat de omvang van de kleinste mogelijke geschikte r (effectief) begrensd wordt door een macht van $\log N$.

Verdere ontwikkelingen

In de oorspronkelijke versie wordt een polynomiale grens op de rekentijd verkregen met behulp van een vrij diep resultaat uit de analytische getaltheorie. Door Hendrik Lenstra is aangetoond dat dit ook met elementaire resultaten uit de analytische getaltheorie mogelijk is, en dat daarmee bovendien een *effectief* resultaat verkregen kan worden: er is een grens op de benodigde rekentijd voor dit algoritme van de vorm $C(\log N)^{12}$ met berekenbare constante C , als men afziet van machten van $\log \log N$. Het hele resultaat is dan met tweedejaars-algebra verkregen!

Voor een scherpere exponent moet harder gewerkt worden. Wellicht is de best mogelijke exponent voor een variant van dit algoritme 6, maar aan zo'n resultaat wordt nog gewerkt.

Of het nieuwe algoritme ook in de praktijk getuigenzoekers en priembewijzers gaat vervangen is maar zeer de vraag: hoewel het algoritme asymptotisch beter is, garandeert dat nog niet dat het in praktische omstandigheden (met N van niet meer dan enkele honderden of op zijn hoogst duizenden cijfers) ook superieur is. Misschien is een combinatie met andere methoden wel van praktisch belang. —

Noten

¹ "The problem of distinguishing prime numbers from composite numbers and of resolving the latter into their prime factors is known to be one of the most important and useful in arithmetic. [...] Further, the dignity of the science itself seems to require that every possible means

be explored for the solution of a problem so elegant and so celebrated.", Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, article 329, 1801 translation by Arthur A. Clarke, 1966 for Yale University Press revised by William C. Waterhouse et al for Springer Verlag, 1986.

² Op 15 februari 2003 werd bekend gemaakt dat met het elliptische krommen algoritme, middels een berekening die 22 weken duurde, de primaliteit werd bewezen van een getal van 5878 cijfers, een record voor priemgetallen die niet van een speciale vorm zijn.

Gerard Alberts

*Werkgroep Wetenschap en Samenleving
Katholieke Universiteit Nijmegen
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
g.alberts@cwi.nl*

Teun Koetsier

*Vrije Universiteit Amsterdam
Vakgroep Wiskunde
De Boelelaan 1081, 1081 HV Amsterdam
teun@cs.vu.nl*

Godelieve Bolten

*Rijksarchief in Noord-Holland
Kleine Houtweg 18
2012 CH Haarlem
info@noordhollandsarchief.org*

Archieven van wiskundigen

Snippers met formules

Het erfgoed van de wiskundebeoefening heeft onder meer de vorm van archieven. Archiefonderzoek is fascinerend en leidt tot verrassende inzichten. Gerard Alberts, Teun Koetsier en Godelieve Bolten geven een overzicht van het symposium dat het landelijk werkcontact Geschiedenis en Maatschappelijke Functie van de Wiskunde in april 2002 organiseerde in het kader van het Nederlands Mathematisch Congres. Teun Koetsier, Gerard Alberts en Godelieve Bolten hebben samen met Dirk van Dalen van de Universiteit Utrecht zitting in de Commissie Persoonlijke Archieven van Wiskundigen (CPAW) van het Wiskundig Genootschap. Het CPAW wordt ondersteund door Miente Bakker van het CWI te Amsterdam.

In het classificatiesysteem voor wiskundige publicaties van de American Mathematical Society is er een speciale sectie History and Biography. Dat moet ook, want de geschiedenis van de wiskunde maakt deel uit van de wiskundebeoefening, evenals de wijsbegeerte van de wiskunde en in het bijzonder de grondslagen van de wiskunde. Waarom is dat zo? Je zou kunnen zeggen: de geschiedenis

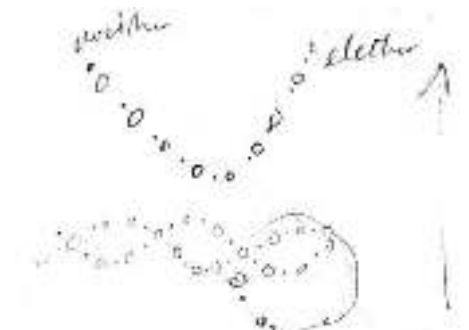
van de wiskunde is een bron van mooie verhalen. En dat is ze stellig, maar ze is meer. Je kunt ook zeggen: de geschiedenis van de wiskunde is een bron van informatie met betrekking tot wie wat wanneer heeft bedacht. Dat is ook waar, maar daarmee is nog niet alles gezegd. Immers de geschiedenis van de wiskunde kan van nut zijn voor de wiskundebeoefening in het heden: ze leert ons dat de waan van de dag betrekkelijk is, ze kan didactische ideeën leveren, en ze kan wiskundige problemen suggereren. En je kunt natuurlijk ook nog opmerken dat de geschiedenis van de wiskunde voor de historicus van de wiskunde een boeiend onderzoeksterrein is dat zijn eigen onderzoeksvragen genereert. Dat alles klopt, maar ook daarmee is nog niet het hele antwoord gegeven.

Waarom geschiedenis van de wiskunde?

De geschiedenis van de wiskunde gaat met recht onmiddellijk aan de grondslagen van het vak vooraf in de AMS onderwerpsclassificatie, omdat de geschiedenis van de wiskunde met de identiteit van de wiskunde te maken heeft. Het is eigen aan de mens dat hij over zichzelf kan nadenken. En daarom

stelt hij zich onherroepelijk van tijd tot tijd de vraag: wie ben ik, waar kom ik vandaan? De mens vraagt het zich individueel af, maar ook hele samenlevingen en allerlei groepen en instituties daarbinnen stellen zich die vraag.

Op momenten van ingrijpende keuzes hebben mensen en groepen hun geschiedenis nodig, niet om in weg te vluchten, maar om zinvol een koers te kunnen uitzetten. Zo is het ook met de wiskunde. Wanneer studentenaantallen en financieringsbehoeften of de positie van de wiskunde in het middelbaar

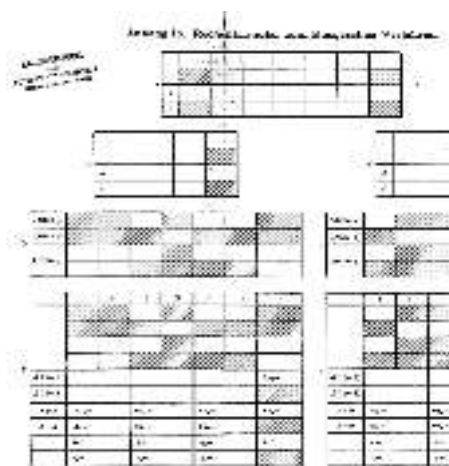


Figuur 1 Snippertje van Van Dantzig uit 1938, uitleg van de atoomtheorie aan Mannoury

onderwijs ons dwingen na te denken over ons vak, dan geeft de geschiedenis ons enig houvast bij die reflectie.

De beoefening van de geschiedenis in al haar vormen heeft niet de hoogste prioriteit, maar hoort er essentieel bij. Wat de Nederlandse geschiedenis van de wiskunde betreft is dat ook het geval. Nederlanders zijn niet zo geneigd om zichzelf op de borst te slaan. Hoezeer we echter ook pogen dergelijke gevoelens te verbergen, we zijn natuurlijk wel degelijk trots op de Nederlandse cultuur, op de Nederlandse wiskunde in het bijzonder. De eerste en de tweede gouden eeuw —voor de wetenschap is het sinds enige tijd de gewoonte de periode rond 1900 als tweede gouden eeuw aan te duiden— en hun vervolg zijn van grote betekenis geweest, ook wat de wiskunde betreft. De verhalen over de geschiedenis van de wiskunde in Nederland maken deel uit van de historische achtergrond van elke Nederlandse wiskundige. De zorg voor het historisch erfgoed is daarom een zorg voor de Nederlandse wiskundegemeenschap. Een aspect van deze zorg voor het verleden is het bewaren ervan in archieven.

Het wiskundig bedrijf is wel eens met een restaurant vergeleken. De gast in het restaurant wordt met kant en klare in een mooie omgeving opgediende gerechten geconfronteerd. Naar het gezwoeg en geploeter van de koks in de keuken kan hij slechts raden. Zo hebben wiskundigen ook de neiging om de wereld slechts kant en klare van fraaie bewijzen voorziene resultaten te tonen. De mislukte en soms achteraf onhandige pogingen die vooraf gingen aan het succes worden slechts zelden besproken. Toch zijn mislukte pogingen niet zonder belang; ze tonen dat wiskunde mensenwerk is en maken ook ook begrijp-



Figuur 2 Van Wijngaarden kon al rekenen. Zijn Delftse opleiding had hem vertrouwd gemaakt met het gebruik en ontwerp van rekenschema's (Technische Dynamiek, Biezeno en Grammel, 1938).



Figuur 3 Aad van Wijngaarden (1916–1987) achter zijn bureau op het Mathematisch Centrum in 1952

pelijker hoe de wiskunde zich ontwikkelt. Archieven bieden ons vaak een uniek kijkje in de keuken.

De CPAW

Er is een archiefwet waarin de overheid zich in het algemeen verantwoordelijk maakt voor archieven. De wiskundige gemeenschap is zich ervan bewust dat de zorg voor de archieven op haar gebied ook haar zaak is. Het Wiskundig Genootschap kent de Commissie Persoonlijke Archiven van Wiskundigen (CPAW). In haar selecterende en bemiddelende taak ontwikkelt deze commissie nieuwe initiatieven. Mede naar aanleiding hiervan organiseerde het landelijk werkcontact Geschiedenis en Maatschappelijke Functie van de Wiskunde april 2002 in het kader van het Nederlands Mathematisch Congres een symposium. Het stond onder voorzitterschap van N.G. de Bruijn en Jan van Maanen, Teun Koetsier, Gerard Alberts en Godelieve Bolten hielden voordrachten. Het verhaal van Van Maanen vindt u elders in dit nummer. Van Koetsier, Alberts en Bolten volgt de synopsis.

Van Wijngaarden en Van Dantzig uit oud papier

Het mooie van een archief, voor de historicus, is dat daaruit geleidelijk een persoon oprijst. De archieven van Van Dantzig bieden hieraan mooie illustraties. Van een aantal vooraanstaande Nederlandse wiskundigen is archiefmateriaal bewaard: kasten, laden, dozen met oud papier. Het is de taak van de CPAW om de archiefbewaarders te helpen vaststel-

len welke archieven de moeite van het bewaren waard zijn. In sommige gevallen bevindt het materiaal zich in het instituut waar de betreffende wiskundige werkzaam was, de instituutsbibliotheek of de universiteitsbibliotheek, soms bij familie en soms in het Rijksarchief.

Het is natuurlijk nooit zo dat alle archiefmateriaal betreffende een persoon zich op één plaats bevindt. Van Gerrit Mannoury zijn er bijvoorbeeld naast de papieren in familiebezit tenminste twee collecties stukken, één in de handschriftenverzameling van de Universiteitsbibliotheek van de Universiteit van Amsterdam en één in het Internationaal Instituut voor Sociale Geschiedenis. Wie, om een heel ander voorbeeld te nemen, John von Neumann wil bestuderen moet in tenminste drie archiefbewaarplaatsen in de VS de 'John von Neumann-papers' gaan inzien.

Betreffende Van Wijngaarden bevindt zich een gedeelte in de archieven van het Mathematisch Centrum, er bestaat correspondentie in de archieven van collega's, er zijn dossiers bij een uitgever en spullen bij organisaties waarvan hij lid was. Als men echter geluk heeft is er één persoonlijk archief, een 'Archief Van Wijngaarden' of een 'Archief Van Dantzig'.

We hebben geluk, van beiden zijn er ruim twee kasten vol dossiers, werk, aantekeningen, publicaties, brieven, notulen bewaard gebleven. Daar kun je in verdrinken. Deze collectie bevat niet alles van Van Wijngaarden, maar wel een belangrijk deel van zijn materiaal. Het bevat niet alleen spullen over hem, maar ook over degenen die met hem samen-



Figuur 4 Van Dantzig leefde zijn muzikale aspiraties uit in een poging tot toonzetting van Rilke's gedicht *Die Liebende*

werkten of correspondeerden. Zonder meer is dit 'Archief Van Wijngaarden' een hoofdbron, waaruit bij zorgvuldige benadering een persoon oprijst.

De zorgvuldige benadering is van cruciaal belang. Men gaat niet zomaar een archief in, althans niet zonder verdrinkingsgevaar. Je weet al iets, anders was je nooit op het idee gekomen om een archief te raadplegen. En je hebt een vraagstelling. Zonder vraagstelling moet het bezoek aan archieven afgeraden worden.

Gewapend met voorkennis en een vraag kan men een archief benaderen met de kans dat daaruit een persoon oprijst. Men komt dan ook allerlei gekke dingetjes aan de weet,

details van iemands leven en werk die men niet verwachtte en zijdelingse gegevens die de lezer eigenlijk niet aangaan. Goed; we zijn voyeuristisch genoeg om toch zorgvuldig te kijken.

Van Dantzig

David van Dantzig, 1900–1959, is bekend gebleven omdat hij een bijzonder wiskundige was en omdat hij nadacht over de maatschappelijke rol van de wiskunde. Hij heeft belangrijk conceptueel werk gedaan voor de twintigste eeuwse wiskundebeoefening. Op dit laatste aspect was mijn onderzoek gericht. Ik kende zijn publicaties en had reeds analyses gemaakt van zijn notie van wiskundig model-

leren. Zonder archief zouden we nooit geweten hebben dat hij op jonge leeftijd aspiraties had in muzikale richting. Zonder persoonlijk archief zouden we nooit geweten hebben dat hij muziek en literatuur boven de wiskunde stelde (zie figuur 4).

Natuurlijk vindt men in het archief van een wiskundige ook blijken dat hij een typisch wiskundige was. David van Dantzig hield in 1928 zijn vriend Bart van der Waerden op de hoogte van zijn vorderingen in het wiskundig onderzoek. De in jaren jongere Van der Waerden was zijn senior in de wiskunde, zijn coach en zou later zijn promotor worden. Wiskundigen als ze waren deelden ze elkaar de persoonlijke besommeringen in een post scriptum mee (figuur 7).

Echt verhelderend is het om in archieven in de keuken van iemands werk te kunnen kijken. We zouden van onze historisch subjecten willen weten wat er in hun hoofd omging toen ze de door ons onderzochte acties uitvoerden. We kunnen ons natuurlijk moeilijk in de tijd verplaatsen noch in een ander persoon. Toch helpt een archief ons daarin. Het volgende voorbeeld is illustratief.

We weten dat David van Dantzig een bijna symbiotische leerling-leermeester-relatie ontwikkelde met Gerrit Mannoury, de correspondentie is dankzij de archieven van beiden volledig geïnventariseerd. Van Dantzig besprak alles met Mannoury. We weten uit allerlei secundaire aanwijzingen dat 1938 een keerpunt was in Van Dantzigs werk. Hij was benoemd tot deeltijdshoogleraar in Delft, had grote plannen in de bestudering van mathematische fysica. Dat drukte hij uit in zijn oratie, in gesprekken met Mannoury en in een —opnieuw slechts in het archief gevonden— brief aan zijn Delftse seniorcollega Schouten waarin hij zijn onderzoeksprogramma uiteenzet. Toch liet Van Dantzig vrijwel op datzelfde moment het onderwerp rusten om zich op andere zaken te storten. Van die gesprekken bewaarde Mannoury, tussen de brieven aantekeningen. Figuur 1 toont een tekening van een atoomkern. Dat beeld was toen sterk in ontwikkeling en Van Dantzig legde zijn oude leermeester uit waar hij mee bezig is. Hier blijkt heel concreet hoe diepgaand David van Dantzig met de theoretische fysica bezig was. Hij bereikte niets op dit terrein.

Uit dit concrete overblijfsel kunnen we afleiden dat de reden niet was dat hij zich er zomaar van afwendde, maar dat hij met zijn hoofd tegen de muur liep. Op dat terrein van de theoretische fysica was een doorbraak nodig die anderen eerst twintig jaar later zouden forceren. Van Dantzigs wending van de theo-

retische fysica vandaan was dus niet een op afstand blijven.

Nee, hij zat er bovenop, en zag zich geconfronteerd met het onmogelijke. De inhoud van zijn onderzoek was een van de factoren in Van Dantzig's wending. Hier helpt een snippertje in het bereiken van een vergaande interpretatie. (Correspondentie David van Dantzig–Gerrit Mannoury (historische notitie SEN, 1) J. Siegenbeek van Heukelom, G. Alberts. Amsterdam CWI (Note SEN-No001) September 2000)

Van Wijngaarden

Ook van Aad van Wijngaarden, 1916–1987, is een flink archief bewaard. Hij was de grondlegger van de informatica in Nederland en de leider van het team dat de computertaal ALGOL 68 ontwierp. Toen hij op 1 januari 1947 werd ingehuurd om het hoofd van de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum te worden, kon hij al 'rekenen'. Deze rekenvaardigheid kwalificeerde hem bij uitstek. Wat we zouden willen weten is wat dat rekenen inhield en hoe overgang in het ontwerp en gebruik van computers. Wat ging er om in zijn hoofd, hoe kwam hij ertoe zich met zijn in-

genieursachtergrond juist op het mathematische werk te storten en binnen de informatica-wereld juist op programmeertalen?

Van Wijngaarden had in Delft in zijn studie werktuigbouwkunde twee belangrijke leermeesters: C.B. Biezeno en J.M. Burgers. Biezeno was de man van de toegepaste mechanica en eerste auteur van het standaardwerk *Technische Dynamik*. In dat boek vindt men voor allerlei technische vraagstukken ingewikkelde rekenmethoden en rekenschema's om die rekenmethoden uit te voeren (zie figuur 2).

De leerlingen van Biezeno werden opgevoed met dergelijke rekenschema's, en —dat was bijzonder— met de vaardigheid en het inzicht om zelf dergelijke schema's te ontwerpen. In die zin was hij binnen de Delftse ingenieurscontext reeds met een sterke mathematische oriëntatie opgevoed. Dergelijk rekenwerk deed Van Wijngaarden ook voor Burgers in de stromingsleer. En hier zien we hoe dergelijk werk er in werkelijkheid uit zag. Vellen vol, keurig systematisch ingevuld.

In figuur 5 is een kopie uit een Amerikaans archief te zien, de University of Maryland heeft een collectie Burgers-papers. Ik kan u zeggen dat je onderzoekershart een slag overslaat wanneer een enveloppe met dergelijk materiaal in je postvakje ligt. Zo netjes werkt natuurlijk zelfs de nijvere en systematisch arbeidende Aad van Wijngaarden niet altijd. Uit zijn eigen archief komt het in figuur 6 afgebeelde kladje op de achterkant van een kasabon, het is een soort spiekbrieftje voor interpolatieberekeningen. Met deze snipper in je hand krijg je werkelijk een gevoel hoe Van Wijngaarden gewerkt moet hebben.

Het is fascinerend om rechtstreeks in contact te staan met handschriften van degene die men onderzoekt. Hier doet zich 'de historische ervaring' voor: de concrete papieren roepen even de illusie op dat men de afstand in tijd zou kunnen overbruggen. Deze sensatie is een wezenlijk moment in het historisch onderzoek (het andere moment is de historische distantie). Men doet deze ervaring bij uitstek —niet uitsluitend— op in archief-onderzoek. Dat maakt archieven onmisbaar. We moeten er goed voor zorgen.

De rol van de overheid

De geschiedenis van de wetenschap is een verhaal over het leven en werken van begaafde en bevlogen mensen. In de zorg voor het erfgood van deze mensen speelt de wetenschappelijke gemeenschap zelf de eerste rol. Daar ligt het eerste belang, de eerste zorg, de eerste belangstelling en de deskundigheid

om te oordelen wat bewaard moet worden en wat niet. Op individueel niveau moet het zo geregeld zijn. Voor de wetenschap als geheel zijn echter voorzieningen op hoger plan nodig. Sinds 1985 zet het Rijksarchief in Noord-Holland (RANH) zich in voor het behoud en beheer van de archieven die dit verhaal documenteren, de zogenaamde wetenschapsarchieven.

Het zijn archieven van personen en instellingen die werkzaam zijn of zijn geweest op het gebied van de exacte wetenschappen in Nederland. Inmiddels heeft het RANH al zo'n zestig wetenschapsarchieven in huis. Hiertoe behoren de archieven van de Holland-



Figuur 5 Rekenwerk van Aad van Wijngaarden voor Burgers, 1944

N	10^{-N}	10^{-N+1}	10^{-N+2}	10^{-N+3}	10^{-N+4}	10^{-N+5}
0	10000	1	10000	10000	10000	10000
1	1000	10	1000	1000	1000	1000
2	100	100	100	100	100	100
3	10	1000	100	100	100	100
4	1	10000	1000	100	100	100
5	0.1	100000	10000	1000	100	100
6	0.01	1000000	100000	10000	1000	100
7	0.001	10000000	1000000	100000	10000	1000
8	0.0001	100000000	10000000	1000000	100000	10000
9	0.00001	1000000000	100000000	10000000	1000000	100000
10	0.000001	10000000000	1000000000	100000000	10000000	1000000
11	0.0000001	100000000000	10000000000	1000000000	100000000	10000000
12	0.00000001	1000000000000	100000000000	10000000000	1000000000	100000000
13	0.000000001	10000000000000	1000000000000	100000000000	10000000000	1000000000
14	0.0000000001	100000000000000	10000000000000	1000000000000	100000000000	10000000000
15	0.00000000001	1000000000000000	100000000000000	10000000000000	1000000000000	100000000000
16	0.000000000001	10000000000000000	1000000000000000	100000000000000	10000000000000	1000000000000
17	0.0000000000001	100000000000000000	10000000000000000	1000000000000000	100000000000000	10000000000000
18	0.00000000000001	1000000000000000000	100000000000000000	10000000000000000	1000000000000000	100000000000000
19	0.000000000000001	10000000000000000000	1000000000000000000	100000000000000000	10000000000000000	1000000000000000
20	0.0000000000000001	100000000000000000000	10000000000000000000	1000000000000000000	100000000000000000	10000000000000000
21	0.00000000000000001	1000000000000000000000	100000000000000000000	10000000000000000000	1000000000000000000	100000000000000000
22	0.000000000000000001	10000000000000000000000	1000000000000000000000	100000000000000000000	10000000000000000000	1000000000000000000
23	0.0000000000000000001	100000000000000000000000	10000000000000000000000	1000000000000000000000	100000000000000000000	10000000000000000000
24	0.00000000000000000001	1000000000000000000000000	100000000000000000000000	10000000000000000000000	1000000000000000000000	100000000000000000000
25	0.000000000000000000001	10000000000000000000000000	1000000000000000000000000	100000000000000000000000	10000000000000000000000	1000000000000000000000
26	0.0000000000000000000001	100000000000000000000000000	10000000000000000000000000	1000000000000000000000000	100000000000000000000000	10000000000000000000000
27	0.00000000000000000000001	1000000000000000000000000000	100000000000000000000000000	10000000000000000000000000	1000000000000000000000000	100000000000000000000000
28	0.000000000000000000000001	10000000000000000000000000000	1000000000000000000000000000	100000000000000000000000000	10000000000000000000000000	1000000000000000000000000
29	0.0000000000000000000000001	100000000000000000000000000000	10000000000000000000000000000	1000000000000000000000000000	100000000000000000000000000	10000000000000000000000000
30	0.00000000000000000000000001	1000000000000000000000000000000	100000000000000000000000000000	10000000000000000000000000000	1000000000000000000000000000	100000000000000000000000000

$1/x = \frac{2}{12} \cdot 10^{-3} \cdot 10^3$

Figuur 6 Kladje van Van Wijngaarden: tabel voor veelgebruikte berekeningen op de achterkant van een kasabon

De taak van de Commissie is in principe eenvoudig. Er moet een instantie zijn die van tijd tot tijd de zaken wat de Nederlandse wiskunde betreft op een rij zet en poogt te voorkomen dat belangrijke archieven verloren gaan. Daartoe vergadert de commissie één of twee keer per jaar en ontplooit zij in de tussentijd enige activiteiten om na te gaan of in een nalatenschap interessant materiaal aanwezig is. Als dat zo is, bevordert zij dat het materiaal ergens wordt ondergebracht. Belangrijk zijn de connecties met archiefinstellingen en bibliotheken. Een grote steun is dat het Rijksarchief in Noord-Holland zich toelegt op archieven van wetenschapsbeoefenaren.

Jan van Maanen

Initiële Opleidingen en Bètadidactiek

Rijksuniversiteit Groningen

Postbus 800, 9700 AV Groningen

maanen@math.rug.nl

Archieven van wiskundigen

Cardinael in de geschiedenis van de wiskunde

De wiskundige Sybrandt Cardinael genoot gedurende zijn leven grote bekendheid, onder andere op het gebied van de meetkunde. Tijdgenoten portretteerden hem als een excentriekeling. Dit blijkt ondermeer uit het gedichtje dat Joost van den Vondel aan hem wijdde. Jan van Maanen, universitair hoofd-docent wiskundendidactiek aan de Rijksuniversiteit Groningen, laat zien hoe gegevens uit de archieven dit beeld kunnen nuanceren.

Niet gepubliceerde bronnen kunnen ons beeld van de ontwikkelingsgang van de wiskunde verrijken, en ons soms zelfs dwingen dit beeld te herzien. Dat geldt voor de wiskundige resultaten, maar evenzeer voor het proces waarmee ze tot stand komen en voor het bepalen van hun belang en invloed. Dit wordt direct duidelijk als we het verhaal dat we zouden kunnen schrijven op basis van gedrukte bronnen vergelijken met de veel bredere versie die resulteert uit archiefonderzoek. Ik zal deze algemene uitspraak toelichten aan de hand van de relatief onbekende wiskundige uit het begin van de zeventiende eeuw: Sybrandt Hanszoon Cardinael. Parallel aan de casus Cardinael komen de verschillende organisatievormen van het archiefonderzoek aan de orde.

Het geval Cardinael: de gedrukte bronnen

De "Lyfwacht voor Meester Sybrant Hanssen Kardinael, Den Vrieschen Euklides" richtte Vondel (bron: [12]) in 1644 tot diens leerlin-

gen: "aen zijn scholieren". Het beeld van de wiskundige was 350 jaar geleden niet anders dan vandaag: de wiskundige was een vakidoot voor wie men toch enige achting had. Je noemt iemand alleen de 'Vriesche Euklides' als hij iets voorstelt, maar er spreekt tegelijk ironie uit. En wie niet meteen in het begin van die ironie overtuigd is (het is nu eenmaal lastig om tussen de eerste regel door te lezen), die krijgt van Vondel in regel twee uitleg: Cardinael hangt van cijfers aan elkaar. Mocht hij vallen, dan resten er slechts 'cijferletters stukken'.

Een tweede vermelding in druk, evenals het gedichtje van Vondel reeds geciteerd door Wijnman [13], is *Het Gulden Zeeghel Des grooten Zeevaerts* uit 1615 van Jan Hendrick Jarichsz van der Ley. Van der Ley stelt: "Meester Sybrant Hansen een Vriese uut de Zee-Stadt Harlinghen haer alder Base seer vermaert inde tel ende meet-const oock so uuytnemende in de selve als een in Hollant te vin-

den is ende te rechte nae een tweeden Ludolph [sc. Van Ceulen] geleden mach worden heeft onlanchs noch hondert zeer constige Geometrische questien mette solutien laten utgaen."

Wie historische gegevens zoekt omtrent een wiskundige, zoals in dit geval Cardinael, richt zich om te beginnen tot de gedrukte bronnen, in eerste instantie zijn *eigen* publicaties. Bij de figuur Cardinael, die van nationaal formaat was, is er een kans ook iets over hem te vinden. Om zo'n kans waar te maken, is wel doorzettingsvermogen en een beetje geluk vereist.

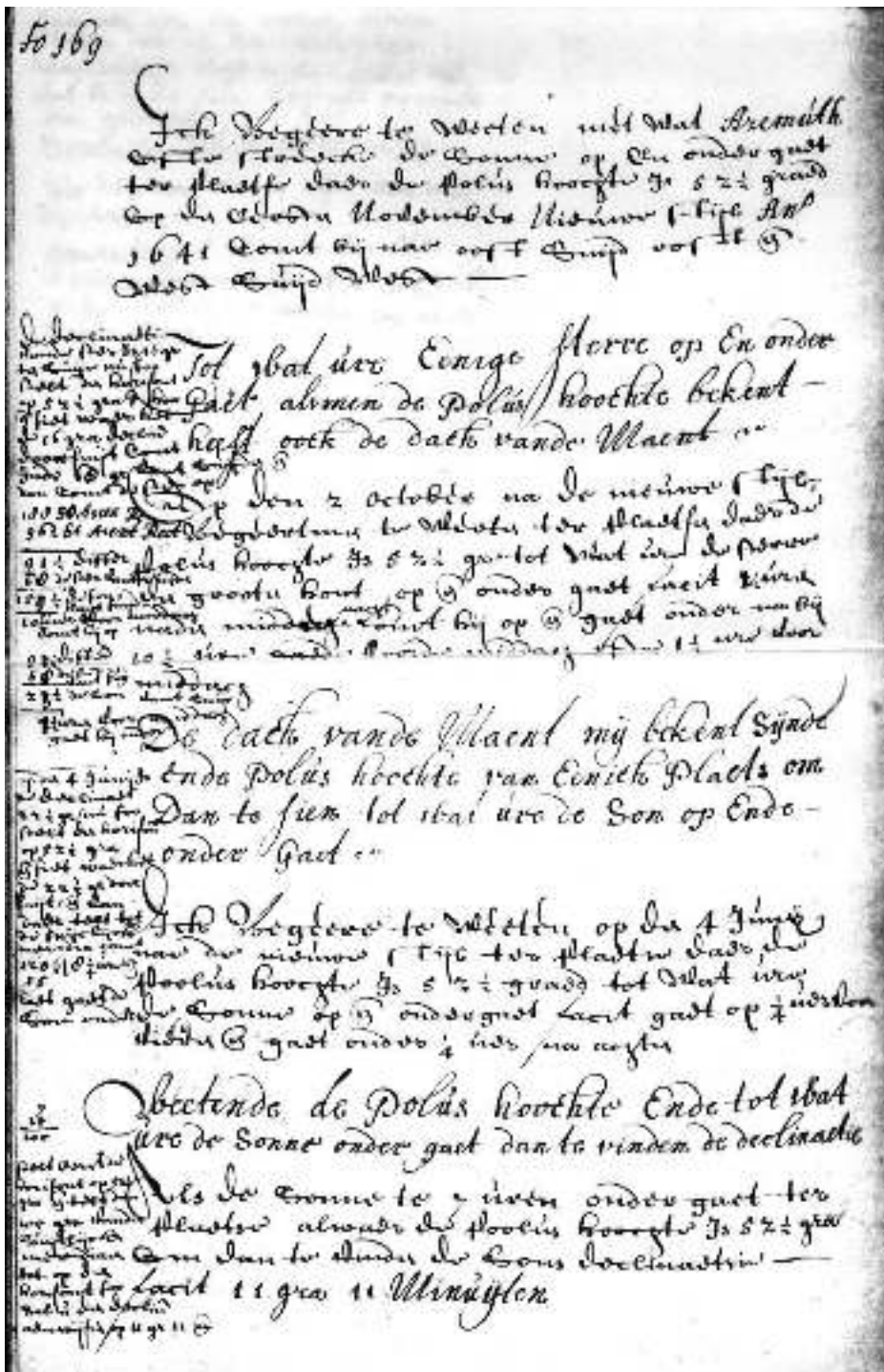
De geportretteerde publiceerde in de eerste helft van de zeventiende eeuw een stevig oeuvre. Het begon met een werk over vlakke meetkunde getiteld *Hondert geometrische questien met hare solutien. Door Sybrandt Hansz. van Harlinghen, Rekenmeester tot Amsterdam* (zie figuur 2). Het verscheen als bijvoegsel bij *Practijck des landmetens* van Sems en Dou, in twee edities. Beide keren kwam het uit zonder vermelding van jaartal. Het zetsel van de uitgaven verschilt maar de figuren werden hergebruikt.

De bibliografische gegevens, zoals men ze bijvoorbeeld vindt in de Nederlandse Centrale Catalogus, zijn verre van eenduidig. Voor de ene editie, die van Willem Janszoon Blaeu, worden jaartallen gegeven van 1612 tot ca. 1620. Voor de andere editie, die van Jan Janszoon Blaeu, variëren de jaren van 1616 tot ca. 1625, waarbij één

Lyfwacht voor Meester Sybrant Hanssen Kardinael, Den Vrieschen Euklides

Joost van den Vondel

De Vriesche Euklides hangt alleen
Van cijferletters hecht aen een.
Bewaert toch Sybrant met uw allen.
Bewaart dien Rekenschat getrouw:
Viel Kardinael van 't plat, hy zou
Aen cijferletters stukken vallen.



Figuur 1 Handschrift C. Let op het jaartal 1641 en de randnotities. (Bibliotheek van de Universiteit Leiden, afdeling westerse handschriften, BPL1558)

bibliotheek stelt: niet voor 1620 (zie [2]). Het werk van Sems en Dou, waar Cardinaels *Questien* bijgevoegd waren, was reeds eerder verschenen zonder deze toevoeging in 1600 in Leiden (bij Jan Bouwens), en daarna zonder vermelding van jaar bij Willem Jansz. Blaeu. Omdat bij Blaeu in 1616 ook een Duitse vertaling verscheen van de *Practijck des landmetens*, door Sebastian Curtius, in 1617 gevolgd door een Duitse vertaling van de *Questien*,

neem ik aan dat de *Questien* eerst bij Blaeu uitkwamen, en dat Jan Jansz. later een nieuwe editie uitbracht van het geheel (de *Practijck* van Sems en Dou, gevolgd door de *Questien*). Omdat Blaeu volgens Keuning [7] vanaf 1612 twee vaste drukkersmerken gebruikte op de titelpagina's van zijn uitgaven, vignetten die in de *Practijck* niet voorkomen, moet de editie van Blaeu in of voor 1612 verschenen zijn. Voor de datering van de twee edities lijkt na-

der onderzoek geboden.

Cardinael koos informatieve titels voor zijn publicaties, zoals ook blijkt uit de volgende uit 1635: *Mathematische ofte Wisconstige bewijs-redenen, waer mede bewesen wort, dat de aerdcloot stil staet, en de sonne daghelijcx en jaerlijcx seinen loop doet: naer de leeringhe van Ptolomaeus, teghens het ghevoelen van N. Copernicus, dat den aerdcloot seinen daghelijckschen en jaerlijckschen loop soude doen, en de sonne stil staen in 't midden van de sterren-hemel*. Uit deze titel spreekt, bij belangstelling voor astronomie en kosmologie, een behoudende stellingname. Een behoudend standpunt komt ook in de *Questien* naar voren waar Cardinael zowel in zijn voorwoord als in het laatste vraagstuk bijna trots meldt dat hij de problemen zonder Cossische getallen, dat wil zeggen zonder de op dat moment oprukkende algebra (de 'Regel Coss', afgeleid van het Italiaanse *cosa*, de — onbekende — zaak) oplost.

Tenslotte verscheen er vanaf 1639 van Cardinaels hand nog een rekenmethode in vier delen, die door verschillende uitgevers tot 1678 herdrukt werden [4]. Ook hier zijn de titels weer leerzaam, zoals deze van het eerste deel: *Het eerste schoolboek van Mr. Sybrand Hansz. Cardinaels Arithmetica: vande fondamenten deser konste bestaende in het tellen, ende der voornaemste rationale reekeningen, ende den Regel van Dryen, als een gront-regel, ende dat van 't ghene hier in voorvalt te doen, alleenlijck inde gheheele ghetallen*. De volgende delen behandelen ook gebroken getallen en het rekenen met verhoudingen.

Cardinael, die zich op de titelpagina van de *Questien* afficheert als rekenmeester in Amsterdam, van Friese komaf, was stellig een speler in het wiskundig bedrijf, iemand om rekening mee te houden (hoewel hij voor de meesten waarschijnlijk toch vooral iemand was om rekening van te leren). Uit de gedrukte bronnen komt een beeld op van een auteur van praktijkgerichte leerboeken die we op grond van de kennis van de situatie in de geschiedenis van de wetenschappen als behoudend in de opvatting van zijn vak kunnen kenschetsen. Dat er ook over hem geschreven is, zegt dat hij in zijn tijd als een figuur van formaat werd gezien. Wat er geschreven werd, toont hem als voorwerp van bewondering en lichte spot. We zullen zien dat uit de archieven een heel ander beeld oprijst.

Gegevens uit de archieven

Archieven geven hun geheimen niet spontaan prijs. Het is vergelijkbaar met goud zoeken:

veel lezen en zeven levert af en toe een paar gram, maar soms levert een toevallige ader meer op dan weken systematisch zoeken.

Ik wil de nadere gegevens over Cardinael benaderen door te kijken naar de wijze waarop het achterliggende archiefonderzoek gedaan is. Om te beginnen noem ik Harry Sitters, die met een onderzoek naar Cardinael bezig is binnen de researchgroep van Anne van Streun aan de Rijksuniversiteit Groningen in het kader van het NWO-project 'Leraar in onderzoek'.

Een deel van de nieuwe archiefgegevens dank ik aan Sitters. Een van zijn onderzoeksvragen betreft het leven van Cardinael. Voor de beantwoording sluit hij onder meer aan bij de resultaten van een grootschalig archiefproject in het begin van de twintigste eeuw, namelijk het samenstellen van het *Nieuw Nederlandsch Biografisch Woordenboek* [11] onder leiding van Molhuysen en Blok. De biografie van Cardinael werd geschreven door de bibliothecaris van de Universiteit van Amsterdam, H.F. Wijnman.

Wijnman had zo veel materiaal dat hij een apart artikel aan Cardinael wijdde [13]. Hij baseerde zich op onderzoek in het Amsterdamse Gemeentearchief, en op materiaal in de universiteitsbibliotheken van Amsterdam en Leiden. Pas door dergelijk archiefonderzoek komt de persoon duidelijker naar voren: Cardinael werd in 1578 in Harlingen geboren. Op 27-jarige leeftijd, in 1605, vestigde hij zich in Amsterdam. In het belastingcohier van 1631 staat hij vermeld als wonend in de Nieuwstraat aan de noordzijde. Nog onbeantwoord is de vraag waar en van wie hij zijn opleiding kreeg. Wel weten we dat hij, voordat hij naar Amsterdam kwam, in Friesland al *geadmitteerd* was als landmeter.

Zes dochters

Cardinael trouwde in 1607 in het stadhuis voor de schepenen met de eveneens uit Harlingen afkomstige Levijntje Panten. Ze kregen zes dochters. Wijnman heeft in de vorige eeuw gegevens weten te traceren van vijf dochters; over de zesde werden recent gegevens gevonden. Sitters heeft een gedetailleerde genealogie van de familie Cardinael-Panten in voorbereiding, die ook licht werpt op de verbintenissen tussen diverse families die een belangrijke rol speelden in het Amsterdamse culturele leven. Cardinael maakte in 1612 deel uit van een commissie van de Amsterdamse admiraliteit, samen met onder andere Willem Jansz. Blaeu, die een methode voor lengtebepaling op zee beoordeelde, bedacht door de eerder genoemde Van der Ley. Cardinael genoot op

dat moment dus al een zekere bekendheid.

Christiaan Huygens

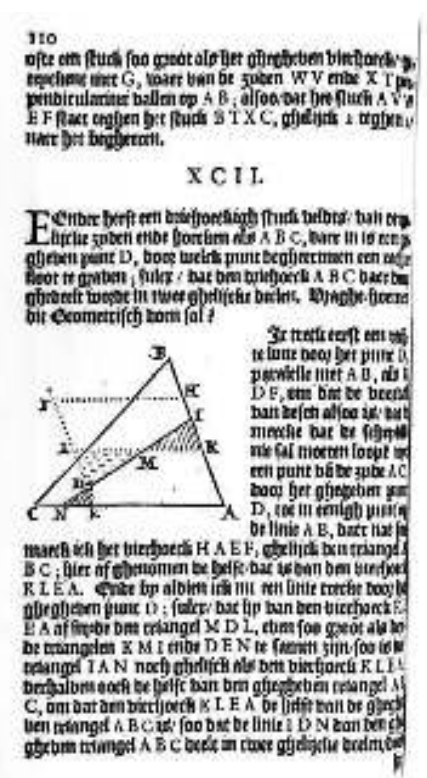
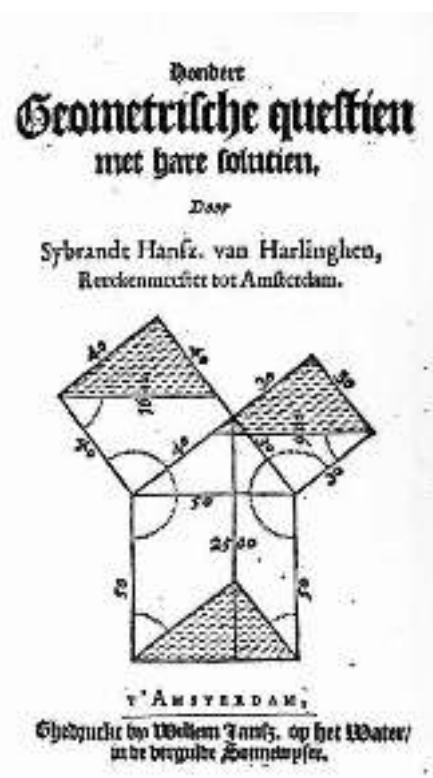
De bekendheid van Cardinael was eerder reeds gebleken uit de resultaten van een ander groot archiefproject, de publicatie van de *Œuvres Complètes* van Christiaan Huygens [6]. In 1888 was hiervan het eerste deel verschenen, dat de correspondentie over de jaren 1638–1656 bevat. Een van de eerste brieven hierin is een studieadvies uit 1645 van de Haagse wiskundige Stampioen, die aan Christaans vader, de dichter-staatsman Constantijn Huygens, schreef: "Om vorders in de mathematyc te studeeren is voor eerst nodigh het solveren ende ontbinden van eenige geometrische quaestien, daer toe heel bequaem syn De hondert geometrische questien van Meester sibrant Hanssen daer alle arithmetische door calculatie, ende oock geometrische door passer en lineaal opgelost worden."

Christiaan heeft dit advies opgevolgd. Zijn aantekeningen over de questien 48, 77, 89 en 92 zijn in de *Œuvres Complètes* gepubliceerd (zie deel 11, pp. 23–27). De originele aantekeningen uit 1645 bevinden zich in de Leidse Universiteitsbibliotheek (Afd. Westerse Handschriften). In [6], deel 12 bevindt zich een latere oplossing van een probleem dat nauw met questie 92 samenhangt: bij een gegeven driehoek ABC en

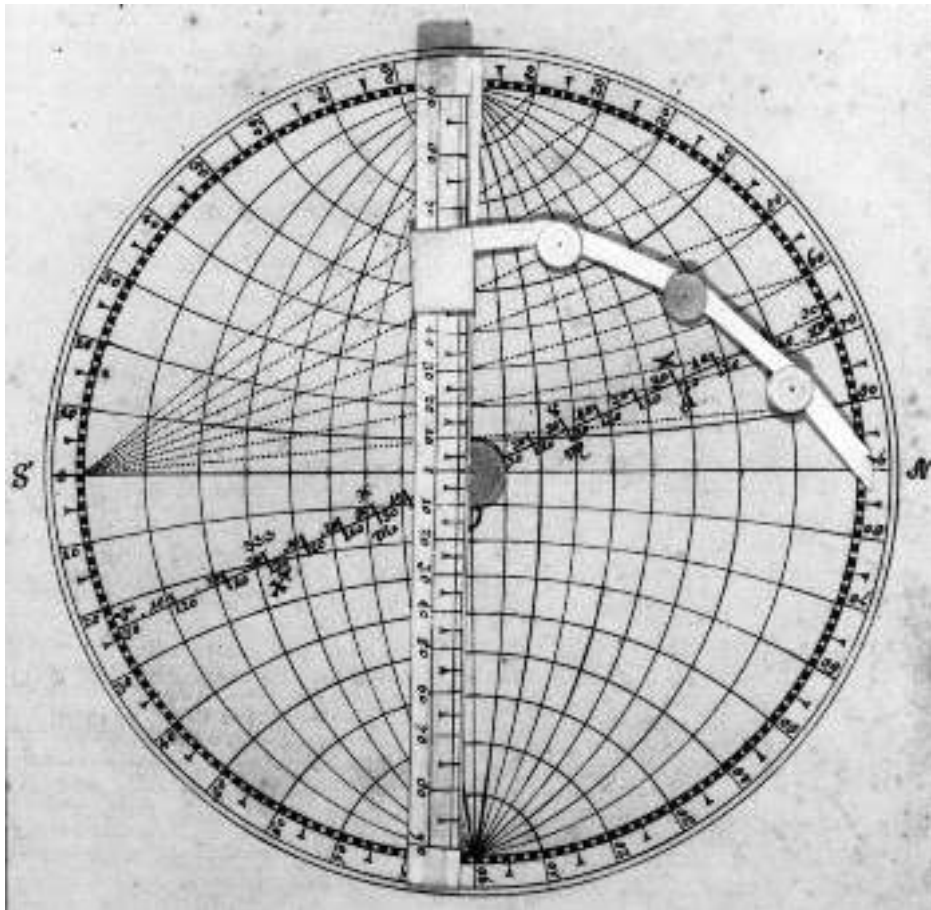
een punt D buiten die driehoek wordt gevraagd een lijn door D te construeren die de driehoek verdeelt in twee delen van gelijke oppervlakte. In questie 92 is D een punt in het inwendige. Het probleem kwam ook al in 1604 in de *Geometria Practica* van Clavius voor (zie [1]). Huygens werkt de problemen uit door ze — in de lijn van zijn leermeester Van Schooten, die hierin de methode van Descartes volgde — met behulp van algebra te analyseren. We kennen op deze wijze één student op afstand van Cardinael, en tegelijk informeert deze bron ons over de meetkundige vorming van Huygens.

Cardinael overleed in Amsterdam en werd daar op 26 november 1647 begraven. Zijn weduwe zette zijn particuliere rekenschool voort tot haar dood in 1664. Later doceerden op het zelfde adres Abraham de Graaf, de beroemde schrijver van overzichtswerken, en de zeevaarkundige Claes Hendriksz. Gietermaker.

Met Wijnman zien we een archiefonderzoeker aan het werk in het kader van een groot, collectief onderzoek. Nadere detaillering van Wijnmans resultaten komt uit onverwachte hoek, onverwacht althans voor de historicus van de wiskunde. Sitters kan namelijk voor de biografie van Cardinael aansluiten bij lopend historisch onderzoek naar de Amsterdamse doopsgezinden, met name de publicaties van Lambour in de *Doopsgezinde*



Figuur 2 *Hondert geometrische questien met hare solutien*, ca. 1612. Links de titelpagina, rechts Questie 92.



Figuur 3 Handschrift B: *Van de astronomie...* door Jan Nanningszoon, 1647. Op pagina 168 bevindt zich het astrolabium met bewegende onderdelen. (Rijksarchief Noord-Holland te Haarlem)

Bijdragen. Dit heeft onder meer geresulteerd in nieuwe genealogische gegevensover het geslacht Cardinael, in gegevens over zijn lidmaatschap van twee doopsgezinde gemeentes waartoe hij achtereenvolgens heeft behoord, de exacte locatie van zijn huis 'In de Drie Ossehoofden' in de Nieuwe Nieuw-straat (nu nummer 20) en in verdere wederwaardigheden van dit huis. Omdat dit recent onderzoek is, waarvan nog niet alle resultaten gepubliceerd zijn, laat ik het hier bij deze aankondiging van de naderende onderzoeksresultaten van Sitters.

Zelf stuitte ik op Cardinael bij mijn inventarisatie van de zeventiende-eeuwse wiskundige handschriften in de Leidse Universiteitsbibliotheek [10]. Ik betrek de bibliotheken met een handschriftenverzameling er bij als ik het over archieven heb. Oorspronkelijk was er een duidelijker scheiding tussen de bestuurlijke en juridische bronnen, inclusief persoonsgegevens (voor Cardinaels periode de Doop-, Trouw- en Begraafboeken) die in gemeentearchieven, streekarchieven, provinciale rijksarchieven en het Algemeen Rijksarchief bewaard worden, en bronnen met een wetenschappelijke inhoud, die in de gro-

te openbare bibliotheken (inclusief de provinciale bibliotheken, universiteitsbibliotheken en de Koninklijke Bibliotheek) bewaard worden. Tegenwoordig vervaagt die grens, bijvoorbeeld doordat het Rijksarchief Noord-Holland in Haarlem sinds een jaar of vijftien consequent privé-archieven van wetenschappers opneemt. Voor die tijd zouden deze archieven waarschijnlijk verspreid in de universiteitsbibliotheken terecht gekomen zijn, of in privé-bezit gebleven zijn, maar nu is er gelukkig een duidelijke bestemming voor.

Aan Cardinael gerelateerde wetenschappelijke handschriften

Sommige archiefvondsten komen voort uit systematisch zoeken, ook in het geval van Cardinael. Een groot aantal nieuwe gegevens over Cardinael kwam aan het licht toen ik in 1986 alle zeventiende-eeuwse wiskundige handschriften uit de Leidse universiteitsbibliotheek beschreef. Drie daarvan hadden met Cardinael te maken. Bij de handschriften BPL 2084 en Ltk. 966 was dat snel duidelijk, omdat ze kopieën bevatten van de *Hondert geometrische questien*; niet dat dit in de handschriften vermeld stond, maar de *Ques-*

tien zijn door een aantal karakteristieke problemen gemakkelijk herkenbaar. Vergelijking levert op dat BPL 2084 na een elementaire meetkunde-cursus en enkele opmetingen van landerijen in Zeeland een vroege kopie van de *Questien* bevat, geschreven door een Zeeuwse landmeter. Ltk. 966 is zelfs in zijn geheel een kopie van de *Questien*, en in dit geval kennen we de schrijver (Bartholomeus Cortenaer uit Rotterdam), die het begin en eind van het handschrift ook gedateerd heeft, zodat we weten dat het tussen 1675 en 1688 ontstaan is. Intussen heeft het onderzoek van Sitters in het Rijksarchief Noord-Holland te Haarlem nog een derde kopie van de *Questien* aan het licht gebracht: *Beschrijvinge van de Konst der Geometria*, in 1647 begonnen door Jan Nanningszoon, landmeter te Broek in Waterland.

Het bestaan van deze handschriften toont aan dat de *Questien* in de zeventiende eeuw een belangrijk leerboek was. Vergelijking van de inhoud van de twee Leidse kopieën laat zien dat de stijl van meetkunde bedrijven in de loop van de eeuw aanzienlijk veranderde. De vroege Zeeuwse kopie is nog puur in meetkundige stijl. De tekst volgt Cardinael op de voet, alleen als Cardinael met verwijzing naar de *Elementen* van Euclides een bepaalde berekening toelicht, ontbreekt in de Zeeuwse kopie deze legitimatie van de berekening. Bij de late kopie door Cortenaer heeft de algebra de overhand. De *Questien* zelf dateren duidelijk van voor Descartes. Passer- en liniaalconstructies worden uitgevoerd, maar ze worden niet geanalyseerd. Cortenaer werkt daarentegen, net als Huygens, in de stijl van Descartes en analyseert de constructies algebraïsch, waarna hij de constructie uitvoert door de algebraïsche oplossing meetkundig te interpreteren. Het gaat te ver om alleen op grond van dit voorbeeld te stellen dat de stijl van meetkunde bedrijven fundamenteel veranderde in de vijftig jaar rond 1637 (het jaar waarin Descartes' *Géométrie* verscheen), maar het verschil tussen deze twee kopieën van de *Questien* levert daar wel extra argumentatie voor, evenals Huygens' eerder besproken uitwerking van een kleine selectie uit de *Questien*.

Het derde Leidse handschrift dat met Cardinael in verband staat (BPL 1558), gaf zijn achtergrond en auteur niet direkt prijs. Bij eerste inspectie werden er wel allerlei andere geheimen ontsluit, want er rolden meteen stukjes perkament uit. Deze losse stukjes perkament hoorden bij een uitklapbaar model van een astrolabium, dat deel uitmaakte van een cursus over astronomie en navigatie. Goede raad was duur, want het handschrift dien-

de gerestaureerd te worden. Advies te zake door Elly Dekker van het Museum Boerhaave in Leiden leverde de verrassende informatie dat er naast BPL 1558 nog minstens twee van dergelijke handschriften zijn, waarin astrolabia met bewegende onderdelen voorkomen. Eén ervan is in het bezit van het Leidse Museum Boerhaave (Hs. 13.048), en draagt de titel *Astronomia van M^r Sijbrant Hansen Cardinael ...geschreven door Mouwerits Verdonck A^o 1644 den 1 May in Amsterdam*. Het andere was bekend uit de literatuur over de navigatie-instrumenten van Willem Barentsz (Crone 1966). Een van de vondsten op Nova Zembla was een metalen armpje dat bij het afpassen op het astrolabium gebruikt werd, en dat indertijd was aan het stukje perkament dat uit het Leidse handschrift rolde. Crone (1966) kende het armpje uit een handschrift in het Rijksarchief in Noord-Holland: *Vande Astronomie, OFTE Beschrijvinge vande loop der son Maen sterren en alle anderen planeten*. Dit handschrift is gesignd en gedateerd: "Jan nanningsz. Lantmeeter tot broeck in waterlant anno 1647 out 23 jaer". Het is samengebonden met een tekst getiteld *Beschrijvinge van de Konst der Geometria*. Sitters heeft vastgesteld dat deze meetkundetext dezelfde opbouw heeft als de Zeeuwse kopie van de *Questien*: na een meetkundecursus bevat het een complete kopie van Cardinaels *Questien*. Blijft nog de vraag naar de samenhang tussen de drie navigatie-handschriften waarin het astrolabium met bewegende onderdelen voorkomt: (A) Leiden, Museum Boerhaave, Hs. 13.048, *Astronomia van M^r Sijbrant Hansen Cardinael* geschreven door Mouwerits Verdonck, 1644; (B) Haarlem Rijksarchief NH, Hs. *Vande Astronomie* geschreven door Jan Nanningsz.,

1647–1679 (figuur 3); (C) Leiden Universiteitsbibliotheek, BPL 1558, *Dat de Werelt is een Ronde Cloot*, anoniem (figuur 1). Vergelijking leert: B en C zijn van de zelfde hand. A is van een andere hand, maar de inhoud is identiek aan die van C. C heeft randnotities die bij A en B in de hoofdttekst verwerkt zijn. C werd geschreven in 1641, zoals blijkt uit het kopje "Vande verscheyden loop die men inde hemel bevint die ons nu ter tyt bekend zijn

1641 ² ma
13 dach ."

Maar de tekst is eerder samengesteld, zoals blijkt uit allerlei voorbeelden voor de jaren 1600–1619. Deze zijn in A overgenomen, maar worden in B gegeven voor het jaar 1642. De conclusie is: de bron achter deze handschriften is een cursus, die Cardinael tussen 1600 en 1620 ontwikkelde. Of Nanningszoon een diktaat schreef tijdens deze cursus bij Cardinael, of een schriftelijke versie kopieerde, is niet duidelijk, maar zeker is wel dat zijn handschrift C uit 1641 de oudste neerslag van de cursus is. Nanningszoon heeft de tekst later in B nog een keer afgeschreven en wat data betreft aan de actualiteit aangepast. B loopt verder door dan C, en bevat aan het eind ook origineel werk van Nanningszoon, hetgeen correspondeert met de datering, want Nanningszoon is met B begonnen in 1647 en heeft eraan doorgewerkt tot 1679. In 1644 heeft ook Mouwerits Verdonck het handschrift C afgeschreven. Dit blijkt uit vergelijking van de inhoud van A met C, vooral uit het feit dat de randnotities van C in A in de hoofdttekst opgenomen zijn.

Nader onderzoek, met name een vergelijking van de inhoud van deze navigatiehandschriften met gedrukte handboeken uit het

begin van de zeventiende eeuw zal hopelijk de mate van originaliteit en het niveau van Cardinaels navigatiekunde aan het licht brengen.

Uit het archiefonderzoek rijst een veel rijker en gevarieerder beeld op dan uit de gedrukte bronnen. Niet zomaar als een rekenmeester met een licht behoudende inslag verschijnt Cardinael nu, maar als invloedrijk leermeester van meetkundigen, rekenaars en zeevaarders. Cardinael maakte blijkens de vondsten van receptie van zijn werk, ook school in overdrachtelijke zin. De archieven bieden een inzicht in de ontwikkeling van wiskunde en de verbreiding van kennis dat we nooit zo hadden bereikt uit gedrukte bronnen alleen. De relaties en dwarsverbanden die zo belangrijk zijn voor goed historisch onderzoek komen uit de archieven op natuurlijke wijze naar boven. Opvallend in het geval van Cardinael was ook het feit dat veel van de gegevens over hem voortkomen uit grote, collectieve archiefprojecten. Het is dus niet alleen het scherpzinnige en vasthoudende wroeten van de individuele onderzoeker, dat vruchten afwerpt, ook de brede aanpak werkt.

Archieven, van kardinaal belang?

Ik hoop aangetoond te hebben dat archiefvorming, archiefbeheer en archiefonderzoek van groot belang zijn voor de geschiedenis van de wiskunde. De persoonlijke aspecten van zijn werk, de aan publicaties voorafgaande researchwerkzaamheden en de onderwerpen die overgeleverd werden op meer informele wijze dan door publicatie, dat alles kennen we vooral dankzij de archieven. —

Referenties

- 1 Bos, H.J.M., 'Descartes en het begin van de analytische meetkunde', pp. 79–97. In: A.W. Grotenndorst (ed.), *Vakantie cursus 1989. Wiskunde in de Gouden Eeuw* (CWI Syllabus 25), Amsterdam 1989.
- 2 Cardinael, Sybrandt Hansz., *Hondert geometrische questien met hare solutien*, Eerste druk rond 1612 te Amsterdam bij Willem Jansz. Blaeu; tweede druk rond 1620 te Amsterdam bij Jan Jansz.
- 3 —, *Mathematische ofte Wisconstige bewijsredenen*, ..., Amsterdam: Cornelis Gerritsz. van Breugel 1635.
- 4 —, *School Boecken van Mr. Sybrand Hansz. Cardinaels Arithmetica*, 4 delen in vele edities bij verschillende uitgevers, tussen 1639 en 1678.
- 5 Crone, E., 'De vondst op Nova-Zembla. Een hernieuwd onderzoek der navigatie-instrumenten', *Bulletin van het Rijksmuseum* 14(1966), 71–85.
- 6 Huygens, *Œuvres Complètes de Christiaan Huygens* (publiées par la Société Hollandaise des Sciences; 22 delen), Den Haag 1888–1950.
- 7 Keuning, J., *Willem Jansz. Blaeu: a biography and history of his work as a cartographer and publisher*, Amsterdam: Theatrum Orbis Terrarum 1973.
- 8 Lambour, R.C., 'De familie en vrienden van Daniel Zwicker (1612–1678) in Amsterdam', *Doorpsgezinde Bijdragen*, Nieuwe Reeks 25 (1999), 143–144.
- 9 —, 'Doopsgezind of niet? Sybrandt Hansz Cardinael, Abraham de Graaf en Gerrit Uylenburg', *Doorpsgezinde Bijdragen* Nieuwe Reeks 27(2001), 178–183.
- 10 Maanen, J.A. van, *Seventeenth century mathematical Manuscripts in Leiden University Library. An inventory*, pp. 147–241 in: *Facets of seventeenth century mathematics in the Netherlands*, dissertatie Utrecht 1987.
- 11 NNBW = Molhuysen, P.C.; P.J. Blok (eds.), *Nieuw Nederlandsch Biografisch Woordenboek*, 10 delen, Leiden 1911–1937.
- 12 Vondel, Joost van den, *Poëzy of verscheide gedichten*, 1644, hier geciteerd uit de editie Franeker 1682, deel 2, p. 577.
- 13 Wijnman, H.F., 'De Amsterdamsche rekenmeester Sybrandt Hansz. Cardinael', *Het Boek* Nieuwe reeks 22(1933/4), pp. 73–94.

Anne van Streun

Vakgroep Wiskunde

Rijksuniversiteit Groningen

Postbus 800, 9700 AV Groningen

a.van.streun@math.rug.nl

Onderwijsvernieuwingen

Gerommel aan de Tweede Fase

In 2002 hebben bijna alle eerstejaars wiskundestudenten die direct van het vwo zijn gekomen het nieuwe programma van de Tweede Fase doorlopen. De wiskunde-inhoud van het vwo-onderwijs is veranderd en is per profiel verschillend. Ook is de vorm waarin het onderwijs gegeven wordt nogal veranderd door de komst van het Studiehuis. Inmiddels hebben er al studiehuisstudenten het eerste jaar doorlopen. Anne van Streun, hoogleraar in het onderwijs van wiskunde en exacte wetenschappen aan de universiteit van Groningen, geeft zijn commentaar.

De eerste lichting van vwo-leerlingen die opgeleid zijn volgens het nieuwe concept voor de bovenbouw havo-vwo heeft het eerste jaar van de universitaire studie voltooid. In het studiejaar 2001–2002 bestond het grootste deel van de instroom in het wo nog uit vwo-ers 'oude stijl', maar zo'n 25 procent van de instroom had de nieuwe tweede fase vwo doorlopen. Die situatie met een gemengde instroom is bij uitstek geschikt om de ervaring en het studiesucces van oude en nieuwe instroom te vergelijken. In de jaarlijkse *Instroommonitor*, uitgevoerd door het onderzoeksinstituut IOWO van de Katholieke Uni-

versiteit Nijmegen, worden eerstejaars universitaire studenten ondervraagd over hun studie- en instellingskeuze en de factoren die hun keuze hebben beïnvloed. Hun wordt ook gevraagd om de aansluiting van de universiteit op hun vooropleiding te beoordelen. Vanzelfsprekend heeft het IOWO de resultaten deze keer uitgesplitst naar oude-stijlers en nieuwe-stijlers. Afhankelijk van de kleur van het dagblad varieerden deze zomer de krantenkoppen van *Aansluiting studiehuis op wo verslechterd* tot *Aansluiting studiehuis op wo verbeterd*.

Wat leert ons dit onderzoek naar de oordelen van de studenten? Het rapport vermeldt dat de studenten opgeleid volgens de nieuwe Tweede Fase havo-vwo (ten onrechte vaak Studiehuis genoemd) de overgang naar meer zelfstandig studeren positiever ervaren dan de studenten die niet in de werkvorm van een studiehuis zijn opgeleid. Dan gaat het over het zelfstandig kunnen aanpakken en plannen van studietaken, communicatieve vaardigheden (schrijven, presenteren, samenwerken) en computervaardigheden. Daarentegen zijn de vwo-ers nieuwe stijl minder tevreden over de aansluiting van de vakinhouden dan studenten met een vwo-diploma oude stijl.

Dat geldt voor de universitaire sectoren 'Techniek' en 'Natuurwetenschappen', maar ook voor studenten in de universitaire sectoren 'Economie' en 'Gedrag en maatschappij'. Bij de vwo-ers die opleidingen volgen in de sectoren 'Gezondheid', 'Recht' of 'Taal en cultuur' zijn geen significante verschillen te vinden in de tevredenheid tussen de 'oude stijlers' en 'nieuwe stijlers'. Aldus het IOWO.

Interpretatie van instroomonderzoeken

Een belangrijke kanttekening van het IOWO-onderzoek is dat ze gebaseerd zijn op de oordelen van de studenten zelf. Het wachten is nog op een andere toets voor het effect van de vernieuwingen, namelijk de vergelijking van de daadwerkelijke prestaties van de oude- en nieuwe-stijlers op de universiteit. Overigens spoort de klacht over het tekort aan vakinhoudelijke kennis heel mooi met het onderzoek van het CITO naar de eindexamenresultaten van deze zelfde lichting oude- en nieuwe-stijlers. In het examenverslag 2001 vergelijkt het CITO de examenresultaten van oude-stijlers en nieuwe-stijlers op dezelfde examenopgaven en concludeert dat de nieuwe-stijlers het beduidend slechter doen. Daar staat weer tegenover dat de op-

leiding biologie van de Universiteit van Amsterdam opmerkte dat de nieuwe-stijlers het aanvankelijk beter doen op de eerste tentamens, vooral omdat zij beter op de wiskunde en statistiek scoren dan de oude-stijlers. Dat is weer te verklaren uit het feit dat de vwo-ers nieuwe stijl minimaal wiskunde B1 in hun profiel Natuur en Gezondheid (N&G) hebben gehad, terwijl de oude-stijlers veelal met wiskunde A binnenkomen. Een versterking van hun vakinhoudelijke kennis die evenwel met de nieuwste plannen van het ministerie weer teniet wordt gedaan. Maar daarover meer in het vervolg van dit artikel. De vraag is nu hoe we de resultaten van de eerste evaluaties van de Tweede Fase kunnen interpreteren in termen van de inrichting van de Tweede Fase. Waar komt dat niet bedoelde effect van verslechtering van de vakinhoudelijke kennis vandaan? En hoe gaan de nieuwe plannen voor herinrichting van de Tweede Fase dat verbeteren?

Verzwarend en versnippering

Bij de inrichting van de Tweede Fase is het aantal verplichte examenvakken verdubbeld van zes of zeven naar veertien tot zestien, waarbij tegelijk het gemeenschappelijke deel is uitgebreid met tal van verplichte vakken en vakjes, zoals Culturele Kunstzinnige Vormgeving (CKV) en Algemene Natuurwetenschappen (ANW). Dat ging op papier niet ten koste van de profielvakken (zoals de economische en natuurwetenschappelijke vakken) want wegens de gewenste verzwarend werd voortaan gerekend met veertig werkweken van veertig uur, ook in de examenklassen. Evaluatierapporten van de inspectie en het Tweede Fase Adviespunt van het ministerie laten zien dat daar in de lespraktijk niets van terecht komt, omdat die weken en die tijd er gewoon niet zijn. Het gevolg is dat de werkelijk beschikbare studielast hooguit 70 procent is van de studielast waarop de examenprogramma's zijn vastgesteld.

Daarnaast maakt de versnippering over het grote aantal vakken het onmogelijk om de vereiste diepgang en beheersing van de profielvakken te bereiken. Voor de profielvakken is er sprake van een achteruitgang in kennis, niveau en praktische vaardigheden in plaats van een vooruitgang. Het is duidelijk dat de nieuw opgeleide studenten tijdens hun eerste jaar van de universitaire studie juist met de gevolgen van die systeemfouten worstelen. De oorzaak van hun problemen ligt niet bij de verschillende vormen van het Studiehuis die op hun scholen werd toegepast, maar bij de geringe aandacht die er voor de profielvakken

is overgebleven. Zo besloeg een bètapakket met wiskunde, natuurkunde, scheikunde en biologie voorheen 5/7 deel van de totaal beschikbare studielast, nu is dit zelfs gereduceerd tot minder dan de helft.

Plannen tot uitholling natuurprofielen

In het debat van 30 januari 2002 dat de Onderwijscommissie van de Tweede Kamer over deze materie had met de staatssecretaris Adelmund is dat ook niet weersproken. De verplichting van twee deeltalen wordt vervangen door de verplichting om tenminste een tweede volledige moderne vreemde taal naast het Engels te kiezen. Dat geeft geen verlichting, zodat er achter de schermen door allerlei clubjes druk wordt gesleuteld aan de inrichting van de Tweede Fase havo-vwo. Het vervolg is voorspelbaar. De trend om de inhoud van de profielvakken verder uit te hollen zet zich door.

De laatste maanden circuleren er plannen om in het profiel N&G de scheikunde of de natuurkunde te laten vallen als profielvak. Belachelijk, gelet op de aansluiting vwo-wo of de belangstelling en behoeften van de bètaleerlingen. En passant wordt in die plannen de verdieping voor de echte bètaleerlingen, mogelijk geworden in het profiel Natuur en Techniek (N&T) met Wiskunde B2, Natuurkunde 2 en Scheikunde 2, de nek omgedraaid. En juist over de inhoud van Wiskunde B2, met bewijzen en redeneren, waren de nieuwe stijl eerstejaars en hun docenten tijdens de afgelopen visitatie wiskunde erg te spreken!

Beter ten halve gekeerd

De oplossing zou zijn geweest om toe te geven dat de inrichting van de Tweede Fase door het grote aantal verplichte vakjes en vakken niet deugt. Ga terug naar zeven of acht examenvakken op het vwo en zes of zeven op de havo. Schrap de verplichte kleine vakjes. Geef de leerlingen de ruimte om naast een verplicht profiel van vijf of zes vakken nog twee serieuze examenvakken te kiezen. Het profiel N&G bestaat dan uit Nederlands, Engels, Wiskunde B1, Natuurkunde 1, Scheikunde 1, Biologie en twee examenvakken naar keuze. Het profiel N&T wordt dan gevormd uit Nederlands, Engels, Wiskunde B1,2, Natuurkunde 1,2, Scheikunde 1,2 en twee examenvakken naar keuze. De inhoud en omvang van Wiskunde B1,2, Natuurkunde 1,2, Scheikunde 1,2 kan dan afgestemd worden op de belangstelling en natuurwetenschappelijke en technische aspiraties van die leerlingengroep. Met veel ruimte voor praktisch

werk, zelfstandig onderzoek en projecten bij universiteiten en hogescholen. Inspirerend voor leerlingen én leraren. En daar was het met de Tweede Fase en het Studiehuis om begonnen!

Uitholling natuurprofielen een feit

Onlangs kwam het voorstel *Ruimte laten en keuzes bieden in de tweede fase havo en vwo* van het ministerie naar buiten. Het wiskundevak B1 uit het profiel N&G is gereduceerd van 600 uur naar 480 uur en tegelijk verplicht gesteld voor het profiel N&T in plaats van het meer exacte vak Wiskunde B1,2. Natuurkunde verdwijnt uit het verplichte profiel van N&G, terwijl in plaats daarvan een tweede vreemde taal (met lezen, schrijven, cultuur en literatuur) verplicht wordt gesteld. Leerlingen kunnen er twee examenvakken bij kiezen uit het palet van alle examenvakken, aangevuld met 'nieuwe' keuzevakken zoals Voortgezette algemene natuurwetenschappen, Informatica, Voortgezette Wiskunde, Management en Organisatie.

In het ministeriële voorstel wordt gesuggered dat de uitholling van het profiel N&G door die leerlingen kan worden gecompenseerd, omdat zij natuurkunde erbij kunnen kiezen. Zoals de VSNU ook al heeft geschreven, heeft dat ernstige consequenties voor de aansluiting op het hbo en wo, omdat een basis aan kennis van de natuurkunde niet meer aanwezig is. Ook de wens en trend om binnen de bètavakken meer onderlinge samenhang tot stand te brengen wordt door dit voorstel met één klap onmogelijk gemaakt. Het schrappen van de verdieping in de bètavakken, waar het profiel N&T voor was bedoeld, zal voor de technische en natuurwetenschappelijke opleidingen betekenen dat de nog instromende leerlingen een bijzonder mager wiskundepakket met zich mee brengen, gelijk aan dat van de medische studies.

Het alternatief

Het enige redelijke alternatief binnen het nieuwe raamwerk is dat voor de natuurprofielen bijvoorbeeld wiskunde een verplicht vak is (in plaats van de tweede vreemde taal), zodat voor N&G de natuur- en scheikunde met biologie het profiel bepalen. Voor het profiel N&T moeten de leerlingen als derde profielvak (naast natuur- en scheikunde) bijvoorbeeld kiezen uit Voortgezette Wiskunde (modelleren en redeneren), Voortgezette Natuurwetenschappen (Levenswetenschappen), Informatica of Techniek (accent op natuurkundige en scheikundige problemen).

Michael van Hartskamp

Venuslaan 405, 5632 HM Eindhoven

michael@vanhartskamp.com

T_EX-rubriek

PDF_TE_X II

In de vorige aflevering besprak Michael van Hartskamp, gepromoveerd topoloog, het Portable Document Format (PDF), dat het mogelijk maakt om teksten onafhankelijk van het computersysteem te zetten. Dit programma blijkt ook geschikt te zijn voor het maken van transparanten voor een presentatie. Hoe dat in zijn werk gaat, wordt deze keer besproken.

Meer en meer wiskundigen laten hun krijtje liggen bij het geven van een presentatie. Dit doen ze vaak uitsluitend om deze te vervangen door handgeschreven slides, of het andere uiterste: presenteren met het Windows-programma Powerpoint. Voor een wiskundige is het van het grootste belang dat de formules correct op het scherm staan en Powerpoint is daarbij eerder last dan steun. Anderzijds, wie veel met niet-wiskundigen (bijvoorbeeld in bedrijven) samenwerkt kan eigenlijk niet meer met ouderwetse transparanten aankomen.

Er is gelukkig nog een mogelijkheid: slides maken met (pdf)_TE_X. In deze aflevering bekijken we de mogelijkheden. Gelukkig zijn dat er meer dan menigeen zou denken.

Maar eerst een stapje terug in het verleden. Wie ooit met Sli_TE_X slides heeft gemaakt kan het zich ongetwijfeld herinneren: het was een en al gepruts. Sli_TE_X was dan ook een variant op _TE_X en de relatie tussen de twee was nogal merkwaardig. Sli_TE_X had daarboven nog extra grote fonts nodig en vroeg bij gebruik nogal veel van de toenmalige PC's.

De 'opvolgers' van Sli_TE_X zoals de slides class waren wat dat betreft aanmerkelijk prettiger in de omgang. Een nadeel was dat ze veelal gebaseerd waren op onderliggende eigenschappen van postscriptprinters. Dit maakte dat het resultaat op papier of transparant prima was, mits je over een postscriptprinter beschikte, maar op het scherm bekijken met ghostscript/view was géén optie. Dit was niet alleen lelijk, ook lang niet op alle computers was ghostscript/view geïnstalleerd en dat bleek toch een voorwaarde voor het succesvol presenteren buiten de deur zonder meteen een eigen laptop mee te moeten nemen.

De vorige keer bekeken we pdf_TE_X en Acrobat. Dankzij de beschikbaarheid van de Acrobat reader op de meeste computerplatforms (Windows, Unix, ...) en de goede verspreidingsgraad is met pdf_TE_X presentaties maken en met Acrobat vertonen een levensvatbaar alternatief.

De eerder genoemde op postscript gebaseerde oplossingen werken dan echter veelal niet. Bovendien, het pdf-formaat biedt méér mogelijkheden dan postscript op het gebied van effecten en interactie. Voor meer informatie over pdf_TE_X en hoe het te gebruiken, zie de aflevering in het nummer van december 2002.

In deze aflevering richten we ons specifiek op de mogelijkheid om met pdf_TE_X presentaties te maken, voor gebruik met een beamer, en we doen dat in het bijzonder met het _TE_X-package pdfscreen.

Naast pdfscreen zijn er nog meer mogelijkheden. Een nog niet afgerond overzicht is te vinden op de website <http://www.miwie.org/presentations>. Hier staan ook referenties naar andere _TE_X-packages met een vergelijkbare doelstelling.

Als er eenmaal een pdf-bestand met een presentatie daarin is gemaakt, is presenteren vervolgens een fluitje van een cent. Wel verdient het aanbeveling om de gastheer of -vrouw te vragen of Acrobat reader beschikbaar is. Bij de presentatie zelf is de full-screen optie onmisbaar, hiermee is alleen de presentatie in beeld en zijn storende vensterranden, scrollbalken en dergelijke uit beeld. Meestal is dit effect te bereiken via de toetscombinatie CTRL+L en is het ongedaan maken gekoppeld aan de ESC-toets.

Het maken van de presentatie vereist iets meer technische vaardigheden, maar uiteindelijk valt het allemaal reuze mee. Het pakket pdfscreen is een opvolger van pdfslide en nu helemaal gericht op alle documenten op het beeldscherm. Het is daarmee bijvoorbeeld geschikt voor on-line dictaten, wat te danken is aan de opgenomen inhoudsopgave en de navigatieknoppen in het zogenaamde panel, waarover later meer. Een nadeel is dat 'gewone' slides maken iets lastiger is. Daar staat tegenover dat het heel eenvoudig is dezelfde tekst tot een elektronisch document en een papieren versie te bewerken. Probeer vooral de verleiding te weerstaan om nu een artikel in zijn geheel op slide te zetten. Laten we een voorbeeld geven.

```
\documentclass[a4paper]{article}
...
\usepackage[screen]{pdfscreen}
...
\begin{document}
```

Op de [a4paper] in de eerste regel komen we later terug. De optie [screen] geeft aan dat we een schermpresentatie maken. Het alternatief is [print]. De printversie levert een ‘gewoon’ document op, nagenoeg zonder de extra’s van pdfscreen. We zullen dan pdf_{TEX} voor beide versies een keer moeten uitvoeren. Met behulp van

```
\begin{screen}...\end{screen}
```

respectievelijk

```
\begin{print}...\end{print}
```

is het mogelijk een fijner onderscheid te maken tussen de twee versies. De ingesloten tekst en _{TEX}-codes worden namelijk alleen in de scherm-respectievelijk printversie opgenomen.

Dit geldt overigens niet alleen ná maar ook vóór \begin{document} en kan zo worden gebruikt voor het doen van bijzondere instellingen voor elk.

De plaats van \usepackage{pdfscreen} moet ook nu weer zorgvuldig gekozen worden. Het pakket pdfscreen past namelijk een aantal bestaande _{TEX}-commando’s aan en is daarom alleen werkzaam indien deze commando’s daarna niet weer gewijzigd worden. Dit is een van de vervelende problemen waar de _{TEX}-gebruiker regelmatig geconfronteerd mee wordt. Het is niet anders.

Laat ons terugkeren naar de afmetingen. De optie [a4paper] is uitsluitend van toepassing op de te printen versie. Voor de schermversie zijn er de afzonderlijke opdrachten

```
\screensize{6.25in}{8in}
\margins{.75in}{.75in}{.75in}{.75in}
```

De gegeven waarden zijn de door de maker van pdfscreen aanbevolen afmetingen. Eerste de hoogte, daarna volgt de breedte en achtereenvolgens links, rechts, boven en onder voor margins.

De marges spreken voor zich. Wat betreft screensize, dit geeft in de eerste plaats een verhouding breedte/lengete die vrij dicht tegen de klassieke 4/3 verhoudingen van tv’s en monitoren aan ligt (breedbeeld is 16/9). Het is belangrijk deze 4/3 verhouding te respecteren voor optimaal gebruik van het beschikbare geprojecteerde beeld. (Voor overhead transparanten of presentaties op breedbeeld plasmaschermen zijn andere waarden gunstiger.)

De absolute grootte bepaalt echter hoeveel er op een scherm pagina komt. Na 6.25 inches is de bladzijde ‘vol’ en wordt automatisch aan een nieuwe begonnen. Het opvullen van een pagina gaat met tekens van ‘normale’ _{TEX}-afmetingen. Naar mijn smaak staat er voor een presentatie te veel tekst op een pagina en is een hoogte van 4.2–4.5 inches beter.

Het pakket pdfscreen kent ook een slide-omgeving. Binnen

```
\begin{slide}...\end{slide}
```

zijn vanzelf al grotere lettertypen van kracht. Ook de vormgeving is iets anders dan er buiten. In de printversie worden deze slides omkaderd en ernaast is ruimte gereserveerd voor aantekening. Dit is ideaal voor hand-outs.

Eén van de bijzonderheden van pdfscreen is het zogenaamde panel. Het panel bevat een logo, de inhoudsopgave, en enkele navigatieknoppen. Die knoppen zijn eigenlijk vooral zinvol voor elektronische dictaten en niet zo heel erg voor presentaties.

Door gebruikmaking van \emblem{logo.jpg} kan een logo worden geïmporteerd uit een jpeg-bestand. Op iedere slide verschijnt nu automatisch het (instituu)tslogo. Dit draagt bij aan de herkenbaarheid van de presentatie en is een echte aanrader. Vooral het gemak van

inclusie en plaatsing is een groot voordeel van pdfscreen.

De inhoudsopgave wordt alleen opgenomen in het panel als paneltoc bij de opties in de \usepackage-regel staat vermeld. Met name bij langere inhoudsopgaven wordt opname soms erg lelijk.

Het is ook mogelijk de plaats van het panel te kiezen. panelleft en panelright zijn de opties, met de te verwachten resultaten.

Voor een ‘eenvoudige’ presentatie is nopanel te prefereren. Wie dan toch nog knoppen wil kan deze bijvoorbeeld met \bot tombut tons in het klein opnemen onderaan iedere slide.

Een andere manier om een geheel eigen presentatie te maken is het gebruik van \overlay. Hiermee kan een plaatje op de achtergrond worden gezet. Dit kan natuurlijk ook weer een logo bevatten, of een foto van de campus of de spreker. De mogelijkheden zijn onbeperkt. Wie dit te afleidend vindt, kan volstaan met \backgroundcolor. Hiermee kan een egaal kleurtje worden ingesteld. Het spreekt voor zich dat het kleurenpakket color nog steeds effectief is binnen pdf_{TEX}/pdfscreen. Veel kleurencombinaties zijn overigens al voorgeprogrammeerd.

Dat brengt ons tot het laatste onderwerp, dat bij menig presentator helaas soms tot hoofddoel is verheven: speciale effecten. Zelf ben ik absoluut geen liefhebber van te veel vliegende pagina’s, openende gordijnen, enz. We zullen hier een deel van de mogelijkheden schetsen.

Het standaard effect in pdfscreen om van pagina te verwisselen is het zogenaamde /R effect van replace en betekent: geen effect. Er zijn een aantal andere effecten beschikbaar via \pagedissolve. Dit zijn bijvoorbeeld: /Split dat op het openen van gordijnen lijkt en /Box waarin scheiding tussen de nieuwe en oude pagina door een steeds groter wordende rechthoek wordt aangegeven. Voor de effecten kan een totale tijdsduur worden aangegeven en voor sommige ook een richting.

Het pakket pdfscreen ondersteunt geen effect binnen een pagina. Ook daar is inmiddels een oplossing voor: PPower4 is een speciale postprocessor voor pdf-bestanden. Dit in Java geschreven programma bewerkt het van pdf_{TEX} resulterende bestand en voegt de juiste effecten toe. Leuke resultaten kunnen op relatief eenvoudige wijze worden verkregen. Zie <http://www-sp.iti.informatik.tu-darmstadt.de/software/ppower4> voor enkele voorbeeldpresentaties met behulp van PPower4.

De effecten die PPower4 levert zijn vrij uitgebreid en houden bij creatief gebruik niet op bij het verschijnen van tekst. Dit kan samengaan met effecten bij het verschijnen: bijvoorbeeld in delen van letters. Ook kunnen bepaalde stukken tekst, bijvoorbeeld in een lijst één voor één worden uitgelicht. Zo kan het punt dat op dat moment wordt besproken ook visueel de aandacht krijgen.

Andere voordelen van het stap-voor-stap tonen zijn te vinden bij het geven van vergelijkingen. Door niet meteen meerdere stappen te geven, maar ze één voor één te tonen blijft de toehoorder geconcentreerd op de relevante stap en wordt niet afgeleid door de andere symbolen op de slide. Hetzelfde kan gerealiseerd worden met plaatjes, die in delen worden opgebouwd om bijvoorbeeld een algoritme te illustreren.

Een alternatief voor PPower4 is TeXPower. Omdat de maker van pdfscreen dit niet gebruikt levert het gebruiken van deze combinatie mogelijk af en toe problemen op.

Al met al is de combinatie pdf_{TEX}/pdfscreen een redelijk toegankelijke manier om presentaties te maken die er goed uitzien en zo de inhoud visueel ondersteunen voor het publiek. Met PPower4 komt ook de liefhebber van effecten goed aan zijn trekken. Omdat pdfscreen meer kan dan alleen slides maken, is het soms net iets te uitgebreid en daardoor ingewikkelder in de omgang dan noodzakelijk was geweest.

Tom Verhoeff

Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
T.Verhoeff@tue.nl

Recreatieve wiskunde

De Internationale Wiskunde Olympiade

De Internationale Wiskunde Olympiade wordt gevreesd en vereerd onder de in wiskunde geïnteresseerde scholieren en leraren. Verreerd, omdat op het gebied van het oplossen van wiskundige problemen de internationale olympiade het summum betekent. Gevreesd, omdat het niveau van de opgaven zo hoog ligt en de concurrentie moordend is. Tom Verhoeff, universitair docent informatica aan de Technische Universiteit Eindhoven, was waarnemer op de olympiade van 2002 in Glasgow. Hij legt uit hoe de olympiade in zijn werk gaat.

Bundels met opgaven en oplossingen van the International Mathematical Olympiad (IMO) [1] zijn eenvoudig te vinden in boeken [3, 8, 10, 16], tijdschriften en op het internet. Maar hoe zo'n olympiade in zijn werk gaat is nauwelijks beschreven. Op basis van mijn ervaringen als waarnemer bij de 43e IMO in juli 2002 te Glasgow wil ik een kijkje bieden achter de schermen van de IMO. Met name ga ik in op de oorsprong en selectie van de opgaven, de beoordeling van het werk van de leerlingen, en de toewijzing van prijzen en enkele statistieken. Een uitgebreid Engelstalig rapport over IMO 2002 is beschikbaar [18].

Deelname aan de IMO is op uitnodiging. Eén van de deelnemende landen treedt op als gastland. Elk uitgenodigd land stuurt een team van maximaal zes leerlingen, een teamleider en een *deputy*. De leerlingen mogen niet ouder zijn dan 20 jaar en mogen nog geen tertiair onderwijs gevolgd hebben.

De meeste deelnemende landen organiseren een nationale wiskunde olympiade om het team te selecteren. In Nederland gebeurt dat via de twee rondes van de Nederlandse Wis-

kunde Olympiade (NWO) (zie <http://olympiads.win.tue.nl/nwo>) en een vervolgtraining. Onze eerste ronde trekt jaarlijks zo'n tweeduizend leerlingen, waarvan de beste honderd worden toegelaten tot de tweede ronde. Hieruit worden een stuk of twintig leerlingen geselecteerd voor de vervolgtraining.

Shortlist

IMO 2002 werd gehouden in Schotland met 479 leerlingen uit 84 landen. Deze omvang vergt een gedegen voorbereiding. Elk deelnemend land stuurt tot maximaal zes opgaven naar de opgavencommissie van het gastland. Deze opgaven moeten met elementaire middelen te formuleren en op te lossen zijn. Er is geen officiële afbakening van toegelaten onderwerpen. Traditioneel gaan de opgaven over getaltheorie, meetkunde, algebra en combinatoriek. Differentiaal- en integraalrekening, kansrekening en complexe getallen zijn taboe. Niet alle IMO-onderwerpen worden op de middelbare school onderwezen, maar ze zijn representatief voor echte wiskunde en goed te behandelen bij de training.

Voor IMO 2002 werden 130 opgaven ingezonden uit 41 landen. De opgavencommissie heeft die nauwgezet geanalyseerd. Een van de zorgen daarbij is of opgaven wel echt nieuw zijn. Met de talloze regionale en nationale wiskunde-wedstrijden vergt dit geduldig speurwerk door vele opgavenbundels. Ook is het zaak om zicht te krijgen op de moeilijkheidsgraad door alternatieve oplossingen in kaart te brengen. Uit deze collectie maakt de opgavencommissie tenslotte een zogenaamde *shortlist* van circa 30 opgaven. Daarbij wordt gestreefd naar een goede spreiding over onderwerpen en moeilijkheidsgraden.

Bij IMO 2002 bestond de *shortlist* uit vier bladzijden met 27 opgaven. De *shortlist* wordt een jaar lang geheim gehouden, zodat opgaven, die niet op de IMO gebruikt worden, inzetbaar zijn bij trainingen. Het is in zekere zin een klein wonder dat er ieder jaar weer zoveel nieuwe elementaire opgaven bijeengebracht worden.

Wedstrijdopgaven

De eerste paar dagen van een IMO komen alleen de teamleiders samen om uit de *shortlist* de zes wedstrijdopgaven te selecteren. Daarbij moet gelet worden op diversiteit in onderwerp en moeilijkheidsgraad. De selectie gebeurt met welhaast wiskundige precisie in een reeks van zorgvuldig geformuleerde moties en stemmingen. Een informaticus zou zich erover verbazen dat voor dit proces geen regels zijn vastgelegd. De IMO gemeenschap continueert en verfijnt het proces middels traditie. Sommige teamleiders zijn al tientallen jaren betrokken bij de IMO.

De selectie heeft een wat politiek karakter. Naast het samenstellen van een uitstekende opgavenbundel spelen ook andere motieven mee. Zo is er de neiging om opgaven te prefereren waar het eigen team goed in is. Ook is het een hele eer om een van de zes IMO opgaven te hebben geleverd. Dit beïnvloedt het stemgedrag. Toch zoemt het ook van de wiskunde. Zo blijken er nog verrassend nieuwe oplossingen ontdekt te worden door de aanwezigen.

Als de zes opgaven geselecteerd zijn, moet ook nog de volgorde vastgesteld worden. Daarna begint het oppoetsen van de formulering en het vertalen. Ook deze zaken worden met veel zorg uitgevoerd. De formulering van

elke opgave wordt geprojecteerd en woord voor woord doorgenomen.

Alle vertalingen — bij IMO 2002 waren dat er 55 — worden op de muur van de vergaderzaal geprikt. Veel vertalingen worden door meer dan één land gebruikt. Zo is de Nederlandse vertaling ook voor de Vlaamse leerlingen. Een groot aantal vertalingen is handgeschreven. De meeste gebruiken exact dezelfde wiskundige notatie. Soms zijn er kleine variaties, bijvoorbeeld de lengte van het lijnstuk AB wordt aangeduid met AB , $|AB|$ of $\overline{AB}$. Ook in het Grieks, Russisch, Arabisch en Chinees gebruikt men dezelfde notatie. In het Perzisch, een Iraanse taal, worden echter de cijfers vertaald (FarsiTeX doet dat automatisch). Opmerkelijk is dat zelfs in talen die van rechts naar links geschreven worden, de formules toch van links naar rechts lopen. Bij IMO 2002 zag ik echter ook één versie waar de formules van rechts naar links waren geschreven, zelfs Σ was gespiegeld en de namen van variabelen waren 'vertaald'.

De opgaven van IMO 2002 zijn in een kader opgenomen. Daar kunt u zelf uw tanden in zetten. Verderop meld ik nog iets over oplossingen.

Scripts en scores

Voor iedere opgave zijn maximaal 7 punten te behalen. Met zes opgaven lopen daarmee de eindscores van 0 tot en met 42. Zoveel wist ik van de beoordeling toen ik naar IMO 2002 ging. Over de werkwijze had ik alleen wat geruchten gehoord.

De leerlingen schrijven hun werk op speciale vellen. De IMO benaming voor hun werk is *script*. Op IMO 2002 werden ongeveer 15 000 vellen script ingeleverd. Dat is gemiddeld ruim 5 vellen per opgave per leerling. Deze worden allemaal gekopieerd. De originelen gaan naar de eigen teamleider en de kopieën naar de organisatie, alles netjes opgeborgen in gekleurde mappen.

Regio	Score	Omschrijving
7 ⁻	7 *	Volledige oplossing
	6	Minimale vergissing, triviaal te repareren
	5	Kleine omissie of fout, maar niet centraal
0 ⁺	2	Aanzienlijke vooruitgang
	1 *	Niet-triviale vooruitgang
	0 *	Veelschrijverij, alleen speciale gevallen gedaan

Tabel 1 Puntentelling van een IMO-opgave

De opgaven van IMO 2002

1. Zij n een positief geheel getal. Zij T de verzameling van punten (x, y) in het platte vlak, waarbij x en y niet-negatieve gehele getallen zijn met $x + y < n$. Ieder punt van T is rood of blauw. Als een punt (x, y) van T rood is, dan zijn ook alle punten (x', y') rood met $x' \leq x$ en $y' \leq y$.

Een X -verzameling is een verzameling van n blauwe punten waarvan alle x -coördinaten verschillend zijn. Een Y -verzameling is een verzameling van n blauwe punten waarvan alle y -coördinaten verschillend zijn.

Bewijs dat het aantal X -verzamelingen gelijk is aan het aantal Y -verzamelingen.

2. Zij BC een middellijn van de cirkel Γ met middelpunt O . Zij A een punt op Γ zodanig dat $0^\circ < \angle AOB < 120^\circ$. Zij D het midden van de boog AB die C niet bevat. De lijn door O evenwijdig met DA snijdt AC in J . De middelloodlijn van OA snijdt Γ in E en F .

Bewijs dat J het middelpunt is van de ingeschreven cirkel van $\triangle CEF$.

3. Bepaal alle paren van gehele getallen $m, n \geq 3$ zodanig dat er oneindig veel positieve gehele getallen a bestaan waarvoor

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

geheel is.

4. Zij n een geheel getal groter dan 1. De positieve delers van n zijn $d_1, d_2, \dots, d_k$, waarbij

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n.$$

Definieer

$$D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \dots + d_{k-1} d_k.$$

- Bewijs dat $D < n^2$.
 - Bepaal alle getallen n waarvoor D een deler is van n^2 .
5. Bepaal alle functies f van de reële getallen naar de reële getallen, zodanig dat voor alle reële getallen x, y, z en t geldt

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz).$$

6. Beschouw in het platte vlak de cirkels $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ met straal 1, waarbij $n \geq 3$. De middelpunten van deze cirkels zijn respectievelijk $O_1, O_2, \dots, O_n$. Geen enkele rechte lijn in het vlak snijdt of raakt meer dan twee van deze cirkels.

Bewijs dat

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{|O_i O_j|} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

Het gastland zet een aparte beoordelingscommissie op, bestaande uit goede wiskundigen. Zo had de beoordelingscommissie van IMO 2002 onder haar leden personen als Belá Bollobás en Fields medaillewinnaar Tim Gowers, die onlangs een alleraardigst inleidend boekje over wiskunde [7] publiceerde. Zodra de wedstrijdopgaven zijn geselecteerd gaan ze aan de slag om beoordelingsschema's op te stellen. Daarvoor is een vergaand inzicht in de opgave en oplossingstechnieken nodig.

Bij de beoordeling gaat het er in principe om of een opgave al dan niet is opgelost. Het beoordelingsschema onderscheidt daartoe de 0⁺ regio (niet opgelost) versus de 7⁻ regio (wel opgelost): In tabel 1 zijn de gangbare scores gemerkt met een ster (*). Merk op dat de scores 3 en 4 niet in de tabel voorkomen; ze worden alleen in speciale situaties gebruikt.

Het beoordelingsschema brengt in kaart wat als niet-triviale of aanzienlijke voortgang geldt en hoe zwaar bepaalde omissies of vergissingen worden aangerekend. De beoordeling bestaat niet uit het ophakken van de oplossing in kleine stukjes en punten toekennen voor ieder onderdeel. Meestal is het schema niet additief om te voorkomen dat een onverdiende score bijeengesprokkeld wordt door tal van kleine observaties. Zo'n systeem zou bij eindexamens ook ingevoerd mogen worden.

Als een opgave begint met "Bepaal alle ..." (zie opgaven 3 en 5 van IMO 2002), dan levert het geven van oplossingen in het algemeen geen punten op. Zulke oplossingen zijn vaak met wat geduld en prutsen wel te vinden en eenvoudig te controleren. Bewijzen dat het *alle* oplossingen zijn vergt inzicht en



Het Nederlandse team voor de Internationale Wiskunde Olympiade 2002. Van links naar rechts: Taco Vader, Birgit van Dalen, Erik van Ommen, Esther Bod, Misha Stassen en Thomas Beuman.

daar gaat het om.

Als iets gevraagd wordt over een willekeurige driehoek of geheel getal n (zie opgaven 1, 2, 4 en 6 van IMO 2002), dan levert het afhandelen van een beperkt aantal speciale gevallen meestal geen punten op. Er zijn dus vele manieren om tot nul punten te komen. Het vergeten van speciale gevallen, zoals de basis in een inductief bewijs, kost daarentegen wel punten (aangenomen dat de rest goed is). Het aanpakken van oneven n zou niet-triviale voortgang kunnen zijn (1 punt) zonder als aanzienlijke voortgang te tellen (2 punten).

De beoordelingsschema's worden aan de teamleiders gepresenteerd en in overleg eventueel bijgesteld. Deze worden door de teamleiders gebruikt om zelf het werk van hun leerlingen te beoordelen. De resultaten worden gedurende twee dagen besproken met de beoordelingscommissie. In een half uur tot drie kwartier per opgave legt een teamleider met diens *deputy* hun resultaten voor aan de commissie, die zelf kopieën van de scripts heeft ingezien. Waar nodig beroept de commissie zich op wiskundigen die als vertaler optreden. Uiteindelijk wordt een definitieve score vastgesteld en gepubliceerd op de scoreborden in de gangen.

Op IMO 2002 waren er ruim 500 sessies met de beoordelingscommissie. Voor iedere opgave waren er acht gespecialiseerde commissieleden, die in paren de sessies afnamen. Hoewel de teamleiders het opnemen voor hun leerlingen, kreeg ik de indruk dat

iedereen er toch op uit was om een eerlijk resultaat te behalen. Al de eindscores waren gebaseerd op consensus, al twijfel ik eraan of alle teamleiders ook werkelijk alles begrepen.

Oplossingen

Er zijn twee gevaren bij het geven van oplossingen. Ten eerste is er niet zoiets als de oplossing van een opgave. Zelfs de officiële *shortlist* bevat uiteenlopende oplossingen en wijst op varianten. Als men zelf een afwijken-de aanpak bezigt, dan is dat niet slechter of fout. In tegendeel, er blijkt altijd ruimte te zijn voor nog mooiere oplossingen. Als u die vindt, zou ik het graag vernemen.

Het tweede gevaar is dat men bij het zien van een oplossing, zonder er zelf naar gezocht te hebben, al gauw denkt dat het voor de hand ligt. Niets is minder waar! De kunst is om zonder enige hulp de opgaven op te lossen, en de praktijk leert dat dit knap kan tegenvallen. Ik geef wat hints voor het oplossen van de opgaven van IMO in een apart kader. Volledige oplossingen zijn te vinden in [18].

In Nederland heerst niet zo'n competitiedrang als in veel andere landen. Mij is niet geheel duidelijk waar dat aan ligt. Om een goede *problem solver* te worden, moet je veel oefenen en wedstrijden zijn daar zeer geschikt voor. Fomin et al. beschrijven de Russische ervaring op dit gebied in [17]. *How to Solve It* van Polyá [15] is nog steeds een aanrader om structuur aan te brengen in het kraken van een probleem. Maar tegenwoordig is er

meer goede literatuur. Zo bevat [5] een systematische uiteenzetting van algemene strategieën samen met zorgvuldig geselecteerde problemen. Wat geavanceerder is [14], dat een voortzetting op [15] claimt te zijn. Tenslotte biedt [20] een bredere kijk op *problem solving* en de training ervan. De beginner wil ik graag nog wijzen op het onlangs verschenen NWO-boek [4].

Prijzen

De leerlingen worden geordend volgens hun eindscores. In tegenstelling tot de olympische spelen, vallen bij de IMO niet alleen de eerste drie op de ranglijst in de prijzen. De olympiades voor middelbare scholieren voeren een ruimhartiger beleid, om de deelnemers niet voor een carrière in de betreffende discipline af te schrikken. De IMO hanteert de volgende richtlijnen: Niet meer dan de helft van de leerlingen krijgt een prijs. De aantallen eerste, tweede en derde prijzen staan bij benadering in de verhouding 1 : 2 : 3.

Iemand die buiten de prijzen valt maar toch een opgave volledig heeft opgelost (7 punten), krijgt hiervoor een certificaat met eervolle vermelding (*honorable mention*).

Van de 479 leerlingen op IMO 2002 vielen er 232 in de prijzen: de beste 39 ontvingen een gouden medaille (29 t/m 42 punten), de volgende 73 een zilveren (23 t/m 28 punten) en tenslotte 120 een bronzen (14 t/m 22 punten). Van de 247 leerlingen zonder prijs be-



Onlangs verscheen het olympiadeboek met een keuze van de opgaven van de afgelopen twintig jaar uit de Nederlandse Wiskunde Olympiade. De vraagstukken zijn voorzien van hints, antwoorden en korte toelichtingen die de lezers op het juiste spoor proberen te zetten. Voor informatie, zie <http://olympiads.win.tue.nl/nwo/nwo-boek/index.html>.

Hints bij de opgaven van IMO 2002

1. Het volstaat om te bewijzen dat de blauwe kolomlengtes a_i een permutatie zijn van de blauwe rijlengtes b_i . Dit kan met inductie (naar bijna alles), of door een bijjectie te geven.
2. Bewijs dat vierhoek $ODAI$ een parallellogram is en dat IC en IF bissectrices zijn in driehoek CEF .
3. De enige oplossing is $(m, n) = (5, 3)$ (maar dit levert geen punten op). Bewijs eerst voor de gezochte (m, n) dat $f(x) = x^m + x - 1$ deelbaar is door $g(x) = x^n + x^2 - 1$ in $\mathbb{Z}[x]$. Beschouw vervolgens $h(x) = x^{k+1} + x^k - 1$ met $k = m - n \geq 1$ en bewijs dat $h(x)$ ook deelbaar is door $g(x)$. Onderzoek de relatie tussen $g(x)$ en $h(x)$ op het interval $(0, 1)$.
4. Bewijs voor het (a)-deel eerst dat

$$\frac{1}{d_1 d_2} + \frac{1}{d_2 d_3} + \dots + \frac{1}{d_{k-1} d_k} < 1$$

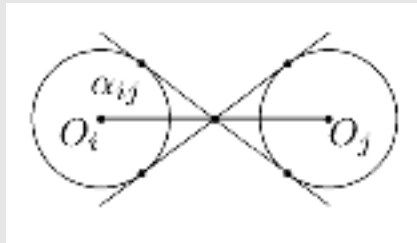
$$\Leftrightarrow D < n^2.$$

Het (b)-deel geldt precies wanneer n priem is.

5. De enige oplossingen zijn $f(x) = 0$, $f(x) = 1/2$ en $f(x) = x^2$ (maar dit levert geen punten op). Bewijs dat f multiplicatief is ($f(xy) = f(x)f(y)$), even ($f(-x) = f(x)$), stijgend op de positieve reële getallen, en dat $f(n) = n^2$ voor gehele n .
6. Bewijs eerst dat voor elk tweetal cirkels Γ_i en Γ_j geldt

$$\frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{\alpha_{ij}}{2}.$$

waarbij α_{ij} de hoek is tussen $O_i O_j$ en de binnenraaklijnen aan Γ_i en Γ_j (zie figuur 1).



Figuur 1

haalden er 66 een eervolle vermelding. Dat het moeilijk is blijkt wel uit het feit dat meer dan de helft van de leerlingen, allemaal topers in hun nationale olympiade, minder dan 14 punten scoren. Dat het niet te moeilijk is wordt bewezen door de drie leerlingen (twee

Chinezen en een Rus) die de haast ondenkbare perfecte score (42 punten) haalden.

Nederland zit traditioneel bij de middenmoot. Op IMO 2002 komen we niet verder dan een bronzen medaille en een eervolle vermelding. Het hele Nederlandse team heeft

55 punten vergaard. Vergelijk dit met de onofficiële ranglijst voor de 84 teams:

1. China, 212 punten, 6 goud.
2. Rusland, 204 punten, 6 goud.
3. Verenigde Staten, 171 punten, 4 goud, 1 zilver, 1 eervolle vermelding.

Verder eindigen in de top-12 achtereenvolgens: Bulgarije, Vietnam, Zuid-Korea, Taiwan, Roemenië, India, Duitsland, Iran, Canada en Hongarije (de laatste beide met 142 punten). Nederland is 54e op deze lijst.

De IMO is nog nooit in Nederland gehouden. Ik denk dat het een uitstekende uitdaging zou zijn om de IMO eens naar Nederland te halen. We doen al tientallen jaren mee en hebben genoeg goede wiskundigen en taalkennis in huis. Misschien dat gebrek aan interesse voor wiskunde bij onze jeugd en politici het moeilijk maakt, maar aan de andere kant is het ook een manier om te tonen dat we wiskunde belangrijk vinden en kan het juist een stimulans zijn voor anderen. Wie doet mee?—

Dankwoord

Ik wil graag Jan Donkers, sinds vele jaren de leider van het Nederlandse IMO team, bedanken voor zijn bereidheid mij met het team mee te nemen en voor zijn antwoorden op mijn vele vragen. Verder heeft Imre Leader, de voorzitter van de opgaven- en beoordelingscommissies bij IMO 2002, met oneindig geduld zijn ervaring met mij gedeeld. Ook heb ik profijt gehad van de adviezen van Jan van de Craats, de voorganger van Jan Donkers bij de NWO. Tenslotte heeft de Stichting NWO mijn inspanningen gesteund.

Referenties

- 1 <http://olympiads.win.tue.nl/imo/>
- 2 Gerald L. Alexanderson. *The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1965–1984: Problems and Solutions* Mathematical Association of America, 1986.
- 3 Mircea Becheanu. *International Mathematical Olympiads 1959–2000 : Problems, Solutions, Results*. Academic Distribution Center, 2001.
- 4 Jan v.d. Craats (red.). *De Nederlandse Wiskunde Olympiade: 100 opgaven met hints, oplossingen en achtergronden*. Uitgeverij ten Brink Mepel B.V., 2002.
- 5 Arthur Engel. *Problem-Solving Strategies*. Springer, 1998.
- 6 Andrew M. Gleason. *The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1938–1964: Problems and Solutions*. Mathematical Association of America, 1980.
- 7 Timothy Gowers. *Mathematics: a Very Short Introduction*. Oxford Paperbacks, 2002.
- 8 Samuel L. Greitzer. *International Mathematical Olympiads, 1959–1977*. Mathematical Association of America, 1978.
- 9 Kiran Kedlaya, Bjorn Poonen, Ravi Vakil. *The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985–2000: Problems, Solutions, and Commentary*. Mathematical Association of America, 2002.
- 10 Murray S. Klamkin. *International Mathematical Olympiads, 1978–1985 and Forty Supplementary Problems*. Mathematical Association of America, 1986.
- 11 Jozsef Kürchak. *Hungarian Problem Book I: based on the Eötvös Competitions 1894–1905*. Mathematical Association of America, 1963.
- 12 Jozsef Kürchak. *Hungarian Problem Book II: based on the Eötvös Competitions 1905–1928*. Mathematical Association of America, 1975.
- 13 Andy Liu (Ed.). *Hungarian Problem Book III: based on the Eötvös competitions 1929–1943*. Mathematical Association of America, 2001.
- 14 Zbigniew Michalewicz, David B. Fogel. *How to Solve It: Modern Heuristics*. Springer, 1999.
- 15 Gyorgy Pólya. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method* (2nd Edition). Princeton University Press, 1957.
- 16 István Rieman. *International Mathematical Olympiad: 1959–1999*. Anthem Press, 2001.
- 17 Dmitri Fomin, Sergey Genkin, Ilia Itenberg. *Mathematical Circles: Russian Experience*. American Mathematical Society, 1996.
- 18 Tom Verhoeff. *The 43rd International Mathematical Olympiad: A Reflective Report on IMO 2002*. Computer Science Report 02/11 (0310), Technische Universiteit Eindhoven, 2002.
- 19 Joh. H. Wansink. “De eerste Nederlandse Wiskunde Olympiade (1962).” *Euclides*, **38**(VI): p. 161–178, maart 1963.
- 20 Paul Zeitz. *The Art and Craft of Problem Solving*. John Wiley & Sons, 1999.

Henk van der Vorst

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht,
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
vorst@math.uu.nl

Hoe schrijf ik een veel geciteerd artikel?

In augustus 2000 ontving Henk van der Vorst van het Institute for Scientific Information (ISI), een e-mail over een artikel dat hij in 1992 gepubliceerd had in een SIAM tijdschrift: "Our analysis of high-impact papers in mathematics indicates that this paper has been cited 379 times to date, making it the most-cited mathematics paper of the last decade." Het artikel introduceerde het BIGSTAB algoritme. Naar aanleiding van het bericht van het ISI verschenen er artikelen in *Metro*, *Trouw*, de *Volkskrant* en het *Utrechts Nieuwsblad*. Hoe kwam het dat het artikel van Van der Vorst zo vaak geciteerd werd? Lees hier het geheim van de smid.

Het is in de wetenschap strikt noodzakelijk dat men de bronnen aangeeft waarop de eigen nieuwe bijdrage is gebaseerd, zodat het voor een ieder duidelijk is hoe het nieuwe werk gerelateerd is aan bestaand werk en zodat er duidelijkheid bestaat over het auteurschap van gepresenteerde resultaten. Het is gebruikelijk om die bronnen in een aparte literatuurlijst aan het eind van het artikel op te nemen. Een vermelding van een publicatie in de literatuurlijst wordt als één citatie geteld, ongeacht het werkelijke aantal verwijzingen naar de betreffende publicatie in het nieuwe werk. Indien het een citatie betreft naar eigen vroeger werk dan heet zo iets een zelfcitatie.

Het aantal citaties voor een bepaalde publicatie, over een zekere periode geturfd, heet een maat te zijn voor het relatieve belang van de geciteerde publicatie. Immers als een publicatie geciteerd wordt, dan geeft dat aan

dat iemand het de moeite waard heeft gevonden om van die publicatie kennis te nemen en meer nog: de geciteerde publicatie heeft waarde gehad om het nieuwe werk in de goede context te plaatsen of misschien zelfs om het nieuwe werk mogelijk te helpen maken. In onze moderne tijd van massale wetenschapsbeoefening zijn citatie-tellingen een gewild hulpmiddel om de effectiviteit van een wetenschappelijke groep, of zelfs een individuele wetenschapper, in beeld te brengen. Er wordt zelfs wetenschap bedreven op het fenomeen van citatiegedrag.

Het Amerikaanse Institute for Science Information (ISI) is toonaangevend in de wereld en levert haar gegevens als grondstof voor verdere analyse aan andere instanties, zoals bijvoorbeeld het Leidse citatieonderzoek instituut van *van Raan*. Het ISI is ook de uitgever van de befaamde Science Citation Index (SCI), die overigens is gemaakt om na te gaan waar bepaald werk geciteerd wordt en niet om citaties te tellen. Desondanks kon ik in mei via de SCI achterhalen dat inmiddels minstens vijf van mijn publicaties veel geciteerd waren (mijn criterium voor veel is: meer dan 100). Nummer 6 stond op 91 citaties, dus die komt er ook wel.

Het meten van succes en rangordes

Citatietellingen zijn een voor de hand liggend hulpmiddel om het succes van een onderzoeker of zelfs van een heel instituut te meten. Bestuurders en journalisten maken er dus graag gebruik van want het bespaart een inhoudelijke en subtielere evaluatie. Zo wer-

den onlangs nog Nederlandse onderzoeksgroepen in een artikel in het weekblad *Elsevier* (16 maart 2002) gerangschikt op basis van hun citatiescores. Nagegaan was welk percentage van de artikelen van een instituut tot 's werelds 10% meest geciteerde artikelen op het betreffende vakgebied behoorde. De Utrechtse wiskundigen scoorden daarin hoger dan hun vakgenoten elders in het land. Dat is natuurlijk fijn als je in Utrecht werkt, maar wat betekent het eigenlijk?

Hoe groter een instituut is, hoe meer het relatief bijdraagt aan de totale productie aan artikelen en hoe meer die 10% dus door dat instituut bepaald wordt. Zou er maar één instituut in de wereld bestaan, dan zou dat instituut automatisch 10% van haar artikelen bij de 10% meest geciteerde hebben staan. Hoe groter een instituut is, hoe dichter ze bij die 10% zouden moeten zitten. Een groot instituut dat duidelijk lager zit dan die norm bestaat dus uit overwegend minkukels. Utrecht zat boven de norm, is bovendien het grootste instituut in Nederland en is dus overwegend wat genialer dan de rest.

De citatieculturen per subdiscipline in de wiskunde verschillen enorm van elkaar. In de statistiek, de operations research en de numerieke wiskunde worden veel hogere citatiescores behaald dan in de zuivere algebra, of de symplectische meetkunde, om er maar een paar te noemen. Ik word daar later wel iets concreter over. Het scheelt namelijk enorm of resultaten binnen een vakgebied ook buiten de wiskunde direct benut kunnen worden, dan wel of zij voornamelijk impact hebben op

vakgenoten. Statistici en numerici publiceren over het algemeen ook meer dan zuivere wiskundigen, dus het zou me niet verbazen als de 10% meest geciteerde artikelen dicht bevolkt worden door zeer toepasbare verhalen. Utrecht heeft een relatief grote productie op het gebied van de toegepaste wiskunde en mag dus verwacht worden hoger te scoren dan instituten die het in belangrijke mate van hun meer zuiver wiskundige productie moeten hebben.

Citatie scores

Hoe zit het met de citatiescores bij andere disciplines? De tweede en derde meest geciteerde wiskunde-artikelen uit de negentiger jaren waren beide statistische artikelen. Bij wijze van contrast: het beroemde artikel van Wiles (Annals of Mathematics, 1995) kon in Augustus 2001 op minder dan 100 citaties bogen [1]. Binnen mijn eigen discipline sprong ik er minder uit: de totale citatiescores (gemeten in het voorjaar van 2001) bedroegen ongeveer 1100 voor een artikel van Saad en Schultz (1986, GMRES-methode), Peter Sonneveld's artikel over CGS (1989) scoorde 338 keer en het verhaal van Freund en Nachtigal (1991, QMR-methode) haalde 215 citaties. Men kan zich zelf een indruk vormen van citatie scores door de SCI te inspecteren (als de instituutsbibliotheek daar ten minste een abonnement op heeft) of door te surfen naar ISI HighlyCited.com. Op die pagina's geeft het ISI gevarieerde informatie over 'Highly Cited Researchers'. Via de NEC Cite-seer: <http://citeseer.nj.nec.com> kun je nagaan hoe vaak artikelen geciteerd worden in documenten die elektronisch beschikbaar zijn in databases van Computer Science instituten. Omdat die instituten vaak gelieerd zijn met wiskundige instituten komen er ook veel wiskundige artikelen in voor. Het systeem is verre van perfect maar geeft wel een aardige indruk van waar en hoe er geciteerd wordt: je kan de circa vijf regels van de tekst waar de citatie plaats vindt inspecteren. Hoogst geciteerde Nederlander op de NEC hitlijst is momenteel de informaticus Andy Tanenbaum.

Verder krijg je bij Citeseer van elke geciteerde wetenschapper een citatie-histogram te zien. Daarbij worden alle citaties voor een artikel uitgezet tegen het jaar van publicatie. Heel instructief om zo een indruk te krijgen van de meest vruchtbare jaren van de onderzoeker.

Terug naar de officiële SCI. Half juni 2002, telden we voor Wiles' artikel 147 citaties en voor het mogelijk even belangrijke artikel van Taylor en Wiles over ring-theoretische eigen-

Het onderwerp van het veel geciteerde Bi-CGSTAB-artikel

Het koelen van babyhersentjes, de stroming van de oceanen, de krachtverdeling over een draagraket, de verspreiding van verontreiniging in het grondwater en het snijden in het lichaam van een patiënt, het zijn allemaal voorbeelden van problemen die na modellering leiden tot zeer grote stelsels lineaire vergelijkingen. Zeer groot betekent heden ten dage in de orde van 1 miljoen tot 1 miljard onbekenden. Veel van zulk soort stelsels kunnen snel met de computer worden opgelost met behulp van iteratieve oplosttechnieken. Tot de meest efficiënte methoden worden de zogenaamde Krylov-methoden gerekend en tot deze klasse behoren onder andere Conjugate Gradients, GMRES en Bi-CGSTAB. Deze methoden werken ruwweg als volgt.

We schrijven het op te lossen stelsel als $Ax = b$, met A een reële n bij n niet-singuliere matrix en b een gegeven rechterlid. Uitgaande van een beginschatting x_0 voor de oplossing x , construeert men een zoekruimte, waarin een nieuwe x_{i+1} bepaald wordt, door de beschikbare zoekruimte uit te breiden met het residu $r_i = b - Ax_i$. De zoekruimte wordt na deze uitbreiding opgespannen door de $i+1$ vectoren $r_0, r_1, \dots, r_i$; we noteren haar als K^{i+1} en deze ruimte is een zogenaamde Krylovruimte. De nieuwe iterand wordt vastgesteld door bijvoorbeeld te eisen

dat $r_{i+1} \perp K^{i+1}$. Indien A symmetrisch en positief is, leidt dit in principe tot de Conjugate Gradients methode. Een andere geschikt criterium is de eis dat de Euclidische lengte van r_{i+1} minimaal is over alle mogelijke kandidaatoplossingen uit K^{i+1} . Dit leidt tot de GMRES methode.

Voor niet-symmetrische A is GMRES een dure methode, maar het kan worden aangetoond dat bruikbare iteranden goedkoper kunnen worden geconstrueerd door twee ruimtes bij te houden: naast de Krylovruimte voor $Ax = b$ ook nog een Krylovruimte voor een verder niet interessant stelsel $A^T y = b$: dit leidt tot de Bi-CG methode. Sonneveld (TU Delft) heeft laten zien hoe de bewerkingen met A^T vervangen kunnen worden door bewerkingen met A . Dit geeft de mogelijkheid om, tegen vrijwel gelijke rekenkosten, benaderde oplossingen uit twee keer zo grote zoekruimtes te bepalen.

Bi-CGSTAB is een methode die volgens dat principe goedkoop zeer goede benaderde oplossingen uit die dubbeldimensionale zoekruimte construeert. Hoewel er inmiddels al weer varianten zijn die dat nog weer beter kunnen, is Bi-CGSTAB zeer populair in het gebruik gebleven vanwege haar grote eenvoud: een computercode beslaat voor de methode zelf niet meer dan een twintigtal regels.

schappen van Hecke-algebras zagen we 75 citaties. Plat gezegd: de top van de zuivere wiskunde haalde het maaiveld van de numerieke lineaire algebra niet. Buiten de wiskunde kunnen nog weer veel hogere scores behaald worden: topartikelen in de chemie of de geneeskunde kunnen gemakkelijk, gedurende een relatief korte periode (zeg 1 à 2 jaar) scores van 30 citaties per maand halen. Een buitenstaander zou dus licht kunnen concluderen dat de wiskunde een relatief onbelangrijke wetenschap is.

Citatievoorbeelden

Voor ik het verder zal gaan hebben over het omgaan met citaties en citatiegedrag is het nuttig om er eerst nog eens expliciet op te wijzen dat een citatie, dus een vermelding in een publicatielijst, niets meer of minder zegt dan dat de geciteerde publicatie ergens in de tekst genoemd wordt. Dat kan op veel verschillende manieren en ik geef een paar letterlijk overge-

nomen voorbeelden (de citatienummers zijn de originele nummers):

- *In an effort to overcome this, in many areas a suitable stochastic model is employed to describe the uncertainty of the data, see e.g., [4, 8, 10, 11, 20-23, 27].*
- *The patch test is conducted for the plate problems described in [16, 28].*
- *It turns out that GMRES [13] took roughly twice as much computing time than Bi-CGSTAB [16] in all our testcases.*
- *Although the perturbation technique is often used in engineering, it is usually applied for a finite number of random parameters, see e.g., [17], and often without rigorous theory.*
- *The classical solution given by Chrisfield [9] is used as the reference solution.*
- *In 1992 Bettess published the first book on infinite elements [21], which set forth the state of the art at that time.*
- *The fundamental paper [4] of Dörfler for the*

Poisson equation shows ...

– *The above equation is very similar to the form proposed by McMeeking and Rice [11].*

Het moge duidelijk zijn dat de ene citatie de andere niet is en dat men citatietellingen met een zekere voorzichtigheid moet benaderen. Daar komt nog bij dat de waarde van een citatie ook mede bepaald wordt door de kwaliteit van het medium waarin het nieuwe werk gepubliceerd wordt. Een citatie vanuit een artikel in de *Limburgse Mathematische Kroniek*, die alles onbeoordeeld opneemt, telt beslist veel minder zwaar dan vanuit een artikel in de prestigieuze zwaar door specialisten beoordeelde en gewogen *Annals of Mathematics*. Het ISI telt dan ook alleen citaties die voorkomen in tijdschriften die aan een aantal kwaliteitscriteria voldoen. Echter ook op die lijst komen mindere naast betere tijdschriften voor.

Ondanks al deze bedenkingen zegt het gemiddeld genomen natuurlijk toch wel wat als een artikel veel geciteerd wordt, net zoals het wat zegt als een artikel nooit geciteerd wordt, zelfcitaties daarbij steeds uitgesloten. Veel citaties kunnen dus bijdragen aan een comfortabel gevoel: het betreffende artikel is voor veel wetenschappers van (op zijn minst enig) belang geweest en dat maakt de eigen bijdrage aan de wetenschap wat zichtbaarder. Ook niet meer of minder dan dat. Wiles' publicatie die het vermoeden van Fermat definitief bevestigde heeft tot (veel) minder citaties geleid dan mijn artikel waarin ik een wat snellere methode voorstelde voor het oplossen van lineaire stelsels. De publicatie van Wiles bracht een onvoorstelbaar moeilijk probleem tot oplossing en ik verwacht niet van valse bescheidenheid beticht te worden als ik stel dat zijn werk van een hogere orde is. Zijn werk kreeg wereldwijd terecht alle aandacht, ook in de reguliere pers; mijn werk stelde een aantal andere wetenschappers in staat hun rekenwerk efficiënter uit te voeren waardoor hun mogelijkheden (wat) vergroot werden. Nogmaals, je kunt bij citatietellingen niet genoeg relativeren.

Citatiegedrag

We hebben nu uitputtend de scene gezet voor enige aanwijzingen ten aanzien van de ambitieuze titel van dit verhaal. Laat ik maar beginnen met te stellen dat je mag hopen dat je geesteskinders veel geciteerd worden, maar dat er ook wel wat aan gedaan kan worden om ze voldoende aandacht (= citaties) te laten krijgen. Doe dit wel op passende wijze en vermijdt het om de citaties naar eigen werk aan anderen op te dringen, waarbij ik denk aan

de volgende, allerm minst hypothetische, situaties.

Men kan promovendi aanmoedigen om meer dan strikt noodzakelijk naar het werk van hun Grote Roerganger te verwijzen. Dat is verwerpelijk omdat het negatief bijdraagt aan de wetenschappelijke vorming van de jonge wetenschappers. Het leidt misschien tot een paar extra citaties, maar op den duur ook tot een dubieuze status.

Het is ook verleidelijk om als referee onder de dekmantel van anonimiteit citatie naar eigen werk te bewerkstelligen daar waar het niet strikt noodzakelijk is. Het gebeurt en het leidt ook vaak tot resultaat omdat veel auteurs geneigd zijn hun referees tevreden te stellen. Ik vind dit agressief gedrag en editors zouden er op moeten toezien dat het vermeden wordt. Ook zou je kunnen overwegen om door een ingehuurde wetenschapper uit een arm land je eigen werk eens flink te laten citeren (ook dit gebeurt), maar dat is eveneens een doodlopende straat en verder commentaar is eigenlijk overbodig. Als een auteur opvallend vaak geciteerd wordt vanuit onbekende bron dan is dat zeer verdacht.

Kort samengevat: elke eigenhandige beïnvloeding van het citatieprofiel is onethisch en keert zich op kortere of langere termijn tegen de dader zelf.

Aandacht trekken

Dan kom ik nu aan de positieve acties die een auteur kan ondernemen om zijn werk de aandacht te geven dat het verdient. Er wordt tegenwoordig jaarlijks bijzonder veel gepubliceerd en het kan daardoor eenvoudig voorkomen dat bepaalde publicaties onnodig over het hoofd worden gezien. Natuurlijk: een werkelijke doorbraak raakt gauw bekend, daar hoef je meestal geen extra ruchtbaarheid aan te geven in het wetenschappelijk circuit. Bij wat minder spectaculaire stappen voorwaarts kan dat geen kwaad, maar het moet dan wel met de nodige aandacht gebeuren.

Als voorbeeld hoe het niet moet, de volgende anecdote. Ik heb eens op een grote conferentie in een hoofdvordracht uitgelegd hoe roosterpunten genummerd moeten worden zodat bepaalde problemen sneller en bovendien parallel numeriek kunnen worden opgelost (het bijbehorende artikel verscheen daarna in een bekend tijdschrift). Mijn beschrijving was recursief, zodat de nummering meteen voor alle dimensies gedefinieerd werd. Na de voordracht legde ik 's avonds in kleine kring nog eens uit hoe de truc uitpakte voor tweedimensionale roosters. Twee toehoorders gingen hier vrijwel meteen mee aan

de slag en publiceerden erover; sedertdien wordt deze nummering in de literatuur veelal omschreven als de 'vdv-ordering', door gaans met verwijzing naar hun artikel. In dat artikel wordt gewag gemaakt van de discussie met mij, maar wordt niet mijn eigen publicatie geciteerd. Dat was geen kwade wil: men had eenvoudig niet ingezien dat mijn hoofdvordracht op dezelfde nummering betrekking had als in het voorbeeld tijdens de avonddiscussie. Dat zegt natuurlijk wel wat over de (on)toegankelijkheid van mijn formele recursieve beschrijving.

Stelling–bewijs–commentaar

De les uit bovenstaand verhaal is: probeer vooral helder en toegankelijk te schrijven. Verberg je ideeën niet achter notatie, maar laat ze vergezeld gaan van voldoende uitleg via voorbeelden. Het kan daarbij helpen als je je bij het schrijven de doelgroep voor ogen houdt, alsof het over de schouder meeleest, en je de mogelijke reacties alvast voor te stellen. De prozaschrijver Cees Buddingh beklagde zich eens over de publieke kritiek die hij van W.F. Hermans kreeg over een bundel dagboek aantekeningen. Toen dit Hermans ter ore kwam, verbaasde hij zich zeer en merkte op dat Buddingh er toch rekening mee had kunnen houden dat hij zijn boek onder ogen zou krijgen.

Ik heb zelf het geluk gehad dat ik een zeer kritische promotor had en het heeft me bij menig artikel geholpen door mij de vraag te stellen: "Wat zou hij hierop zeggen als hem deze zin onder ogen kwam?". Laat de lezer niet raden naar je bedoelingen en laat duidelijk naar voren komen wat belangrijk is. Ik publiceer regelmatig over algoritmen en die probeer ik dan zo te beschrijven dat de lezer deze eenvoudig zelf via de computer kan evalueren. Het liefst zet ik zo'n algoritme ook nog in een apart kader. Als er een bewijs aan te pas moet komen, dan krijgt dat een minder prominente plaats in het geheel tenzij het bewijs zelf zeer instructief is. In feite probeer ik de lezer die eenmaal aan mijn artikel begonnen is, zo lang mogelijk vast te houden. Als dat kan door de wiskundige diepgang naar achteren te plaatsen, dan doe ik dat graag.

Uiteraard moet wat je schrijft verantwoord zijn en te verifiëren, maar dat hoeft niet te gebeuren via de klassieke stelling–bewijs–commentaar formule. Ik geef zelf de voorkeur aan eerst een toegankelijke probleemstelling, daarna liefst nog een motiverend voorbeeld, dan pas gevolgd door een stelling (of algoritme) die na de inleiding en het voorbeeld niet meer uit de lucht komt vallen. Daarna preferer ik nog verder commentaar alvorens het

bewijs geleverd wordt. Ik besluit meestal met een paar voorbeelden waarin de stelling (het algoritme) toegepast wordt.

Er is literatuur over het schrijven van wetenschappelijke publicaties. Zelf heb ik veel plezier gehad van Higham's boek [2].

Promotie van eigen werk

Ik maak uiteraard onderscheid tussen mijn artikelen waar ik echt trots op ben, in die zin dat er iets wezenlijks in gebeurt, en de groep waarin op eerdere gedachten wordt voortgekauwd. Deze groep is veelal rond de hoogtepunten gestructureerd en dient mede om de relevantie van de hoofdartikelen aan te tonen en verder uit te bouwen. Vaak betreft het hier artikelen die op conferenties gepresenteerd zijn en in de proceedings zijn opgenomen.

De mogelijkheden die ik aanwend om mijn eigen werk verder onder de aandacht te brengen zijn: vervolg-publicaties, voordrachten, het web en e-mail. Ik geef mijn commentaar op elk van deze mogelijkheden.

Publicaties

Vervolgpublicaties kunnen mede worden gebruikt om een eerder gepubliceerd resultaat meer reliëf te geven, vooropgesteld natuurlijk dat dat zinnig is. Ik probeer zelf altijd spaarzaam te zijn met zelfcitaties: er staat straf op overdrijving. Bij citatie-evaluaties krijg je vaak het percentage zelfcitaties te zien. Knoop in je oren dat zelfcitaties niet meetellen voor je citatiescore en realiseer je dat een hoge zelfcitatiescore tamelijk oogklepperig kan overkomen (de gesloten onderzoekscultuur)

en houd dat beeld voor ogen als je naar eigen eerder werk verwijst.

Bijzonder effectief is het schrijven van overzichtsartikelen, maar dat gebeurt veelal op uitnodiging. Zeer effectief kan ook het schrijven van een boek zijn. In een boek heeft de auteur de gelegenheid om wat uitgebreider op een onderwerp in te gaan dan in een artikel toegestaan wordt. De auteur kan er voor kiezen om zijn doelgroep breder te selecteren dan het lezerspubliek van het tijdschrift waarin het artikel verschenen is. Ik heb van deze mogelijkheid gebruik gemaakt door het (mee)schrijven aan een boek waarin een aantal numerieke rekenmethoden werd beschreven op een niveau waardoor ze ook voor de niet-numericus zonder verdere voorkennis zijn te gebruiken. Dat heeft naar mijn idee



illustratie: Ryu Tajiri

geweldig bijgedragen aan de populariteit van deze algoritmen, waar ‘mijn’ veel geciteerde Bi-CGSTAB methode er een van was.

Dat brengt mij op een ‘negatief’ aspect van populariteit. Het kan voorkomen dat een product van een fabrikant zo populair wordt dat de merknaam een soortnaam wordt; een voorbeeld is Maggi. De merknaam wordt dan niet langer beschermd en mag door andere producenten ook gebruikt worden. Dit kan de auteur van een algoritme ook overkomen. Vrijwel niemand verwijst nog naar Gauss bij het oplossen van stelsels vergelijkingen door eliminatie. Het Bi-CGSTAB algoritme is inmiddels opgenomen in Matlab en lang niet iedereen die de methode gebruikt verwijst nog naar haar oorsprong. Dat zorgt voor een natuurlijke begrenzing op de citatiescores.

Voordrachten

Ik beschouw een voordracht als een uitstekende gelegenheid om als een soort marktkoopman mijn werk verder aan de man te brengen. Ik hoop altijd dat er een paar toehoorders in de zaal zitten die na afloop besluiten mijn werk eens nader te bestuderen. Lees het prachtige artikel van Klaas Landsman in het NAW [3] er nog maar eens op na hoe je een effectieve voordracht moet geven; ik heb daar weinig aan toe te voegen. Ik heb laatst een voordracht uitgeprobeerd op een paar studentvrijwilligers, met het verzoek er zoveel mogelijk op te schieten. Dat heeft me veel nuttige informatie opgeleverd.

Ik besluit mijn voordrachten altijd met een verwijzing naar mijn webpagina's, alwaar de toehoorders meer informatie kunnen vinden. Dat brengt mij op het derde item.

Het web

De kracht en de macht van het web worden in onze kringen nog altijd ruim onderschat. Veel onderzoekers zoeken hun informatie op het web en komen nauwelijks nog in bibliotheken. Steve Lawrence publiceerde in 2001 in Nature het aardige artikel *Online or Invisible?* [4]. Naast allerlei aardige statistieken sprong zijn onderzoek naar citaties van in totaal 119.924 publicaties in Conferentie pro-

ceedings er uit: het gemiddeld aantal citaties naar elektronisch, via het web, beschikbare publicaties bedroeg 7,03 tegen slechts 2,74 voor de uitsluitend in druk beschikbare publicaties. Belangrijke les: zorg dat je publicaties goed via het web te vinden zijn, liefst in direct afdrukbaar of leesbare vorm. De meeste uitgevers staan dit tegenwoordig toe.

Zelf gebruik ik het web ook om de gebieden waar ik onderzoek naar doe meer toegankelijk te maken via zogenoemde *Lecture Notes*. In deze *Lecture Notes* kan ik net zover gaan met uitleggen of toelichten als ik zelf wil; in ieder geval verder dan in reguliere publicaties. Ik gebruik ze uiteraard ook om mijn eigen werk nog eens voor een wat breder publiek uitvoeriger toe te lichten. Deze *Lecture Notes* vinden vrij veel aftrek: ze worden zo'n 45 keer per maand van mijn webpagina's gedownload. Ik heb sterk het idee dat dat geholpen heeft om mijn werk beter bekend en meer toegankelijk te maken en dat heeft zeker een opwaartse druk gehad op mijn citatieaantallen. Bij het schrijven van *Lecture Notes* probeer ik natuurlijk steeds om de kwaliteit goed in de gaten te houden: gebrek aan kwaliteit wordt in de wetenschappelijke wereld genadeloos afgestraft. Wees zeer voorzichtig met hetgeen je op het web ter beschikking stelt. Je kunt het er niet meer van afhalen: na verloop van (korte) tijd zwerven elektronische kopieën van het verhaal overal rond. Zet daarom geen probeersels op het web, maar beperk je tot bijdragen waar je geheel achter staat.

Ik kijk regelmatig welke artikelen van mijn webpagina's gedownload worden en hoe vaak dat gebeurt (onze systeemgroep levert dagelijks bijgehouden overzichten). Op die manier zie ik waar vraag naar is en aan welke onderwerpen ik eventueel extra aandacht zou kunnen besteden. Ik vond het aanvankelijk een beetje zonde van het werk om overzichtsverhalen ('State-of-the-Art papers') te schrijven, maar toen ik merkte dat die relatief zeer populair waren verhoogde dat mijn motivatie zeer om er nog een paar aan toe te voegen (overigens op verzoek van editors). Het kan anderen geweldig helpen bij het ontslui-

ten van een groot deel van een vakgebied en daarom worden overzichtsverhalen doorgaans veel geciteerd.

Vanwege hun populariteit, breid ik mijn *Lecture Notes* regelmatig uit met nieuw materiaal, of ik breng verbeteringen aan die mij door lezers worden aangemeld. Nadat ik vernam dat ze ook wel gebruikt werden als lesmateriaal ben ik begonnen om er ook oefeningen in op te nemen. Waarschijnlijk mondt het geheel ter zijner tijd uit in een echt boek en blijft een beperkte voorversie als een soort opwarmer op mijn webpagina staan. Tip: zorg ervoor dat je publicaties op het web niet te lang worden. Ik heb mijn *Lecture Notes* in 3 delen opgesplitst om ergernis bij het downloaden te voorkomen.

E-mail

Ik heb het gehad over terugmeldingen van lezers; dit gebeurt in mondeling contact op workshops en conferenties, maar toch vooral via e-mail. Een andere mogelijkheid om je werk bekendheid te geven is verspreiding van postscript- of pdf-files per e-mail. Hier zou ik zeer terughoudend mee zijn. Ik vind het hinderlijk om ongevraagd zeer lange files toegezonden te krijgen. Prettiger is het om door je collega's ingelicht te worden waar je nieuw, voor jou mogelijk relevant, werk kunt downloaden. Zulke korte berichten kun je wel selectief rondsturen; in ieder geval vind ik het zelf altijd plezierig als collega's hun e-mail aan mij afsluiten met hun adresgegevens en de URL van hun webpagina's en het daarbij houden.

Epiloog

Hoe schrijf ik een veel geciteerd artikel? Ik zou de titel liever interpreteren als *Hoe zorg ik ervoor dat mijn werk aandacht krijgt?* Het is zo jammer als je aardige dingen bedenkt en niemand daar weet van krijgt. Ik heb hierboven uitgelegd hoe ik zelf te werk ga. Uiteraard heb ik geen recept om veel geciteerd werk te schrijven en ik wacht dus ook benieuwd het lot van dit verhaal af.

Referenties

- Howard Elman, *What's Hot? Study Points to Iterative Methods for Nonsymmetric Linear Systems*, SIAM News, **34** (2), p. 2, March 2001.
- Nicholas J. Higham, *Handbook of Writing for the Mathematical Sciences*, Second Ed., SIAM, Philadelphia, 1998.
- Klaas Landsman, *Hoe geef ik een wiskundige voordracht*, Nieuw Archief voor Wiskunde, Vijfde Serie, **2** (4), p. 351–355, 2001
- Steve Lawrence, *Online or Invisible*, Nature, **411** (6837), p. 521, 2001.

Jan van de Craats

Koninklijke Militaire Academie

Postbus 90002

4800 PA Breda

J.vd.Craats@mindef.nl

Boekbespreking

De parels van Indra

Het onderwerp van automorfe functies raakt aan vele takken van de wiskunde. De theorie kwam tot bloei omstreeks 1900. Onlangs is er een rijk geïllustreerd boek verschenen over dit onderwerp: David Mumford, Caroline Series en David Wright hebben geprobeerd om de theorie van Kleinse groepen en automorfe functies voor een breed wiskundig publiek toegankelijk te maken. Jan van de Craats, auteur van verschillende wiskunde populariserende werken, geeft een bespreking.

“In het hemelse rijk van de god Indra bevindt zich volgens de overlevering een glinsterend net, dunner dan een spinnenweb, dat zich tot aan de uiterste grenzen van de ruimte uitstrekt. Aan ieder knooppunt van de doorschijnende draden ervan is een spiegelende parel geregen. Omdat het net zich oneindig ver uitstrekt, zijn er ook oneindig veel parels. In het spiegelend oppervlak van elke parel worden alle andere parels weerspiegeld, zelfs uit de verste uithoeken van het universum. En in elk spiegelbeeld weerspiegelen zich alle andere spiegelbeelden. Zo blijven spiegelingen zich eindeloos in spiegelingen herhalen.”

Aan deze poëtische beschrijving van de oude Boeddhistische mythe van het net van Indra uit de *Hua-yen sutra* ontleent *Indra's Pearls — the Vision of Felix Klein* zijn titel. Die tekst past namelijk wonderwel bij de wereld van de automorfe functies en Kleinse groepen — het eigenlijke onderwerp van dit boek. Tegen het einde van de negentiende eeuw werd dat onderzoeksgebied, waar onder andere differentiaalvergelijkingen, complexe functietheorie, meetkunde en getaltheorie samen-

komen, tot grote bloei gebracht door wiskundigen als Felix Klein, Henri Poincaré, Robert Fricke, Lazarus Fuchs en Friedrich Schottky. Zij bestudeerden groepen van Möbiustransformaties van de Riemann-sfeer, dat wil zeggen transformaties van de vorm $z \rightarrow w = (pz + q)/(rz + s)$ met $ps - qr \neq 0$. In plaats van de Riemann-sfeer kan men ook het vlak van alle complexe getallen nemen, aangevuld met het punt ∞ . Het verband tussen deze beide voorstellingen van de verzameling waarop de Möbiustransformaties werken, verloopt via een stereografische projectie.

In eerste instantie gaat het om vrije groepen met twee voortbrengers; in dit boek worden ze steeds a en b genoemd. De auteurs gebruiken verder de conventie om de inversen van a en b met respectievelijk A en B aan te duiden. Elk groepselement (behalve de eenheid) kan dan op een unieke wijze worden voorgesteld door een ‘woord’ in de vier letters a, b, A en B , met de restrictie dat er geen a naast een A mag staan en geen b naast een B .

Het spel is nu simpel: maak een keuze voor a en b , kies daarnaast ook een beginverzameling (*seed*) S , en onderzoek of er meetkundig gezien iets interessants ontstaat wanneer alle transformaties uit de groep op S worden toegepast. Het resulterende patroon zal door de wijze van constructie invariant zijn onder alle transformaties van de groep. Elke transformatie is daarmee een symmetrie van dat patroon, en zo illustreert zo'n patroon dus bepaalde symmetrie-eigenschappen van de groep.

Een eenvoudig voorbeeld: neem voor a de

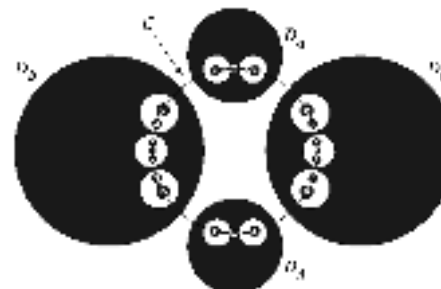
translatie $w = z + 1$, voor b de translatie $w = z + i$, en voor de *seed* S het complexe getal 0. De groep brengt dan het rooster van alle complexe getallen met gehele reële en imaginaire delen voort. Het punt ∞ is een invariant punt onder alle transformaties uit de groep.

Loxodromische transformaties

Twee Möbiustransformaties T_1 en T_2 heten geconjugerd binnen de groep van alle Möbiustransformaties als er een Möbiustrans-



Figuur 1 Een Schottky-patroon bij vier cirkelschijven D_a, D_b, D_A, D_B . De tegels van de bijbehorende betegeling zijn om en om wit en zwart gekleurd.



Figuur 2 Een Fuchsiaans Schottky-patroon. Er is een cirkel C die door de vier cirkelschijven loodrecht gesneden wordt. Alle beeldcirkels snijden C dan eveneens loodrecht, en de limietverzameling wordt een Cantorverzameling op C .

formatie S is waarvoor geldt dat $T_1 = ST_2S^{-1}$. Volgens de inzichten die Felix Klein in 1872 in zijn *Erlanger Programm* verwoordde, hebben geconjugeerde transformaties dezelfde meetkundige eigenschappen binnen de meetkunde op de Riemann-sfeer die door de groep van alle Möbiustransformaties wordt gedefinieerd. Zo zijn bijvoorbeeld alle Möbiustransformaties met precies één invariant punt geconjugeerd met de translatie $w = z + 1$, die aldus als een soort 'standaardvorm' voor zo'n transformatie kan worden opgevat.

Maar in het algemeen heeft een Möbiustransformatie niet één, maar twee invariante punten. Via conjugatie zijn die in 0 en ∞ over te voeren, en de transformatie krijgt dan de vorm $w = kz$ met $k \neq 0, 1$. Bijzondere gevallen treden op als $|k| = 1$ of als k reëel is. De transformatie is dan respectievelijk een rotatie of een puntvermenigvuldiging. In alle

andere gevallen is $w = kz$ een spiraalbeweging, dat wil zeggen een combinatie van een rotatie over een hoek $\arg(k)$ die geen geheel veelvoud is van π en een vermenigvuldiging met een factor $|k|$ ongelijk aan 1 .

Möbiustransformaties die via conjugatie in de vorm $w = kz$ met $|k| \neq 1$ zijn over te voeren, worden *loxodromisch* genoemd, en de interessantste Kleinse groepen ontstaan wanneer de transformaties a en b allebei van dit type zijn. De standaardvorm $w = kz$ van een loxodromische transformatie laat zien dat een van de beide invariante punten aantrekkend is en het andere afstotend. Het afstotende invariante punt is het aantrekkende invariante punt van de inverse transformatie, en omgekeerd.

Schottky-groepen

Elke Möbiustransformatie voert elke cirkel op

de Riemann-sfeer weer in een cirkel over, en omgekeerd zijn er bij elk cirkelpaar ook (vele) Möbiustransformaties te vinden die ze in elkaar overvoeren. Stel dat D_a , D_b , D_A en D_B vier onderling disjuncte cirkelschijven zijn, en dat a een loxodromische Möbiustransformatie is die het buitengebied van D_A op het binnengebied van D_a afbeeldt. Dan bevat D_a het aantrekkende invariante punt van a en D_A het afstotende invariante punt van a , dat wil zeggen het aantrekkende invariante punt van A . Laat evenzo b een loxodromische Möbiustransformatie zijn die het buitengebied van D_B op het binnengebied van D_b afbeeldt. De vrije groep die door de transformaties a en b wordt voortgebracht, heet in dat geval een Schottky-groep. Als je alle woorden uit die groep laat werken op de vier initiële cirkels, krijg je een eindeloos patroon van cirkels in cirkels in cirkels, enzovoort — een eerste glimp van de 'parels van Indra' waarnaar de titel van het boek verwijst.

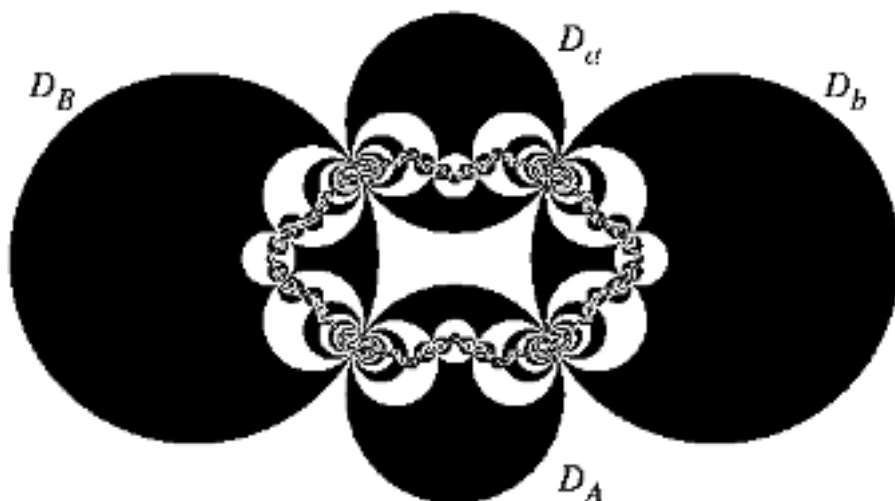
Bij zo'n patroon hoort ook een betegeling van de Riemann-sfeer. Neem daartoe als *seed* het buitengebied van de vier initiële cirkelschijven, dat wil zeggen de gehele Riemann-sfeer met daaruit die vier cirkelschijven weggeleten. Elke transformatie uit de Schottky-groep beeldt deze 'tegel' op een andere tegel af, en alle tegels zijn onderling disjunct. Samen vormen ze een betegeling die vrijwel de gehele Riemann-sfeer bedekt. Slechts een verzameling L , de zogenaamde *limietverzameling*, blijft vrij. Tot L behoren onder andere alle invariante punten van alle transformaties uit de groep.

Een bijzondere klasse van groepen, de zogenaamde *Fuchsische Schottky-groepen*, ontstaat wanneer de vier initiële cirkels allemaal een vijfde cirkel C loodrecht snijden. Voor alle beeldcirkels geldt dan dat ze C ook loodrecht snijden, en de limietverzameling L blijkt in dit geval een Cantorverzameling op C te worden.

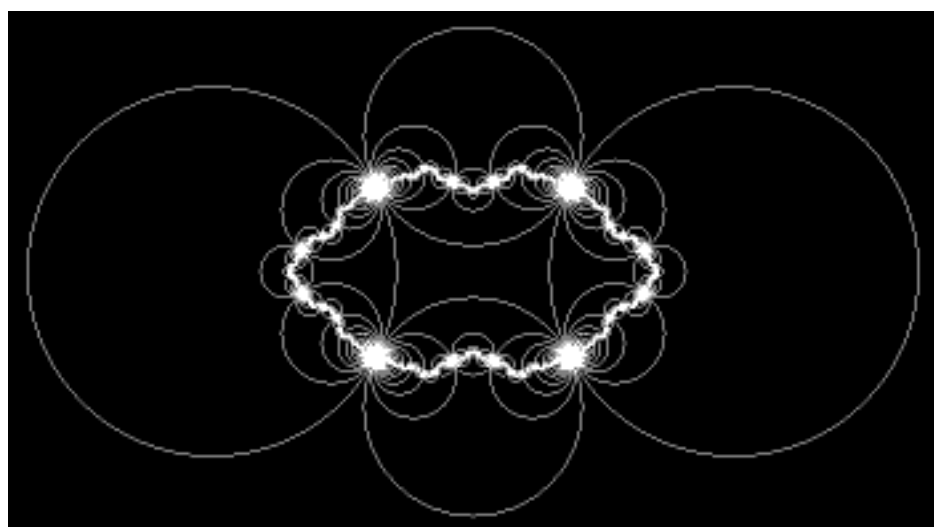
Indra's halssnoer

Nog intrigerender wordt de zaak wanneer de vier cirkelschijven niet meer volledig disjunct zijn, maar een gesloten keten vormen doordat ze elkaar paarsgewijs raken: D_a aan D_b , D_b aan D_A , D_A aan D_B en D_B weer aan D_a . In zo'n keten ligt D_a dus tegenover D_A en D_b tegenover D_B .

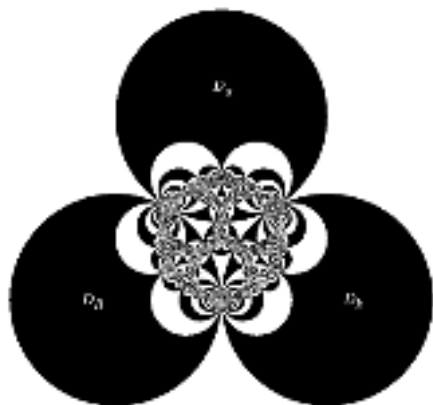
Rakende cirkelschijven worden vaak *kissing disks* genoemd, en de bijbehorende groep heet dan ook een *kissing Schottky group*. De tegel die bestaat uit het buitengebied van de vier schijven wordt nu door die keten opgesplitst in twee disjuncte deelge-



Figuur 3 Een voorbeeld van een kissing Schottky-patroon. De vier oorspronkelijke cirkelschijven vormen een keten. De tegels zijn nu paren ideale vierhoeken geworden, dat wil zeggen vierhoeken met vier elkaar rakende cirkelbogen als zijden.



Figuur 4 Hetzelfde kissing Schottky-patroon als in figuur 3, nu echter getekend met lichte cirkels tegen een donkere achtergrond. De fractale limietverzameling ('Indra's halssnoer') rijst vanzelf als een gloeiende ketting uit het patroon op.



Figuur 5 Een kissing Schottky-patroon waarbij elk van de vier initiële cirkelschijven aan de drie andere raakt. D_A is de kleine zwarte cirkelschijf in het midden die aan de drie cirkelschijven D_a , D_b en D_c raakt.

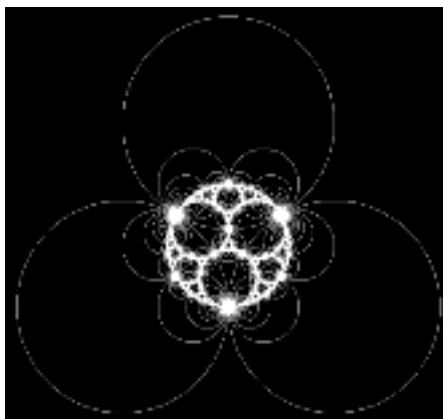
bieden. Elk van die deelgebieden heeft vier cirkelbogen als rand die elkaar paarsgewijs raken. De betegeling van de Riemann-sfeer is nu dus een betegeling geworden met *ideale vierhoeken*, dat wil zeggen vierhoeken met hoeken van nul graden.

Wanneer men nog enige extra voorwaarden aan de voortbrengers a en b oplegt, wordt de limietverzameling een quasi-cirkel, dat wil zeggen het homeomorfe beeld van een cirkel. In het algemeen heeft die quasi-cirkel een fractaal karakter; de auteurs spreken poëtisch over *Indra's halssnoer*. Het verdeelt de Riemann-sfeer in twee gebieden die ieder globaal invariant zijn onder alle transformaties uit de groep, en hetzelfde geldt natuurlijk ook voor het halssnoer zelf.

Zoals gezegd is Indra's halssnoer in het algemeen een fractal; alleen in het Fuchsiaanse geval, de situatie waarin de vier cirkels een vijfde cirkel C loodrecht snijden, verdwijnt het fractale karakter ervan; dan wordt het halssnoer namelijk een echte cirkel, die met C samenvalt.

De cirkelpakking van Apollonius

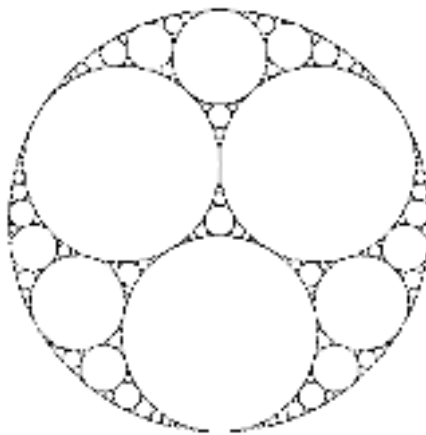
Een ander bijzonder geval van Indra's halssnoer ontstaat als men ook nog D_a aan D_A laat raken en D_b aan D_B . Op de Riemann-sfeer is dat heel goed mogelijk: denk bijvoorbeeld aan vier even grote cirkelschijven met als middelpunten de hoekpunten van een tetraëder, maar ook in het complexe vlak kan men zulke configuraties realiseren. Elk van de vier cirkelschijven raakt dan aan de drie andere, en het buitengebied wordt daarmee opgesplitst in vier *ideale driehoeken*, driehoeken met cirkelbogen als zijden en hoeken van nul graden. De betegeling van de Riemann-sfeer die je krijgt door alle transformaties uit de groep op die vier ideale driehoeken toe te passen,



Figuur 6 Hetzelfde patroon als in figuur 5, nu met open witte cirkels tegen een donkere achtergrond getekend waardoor de limietverzameling als een gloeiend patroon uit de tekening oprijst.

is een patroon met een ongekend rijke symmetriestructuur. De bijbehorende groep is de *modulaire groep*, een van de meest bestudeerde objecten in de wiskunde.

Ook de bijbehorende limietverzameling L is heel bijzonder. Het is niet helemaal een quasi-cirkel meer: de extra raakpunten van de vier initiële cirkelschijven introduceren keerpunten waar L zichzelf ontmoet. Maar nog steeds verdeelt L de Riemann-sfeer in twee gedeelten die elk voor zich globaal invariant blijven onder alle transformaties uit de groep. Het opmerkelijkste is echter ongetwijfeld dat L helemaal uit cirkels bestaat, en dat die cirkels elkaar in oneindig veel punten raken. Bovendien geldt dat L , als continu beeld van de eenheidscirkel, in één trek getekend kan worden zonder de tekenstift van het papier te halen! Deze cirkelpakking, dit samenstel van oneindig veel elkaar rakende cirkels, gaat al terug op Apollonius, maar die zal niet vermoed hebben dat er nog zo veel extra structuur in verborgen zit.



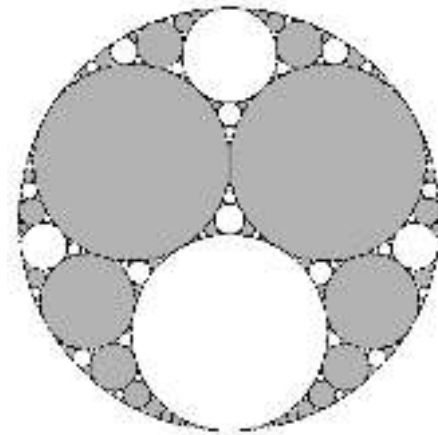
Figuur 7 De limietverzameling van figuur 5 is een samenstel van oneindig veel elkaar rakende cirkels: de cirkelpakking van Apollonius.

Computertekeningen

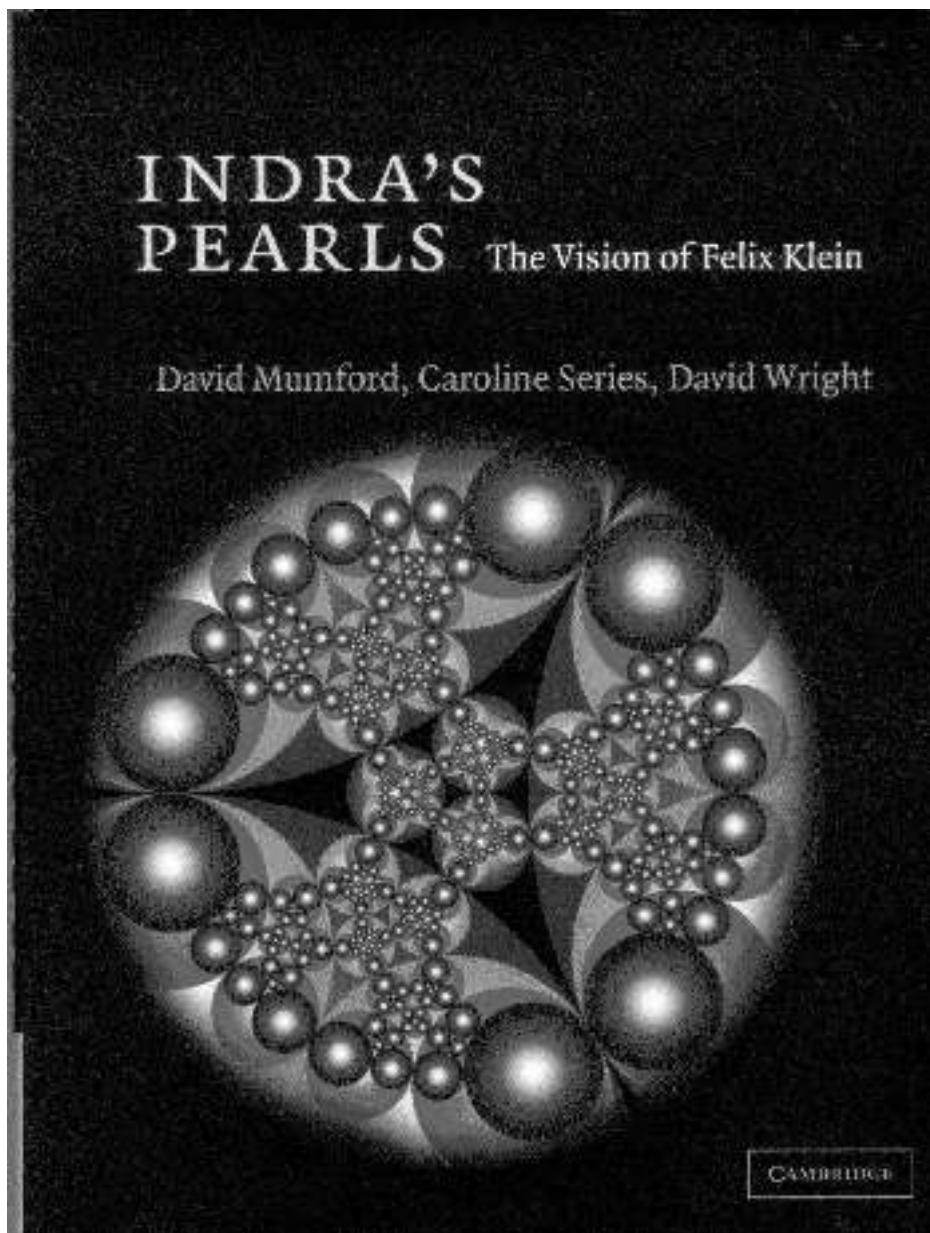
De lezer zal inmiddels een indruk hebben gekregen van de hoofdthema's van dit boek, waarvan ik hierboven de eerste zeven hoofdstukken in grote lijnen geschetst heb. Wat ik echter nog niet heb gezegd, is dat alles met schitterende computertekeningen *in full colour* wordt geïllustreerd, en dat de auteurs bovendien tot in alle details uitleggen hoe de lezer ook zelf zulke tekeningen kan maken. De bijbehorende algoritmen, die erop neerkomen dat telkens de boomstructuur van alle woorden in de vrije groep wordt afgezocht, staan vermeld in een soort pseudo-code, die iedereen in zijn eigen favoriete programmeertaal kan omzetten.

In feite is de beschrijving van de constructie van zulke tekeningen een van de zwaartepunten van het boek. Ze waren ook de directe aanleiding tot het schrijven ervan. Rond 1980 maakten David Mumford en David Wright hun eerste primitieve computerplaatjes van betegelingen en limietverzamelingen van Kleinse groepen. In de loop der jaren ontstonden er steeds meer van die tekeningen, en gaandeweg kwam het idee op om er een boek omheen te schrijven. Caroline Series werd na ruim tien jaar als derde auteur binnengehaald, en daarna begon het project vaart te krijgen. Nog tien jaar later rolde het boek van de persen. Het resultaat is, zoals de auteurs in het voorwoord zeggen, een boek over 'serieuze wiskunde' maar tegelijkertijd ook een boek dat op een zo groot mogelijk lezerspubliek mikt: "As we progressed in our explorations, the pictures that our computer programs produced were so striking that we wanted to tell our tale in a manner which could be appreciated beyond the narrow confines of a small circle of specialists."

De ambitie om ook voor niet-specialisten



Figuur 8 De cirkelpakking van Apollonius verdeelt de Riemann-sfeer nog steeds in twee delen, een 'binnengebied' (grijs), en een 'buitengebied'.



te schrijven uit zich in de eerste plaats in het feit dat de auteurs beginnen met drie hoofdstukken op zeer elementair niveau: ze leggen daarin uit wat symmetrie is, wat groepentheorie ermee te maken heeft, wat complexe getallen zijn, hoe via stereografische projectie uit het complexe vlak de Riemann-sfeer ontstaat, wat Möbiustransformaties zijn en welke typen daarbij kunnen worden onderscheiden.

Het is in dit soort gevallen altijd de vraag hoe gemakkelijk een lezer die nog van niets weet, zulke wiskundige teksten kan lezen. Enige wiskundige scholing vooraf lijkt me toch wel onontbeerlijk, maar die hoeft niet zo verte gaan. Een tweede- of derdejaarsstudent wiskunde die al wat functietheorie gehad heeft, zal met deze tekst geen moeite hebben, zeker niet wanneer de bestudering ervan plaats-

vindt in een soort werkcollegevorm. De presentatie van de stof is voorbeeldig, en alles wordt met duidelijke en goed verzorgde figuren geïllustreerd.

Zichtbare symmetrie

In de hoofdstukken 4 en 5 komen de eerste Schottky-groepen in beeld. Daar worden ook de boomzoekalgoritmen behandeld waarmee de lezer zelf de cirkelpatronen bij Kleinse groepen en hun limietverzamelingen op het computerscherm kan laten verschijnen. In zulke patronen wordt de ongekend rijke symmetriestructuur van de bijbehorende Kleinse groepen zichtbaar. In het standaardwerk van Fricke en Klein over automorfe functies staan ook al zulke tekeningen, met eindeloos geduld en groot vakmanschap gemaakt door

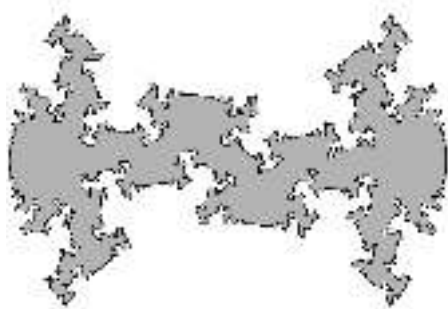
een leerling van Klein, maar wat die tekeningen van de limietverzamelingen laten zien, is uiteindelijk toch onbevredigend. Klein zelf merkte in 1894 op: "Het gaat om de vraag ... wat de limietpunten voor een verzameling vormen. Het is niet moeilijk om die vraag door een strikt logische redenering te beantwoorden, maar onze verbeelding schijnt volledig tekort te schieten wanneer we er een mentale voorstelling van proberen te vormen." Pas bijna een eeuw later konden onderzoekers dankzij de rekenkracht en de grafische mogelijkheden van de moderne computer zulke patronen in al hun abstracte schoonheid aan het licht brengen.

De resultaten zijn verbluffend, en alleen maar te vergelijken met de Julia- en Mandelbrotfractals die in de begintijd van de fractalrage de wereld veroverden. Lezers die daar gevoelig voor zijn — ondergetekende hoort daar ook bij — krijgen de onbedwingbare neiging om zelf ook zulke tekeningen te produceren. De auteurs hebben ze gemaakt met Fortran als programmeertaal, maar het kan ook met talen als Visual Basic, Pascal, C of Java. In principe moet het ook met MATLAB, Maple of Mathematica mogelijk zijn, maar waarschijnlijk krijg je dan bij gecompliceerde plaatjes te maken met geheugenproblemen en lange verwerkingstijden.

Zelf ben ik een enthousiast gebruiker van PostScript als programmeertaal voor computergrafiek, en daarmee lukte het me inderdaad om de tekeningen uit het boek en allerlei variaties ervan in al hun kleurenpracht op het scherm te krijgen en op de kleurenlaserprinter van mijn werkgever af te drukken. Enige zwart-wit voorbeelden vindt de lezer als illustraties bij deze boekbespreking.

Een niettriviaal probleem bij het programmeren is het inbouwen van stopcriteria. Wanneer je bijvoorbeeld de fractale limietverzameling van een kissing Schottky-groep in beeld wilt brengen, wil je dat het algoritme stopt zodra de details fijnmaziger worden dan de resolutie van het beeldscherm of de printer. Ervoor zorgen dat dit inderdaad gebeurt, vraagt heel wat wiskundige inventiviteit, maar de auteurs leiden de lezer ook hier vakkundig langs alle valkuilen en struikelblokken.

Ondanks al die voorzorgen moet je er toch op voorbereid zijn zelf nog flink wat energie te steken in de implementatie van de algoritmen. Zo heb ik inmiddels welhaast alle hoeken en gaten van de programmeertaal PostScript leren kennen om mijn programma's in tijds- en geheugenbeslag binnen de perken te houden. Maar als je er dan uiteindelijk toch in slaagt om in een draaitijd van minder dan drie



Figuur 9 Een fractale limietverzameling met ingekleurd binnengebied bij zekere parameterkeuzes. Let op de cirkelbogen die als omhullenden te zien zijn.

minuten zo'n fantastische kleurentekening op het scherm te krijgen, is de voldoening des te groter.

Spel met parameters

Na de behandeling van de pakking van Apollonius volgt een hoofdstuk waarin de generatoren a en b afhankelijk van bepaalde parameters gevarieerd worden. Het gaat dan vooral om de limietverzamelingen die daarbij ontstaan en hun meetkundige eigenschappen.

De lezer kan hier zelf weer allerlei experimenten opzetten, onbekend terrein verkennen en zich verbazen over de gecompliceerde en intrigerende fractalpatronen die daarbij ontstaan. Het structureren en verklaren van de verschijnselen die je daarbij waarneemt, leidt weer tot allerlei fraaie stukken boeiende, niettriviale wiskunde.

Na dit hoofdstuk volgen er nog drie voor degenen die kennis willen maken met actuele aspecten van onderzoek op dit terrein: ze behandelen allerlei gedegenereerde gevallen, en ook situaties waarin de groep geen vrije groep meer is. De illustraties zijn nog steeds schitterend, maar de wiskundige techniek wordt hier veel gecompliceerder, en uw recensent moet bekennen dat hij de gedetailleerde bestudering daarvan voor later bewaard heeft.

Experimentele en visuele wiskunde

Ik heb vaak het gevoel dat de mogelijkheden van de computer in het wiskundeonderwijs nog lang niet ten volle benut worden. Als een student met nieuwe stukken theorie kennis maakt, gebeurt dit nog te vaak in een soort catechismus-stijl. Te weinig wordt nog gebruik gemaakt van de mogelijkheid om zelf resultaten te visualiseren en te construeren. Natuurlijk niet met passer en liniaal, maar met alle grafische mogelijkheden die de computer biedt. Uit eigen ervaring kan ik zeggen dat er haast niets zo fascinerend en bevredigend is als het zelf realiseren van concrete afbeeldin-

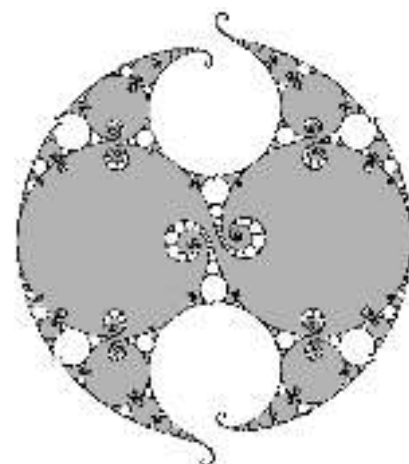
gen die abstracte ideeën in beeld brengen. Ook de auteurs hebben die ervaring; ze vertellen bijvoorbeeld hoe zij in de begintijd van hun project maar steeds niet toekwamen aan het schrijven omdat ze het veel te druk hadden met het aan elkaar laten zien wat ze nu weer voor fraais gefabriceerd hadden. En haast elk nieuw plaatje riep weer nieuwe vragen op. Als je zelf zulke tekeningen probeert te maken, merk je ook dat je geen half werk kunt doen; de achterliggende wiskunde moet je volledig begrijpen, anders loop je vast.

Enthousiasme

Mumford, Series en Wright hebben een prachtig boek gemaakt. Ik ken weinig wiskundeboeken die op het punt van stijl en presentatie met deze monografie kunnen wedijveren. Hun eigen enthousiasme spat op elke bladzijde de lezer tegemoet. Ook didactisch zit het goed in elkaar. Alle details waarin je vast zou kunnen lopen, worden uitgebreid en helder behandeld. De hoeveelheid stof die de revue passeert, is indrukwekkend. De auteurs laten ook geen gelegenheid voorbijgaan om interessante zijpaden te bewandelen en onverwachte vergezichten te tonen. Zo maken we bijna terloops kennis met Cantorverzamelingen, Hausdorffdimensie, het vlindereffect, kettingbreuken, Farey-optelling, en in de Epiloog zelfs met niet-Euclidische meetkunde en de betegelingen die ook ten grondslag liggen aan Eschers cirkellimietprenten. Speciale vermelding verdienen nog de cartoons van Larry Gonick, bij sommige lezers van het Nieuw Archief misschien bekend als de tekenaar van 'Het stripverhaal van de statistiek' (Epsilon 32). Die cartoons verhelderen op een vermakelijke wijze allerlei topologische aspecten van de Kleinse groepen.

Dit boek lijkt me ideaal voor een werkcollege in seminariumvorm. Elk hoofdstuk wordt namelijk afgesloten met een serie suggesties voor onderzoeksprojecten waar studenten alleen of in groepjes aan kunnen werken. Ik kan me ook goed indenken dat dan zo'n werkcollege gepaard gaat met een openbare expositie van de gemaakte tekeningen, en een lezingenreeks waarin allerlei details ervan worden uitgelegd aan ieder die het maar horen wil.—

Indra's Pearls — The Vision of Felix Klein, David Mumford, Caroline Series, David Wright, 395/415 pages, price €53,95, Cambridge UK, Cambridge University Press, 2002, ISBN 0-521-35253-3.



Sandjai Bhulai

Bell Laboratories, Lucent Technologies

Room 2C-308, 700 Mountain Avenue

Murray Hill, New Jersey, 07974-0636, USA

sbhulai@research.bell-labs.com

Column Wiskundigen in den vreemde

From the Big Apple

Juni 2002 promoveerde Sandjai Bhulai aan de Vrije Universiteit. In september werd hem voor een tijdspanne van een jaar het NWO talent-stipendium toegekend om bij Bell Laboratories van Lucent Technologies onderzoek te doen. Een jaar lang doet hij verslag van zijn ervaringen als wetenschapper in den vreemde.

Het zijn woelige tijden voor de telecomsector. Berichten over bedrijven die aanzienlijk afslanken, geruchten over faillissementen en enorme schuldbedragen beheersen de gemoederen. Hier bij Lucent Technologies weten de werknemers dat maar al te goed. Het bedrijf bevindt zich momenteel in een fase van herstructurering waarbij alle producten en diensten op winstgevendheid getoetst worden. Hierdoor is het personeelsbestand inmiddels met bijna 50.000 werknemers gekrompen. Om meer inzicht te krijgen in de oorzaken van deze recessie blikken we zeven jaren terug in de tijd.

De turbulente omstandigheden zijn het gevolg van de 'Telecom Reform Act' die in 1996 door de Federal Communications Commission (FCC) geaccepteerd is. Deze wet dereguleerde de telecommarkt door het toestaan van concurrentie. Entrepreneurs, die de acceptatie van de Telecom Reform Act zagen aankomen, deden al voor 1996 enorme investeringen in de aanleg van nieuwe communicatienetwerken. Telecomgiganten waren, na de acceptatie van de wet, bereid om een veelvoud van elke geïnvesteerde dollar voor deze netwerken te betalen. De motieven voor acquisitie waren voornamelijk van strategische aard en kwamen niet voort uit de operationele bedrijfsvoering. Een groot aantal entrepreneurs verkocht hun netwerk en de anderen besloten om zelfstandig verder te gaan.

In het jaar 2000 begonnen de eerste problemen zich te manifesteren: de markt was verzadigd en de prijzen kelderden sterk. Veel bedrijven zagen hun winst en de waarde van hun aandeel dalen. De penibele toestand werd nog eens versterkt doordat de aandeelhouders hen de rug toekeerden, zodat de starters met flinke investeringsschulden bleven zitten. De telecombedrijven, geconfronteerd met overmatige netwerkcapaciteit en een gesloten kapitaalmarkt, hanteerden nu een gedisciplineerd budget. In plaats van uitbreidingen werden hun netwerkspecialisten aangespoord om de bestaande netwerkcapaciteit ten volle te benutten. Verder werd nieuwe apparatuur alleen aangeschaft wanneer het strikt noodzakelijk was.

Het is voornamelijk het laatste punt, de inertie om te investe-

ren in nieuwe telecommunicatieapparatuur, dat Lucent Technologies zorgen baart, omdat het een van de kernactiviteiten van het bedrijf betreft. Het Mathematical Sciences Research Center is er tot nu toe goed vanaf gekomen; het aantal ontslagen is beperkt gebleven. De nabije toekomst hangt echter sterk af van het bestedingsgedrag van de telecombedrijven. Dat deze kwestie mijn collega's bezighoudt, is soms aan de stemming tijdens de lunch te merken. Af en toe geeft mij dat een onbehaaglijk gevoel, omdat ik er als extern gefinancierde postdoc geheel buiten sta. Gelukkig hebben de marktanalisten laten weten een stijgende trend te hebben waargenomen in de aanbestedingen, zodat mijn collega's met vernieuwde hoop de toekomst tegemoet zien.

Dat kerstmis eraan komt is duidelijk te merken in New York. De straten in Manhattan zijn prachtig versierd en het kerstgevoel wordt aangewakkerd door kinderen die luidkeels Christmas Carols ten gehore brengen. Bij het bekende Rockefeller Center, waar sinds 1931 elk jaar (met uitzondering van 1932) traditiegetrouw een grote kerstboom opgetuigd wordt, is dit jaar een 23 meter hoge kerstboom te bewonderen. Begin december liet de kerstman zijn gezicht al zien en dat evenement ging gepaard met een sneeuwstorm. Op 5 december viel er in totaal een pak van 15 cm sneeuw; van de ene op de andere dag werd het landschap door een witte laag sneeuw bedekt. Een dergelijk landschap draagt zeker bij aan het kerstgevoel, maar dat gevoel is snel voorbij wanneer je onder dergelijke omstandigheden aan het verkeer deelneemt.

Weer of geen weer, New York blijft een levendige stad. Feestdagen als Halloween, Thanksgiving en kerstmis zorgen in het bijzonder voor extra veel drukte de laatste twee maanden. Het is dan ook niet verwonderlijk dat de commercie daar op inspeelt door middel van reclame. De manier waarop dat gedaan wordt is echter wel verbazingwekkend. In Nederland wordt de superioriteit van producten weleens gepresenteerd door een vergelijking met een obscuur merk gehuld in een witte doos gemarkeerd met een grote 'X'. In Amerika is het mogelijk en gebruikelijk om gewoon een concurrerend merk te noemen. Dit leidt soms tot bizarre situaties als meteen daarna dezelfde formule door de concurrent gebruikt wordt. De Amerikaan lijkt dit helemaal niet raar te vinden. Het zal me waarschijnlijk nog wat meer tijd kosten om de echte Amerikaan te doorgronden. 

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Alle in de vijfde serie van het NAW verschenen boekbesprekingen zijn te vinden op onze webpagina.

Tevens staat daar een lijst met ter recensie aangeboden congresverslagen en eventueel andere boeken.

Indien u er prijs op stelt een van deze verslagen te bespreken, meld dit dan binnen een maand na verschijnen van dit nummer (bij voorkeur per e-mail) op onderstaand adres.

Eindredactie: Jaap Top
 Redactieadres: Boekbesprekingen WG
 Instituut voor wiskunde en informatica
 Postbus 800, 9700 AV Groningen
 Webpagina: <http://www.math.rug.nl/revwg/>
 E-mail: revwg@math.rug.nl
 Na maart 2003: wgreview.win@tue.nl



W.J. Adams
**Slippery math in public affairs;
 price tags and defense**

New York: Marcel Dekker, 2002

247 p., prijs \$ 125,-

ISBN 0-8247-0790-7

Dit boekje gaat niet over wiskunde, maar over het gebruik en vooral misbruik van getallen in de publieke sector en de politiek. In de loop van het boekje wordt overtuigend aangetoond aan de hand van ettelijke voorbeelden uit de Amerikaanse praktijk dat cijfers een vaak onterechte suggestie van autoriteit en exactheid geven. Gesjoemel met getallen, onterechte interpretaties, het getalsmatig 'oplossen' van complexe vergelijkingen, slecht onderbouwde voorspellingen, het komt allemaal uitbundig aan de orde. Maar om eerlijk te zijn, halverwege het boekje heb je de boodschap wel door. En tegen die tijd heb je ook wel genoeg van de flauwe tekeningen van de dochter van de auteur die vrijwel elke pagina larderen. Gelukkig voelde ik me echter verplicht tot het einde toe door te lezen. Het laatste hoofdstuk gaat namelijk over de vraag: Hoe kunnen we kinderen onderwijzen zodat ze kritisch tegenover het gebruik van getallen staan? Helaas komt de auteur niet veel verder dan een lijst referenties over het kritisch gebruik van getallen en de constatering dat het geen politiek belang dient burgers mondig te maken. Ook maakt hij duidelijk dat hij voor het onderwijzen van de grenzen van de mogelijkheden van een wiskundige aanpak is, maar hoe dit in het wiskundeprogramma vorm moet krijgen komt niet aan bod. Wat wel aan bod komt is kritiek op het huidige programma, dat slechts op economisch en politiek gewin uit zou zijn. Een magere conclusie.

De waarde van dit boekje moet vooral worden gezocht in de vele voorbeelden van misbruik van getallen bij het nemen van beslissingen. Het zal er voor zorgen dat ik de krant morgen wat kritischer dan gewoonlijk zal lezen.

G. Koole



N.G. van Kampen
Waanwetenschap

Utrecht: Epsilon Uitgaven, 2002

160 p., prijs €16

ISBN 90-5041-074-X

Waanwetenschap, daarover wilde professor Van Kampen een boekje schrijven. Het is de vraag of hij ons daar een plezier mee heeft gedaan. Al bij het lezen van de achterflap bekruipt de lezer een onrustig gevoel. De aankondiging dat het boekje op allerlei denkfouten ingaat die zowel binnen als buiten de wetenschap gemaakt zijn, is daar nog geen debet aan. Echter, het vooruitzicht dat de auteur in slechts 136 pagina's met buitensporige fontgrootte een aantal wetenschapsgebieden bij het grof vuil zetten zal, zorgt voor de nodige twijfel: moet ik hier wel aan beginnen?

Als de lezer zich toch maar gewoon aan het lezen zet, wil het

maar niet duidelijk worden wat de auteur voor ogen staat. Vijftig pagina's lang dist de auteur lustig een slepende stoet foutjes en flauwigheden op, zonder dat hij ergens de moeite neemt het waartoe van deze overdaad toe te lichten.

Na deze eerste vijftig pagina's, die nog als onschuldig vermaak zijn te kenmerken, maakt de auteur het pas echt bont. In welgeteld zeven pagina's wordt de wijsbegeerte afgedaan als een verkeerde manier van denken — en er blijkt één pagina meer nodig om de sociologie in de hoek te zetten. De sociologie is gelukkig, in tegenstelling tot de wijsbegeerte, nog niet volkomen verloren: als er heel hard gewerkt wordt, dan wordt het misschien nog wat met de sociologen. Maar waarschijnlijk wordt het niets als er geen fysici aan te pas komen.

Wat moet men hier nu mee? Misschien bezigt Van Kampen een vorm van humor waar ik geen gevoel voor heb, maar ik vrees dat het hier een sterk staaltje bèta-arrogantie betreft waarvan natuurwetenschappers buiten eigen kring nogal eens beschuldigd worden.

Ik begrijp best dat niet iedereen gecharmeerd is van de duistere teksten van een filosoof als Heidegger en ik begrijp ook dat men hem gaarne zijn aureool van diepzinnigheid af wil nemen. Maar het lijkt mij verstandig dit zo integer en 'wetenschappelijk' mogelijk te doen. Als Van Kampen citeert, zonder aandacht te besteden aan de context van het citaat en als hij opsomt zonder de leidende these die tot deze opsomming noopt te verhelderen, dan vrees ik dat zijn bijdrage niet serieus genomen zal worden.

Het advies dat ik de auteur zou willen meegeven is: schoenmaker blijf bij je leest. De hoofdstukken die fysische onderwerpen zoals entropie en quantummechanica behandelen zijn eigenlijk best lezenswaard. Maar het valt mij, gegeven de context, moeilijk hier nog waardering voor op te brengen.

Tot slot: 'Waanwetenschap' maakt onderdeel uit van de epsilon-reeks. Achterin is een lijst te vinden met deeltjes die in deze reeks verschenen zijn. Als je de titels bekijkt, krijg je het idee dat de meeste van deze boeken onderdelen uit wiskunde en natuurkunde serieus voor de leergierige student uiteen willen zetten. Wat dit betreft is het mij een raadsel wat de redactie ertoe heeft aangezet 'Waanwetenschap' in haar fonds op te nemen.

G.-J. van der Heiden

zeer geslaagd. De auteur weet van zijn encyclopedisch overzicht een spannende geschiedenis te maken. Hij doet steeds zijn best de leidende gedachte achter een definitie, een bewijs of een bewijstechniek duidelijk te maken en te laten zien waar en wanneer deze leidende gedachte nog meer aan het werk was.

De recursietheorie is de studie van de klasse van de berekenbare functies van de verzameling van de natuurlijke getallen naar zichzelf en begon met de ontdekking van deze klasse van functies in de dertiger jaren van de vorige eeuw door Turing, Church en anderen. Deze studie is de natuurlijke voortzetting van het in de negentiende eeuw door Dedekind en anderen begonnen onderzoek naar de grondslagen van de analyse, en vormt een centraal en wezenlijk onderdeel van de wiskunde met tal van analogieën in andere gebieden, zoals de verzamelingenleer en de complexiteitstheorie. Posts beroemde artikel uit 1944, over de verschillende manieren die er zijn om de recursief-opsombare verzamelingen van natuurlijke getallen in complexiteitsklassen in te delen, speelt een belangrijke rol in de behandeling van de auteur. Hij lijkt er ons toe te willen overhalen alle vragen die uiteindelijk hun oorsprong vinden in dit artikel tot de klassieke recursietheorie te rekenen. 'Post's problem' is de in dat artikel opgeworpen vraag of er twee recursief-opsombare verzamelingen van natuurlijke getallen bestaan zo dat geen van beide Turing-reduceerbaar is tot de andere. Deze vraag werd in 1956 opgelost, door Friedberg, een Amerikaan, en, onafhankelijk van hem, door Muchnik, een Rus. Zij bedachten de zogenaamde prioriteitenmethode. In het eerste deel heeft de auteur laten zien dat deze methode in zekere zin te krachtig is voor de door Post gestelde vraag en dat die vraag eenvoudiger antwoorden toelaat, misschien meer in de geest van Posts eigen aanpak. In dit tweede deel besteedt hij aandacht aan de vele uiteenlopende varianten en toepassingen van de prioriteitenmethode zelf. Ook geeft hij een overzicht van de recursietheoretische toepassingen van de techniek van het forceren, die voor het eerst door Cohen gebruikt werd in zijn bewijs van de onafhankelijkheid van de continuümhypothese. Bovendien behandelt hij verschillende manieren om een soort van complexiteit van berekenbare functies te definiëren, en bestudeert hij zekere klassen van berekenbare functies die men verkrijgt door grenzen te stellen aan rekentijd of geheugencapaciteit. Hij bespreekt uitvoerig de soms wat verwarrende Gregorczyk-Ackermann-hierarchie. Het boek is een goudmijn.

W. Veldman



P. G. Odifreddi
Classical Recursion Theory II
(*Studies in logic and the foundations of mathematics*; 143)
Amsterdam: Elsevier, 1999
949 p., prijs €131,59
ISBN 0-444-50205-X

Het eerste deel van dit indrukwekkende boek dat ongetwijfeld nog lange tijd een onontkoombaar standaardwerk zal zijn verscheen in 1989. De auteur had er veertien jaar aan gewerkt. Dit tweede deel telt ruim 900 bladzijden, zo'n 300 meer dan het eerste deel, en heeft nog eens tien jaar op zich laten wachten. De beide delen samen bieden een fascinerend panorama van de recursietheorie waar ook menig deskundige veel van kan leren. Het boek is bedoeld als leerboek en als naslagwerk en is in beide opzichten



H. Kleine Büning and T. Lettermann
Propositional logic: deduction and algorithms
(*Cambridge tracts in theoretical computer science*; 48)
Cambridge: Cambridge university press, 1999
409 p., prijs £50
ISBN 0-521-63017-7

Dit boek is een vertaling van een oudere Teubner uitgave uit 1994. Waarom schrijven de auteurs een boek over de klassieke tweewaardige propositielogica? Antwoord: de behandelde problemen worden niet bekeken vanuit de wiskunde of de logica maar vanuit de informatica. Wat in de wiskunde eenvoudig is kan behoorlijk lastig worden zodra de conditie van effectieve oplos-

baarheid worden ingeruild voor efficiënte oplosbaarheid.

Fundamentele problemen in de complexiteitstheorie laten zich formuleren als problemen over de propositiële logica. De vraag of voor een formule een propositioneel model bestaat leidt tot het beruchte *Satisfiability* probleem, de moeder van alle NP-lastige problemen. De vraag of er een bewijssysteem bestaat waarbinnen iedere tautologie een compact bewijs heeft is equivalent met het al bijna zo beruchte NP = co-NP probleem. En het waarheidsprobleem voor volledig gequantificeerde propositionele formules (QBF) staat model voor de complexiteitsklasse Pspace.

De theorie van logische functies speelt traditioneel een grote rol bij het ontwerp van hardware en bij de theorie van chipontwerp. Propositionele functies zijn van groot belang voor verificatie van Industriële systemen. Tenslotte verwijst ik naar het Logisch Programmeren zoals belichaamd in de taal Prolog, waarvan het gebruikte inferentiemechanisme zich goed laat onderzoeken in zijn beperking tot de propositionele kern. Deze ingang tot kennisystemen vormt voor de auteurs het voornaamste motief voor het schrijven van dit boek.

Met deze achtergrondinformatie kunnen we de keuze voor de onderwerpen die in het boek aan de orde komen begrijpen.

Hoofdstuk 1 geeft een inleiding tot de taal en semantiek van de propositiële logica. In hoofdstuk 2 worden de diverse normaalvormen (DNF en CNF) die in het vervolg een belangrijke rol spelen ingevoerd. Er wordt gekeken naar gegevensstructuren om formules in de computer op te slaan naar alternatieve representaties zoals Decision Diagrams.

Hoofdstuk 3 is gewijd aan het Satisfiability probleem. De complexiteitsstatus van een aantal varianten van dit probleem wordt vastgesteld en oplossingsmethoden worden onderzocht en geanalyseerd.

Hoofdstuk 4 gaat over resolutie: het klassieke inferentiemechanisme dat in de AI wordt gebruikt om stellingen te bewijzen door uit de ontkenning van de stelling een tegenspraak af te leiden. Diverse vormen van resolutie worden ingevoerd en vergeleken. In hoofdstuk 5 wordt dit nader toegespitst op het fragment dat bekend staat als Horn Logic, waarvoor resolutie efficiënt kan werken. Dit fragment vormt de logische basis voor het Logisch Programmeren. Het hoofdstuk eindigt met een analyse van de inferentie algoritme die achter de taal Prolog schuil gaat.

Hoofdstuk 6 bespreekt een aantal bekende propositionele bewijssystemen voor tautologische formules en vermeldt resultaten over de relatieve efficiëntie van deze systemen. Het laatste hoofdstuk handelt over het probleem QBF en aanpassingen van de resolutie methode voor deze klasse problemen.

Een bibliografie van 18 pagina's maakt de lezer duidelijk dat in dit vakgebied veel onderzoek heeft plaatsgevonden. Resteert de vraag voor welke doelgroep dit degelijke doch redelijk saai opgeschreven boek kan worden aanbevolen. Voor een inleiden-de cursus complexiteitstheorie is het minder geschikt, al was het maar omdat een bewijs van de stelling van Cook-Levin waarmee de NP-volledigheid van het Satisfiability probleem wordt aangetoond ontbreekt. Bezien vanuit het perspectief van een geavanceerde cursus valt op dat de auteurs een opvallende smaak hebben bij hun keuze van expliciet behandelde onderwerpen.

Geen harde ondergrensresultaten over netwerk complexiteit, of het beruchte probleem om een expliciete functie te beschrijven waarvan de netwerk complexiteit een niet-lineaire ondergrens vertoont (de theorie van Shannon laat zien dat het overgrote deel

van de logische functies exponentiële netwerk complexiteit heeft). Resultaten over ondergrenzen voor de complexiteit van begrensde resolutiemethoden worden behandeld zonder bewijs. Maar het eenvoudige probleem van het oplossen van de vervulbaarheid van 2-CNF formules wordt in details behandeld als een grafenprobleem. Ik krijg de indruk dat een relatie met grafentheoretische algoritmen een nodige en voldoende voorwaarde is geweest voor de auteurs om een onderwerp in extenso te behandelen, en dat levert een remarkabel beeld op van het vakgebied.

Wat resulteert is een leesbaar boek dat nuttig is om in de collectie te hebben en handzaam is als bron voor additionele opdrachten in het kader van een cursus complexiteitstheorie.

P. van Emde Boas

András Hajnal and Peter Hamburger

Set Theory

(London mathematical society student texts; 48)

Cambridge: Cambridge university press, 1999.

316 p., prijs £16.95

ISBN 0-521-59667-X

Enige tijd geleden besprak ik *Set Theory for the working mathematician* van K. Ciesielski [NAW, 5/1 nr. 2, p. 179], uit dezelfde serie als het onderhavige boek (nummer 39 versus 48). Twee boeken, kort na elkaar in dezelfde serie en over hetzelfde onderwerp maar toch een wereld van verschil. Op de eerste plaats is er verschil in inhoud, hetgeen te verwachten is; de verzamelingenleer is onderhand zo'n uitgebreid gebied geworden dat men er veel verschillende boeken over kan schrijven. Op de tweede plaats is er verschil in aanpak. Alles wat in het boek van Ciesielski [C] mis ging, en dat was nog al wat, ging in het boek van Hajnal en Hamburger [HH] goed. Dat is waarschijnlijk voor een groot deel te verklaren uit het feit dat [HH], in eerste versie, al uit 1983 stamt en door de jaren heen (in Hongarije) als universitaire tekst heeft dienstgedaan en voortdurend aangepast en verbeterd is; dit is de eerste Engelstalige versie. Alle verschillen zijn mijns inziens terug te brengen tot het woord 'aandacht'; [C] was niet veel meer dan een zonder veel fantasie in elkaar gesleuteld werkje, [HH] heeft een goede opbouw en opgaven waarover is nagedacht.

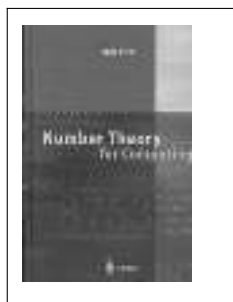
De eerste helft van het boek is een inleiding in de verzamelingenleer zoals die in veel boeken te vinden is maar dan toch weer op eigen wijze. Eerst wordt de theorie van kardinaal- en ordinaalgetallen met een min of meer intuïtief idee van 'verzameling' opgebouwd; daarna wordt het voorafgaande verhaal axiomatisch onderbouwd, aan de hand van de axioma's van Zermelo en Fraenkel plus het Keuzeaxioma.

Het tweede deel is gewijd aan combinatorische verzamelingenleer: stationaire verzamelingen, partitiecalkulus, grote kardinaalgetallen en nog veel meer. Die combinatoriek wordt aan het einde toegepast bij de bestudering van het gedrag van de continuümfunctie: $\kappa \mapsto 2^\kappa$. Het is sinds het werk van Cohen en Easton bekend dat, voor reguliere kardinaalgetallen, alles wat niet expliciet verboden is ook echt mogelijk is. Wat minder duidelijk is, is het gedrag van 2^κ voor singuliere κ . De laatste stelling van het boek is het resultaat van Shelah dat $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$, een fascinerend resultaat dat het begin markeerde van nieuwe ontwikkelingen in de aritmetiek van de kardinaalgetallen.

Het boek is zeker niet perfect, sommige stukjes uitleg doen wat

geforceerd aan, de notatie kan hier en daar wat beter en de index had een stuk beter gekund. Maar al lezende kreeg ik gewoon zin er college uit te gaan geven.

K. P. Hart



S.Y. Yan
Number theory for computing

Berlin: Springer-Verlag, 2000

381 p., prijs €44,95

ISBN 3-540-65472-0

Onlangs verscheen bij Springer al de tweede (uitgebreide) editie van dit boek. Het gaat over een onderwerp waar kennelijk veel belangstelling voor is, namelijk het toepassen van getaltheorie in, volgens de schrijver, *computing and information technology*. En dat is, zegt hij allemaal te volgen zonder voorkennis die verder gaat dan middelbare school wiskunde.

Het boek ziet er prachtig uit. Veel van het overbekende Springer-geel is vervangen door diverse tinten blauw, en wat overblijft op de buitenkant doet denken aan de variaties in oranje die het Nederlandse straatbeeld tooiden in de tijd dat we nog meetelden als voetbalnatie. Binnenin vinden we duur glanzend papier, en maar liefst 67 zwart-wit foto's en plaatjes op formaat ongeveer 2 bij 2 1/2 centimeter, waarop we wetenschappers van Euclides tot Shor, Cocks en Karp zien afgebeeld. U kent hen niet allemaal? Geen probleem, ik evenmin, en het lezen van dit boek levert u indien gewenst voldoende levensfeitjes over ieder van hen.

Mijn eerste twijfel over het boek kwam wel door deze foto's: met zoveel geweld zijn sommige ervan in het piepkleine formaat geperst, dat de indruk verkregen wordt dat opmerkelijk veel personen in het behandelde vakgebied voorzien zijn van een hoofd dat veel breder is dan lang. Wellicht een gevolg van de gangbare verhoudingen in een computerscherm? Vervolgens blijkt ook de nummering tot enige frustratie te leiden. Op bladzij 103 staat onder Remark 1.6.6 het Example 1.6.15, gevolgd door Exercise 1.6.1. Een verwijzing naar Definitie 1.6.2 levert enig zoekwerk, want terwijl Conjecture 1.6.2 zich op pagina 118 bevindt, staat gevraagde definitie 28 pagina's eerder in het boek.

Over de inhoud valt helaas nog veel meer onplezierigs te zeggen. Om met een positieve noot te beginnen, er zijn pagina's (zoals 137 waar behoudens 7 correct gespelde namen niets staat) die geheel foutloos lijken te zijn. Het lijkt me heel moeilijk, iets conceptueels uit dit boek te leren. Om bij wat triviale voorbeelden te blijven, de notatie $a \bmod n$ wordt voor de eerste keer op pagina 6 gebruikt, waarbij voor details naar pagina 90 en verder wordt verwezen. Echter, de meteen al gebruikte notatie $\frac{1}{e} \bmod n$, die pas op bladzij 95 terloops in de tekst wordt genoemd en voor welks bestaan we moeten vertrouwen op de niet van een bewijs voorziene Stelling 1.6.3, zal dan voor de beoogde lezer met alleen maar middelbare-schoolachtergrond vast wel voor een klein probleem zorgen. De definitie van de Euler-phi-functie deugt niet (als $n = 1$). De lezer wordt vergast op lange rijen stellingen zonder enig commentaar welke daarvan diep en welke volledig triviaal zijn. Pagina 60 begint met een opdracht voor de 'interested reader': als

$f := 2^k + 1$ en $g = 2^{m-k} f^2$ (waarbij $m > k$ natuurlijke getallen zijn) en nog een rijtje van 5 gehele getallen allemaal priemgetallen zijn, dan zou daarmee een 'bevriend getallenpaar' te maken zijn. Zou de auteur weten dat dit een onzinnige mededeling is?

De auteur bedankt in z'n inleiding een kleine 40 collega's en nog wat 'referees from Springer-Verlag' (wie zou Dr. Ajie Lenstra eigenlijk zijn?), en besluit met de woorden: "nothing is perfect and nobody is perfect". Zo worden we het toch nog eens. J. Top



H. Hida
**Modular forms and
Galois cohomology**

(Cambridge studies in advanced mathematics)

Cambridge: Cambridge university press, 2000

343 p., prijs £42,50

ISBN 0-521-77036-X

In 1993 kondigde A. Wiles een bewijs aan van een deel van het Taniyama-Shimura vermoeden, waarmee dan tevens het vermoeden van Fermat bewezen kon worden. In 2001 is door Breuil, Conrad, Diamond en Taylor het volledige Taniyama-Shimura vermoeden bewezen. Een van de belangrijkste ingrediënten van de hierbij gebruikte theorie is die van de modulaire vormen. Het boek van Hida is ontstaan uit een serie *graduate courses*, gegeven door de auteur en biedt een goede ondergrond om het bewijs van Wiles te kunnen volgen. Het geeft onder andere het bewijs van de stelling van Taylor en Wiles die geschikte universele deformaties verbindt met Hecke algebra's in het minimale geval (alleen de *ordinary case*).

Het eerste hoofdstuk geeft een overzicht van en introductie in het onderwerp en behandelt Hecke karakters en modulaire vormen in het eendimensionale geval. Dit hoofdstuk is bovendien het meest verwarrende hoofdstuk voor een nog niet geheel ingewijde lezer, omdat Hida teruggrijpt op door hem in voorgaande colleges reeds behandelde theorie. In dit boek verwijst hij daarvoor dan onder andere naar zijn eerder uitgegeven boek *Elementary Theory of L-Functions and Eisenstein Series* en zijn nog te verschijnen *Geometric Modular Forms and Elliptic Curves*. Na de behandeling van de Hecke karakters in 1.1 volgt in 1.2.1 een overzicht van de inhoud van de hoofdstukken van dit boek, waarna de schrijver weer verder gaat met modulaire vormen en deformaties in de rest van 1.2.

In hoofdstuk 2 komen groepsvoorstellingen, pseudorepresentaties en deformaties aan de orde. Vanaf hier is het boek elementair, *self-contained* en minder vluchtig. Hoofdstuk 3 is min of meer een kernhoofdstuk en gaat over modulaire vormen en hun Galoisrepresentaties. Hier wordt de stelling van Taylor en Wiles bewezen. Hoofdstuk 4 geeft de benodigde cohomologietheorie waar in de vorige hoofdstukken al naar werd verwezen.

De hoofdstukken 1 tot en met 4 vormen een geheel. Het laatste, hoofdstuk 5 is nog een extraatje van 94 pagina's waarin de auteur ingaat op zijn eigen interesse en onderzoek over een uitbreiding van de klassegetalformule in het niet abelse geval en andere resultaten.

Al met al is het een goed leesbaar boek waarin de nieuwe theorieën nu in boekvorm netjes en min of meer *self-contained* bij el-

kaar staan. Het is verder hier en daar voorzien van opgaven. Het boek is daarmee geschikt voor een gevorderd college modulaire vormen en verder voor zelfstudie voor iedereen die op grond van werk of interesse met dit onderwerp te maken heeft. *S.J. Hoving*



K.E. Smith, L. Kahonpää
An invitation to algebraic geometry
 Berlijn: Springer-Verlag, 2000
 155 p., prijs €32,72
 ISBN 0-387-98980-3

Dit enthousiasmerend geschreven boek is voortgekomen uit een door de eerste auteur aan AiO's en gevorderde wiskundigen gegeven cursus over algebraïsche meetkunde. Het is bedoeld als "an advertisement for the deep and beautiful mathematics of algebraic geometry" (p.138). Volgens de auteurs heeft de lezer behalve lineaire algebra geen voorkennis in de algebra nodig.

Door weinig te bewijzen lukt het hun om zonder technisch apparaat veel onderwerpen te behandelen. Ze beperken zich tot variëteiten over $\mathbb{C}$, waarbij ze het begrip schema en het nut ervan af en toe noemen.

Ze gaan eerst in op affiene en quasi-projectieve variëteiten en voorbeelden zoals Veronese-afbeeldingen, Segre-inbeddingen en Grassmannvariëteiten, en noemen de stelling van Chow. Ook onderzoeken ze de kwadrieken door vijf gegeven punten. Ze geven een ad hoc-definitie van de graad van een projectieve variëteit en noemen de stelling van Bézout. Daarna definiëren ze het Hilbert-polynoom en schetsen de constructie van het Hilbert-schema. Vervolgens behandelen ze raakruimtes en gladheid. Ze vertellen over families, de stelling van Bertini en de Gaussafbeelding. Er volgt een hoofdstuk over birationale meetkunde, waarin ze rationale en birationale afbeeldingen en opblazen van affiene variëteiten (in een punt en langs een ideaal) behandelen en de stelling van Hironaka over de resolutie van singulariteiten formuleren. Het hoofdstuk eindigt met een uitleg over classificatieproblemen, waarbij ze moduli-ruimtes van krommen en minimale modellen noemen. Het laatste hoofdstuk gaat over afbeeldingen naar $\mathbb{P}^n$. Ze leggen het verband met lijnbundels, (gladde) krommen komen aan bod, en tenslotte wordt de constructie van hun moduli-ruimte uit het Hilbert-schema geschetst. In een appendix worden schoven en abstracte variëteiten gedefinieerd.

Het boek staat vol met voorbeelden, plaatjes en verwijzingen naar de literatuur. Iedere paragraaf eindigt met opgaven die variëren van letterlijke herhaling van argumenten uit de tekst tot gevorderde opgaven.

Helaas zijn er in de opgaven, in de plaatjes en in de tekst fouten geslopen. Er worden feiten niet genoemd die dan later worden gebruikt (bijvoorbeeld dat globale reguliere functies op een projectieve samenhangende variëteit constant zijn) en sommige begrippen blijven een beetje vaag. Verder is het de vraag of de lezer zonder algebraïsche voorkennis de stukken in bijvoorbeeld Hartshorne's standaardwerk waarnaar voor bewijzen wordt verwezen wel kan lezen. Toch is het een indrukwekkend en mooi boek.

F. Bittner



H.M. Srivastava and J. Choi
Series associated with the zeta and related functions

Dordrecht: Kluwer, 2001
 388 p., prijs €140,94
 ISBN 0-7923-7054-6

Dit boek is een encyclopedisch werk over $\zeta(s)$, de Riemann zeta functie, en hieraan gerelateerde speciale functies. Hierbij moet men denken aan de (incomplete) gamma- en beta-functie, de polygamma-functie en andere varianten en generalisaties van de gamma functie. Verder de dilogaritme en de trilogaritme, de Hurwitz(-Lerch) zeta-functie, Bernoulli en Euler polynomen. Het boek bevat een ongelooflijke rijkdom aan identiteiten. Het langste hoofdstuk handelt over gesloten evaluaties van reeksen van de vorm $\sum_{k=2}^{\infty} \zeta(k) a_k$, met a_k meest een relatief eenvoudige functie van k . Hier vindt men een lijst van maar liefst 720 van zulke identiteiten! Als encyclopedisch werk is dit boek zeker geslaagd en allerlei recent gevonden identiteiten zal men er ook in vinden. Wat dat betreft is het boek een verdedigbare aanschaf voor een wiskundebibliotheek.

Op de achterflap wordt beweerd dat men het boek ook kan gebruiken om de verschillende methoden en technieken op dit gebied te leren. In dit opzicht vind ik het boek echter teleurstellend; deze gedeelten van het boek zijn rommelig, hoofd- en bijzaken worden niet goed onderscheiden en de vele referenties naar het (vele) eigen werk van de auteurs gaan spoedig storend werken. Voor de in dit boek behandelde stof kan men mijns inziens veel beter te rade gaan bij het uitstekende boek *Special functions* van Andrews, Askey en Roy, Cambridge university press, 1999.

De computeralgebra-enthousiasteling kan veel plezier beleven aan het boek van Srivastava en Choi. Bij het numeriek controleren van een aantal van de geclaimde identiteiten bleek dat formule (17) op bladzijde 108 incorrect is. Laat $\rho = (1 + \sqrt{5})/2$. Dan luidt formule (17): $Li_2(-\rho) = -\pi^2/10 + (\log \rho)^2/2$. De bron van deze formule blijkt het bekende boek *Polylogarithms and associated functions* van L. Lewin te zijn. Nalopen van Lewin's bewijs van bovenstaande identiteit leert echter dat $Li_2(-\rho) = -\pi^2/10 - (\log \rho)^2$, hetgeen wel consistent is met de decimaal ontwikkelingen die men met bijvoorbeeld Maple voor beide kanten vindt.

P. Moree



R.H. Villarreal
Monomial algebras

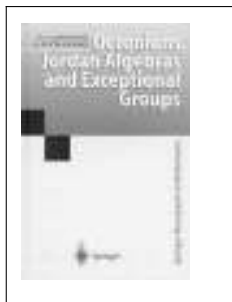
(Pure and applied mathematics; 238)
 Basel: Marcel Dekker Inc, 2001
 455 p., prijs \$ 195,-
 ISBN 0-8247-0524-6

The aim of this book is to introduce methods to study monomial algebras and their presentation ideals. The first four chapters of the book deal with commutative algebraic tools needed to study the rest of the book, such as module theory, Noether norma-

lization, graded algebra, Hilbert function theory, et cetera. These subjects are chosen very well, in order to make the book self contained they are completed with some nice exercises.

From chapter 5 to the end, which I think is the main part of the book, the author tries — and in my opinion succeeds — to offer the reader the pleasure of reading a text that contains many different materials algebraic and combinatoric which are nicely combined. Chapter 5 deals with monomial ideals, face rings and simplicial complexes. Chapter 6 is intended to study properties of edge ideals such as Cohen-Macaulay properties using graph theory. Chapter 7 deals with subalgebras generated by monomials and the corresponding Rees algebra. Chapter 8 covers the monomial subring associated to graphs emphasising the integral closure of them as well as the integral closure of an edge algebra. Chapter 9 includes the study of the monomial subring of bipartite graphs and complete graphs. Chapter 10 and 11 deal with toric ideals. There are not many books which include these subjects and I believe the author has provided a good exposition for those who wish to learn them. In doing so, he has filled a gap in the literature.

H. Rahmati



T.A. Springer and F.D. Veldkamp
**Octonions, Jordan Algebras
and Exceptional Groups**

(monographs in mathematics)

Berlijn: Springer-Verlag, 2000

208 p., prijs €86,48

ISBN 3-540-66337-1

In the summer of 1963, T.A. Springer gave a course of lectures at the Mathematical Institute of the university of Göttingen on octonions, Jordan algebras and some exceptional groups related to these. Notes of these lectures (by P. Eysenbach) were published by the Göttingen Institute under the title *Oktaven, Jordan Algebras und Ausnahmegruppen* and became well known in the field as the *Göttingen notes*. But unfortunately, the notes have been unavailable for a larger audience for quite some time. The present book, which is a completely revised, English version of the German notes, resolves that problem.

The book contains eight chapters, each ending with some historical notes. Its central theme is the study of some classes of algebras equipped with some special (mostly quadratic) forms and their automorphism groups.

In the first chapter composition algebras are introduced. A composition algebra C over a field k is a not necessarily associative algebra with identity element e such that there exists a norm N on C with $N(xy) = N(x)N(y)$ for all $x, y \in C$. The basic theory of these algebras is developed and a classification is given. A composition algebra over a field k has dimension 1, 2, 4 or 8. Composition algebras of dimension 4 are called quaternion algebras, those of dimension 8 are called octonion algebras.

Octonion algebras play a central role in the whole book. Indeed, in chapter 2, automorphisms of octonion algebras form the central theme. In particular, it is shown that the automorphism group of an octonion algebra is an exceptional group of type G_2 .

The third chapter is devoted to the study of triality. The triality

automorphisms of the orthogonal group of the norm of an octonion algebra, the related spin groups and the connection with the automorphism group of the algebra are studied in this chapter.

Chapter 4 is devoted to twisted composition algebras and related groups of type 3D_4 and 6D_4 .

In chapter 5, 6 and 7 the algebras under consideration are Albert algebras and a special type of Jordan algebras called J-algebras. A J-algebra A is a finite-dimensional commutative but not necessarily associative algebra over a field k (with char $k \neq 2, 3$) with identity element e and a nondegenerate quadratic form Q with associated bilinear form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ such that for all $x, y, z \in A$ one has

$$Q(x^2) = Q(x)^2 \text{ if } \langle x, e \rangle = 0, \quad \langle xy, z \rangle = \langle x, yz \rangle,$$

and

$$Q(e) = 3/2.$$

Examples of J-algebras can be constructed as follows.

Let C is a composition algebra over k . Then for fixed elements $\gamma_i \in k^*$, let A be the set of $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ -hermitian 3×3 matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & c_3 & \gamma_1^{-1}\gamma_3\bar{c}_2 \\ \gamma_2^{-1}\gamma_1\bar{c}_3 & 2 & c_1 \\ c_2 & \gamma_3^{-1}\gamma_2\bar{c}_1 & 3 \end{pmatrix}$$

where $\xi_i \in k$, and $c_i \in C$. On A one can define a product

$$xy = \frac{1}{2}(x \cdot y + y \cdot x)$$

where $\cdot$ denotes the standard matrix product, and a quadratic form by

$$Q(x) = \frac{1}{2}\text{tr}(x^2).$$

This product and quadratic form turn A into a J-algebra. In the special case where C is an octonion algebra, A is an Albert algebra. The interest in Albert algebras and J-algebras is motivated by their relation with exceptional groups of type F_4 and E_6 . Indeed, if A is an Albert algebra over k and $A_K = K \otimes_k A$ where K is the algebraic closure of k , then the automorphism group of A_K is an algebraic group of type F_4 . The linear transformations of A_K leaving the cubic form $\det$, defined by taking the determinant of the 3×3 matrices, invariant, form an algebraic group of type E_6 .

The final chapter of this book is devoted to some cohomological invariants of the algebras studied.

The book is written in a clear style and suitable for readers with a basic knowledge in algebra and algebraic group theory.

H. Cuypers



V.K. Andreev, et al
**Application of group-theoretical
methods in hydrodynamics**

(Dordrecht: Kluwer, 1998)

396 p., prijs €172,43

ISBN 0-7923-5215-7

Lang geleden intussen begon ik enthousiast aan het bespreken van dit werk. In grote lijnen was ik wel van de behandelde stof

op de hoogte en kon ik de tekst volgen, maar er waren een aantal storende (tijdrovende) drukfouten (op de van mij doorgewerkte eerste bladzijden) aanwezig.

Verder wordt een niet-standaard notatie gebruikt, die ik ook niet met de hulp van een andere vakman kon begrijpen.

Over het nog doorgewerkte gedeelte is het volgende te zeggen: de benodigde hoeveelheid werk om de symmetrieën van een PDV te berekenen komt niet uit de verf en is zonder een computer programma (bijna) niet te doen (behalve minivoorbeelden). Maar dit is misschien een van de sterke punten van dit boek, ter aanzien van hydrodynamica worden de symmetrieën, en andere eigenschappen vaak in tabellen opgesomd. Nagerekende vergelijkingen (van de eerste paar bladzijden) waren correct. Er wordt zeer veel informatie geleverd. Maar vanwege de drukfouten in het theoretische gedeelte van het boek zal het vermoedelijk toch nodig zijn om voor gebruik de gegeven resultaten te verifiëren.

De later getoonde berekeningen, voorbeelden voor stromingsleer, waren voor mij niet te doen. De hoeveelheid informatie is wel enorm en voor iemand die al enigszins met symmetrieën vertrouwd is en op de specifieke toepassing gebieden, die behandeld worden, veel af weet zal vermoedelijk wat ideeën kunnen oppikken voor eigen, nuttig gebruik.

P.K.H. Gragert



H. Amann en J. Escher

Analysis III

Basel: Birkhäuser-Verlag, 2001

490 p., prijs €29,-

ISBN 3-7643-6613-3

Met dit derde, in 2001 gepubliceerde deel is de trilogie over Analyse, waarvan de andere delen in 1998 en 1999 verschenen zijn, voltooid; met 480 bladzijden is het tevens het omvangrijkste deel. Het is hoofdzakelijk aan integratietheorie gewijd, hier (anders dan in het voorafgaande tweede deel) op een geavanceerd niveau gepresenteerd. Al in de bespreking van de eerdere delen is opgemerkt dat vanaf hoofdstuk II in het eerste deel de betreden ruimten Banachruimten zijn (NAW 5/1(2000), p.236), en waar die delen nog wel enkele voorbereidende passages bevatten, wordt de lezer nu van meet af aan als ingewijd beschouwd. De dichtheid van nieuwe begrippen is groot, de formuleringen zijn bondig, door een intensief gebruik van notatie zelfs uiterst bondig, en de inhoud is niet alleen omvangrijk aan onderwerpen, maar ook massief.

Er zijn vier hoofdstukken (doorlopend) genummerd IX–XII. De eerste twee hiervan, samen in omvang de helft van het boek, geven Lebesgue-maattheorie en de (Bochner-) Lebesgue integraal. De behandeling is grondig, nauwkeurig en volledig, en voert na de gebruikelijke en verwachte onderwerpen als L_p -ruimten, de stelling van Fubini en de 'transformatiestelling' over verandering van coördinaten, naar inleidingen in de distributietheorie en de Fouriertransformatie. Het volgende hoofdstuk XI 'Mannigfaltigkeiten und Differentialformen' is in het tweede deel al voorbereid met paragrafen VII.9, 'Mannigfaltigkeiten', en VIII.3 'Pfaffsche Formen' en geeft, hoewel ook voorbereiding voor de integratie

op variëteiten, een straffe inleiding in zijn onderwerp, hoofdzakelijk de theorie van Riemannvariëteiten; en ook hier een retrospectie van de klassieke analyse, met stellingen uit de vectoranalyse die men evenwel als het ware uit hun notationale vermomming moet pellen. In het laatste hoofdstuk vloeit het zojuist besprokene samen met de eerder behandelde Lebesguetheorie. Na een paragraaf waarin voor variëteiten een maatbegrip wordt gedefinieerd, geïnduceerd door de meetbare verzamelingen van de omgevende ruimte, wordt de integratie van differentiaalvormen behandeld. Een en ander voert dan in de laatste paragraaf tot de stelling van Stokes met haar consequenties. Ook hier weer de toepassing op de bijzondere gevallen die uit de klassieke analyse bekend zijn. (Een samenvatting van niet-Euclidische meetkunde vinden we in §XI.5 en vraagstuk XII.3.11(!).)

Als geheel geeft het boek een fundamentele achtergrond aan voor alle onderwerpen die bij het onderwijs in de analyse aan de orde komen (of, althans, kwamen). Het boek is zonder een behoorlijke voorbereiding niet zo gemakkelijk te lezen. De lezer moet al wel ervaring in het verwerken van abstracte denkbeelden, kennis van lineaire algebra en een flink stuk topologie hebben verworven, en bereid zijn om zich langdurig met het boek af te zonderen om de taal van het boek meester te worden en met de resultaten vertrouwd te raken (waarbij de vele vraagstukken van nut zijn). Voor een vlugge referentie is het boek niet zo geschikt. Door deze restricties is het als leerboek bij voorkeur te gebruiken in 'ster'-klassen. Maar voor wie het eenmaal kent, moet het een uiterst waardevol naslagwerk zijn.

W. van der Meiden



L.P. Yee and R. Výborný

The integral: an easy approach after Kurzweil and Henstock

(Australian mathematical society lecture series; 14)

Cambridge: Cambridge university press, 2000

311 p., prijs £24,95

ISBN 0-521-77968-5

Around 1960 both J. Kurzweil and R. Henstock introduced a significant modification of the definition of the Riemann integral, which yields a class of integrable functions which properly includes the class of all Lebesgue integrable functions.

We briefly recall this definition in case of a bounded interval $[a, b]$ in $\mathbb{R}$. A tagged partition P of this interval is a partition $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ together with a choice of tags $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ for all $i = 1, \dots, n$. Given a real valued function f on $[a, b]$ the corresponding Riemann sum is denoted by $R(f, P)$. If δ is a strictly positive function on $[a, b]$ (in this context δ is called a gauge function), then a tagged partition P is called δ -fine whenever $\xi_i - \delta(\xi_i) < x_{i-1} < x_i < \xi_i + \delta(\xi_i)$ for all i . The function f is called Kurzweil-Henstock integrable (KH-integrable) on $[a, b]$ if there exists a real number I (which will be denoted by $\int_a^b f dx$) such that for every $\varepsilon > 0$ there exists a gauge function δ such that $|R(f, P) - I| < \varepsilon$ for all δ -fine tagged partitions P of $[a, b]$. Considering constant gauge functions only, it is obvious that every Riemann integrable function is KH-integrable. As mentioned above, actually any Lebesgue integrable function is KH-integrable. For the Kurzweil-Henstock integral the following form of the funda-

mental theorem of calculus holds: if $f, F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ are such that $F'(x) = f(x)$ for all $x \in [a, b]$, then f is KH-integrable and $\int_a^b f dx = F(b) - F(a)$ (note that this result does not hold in general for the Lebesgue integral, since the hypothesis does not imply that f is Lebesgue integrable). Moreover, in this integration theory there are no improper integrals (on bounded or unbounded intervals).

After a short review of the Riemann integral in the first chapter, in Chapter 2 of the book under review the definition and elementary properties of the Kurzweil-Henstock integral are discussed. The main topics in Chapter 3 are convergence theorems and the relation between the KH-integral and the Lebesgue integral (a function f is Lebesgue integrable if and only if both f and $|f|$ are KH-integrable). In this connection it is interesting to note that the KH-integral actually coincides with the so-called Perron integral, as introduced by O. Perron in 1914 with a completely different definition. More advanced and specialized convergence theorems are discussed in Chapters 4 and 5. The KH-integral in several variables is treated in Chapter 6 (including a Fubini theorem and a change of variables formula). Finally some applications of the integral are discussed in Chapters 6 and 7.

For those who are interested in the Kurzweil-Henstock integration theory, this book provides an elegant introduction to the subject. Many examples and exercises are included. *B. de Pagter*

E. Kaszkurewicz and A. Bhaya

Matrix diagonal stability in systems and computation

Boston: Birkhäuser-Verlag, 2000

267 p., prijs DM 168,-

ISBN 3-7643-4088-6

In this book the stability of non-linear dynamical systems is analyzed that possess a so-called 'diagonally stable structure'. These are systems that can be written (perhaps after a change of coordinates) in the form of a set of n nonlinear differential or difference equations:

$$\dot{x}_i^+ = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Phi_{ij}(x, t), \quad i = 1, \dots, n$$

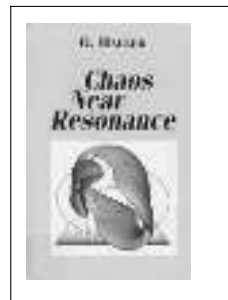
where for all i and j $\Phi_{ij} : \mathbf{R}^n \times T \rightarrow \mathbf{R}^n$ satisfies certain so-called sector conditions, and x_i^+ denotes dx_i/dt in the continuous-time case, with $T = \mathbf{R}^+$; or $x_i(t+1)$ in the discrete-time case, with $T = \mathbf{N}$. Here the matrix $A := (a_{ij})$ is assumed to be diagonally stable, which means that there exists a positive definite matrix P , with P diagonal, which makes the Liapunov expression $A^T P + P A$ negative definite (respectively the Stein expression, $A^T P A - P$, for the discrete-time case).

Examples that fit into this framework occur in many applications like in circuits and systems, in computation using asynchronous iterative methods and in control. Examples that range from neural networks and computation to passive circuits and mathematical ecology are discussed in the chapters 1, 4, 5, 6. In the stability analysis of these systems by means of diagonal-type Liapunov functions there are several classes of matrices that play a role. In particular it is shown that the necessary and sufficient conditions for stability of the nonlinear system can be often formulated as necessary and sufficient condition for diagonal stability of a certain matrix. Therefore, after motivating the contents of

the book by a number of examples in the first chapter, the book starts in chapter 2 with the introduction of several classes of matrices that have some special properties and which later on play a role in this stability analysis. For these matrices in particular the question is raised under what conditions they are diagonally stable. Chapter 3 presents the basic stability results.

The book gives a unifying perspective provided by the matrix stability formulation of the results. Its main concern is the analysis and the understanding of how the formulation of a problem in terms of matrix diagonal stability has several payoffs in terms of desirable qualitative system properties such as robust and absolute stability.

The expected mathematical background of the reader is familiarity with linear algebra and matrix theory, as well as difference and differential equations. The book is intended for graduate students and researchers in the fields of control, stability of dynamical systems, and convergence of algorithms. The book is rather self contained and as such a pleasure to read. In particular it links various results on matrix theory to stability analysis which were spread over the literature up to now and as such the book is a valuable contribution. A minor point is that the subject index could be improved as far as introduced notation is concerned. Furthermore, like in most first editions of a book, I had the impression that incidently the formulation of results was not completely correct. *J. Engwerda*



G. Haller

Chaos near resonance

(Applied mathematical sciences; 138)

Berlijn: Springer-Verlag, 1999

427 p. prijs € 71,06

ISBN 0-387-98697-9

Resonant dynamics occurs when two or more vibrations interact in the sense that the corresponding periods are related by linear relations with small integers. This phenomenon occurs in simple oscillators with a time-periodic forcing, but also in autonomous systems with several degrees of freedom. Resonant dynamics is interesting for its complexity, which is often surprising and sometimes even dramatic. This is even more true when several resonances interact.

Dynamical aspects of interest related to resonances are bifurcations, both local and homoclinic, "... slow and partially slow manifolds, fast multipulse connections among them and slow-fast chaotic sets coexisting with them." In the literature many studies exist on local aspects of resonance, often resorting to normal form theory, connecting this to singularity theory, Kolmogorov-Arnold-Moser and Nekhorochev theory, Melnikov theory, singularity theory, et cetera. It should be mentioned that there also is a lot of numerical work on this subject. The literature alternately deals with conservative and with dissipative systems.

The present book focusses on more global aspects, using (geometric) singular perturbation theory, where slow manifolds are seen as small perturbations of critical manifolds. It considers the interplay between slow and fast dynamics, in particular "fast

jumps between different resonances and then slow asymptotic behavior." For this a good theory of invariant manifolds is needed as well as detailed local and global estimates.

Chapter 1 contains both an introduction in and a survey of dynamical systems theory, which serves as background for the whole book. Various subjects like the Poincaré-Cartan integral invariant, KAM theory and whiskered tori, stable and unstable manifolds and foliations, homoclinic orbits and homoclinic manifolds, normal form theory, Melnikov methods and chaos are briefly treated here. Details often have to be found in references.

Chapter 2 contains the underlying theory of homoclinic jumping and slow-fast chaos in the finite dimensional setting, illustrated with help of two examples related to the Nonlinear Schrödinger Equation. One is 2 degree of freedom truncation and the other a higher (but still finite) dimensional discrete approximation. Both are Hamiltonian systems with dissipative terms. The mathematical background material for this chapter can be found in two appendices, one on differential geometry and the other on analysis.

Chapter 3 deals with applications to physical systems, as these occur in mechanics and optics. As the author says, here the theory of chapter 2 is shown "in action", although it can be read rather independently. Chapter 4 deals with Hamiltonian resonance and chapter 5 with the infinite dimensional case. Again, there are two leading examples, both related to the Nonlinear Schrödinger equation.

This is a very well-organized book with a nice bibliography of almost 400 items. Remarkably, references to the book V.I. Arnold, *Geometric methods in the theory of ordinary differential equations* (1983) and to the paper D. Ruelle and F. Takens, *On the nature of turbulence* (1971) are missing. The expression 'strange attractors' occurs once, namely at the very end of chapter 2. It seems to me, however, that the program induced by Ruelle, Takens, Arnold and others, concerning the role of (finite dimensional) chaos in infinite dimensional systems, plays a paramount role in the background of this work. Nevertheless, I strongly recommend the book to all people interested in the subject.

H. Broer

W. McLean

Strongly elliptic systems and boundary integral equations

Cambridge: Cambridge university press, 2000

357 p., prijs £20.95

ISBN 0-521-66375-X

In dit boek worden theoretische aspecten van randintegraalmethoden behandeld, zoals die optreden bij elliptische stelsels.

De eerste drie hoofdstukken bestaan uit een introductie van diverse wiskundige begrippen zoals verder in het boek gebruikt worden. Er worden eerst een aantal basisbegrippen uit de functionaalanalyse behandeld waarna de theorie van Sobolev-ruimtes op Lipschitz-domeinen wordt behandeld. Tevens wordt een korte behandeling van distributies en Fourier-transformaties gegeven.

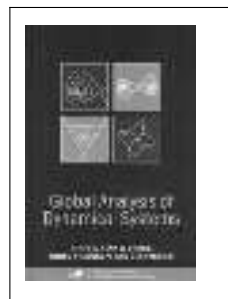
In hoofdstuk 4 wordt een begin gemaakt van de behandeling van elliptische systemen. Als basis wordt de eerste Green-identiteit gebruikt om tot een abstracte (zwakke) formulering te komen van randwaarde-problemen. Centraal staat het Fredholm-alternatief voor het gemengde Dirichlet- en Neumann-probleem op een begrensde Lipschitz-gebied. Allereerst worden een aan-

tal standaardresultaten over regulariteit van oplossingen, inclusief de transmissie-eigenschap, afgeleid. Uiteindelijk worden een aantal lastige afschattingen van Necas, die de H^1 -norm van het spoor van de oplossing aan zijn L_2 -norm van de co-normale afgeleide koppelen. Deze afschattingen worden later gebruikt om te laten zien dat, zelfs voor algemene Lipschitz-gebieden, de elementaire afbeeldingseigenschappen van de oppervlakte potentia-len en randintegraaloperatoren gelden in het gebied van Sobolev-ruimten. Hoofdstuk 5 zoomt in op een aantal technische aspecten zoals eindige-deelintegralen en hun Fourier-transformatie.

De hoofdstukken 6 en 7 vormen de kern van het boek. Hier worden potentialen en randintegraaloperatoren die verband houden met een sterk elliptisch systeem partiële integraalvergelijkingen. Er worden voor Dirichlet-, Neumann- en gemengde problemen integraalvergelijkingen afgeleid voor zowel inwendige als uitwendige problemen. Het Fredholm-alternatief wordt voor verschillende problemen bepaald. De hoofdstukken 8–10 geven een korte behandeling van drie van de eenvoudigste en belangrijkste voorbeelden van elliptische operatoren, de Laplace-vergelijking, Helmholtz-vergelijking en tenslotte een korte behandeling van de gelineariseerde vergelijkingen voor een homogeen en isotroop elastische medium.

Het is een redelijk leesbaar boek dat een goed inzicht geeft van de huidige theoretische concepten op het gebied elliptische operatoren die voor een aantal toepassingen van belang zijn. Helaas wordt er geen aandacht besteed aan numerieke aspecten waar men uiteindelijk mee te maken krijgt als men met behulp van randintegraalmethoden een probleem wil oplossen.

A.J. Hermans



Henk Broer et al. (eds.)

Global analysis of dynamical systems

(Festschrift dedicated to Floris Takens for his 60th birthday)

Bristol: Institute of physics publishers, 2001

464 p., prijs £60,-

ISBN 0-7503-0803-6

Dit boek handelt over een groot aantal onderwerpen in de dynamische systemen waarmee tegelijk de brede interesse en vele contacten van Floris Takens recht wordt gedaan. Hij schreef opmerkelijke artikelen over singulariteiten van vektorvelden, bifurcatietheorie, reconstructie in de analyse van tijdreeksen en over vele andere onderwerpen.

Het was een goed idee om te beginnen met de herdruk van een vroege en invloedrijke publicatie van Takens: *Forced oscillations and bifurcations*. Dit werd in 1974 gepubliceerd door het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht als Communicatie volume 3; de kwaliteit van typewerk en reproductie in die tijd was zo laag dat de mensen altijd verwezen naar deze communicatie als 'the Utrecht preprint'. Ze konden niet geloven dat dit de definitieve publicatie was. Dat verhinderde overigens de mensen niet om de interessante resultaten uit deze 'Utrecht preprint' te lezen en te gebruiken. Dit Festschrift bevat 20 artikelen die uiteenlopen van zuiver wiskundig tot expliciete toepassingen, met onder andere een vlugschrift van Ruelle, een artikel van Palis en Yoccoz (met wie Takens lang samenwerkte) en interessante stukken

werk van voormalige studenten — Takens begeleidde ongeveer 20 promovendi — en vrienden. Zeven artikelen gaan over bifurcatie theorie, twee houden zich bezig met homocliene bifurcaties en twee met Hamilton mechanica; er is een artikel over tijdreeksanalyse en vier artikelen over ergodentheorie en ééndimensionale afbeeldingen. Om een indruk te krijgen van de inhoud bespreken we twee artikelen.

Exponential confinement of chaos in the bifurcation sets of real analytic diffeomorphisms van Henk W. Broer en Robert Roussarie gaat over bifurcaties die samenhangen met vlakke vektorvelden die periodiek van de tijd afhangen. Normalisering (middelen) levert vektorvelden die symmetrisch en integreerbaar zijn. Een belangrijk gevolg is dat in het oorspronkelijke systeem de chaos beperkt is tot exponentieel of super-exponentieel dunne verzamelingen.

An unfolding theory approach to bursting in fast-slow systems door Martin Golubitsky, et al. 'Bursting'-verschijnselen trekken veel aandacht, onder meer doordat ze een rol spelen in het modelleren van neurofysiologische processen; bovendien gaat dit gepaard met opwindende wiskunde. De natuurlijke wiskundige context is hierbij het gebied van de systemen met beurtelings snelle en langzame dynamica. Hierbij treden pieken op in het signaal en hogere co-dimensie bifurcaties. Zo worden voor bepaalde zenuwcellen periodieke 'bursters' gekarakteriseerd door codimensie twee, andere 'bursters' hebben codimensie drie. In dit artikel wordt een classificatie van gevallen gegeven met expliciete normaalvormen en aanwijzingen voor numerieke verwerking.

Er zijn nog vele andere interessante artikelen in dit Festschrift. Het is niet alleen een eerbewijs aan Floris Takens maar ook een waardevolle en stimulerende toevoeging aan de literatuur van dynamische systemen.

F. Verhulst

This book is a thesis, well written, but heavy reading even for someone vaguely familiar with the topic. To every chapter, a list of background literature is given and in this way the text could nevertheless serve as a good starting point for someone who would like to enter this field.

H.G. Dehling

V. Koshamnenko

Singular quadratic forms in perturbation theory

(*Mathematics and its applications*; 474)

Dordrecht: Kluwer, 1999

308 p., prijs €124,79

ISBN 07923-5625-X

De laatste jaren hebben westerse uitgevers waaronder Kluwer heel wat in Rusland verschenen wiskundige boeken vertaald en opnieuw uitgegeven. Veel van die werken zijn een aanwinst en dat is dit boek ook.

De titel suggereert dat het gaat over singuliere storingsrekening zoals die bijvoorbeeld bij grenslagen in de stromingsleer wordt gebruikt. Daar betekent singulier dat de storingsterm van de differentiaalvergelijking een term is die de hoogste afgeleide bevat. Met singulier wordt door de auteur echter iets anders bedoeld. Het boek gaat vooral over perturbaties van de Schrödingervergelijking in de vorm van potentialen waarvan de dragers geconcentreerd zijn op verzamelingen van Lebesgue-maat nul. Dit betekent dat deze perturbaties nul zijn op een dichte deelruimte van de Hilbert-ruimte en dat ze dus niet als een gewone operator in die Hilbert-ruimte opgevat kunnen worden. Een voorbeeld van een singuliere perturbatie is $\epsilon\delta$, met ϵ een getal en δ de distributie van Dirac. Hoewel men in de natuurkundige literatuur vaak onbekommerd formeel rekent met dergelijke perturbaties en ze bijvoorbeeld gewoon additief schrijft heeft deze schrijfwijze a priori geen duidelijke betekenis. Een gevolg hiervan is onder andere dat reeksexpansies in termen van ϵ die voor reguliere perturbaties convergeren in de normale topologie, niet meer convergeren in het geval van singuliere perturbaties. Het onderwerp van dit boek is hoe dergelijke singuliere perturbaties mathematisch correct beschreven kunnen worden.

Er zijn ruwweg drie methoden om de singuliere perturbaties te behandelen, namelijk door gebruik te maken van kwadratische vormen, door zelfgeadjungeerde uitbreidingen en door een geschikte uitbreiding van de Hilbert-ruimte. De graad van de singulariteit van de perturbatie kan gedefinieerd worden met behulp van de familie Hilbert ruimten

$$\cdots \supset H_{-1} \supset H_0 = H \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots,$$

waarbij H_k gedefinieerd is als het domein van de $k/2$ -de macht van de ongeperturbeerde zelfgeadjungeerde operator. Voor het geval van de Schrödingervergelijking in de vrije ruimte zijn de H_k de standaard Sobolev-ruimten. Een kwadratische vorm in H heet k -singulier als ze singulier is in de ruimte H_k maar regulier in H_{k+1} , dat wil zeggen als de ruimte van vectoren die door de vorm op nul wordt afgebeeld dicht ligt in H_k maar niet in H_{k+1} . 1- en 2-singuliere vormen zijn het meest interessant in de toepassing.

Het boek bestaat uit vier hoofdstukken. In het eerste hoofdstuk wordt grotendeels bekende theorie over kwadratische vormen herhaald. Hoofdstuk 2 gaat over singuliere kwadratische vormen.



Y. Nishiyama

Entropy methods for martingales

(*CWI tract*; 128)

Amsterdam: CWI, 2000

139 p., prijs €15,88

ISBN 90-6196-490-3

The book by Yoichi Nishiyama is a CWI edition of the author's Ph.D. thesis, defended in 1998 at the University of Utrecht and written under the supervision of Richard Gill. The following table of contents might give a first impression of the contents of the book: 1. Introduction, 2. Maximal Inequalities, 3. Weak Convergence Theorems, 4. Integral Estimators, 5. M-estimators: General Criterion and Euclidean Parameters, 6. Non-parametric Maximum Likelihood Estimation, 7. Miscellanies.

In the book by Nishiyama, processes which have a martingale structure are studied. More specifically, three different models are being studied, namely multivariate point processes, martingale difference arrays and continuous time local martingales. After an introduction to these models in the first chapter, weak convergence is established in the next two chapters. The remaining 4 chapters are concerned with statistical applications, establishing asymptotic normality and efficiency of estimators in various models.

In hoofdstuk 3 wordt de constructie van zelfgeadjungeerde uitbreidingen behandeld en het boek sluit af met een hoofdstuk over toepassingen in de quantumveldentheorie. Daar worden perturbaties vaak gedefinieerd met behulp van creatie en annihilatie-operatoren in de Fock-ruimte en deze perturbaties zijn singulier. Verder worden nog het verstrooiingsprobleem en spectrale eigenschappen van singulier verstoorde operatoren bestudeerd.

De auteur schrijft in zijn voorwoord dat hij bij de lezer kennis veronderstelt over de theorie van lineaire operatoren in Hilbert-ruimten, van perturbaties van lineaire operatoren, van kwadratische vormen, van verstrooiingsproblemen, van rigged Hilbert-ruimten, van zelfgeadjungeerde uitbreidingen van hermitische operatoren en van quantumveldentheorie. Het boek is dan ook geen leerboek voor studenten maar een geavanceerd werk over een nog niet volledig opgelost en moeilijk onderwerp uit de mathematische fysica. Het is zeer goed geschreven (ook het engels is goed) en is zeker aan te raden aan geïnteresseerde wiskundigen en aan diegenen die bekend zijn met de formele beschouwingen van de quantumveldentheorie en die wel eens willen zien hoe één en ander mathematisch gepreciseerd kan worden. Daarbij is dan dus wel heel wat wiskundige voorkennis nodig. *H.P. Urbach*

K. Murota

Matrices and matroids for systems analysis

(Algorithms and combinatorics)

Berlin: Springer-Verlag, 2000

483 p., prijs €96,63

ISBN 3-540-66024-0

Zoals de titel al aangeeft gaat het boek over methoden om systemen te analyseren. Hierbij moet bij systemen gedacht worden aan dynamische verschijnselen beschreven door middel van lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten.

In het boek wordt er van uitgegaan dat de systemen gemodelleerd zijn volgens fysische principes. Dit resulteert in systemen beschreven met behulp van matrices waarvan de niet-nul elementen onderverdeeld kunnen worden in vaste constanten en systeemparameters. Vaste constanten hebben een bekende vaste waarde, systeemparameters zijn onderhevig aan onzekerheid. Bijvoorbeeld in een knooppunt in een elektrisch netwerk geldt volgens Kirchhoff dat de som van alle stromen nul is. Dit resulteert in een lineaire vergelijking in de stromen met vaste constanten ± 1 . Daarnaast is het bijvoorbeeld zo dat de wet van Ohm een parameter bevat, namelijk de (vaak onzekere) weerstandswaarde. Om rekening te kunnen houden met de aard van zowel vaste constanten als systeemparameters heeft de auteur gekozen voor een aanpak met matroiden. Daarmee kunnen enerzijds algebraïsche aspecten ten gevolge van vaste constanten gemodelleerd worden en anderzijds structurele aspecten ten gevolge van de aanwezigheid van systeemparameters.

In hoofdstuk 1 wordt met een eenvoudig elektrisch netwerk aangetoond dat het soms niet voldoende is om alleen het nul/niet-nul patroon van de systeemmatrices te beschouwen, maar dat het onderscheid tussen vaste constanten en systeemparameters noodzakelijk kan zijn. In hoofdstuk 2 worden achtereenvolgens matrices, grafen en matroiden behandeld. Hoofdstuk 3 bevat resultaten over de fysische dimensie van vaste constanten en systeemparameters gebaseerd op de uitgangspunten van

het boek. Hoofdstuk 4 is een hoofdstuk met resultaten op het gebied van matrices met zowel vaste constanten als systeemparameters. In hoofdstuk 5 wordt het begrip matroïde uitgebreid naar 'valuated matroid'. Deze uitbreiding kan vergeleken worden met de uitbreiding van gewone matrices naar polynoommatrices. In hoofdstuk 6 worden verdere eigenschappen en toepassingen gegeven met betrekking tot de klasse van systemen uit het boek. Er komen zaken aan de orde als bestuurbaarheid en het al dan niet aanwezig zijn van zogenaamde 'fixed modes'. Tenslotte behandelt hoofdstuk 7 onderwerpen die minder direct aansluiten bij de systemen uit het begin van het boek, maar meer voortborduren op hoofdstukken 5 en 6 over 'valuated matroids'.

Het boek is goed leesbaar en goed toegankelijk voor een algemeen wiskundig publiek. Door het niveau van de aangeboden stof is het echter niet eenvoudig. Het boek heeft als voordeel dat het geen echt leerboek is over matroiden en als zodanig niet vol staat met allerlei abstracte resultaten. De matroiden worden ingevoerd met als doel het bestuderen van lineaire systemen waarin enerzijds vaste constanten een rol spelen en anderzijds vrije parameters aanwezig zijn. Dit maakt de introductie van matroiden met hun eigenschappen heel natuurlijk. Het boek lijkt daarom geschikt voor lezers die geïnteresseerd zijn in combinatorische eigenschappen van systemen en daarbij de fysische achtergrond niet uit het oog willen verliezen. Anderzijds lijkt het ook geschikt voor experts op het gebied van matroïde-theorie, die mooie illustraties van het toepassen van matroiden in kunnen vinden. *J.W. van der Woude*



A.K. Prykarpatsky en I.V. Mykytiuk
Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds. Classical and quantum aspects

(Mathematics and its applications; 443)

Dordrecht: Kluwer, 1998

554 p., prijs €234,50

ISBN 0-7923-5090-1

In de inleiding preciseren de auteurs niet voor wie het boek bedoeld is, maar de cover raadt het aan voor studenten die een proefschrift voorbereiden, voor onderzoekers en voor wiskundige natuurkundigen. Naar mijn mening is het boek echter uitsluitend geschikt voor geavanceerde wiskundige natuurkundigen, die gespecialiseerd zijn in integreerbare systemen (klassiek en kwantum). Uitsluitend voor die groep lijkt het boek in aanmerking te komen, en dan nog slechts als naslagwerk, niet als studieboek.

Laat mij starten met een serieuze waarschuwing voor de titel van het boek. In het begin van de jaren 80 hebben Adler en van Moerbeke de notie van algebraïsch integreerbaarheid ingevoerd. De benaming heeft betrekking op integreerbare systemen wiens gecompliceerde Liouville tori algebraïsche tori zijn, vandaar de benaming, die standaard is. Het boek handelt echter helemaal niet over dat soort integreerbare systemen, maar over integreerbare systemen die geconstrueerd worden met algebraïsche technieken (Lie groepen, Lie algebras, current en Virasoro algebras, representatie theorie, ...).

De inhoudstafel is de enige leidraad door het boek : niet al-

leen is de inleiding totaal niets-zeggend, een index voor dit lijvige boek (550 pagina's, vrij kleine druk) is afwezig! Een lineaire lectuur van het boek is zeker af te raden, in ieder geval is het zinloos. Dit is een boek om op een willekeurige plaats open te slaan en dan te bladeren, zoals velen doen met een encyclopedie. De theorie wordt niet stelselmatig opgebouwd en definities worden vaak niet gegeven: er wordt gewoon een referentie gegeven.

Het eerste hoofdstuk gaat over dynamische systemen met homogene configuratieruimten, met speciale aandacht voor de integreerbaarheid van deze systemen. Een introductie tot integreerbaarheid in het algemeen, met eenvoudige voorbeelden ontbreekt. Dat maakt het hoofdstuk zwaar om te verteren. Een motivatie om zich tot dit soort systemen te beperken ontbreekt eveneens. De meeste resultaten zijn voor het eerst door één van de twee auteurs, of door allebei, bewezen. De beste beschrijvingen van dat hoofdstuk is dat het een aaneenplakken van onderzoeksartikels is. In die zin kan dat hoofdstuk gebruikt worden.

Het tweede hoofdstuk gaat over geometrische kwantisatie en heeft niets met het eerste te maken (althoewel het met integreerbaarheid te maken heeft!). Dit is het best geschreven hoofdstuk van het boek, en geeft een goede inleiding, voor de jonge onderzoeker, over geometrische kwantisatie. Behalve de laatste paragraaf is alles in dit hoofdstuk te vinden in standaard boeken over geometrische kwantisatie. Hoofdstuk 3 bevat een lange lijst voorbeelden van integreerbare systemen, terwijl hoofdstuk 4 over quantum statistische mechanica gaat. Ik heb van dat hoofdstuk niet veel begrepen. Het vijfde en laatste hoofdstuk beslaat ongeveer de helft van het boek en is geschreven door vier auteurs wat de stijl zeer onuniform maakt. Ik citeer een definitie op pagina 372 "The R -structure is called the Lie algebra structure g , with the linear homomorphism $R : g \rightarrow g$, provided that ...". Die definitie heeft totaal geen zin, en het is niet de enige! Dat hoofdstuk gaat over oneindig dimensionale integreerbare systemen en het is zeer technisch. Een hoofdstuk om in te bladeren. Op het einde van het hoofdstuk is een appendix over Lie groepen en Lie algebras. Door een typografisch probleem zijn stukken tekst uit definities en uit stellingen verdwenen (een propositie op pagina 534 bijvoorbeeld begint met "with highest weight, ...". Die appendix, die duidelijk geschreven was om de lezer te helpen het boek te lezen, is dus jammer genoeg totaal onbruikbaar, en dit door een technische fout.

Tweehonderdvierendertig euro is veel voor zo'n boek. Wie het boek als geschenk krijgt zal hopelijk uit deze recensie begrepen hebben hoe het boek, naar mijn mening, eventueel kan gebruikt worden.

P. Vanhaecke

H. Thorisson

Coupling, stationarity, and regeneration

(Probability and its applications)

New York: Springer-Verlag, 2000

517 p., prijs €81,29

ISBN 0-387-98779-7

Dit lijvige en zeer interessante boek richt zich, zoals het voorwoord vermeldt, tot aio's en onderzoekers in kanstheorie, stochastisch modelleren en mathematische statistiek. Ondanks de laatste categorie, bevat het pure kanstheorie dat op een heldere en 'snelle' wijze bij de lezer binnenkomt. Thorisson verstaat de

kunst om lastige en theoretische onderwerpen dusdanig te noteren en uit te leggen dat het een plezier wordt er kennis van de nemen. De 10 hoofdstukken worden in vele paragrafen opgedeeld, die op hun beurt weer opgedeeld zijn in vele, korte subparagraafjes met pakkende titels. Zo wordt Paragraaf 1.7 (over convergentie van continue stochasten) onderverdeeld in zes subparagraafjes met de titels: 'Density Convergence implies Total Variation Convergence', 'Hitting the Limit', 'Converse?' (let op het vraagteken), 'Pointwise Convergence of Densities Is Too Strong', 'Total Variation Convergence Is Too Weak', 'What Has Been Achieved?'; dit laatste subparagraafje beslaat een halve bladzijde en bevat het uiteindelijke resultaat.

Het basis-onderwerp is coupling: de constructie van een kopie X' van een familie X van stochasten zodanig dat in deze twee families de marginale verdelingen gelijk zijn. (Bijvoorbeeld de independence coupling, bestaand uit onafhankelijke kopieën X'_i van de X_i .) In de hoofdstukken één tot en met zeven staan couplings centraal. Er worden allerlei varianten op dit begrip beschouwd, om resultaten af te leiden voor (rijen van) stochasten, Markov processen, stochastische wandelingen, vernieuwingsprocessen, stochastische elementen in een willekeurige meetbare ruimte, stochastische processen, en random fields. In de hoofdstukken acht tot en met tien gaat het over stationaire processen en regeneratieve processen; hier worden couplings als hulpmiddelen gebruikt.

Zoals boven opgemerkt, is het boek goed leesbaar. Hoewel tamelijk geavanceerde onderwerpen worden beschouwd, is het boek opvallend 'self-contained'. Thorisson kan vaak in enkele zinnen de onderliggende theorie uitleggen, in zijn eigen correcte, enigszins informele stijl. Het boek is een aanrader voor elke wetenschapper in de kanstheorie.

G. Nieuwenhuis

R.W. van der Hofstad

One-dimensional random polymers

(CWI tract; 123)

Amsterdam: CWI, 1999

165 p., prijs €18,15

ISBN: 90-6196-481-4

This book is based on the author's PhD thesis at the University of Utrecht. As such, it serves as a concise and self-contained monograph on the subject — and a very nice one. The main subject of the book is, as the title shows, one-dimensional random polymers.

In this book, two kinds of one-dimensional random polymers are considered. One is the *Domb-Joyce model*, defined by introducing self-repelling interactions into simple random walks, and involving a parameter β . The other is the *Edwards model*, defined by introducing self-repelling interactions into continuous Brownian motion. Intuitively, the Edwards model can be considered as a continuous version of the Domb-Joyce model.

The central question is the limiting behaviour of these models, in other words, how the (infinitely) long polymers behave. Because non-interacting models (simple random walk and Brownian motion) exhibit diffusive behaviour, our main concern here is whether such diffusive behaviour is changed qualitatively, once we introduce interactions. Various Domb-Joyce models on the d -dimensional hypercubic lattice with $d \geq 5$ have been shown to exhibit the diffusive behaviour. But in 1-dimension, where the

repulsive interactions matter more, the models (are expected to) exhibit much richer behaviour. In particular, it is expected (and has partly been proved) that the Domb-Joyce model exhibits the following qualitatively different behaviour depending on the value of the parameter β .

- If we fix $\beta > 0$, it shows a *ballistic* behaviour.
- On the other hand, if we decrease the value of β depending on n (the length of the walk) like $\beta \approx n^{-3/2}$, it shows a *diffusive* behaviour.
- Between these two limiting cases it will show something in between, but no proof had been given.

The main purpose of the book is to prove and refine some of the above expectations (and similar results for the Edwards model) as mathematical theorems.

In section 2, the author considers the Domb-Joyce model for fixed positive β . The main goal of this chapter is to give a detailed β -dependence of the speed constant and other important constants which characterize the ballistic behaviour. In section 3, the author considers the Edwards model with fixed $\beta > 0$. In section 4 (theorem 4.2 of the book), the author considers the Domb-Joyce model for n -dependent β_n , which satisfies $\beta_n \rightarrow 0$ and $\beta_n n^{3/2} \rightarrow \infty$. Finally in section 5, the author obtains bounds on important constants appearing in chapters 2 through 4. Since the publication of the book more than three years ago, the author has made a lot more progress concerning one-dimensional random polymers. Some of the recent results can be found in a recent review article of the author.

In summary, this is a very nice book, and it can serve as a good introduction to the subject. Anyone interested in problems of one-dimensional random polymers are recommended to consult this book and the recent review article, before embarking on his own researches.

T. Hara



M. Giaquinta, G. Modica and J. Soucek
Cartesian currents in the calculus of variations I and II

(*Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*; 37/38)

Berlin: Springer-Verlag, 1998

711/697 p., prijs € 234,-

ISBN 3-540-64009-6/3-540-64010-X

The title of this voluminous 2 volume monograph will convey little to most readers. No wonder, because the term *Cartesian currents* was coined by the authors only some 12 years ago. For that matter, even the term current, which dates back to René Thom, 1955, is not all that well known. Currents are to forms on a manifold as generalized functions (distributions in the sense of Schwartz) are to functions. More precisely a current is a functional on the linear space of compactly supported (alternating) forms on a manifold. It is homogeneous of dimension p if it is zero on all forms of degree unequal p . Thus currents can be seen as a kind of global distributions and they generalize both forms (covariant vectors) and vector fields (contravariant vectors). The name derives from the fact that currents of dimension 1 in three dimensional space can be interpreted as electric currents.

Cartesian currents are a special kind of current specifically de-

signed to handle nonscalar (global) variational problems such as minimal immersions, harmonic maps between Riemannian manifolds, and a variety of related problems in physics and mechanics. As is well known, optimal solutions often necessarily have singularities, and as in other fields a suitable notion of weak solutions needs to be defined. Very roughly Cartesian currents are those that can be (weakly) approximated by smooth (graphs of) maps. Here it is of considerable importance to take into account that in the nonscalar case the notion of a weak distributional derivative is not the right one to work with. Instead one needs to work with what is called (in these volumes) approximate differentiability.

The authors have made an enormous, and to my mind largely successful, effort to present this technically very complicated field in a selfcontained and understandable way (though definitely high level; there is no way that these volumes can be seen as an introduction). For example they devote something like a hundred pages to explain the relevant parts of geometric measure theory (a notoriously difficult subject). They also have not hesitated, where appropriate, to do a bit of repetition to help the reader who does not want to go through all 1400 pages consecutively. There is no doubt that these two volumes should be on the shelves of just about every library with some pretense to be of value.

In a project of this size and level of sophistication there are inevitably some things that could have been better, some things to cavil at (which is, after all, one of the functions of a book reviewer). In this case, I noted four things: There are rather a lot of typos. There are quite a number of mangled/fractured sentences like (page 176 of Volume I): "A more complicate example which shows a lot of fractures in the graph is Cantor-Vitali function for which the approximate differential is zero almost everywhere and the graph in the previous sense consists of infinitely many horizontal segments, compare next chapter". There is some lack of motivational remarks. Not in the technical sense, more in the linguistic/philosophical sense. I would have liked to know, for example, why these particular currents are called *Cartesian* currents. Does this exhaustive, detailed two volume treatise belong in the *Ergebnisse* series. I think not. It should have been in the *Grundlehren* series both as regards style and type of book and level.

These are rather minor points. The authors are to be complimented on having done a magnificent job. A monograph like this illustrates well that also in the new electronic age books on paper will remain though journal papers may go more or less completely electronic.

M. Hazewinkel

J. Grasman en O.A. van Herwaarden

Asymptotic methods for the Fokker-Planck equation and the exit problem in applications

(*Springer series in synergetics*)

Berlijn: Springer-Verlag, 1999

220 p., prijs € 38,85

ISBN 3-540-64435-0

Uitgangspunt voor de auteurs is een niet-lineair dynamisch systeem voorzien van een kleine stochastische verstoring. De linearisatie met betrekking tot deze verstoring geeft de zogeheten Langevin vergelijking. Als $p(t, x)$ de kansdichtheid aangeeft om het systeem in toestand x op tijd t te vinden, dan is p de oplossing van een lineaire diffusievergelijking, de zogenaamde Fokker-Planck-

of ook wel de voorwaartse Kolmogorov-vergelijking.

De auteurs leggen uit hoe vragen over het gedrag van het stochastische proces vertaald kunnen worden in vragen over het gedrag van oplossingen van de Fokker-Planck-vergelijking, met speciale aandacht voor de 'exit-kans' en 'verwachte exit-time' uit een gegeven gebied. Deze vragen zijn de motivatie voor een uitgebreide analyse van randwaardenproblemen voor de Fokker-Planck vergelijking. Vanwege de kleine stochastische verstoring heeft de Fokker-Planck-vergelijking een kleine parameter in de diffusie-term. Dit maakt het mogelijk om technieken uit de theorie van singuliere verstoringen effectief te gebruiken. Gegeven het stochastisch verstoorde dynamische systeem wordt de corresponderende Fokker-Planck-vergelijking direct geformuleerd. De resultaten van de asymptotische analyse worden direct geïnterpreteerd in termen van het originele stochastisch verstoorde dynamische systeem. Deze ad hoc-benadering omzeilt het gebruik van geavanceerde stochastische analyse. In het laatste deel van het boek wordt een aantal toepassingen behandeld variërend van grondwaterstromen en de verspreiding van vervuilingen tot problemen uit de stochastische populatiedynamica.

Samenvattend is het een wat informeel boek dat laat zien hoe men met behulp van technieken uit de singuliere verstoringrekening dynamische systemen met stochastische verstoringen kan bestuderen. De doelgroep waarop de auteurs zich richten wordt niet geheel duidelijk, maar voor toegepast wiskundigen met een achtergrond in de singuliere verstoringstheorie lijkt het me een nuttig en interessant boek.

S.M. Verduyn Lunel

the book, is necessarily somewhat incomplete and not unbiased. Moreover, the organization of the material seems haphazard and without a clear line — for instance, chapter two begins immediately with technicalities leaving the motivation completely to the reader. One clearly gets the impression that the author has 'learned through writing', as he states in the introduction. More seriously, many of the interesting problems in this area today, such as recurrence and reinforcement, scaling behaviour and criticality, and in general the strong interaction with problem areas in statistical physics, go without mention. This, together with the willy-nilly organization, produces the curious effect of making an exciting subject dull. However, the subjects that are covered are also of interest, and in these areas this book can serve as a learning tool and a reference.

M. Keane



S.F. Gilyazov and N.L. Gol'dman
**Regularization of ill-posed problems
by iteration methods**

(Mathematics and its applications; 499)

Dordrecht: Kluwer, 2000

340 p., prijs € 120,25

ISBN 0-7923-6131-8

In dit boek wordt het gebruik geanalyseerd van regulariserende iteratieve methoden voor het oplossen van slecht-gestelde lineaire problemen in Hilbert-ruimten geanalyseerd. Dat wil zeggen, er wordt getracht oplossingen v te construeren van de vergelijking $Au = f$, met A een lineaire begrensde operator die de Hilbert-ruimte U op de Hilbert-ruimte F afbeeldt, zodanig dat de norm van de fout $Av - f$ klein is. Dat levert voor singuliere problemen geen eenduidige oplossing op en eenduidigheid kan verkregen worden door het minimaliseringsprobleem te regulariseren, bijvoorbeeld door naar de norm van de fout plus een norm van v te kijken. Hieronder valt de bekende Tikhonov-regularisatie.

Bekende iteratieve oplosmethoden voor eindig dimensionale lineaire ruimtes zijn de geconjugeerde richtingen methode en de geconjugeerde gradienten methoden. Beide methoden laten zich veralgemeniseren voor lineaire vergelijkingen in Hilbert-ruimten. Het is bekend dat deze methoden voor lineaire vergelijkingen over eindig dimensionale ruimten een regulariserende werking hebben: de slecht-gesteldheid van het probleem wordt pas na verloop van een aantal iteraties merkbaar en de benaderende oplossingen zijn in de eerste fase van het iteratieproces nog glad. De beide auteurs verwijzen hier niet naar en zijn kennelijk onbekend met deze eigenschappen. Werk op dit (eindig dimensionale) gebied is goed beschreven in een boek van P.C. Hansen. In dit geval worden de genoemde iteratieve methoden toegepast op de vergelijking $A^*Au = A^*f$, waarbij A^* de geconjugeerde van A aan geeft.

Eenzelfde aanpak hanteren de auteurs ook in dit boek. Zij regulariseren de iteratieve methoden door in het iteratieproces de iteratiecoëfficiënten te berekenen met inproducten waarin gehele positieve machten van de operatoren A^*A en AA^* een rol spelen. In het eindig dimensionale geval betekent dat, dat de norm van $Av - f$ in een andere norm geminimaliseerd wordt. Die opmerking wordt in het boek niet gemaakt en ik weet ook niet ze-



W. Woess
**Random walks on infinite graphs
and groups**

(Cambridge tracts in mathematics; 138)

Cambridge: Cambridge university press, 2000

334 p., prijs £40,-

ISBN 0-521-55292-3

This book is a research monograph dealing with discrete time random walks on countable graphs. In the first chapter, the author presents selected topics around what he calls the 'type problem', meaning the determination of the recurrent or transient nature of such walks on different graphs. He also succeeds in slightly annoying the reviewer, who was involved in the first proofs of many of these results as part of the Rennes group KGB in the 1970's, by not presenting any of these results or even giving the references to the Asterisque volume and other French literature where they appeared. On the other side, too much emphasis is placed in the reviewer's opinion on the contributions of Varopolous and the Italian school. The second chapter deals with the determination of the spectral radius associated with random walks, the computation of Green functions, and associated isoperimetric inequalities. In chapter three, the asymptotic behaviour of transition probabilities is discussed through the presentation of diverse local limit theorems, and the final chapter contains a brief excursion into topological boundary theory, which allows identification of the harmonic functions associated with random walks.

So far the content. The choice of material, given the length of

ker of die interpretatie zich uitstrekt tot Hilbert-ruimten. Het zou de interpretatie van de beschouwde iteratieve methoden zeker vereenvoudigen. Hoe dan ook, de auteurs analyseren het convergentiegedrag van de geregulariseerde methoden grondig en gaan ook op de praktische toepasbaarheid in door het uitwerken van een aantal voorbeelden. Bij deze voorbeelden worden analytische problemen zoals het Stefan-probleem, gediscretiseerd, waardoor de uiteindelijke vergelijkingen zich toch weer in eindig dimensionale ruimten afspelen. Dat zou kunnen betekenen dat we er in praktische zin niet veel mee opgeschoten zijn, echter, de analyses zijn gedaan voor het oneindig dimensionale geval waardoor zij een globale geldigheid hebben. Het zou leuk en instructief geweest zijn als de auteurs hier wat aandacht aan gewijd hadden.

Het boek op zich is zeer nuttig voor de specialist op dit gebied. Het Engels is vaak wat klungelig en stoort hier en daar de leesbaarheid. Ook vervelend is dat er geen list of notations aanwezig is. Dat is bij de interpretatie van een aantal stellingen bepaald lastig omdat daarin optredende operatoren soms tamelijk onopvallend vele hoofdstukken eerder geïntroduceerd zijn. Mijn geheugen is niet zo goed dat ik me zoiets vele bladzijden later nog herinner. Ook vind ik het jammer dat de verwijzingen naar de literatuur op een hoop in de inleiding geveegd zijn. In de hoofdstukken zelf komt men maar spaarzaam verwijzingen tegen. Een historisch overzicht van de resultaten aan het eind van elk hoofdstuk ontbreekt eveneens. Dat betekent dat de specialist in dit boek veel mooie resultaten tegenkomt, maar een en ander zelf in de goede historische context moet plaatsen en bronnenonderzoek moet doen als hij of zij op dit werk wil verder borduren.

H.A. van der Vorst



R. Plato

Numerische Mathematik kompakt

(Grundlagenwissen für Studium und Praxis)

Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg & Sohn, 2000

360 p., prijs €24,54

ISBN 3-528-03153-0

Het boek is prettig leesbaar en er komen relatief veel onderwerpen aan bod. De zestien hoofdstukken behandelen polynoom- en spline interpolatie, Fourier-transformaties, stelsels lineaire en niet-lineaire vergelijkingen, numerieke integratie, eenstaps en meerstapsmethoden voor beginwaardeproblemen, randwaardeproblemen, eigenwaardeproblemen, approximatietheorie en floating point-aritmetiek. (Sommige onderwerpen over meerdere hoofdstukken.) Notatie is zeer belangrijk voor elegantie. Meestal wordt in dit boek een 'alom bekende' notatie gehanteerd, die echter voor de gewetensvolle lezer niet altijd te verteren is. Op bladzijde 320 bijvoorbeeld wordt geen onderscheid gemaakt tussen een rij en de range van een rij. Ik mis een lijst van gebruikte notaties. De lijst van afkortingen in de index is verre van compleet. Ook in de tekst wordt niet iedere notatie verklaard. (Voorbeeld: $[[x_{k-1}, x_k]$, bladzijde 37) Een typerend voorbeeld van een afkortingsmechanisme in dit boek is $f, g : \mathbf{R}^N \supset D \rightarrow \mathbf{R}$, waar uw recensent niet van houdt. Ik betwijfel, of dergelijke expressies formeel te ontleden zijn (definitie 1.2, bladzijde 2). Bij afleidin-

gen wordt veelvuldig gebruik gemaakt van aanhalingstekens ter voorkoming van het kopiëren van (delen van) formules. Op het schoolbord niet ongebruikelijk, maar voor de moderne tekstverwerker absoluut onnodig. Over het algemeen komen vooral de numerieke methoden aan bod, maar wordt weinig ingegaan op foutenanalyse. Er wordt een online service bij het boek aangeboden. Ik heb gekeken of de door mij gevonden zetfouten daar te vinden zijn. De internet pagina was op dit punt pas voor het eerste kwart van het boek bijgewerkt.

Lezers die menen de Duitse taal niet machtig te zijn, hoeven zich niet te laten weerhouden om dit boek te bestuderen. In korte tijd geraakt men thuis in deze schone taal, die voor de wiskunde een grote expressiviteit heeft. Met plezier, zowel op het gebied van de taal als van de wiskunde, heb ik dit boek doorgewerkt. Er steekt een uitdaging voor de lezer in om aan de hand van dit boek bepaalde onderwerpen diepgaand te bestuderen.

A. Korlaar

J.J. Callahan

The geometry of spacetime: an introduction to special and general relativity

(Undergraduate texts in mathematics)

Berlin: Springer-Verlag, 2000

451 p., prijs €50,10

ISBN 0-387-98641-3

Omdat dit boek is verschenen in de reeks *Undergraduate texts in mathematics*, wordt de indruk gewekt dat het hier gaat om een wiskundeboek, of misschien om een speciaal voor wiskundestudenten bestemd boek over de relativiteitstheorie. Dit is niet het geval; temidden van de meer dan honderd boeken in deze prachtige serie is dit het enige natuurkundeboek. Het is inderdaad — zoals de ondertitel aangeeft — een uitvoerige inleiding in de speciale en algemene relativiteitstheorie, de theorie die samen met de quantumtheorie de natuurkunde van de twintigste eeuw ingrijpend vernieuwd heeft. Het is een boek bestemd voor 'undergraduates', wat dat in het nieuwe Nederlandse 'Bachelor-Masters' systeem ook moge betekenen. Als zodanig vind ik het een geslaagd boek.

De presentatie van de benodigde wiskunde, eerst analyse en lineaire algebra, later differentiaalmeetkunde voor de algemene theorie, is voor een groot gedeelte elementair, helder, uitvoerig — misschien op sommige punten iets te uitvoerig en expliciet — en beter en preciezer dan gemiddeld in boeken over dit onderwerp. Callahan behandelt de standaardonderdelen van de relativiteitstheorie op voortreffelijke manier: eerst de speciale theorie, uitgaande van het principe van de gelijkwaardigheid van alle met elkaar door eenparig rechtlijnige beweging verbonden inertiaalsystemen, vervolgens, via het bespreken van willekeurige coördinaatsystemen, de overgang naar de algemene theorie gebaseerd op het equivalentieprincipe. Verder de fysische betekenis van kromming van de tijdruimte, de Einstein-vergelijkingen voor het gravitationele veld. Tenslotte enkele van de standaardgevolgen van de algemene theorie, zoals de buiging en roodverschuiving van het licht en de perihelium-precessie van Mercurius. De relativiteitstheorie is een natuurkundige theorie met soms verrassende consequenties; ruimte en tijd is niet steeds wat we intuïtief denken. Dit maakt het boek duidelijk aan de hand van vaak origineel gekozen voorbeelden en situaties, zoals bijvoorbeeld bij de bespreking van tweedimensionale ruimte-tijd diagrammen, waar

ter verheldering bij paardenraces gebruikte foto-finishplaatjes ten tonele worden gevoerd. Het boek toont ook een goed gevoel voor de historische dimensie van het onderwerp.

Tenslotte wat kritiek. De wiskundige behandeling vind ik zoals gezegd hier en daar te expliciet. Er wordt aan sommige deelonderwerpen, zoals bijvoorbeeld de hyperbolische meetkunde in hoofdstuk 2, een onevenredig grote aandacht besteed. Er zijn ook zaken die ik mis. Einstein ontwikkelde de relativiteitstheorie, in het bijzonder de speciale theorie, vanuit het door hem verworven inzicht dat de Maxwell-theorie van het electromagnetisme inconsistent was met die andere bouwsteen van de negentiende eeuwse natuurkunde, de Newtonse mechanica. Dit bracht hem tot een beschrijving waarin ruimte- en tijdvariabelen op gelijke voet worden behandeld en tot de al eerder door onze landgenoot Lorentz ad hoc ingevoerde Lorentz-transformaties. De Maxwell-vergelijkingen, een systeem van partiële differentiaalvergelijkingen voor twee driedimensionale vectorvelden, krijgen daarbij een bijzonder eenvoudige vierdimensionale vorm, nog eleganter als men daarbij differentiaalvormen gebruikt. Hiervan is bij Callahan niets te vinden. Een andere omissie betreft 'zwarte gaten', een van de spectaculaire theoretische consequenties van de algemene relativiteitstheorie, waarvan recente astronomische observaties het bestaan lijken te hebben bevestigd.

Samenvattend: ondanks wat kleine subjectieve bezwaren vind ik het een goed opgezet, helder en zorgvuldig geschreven, uitstekend verzorgd boek, een welkome nieuweling in het grote gezelschap van de al bestaande leerboeken over de relativiteitstheorie.

P.J.M. Bongaarts



M.I. Gil
Stability of finite and infinite dimensional systems

(International series in engineering and computer science; 455)

Boston: Kluwer, 1998

354 p., prijs €172,50

ISBN 0-7923-8221-8

In 1949 formuleerde M.A. Aizerman een vermoeden omtrent de stabiliteit van de niet-lineaire systemen die worden verkregen door een niet-lineaire terugkoppeling toe te passen op een lineair ingangs-uitgangssysteem, waarbij de niet-lineaire karakteristiek voldoet aan een zogeheten sectorconditie. Het vermoeden van Aizerman genereerde veel belangstelling omdat het de belofte in zich had van een globaal en robuust stabiliteitsresultaat voor een flinke klasse niet-lineaire systemen. Gedeeltelijke bewijzen werden gevonden, maar ook voorbeelden die duidelijk maakten dat het vermoeden in de door Aizerman uitgesproken algemeenheid niet juist is. Diverse varianten die werden geformuleerd, onder meer door R.E. Kalman, bleken eveneens onjuist. In 1981 bewees Michael Gil' dat een op sommige punten zelfs versterkte vorm van het vermoeden van Aizerman waar is onder de aanname dat het in de formulering van het vermoeden figurerende lineaire ingangs-uitgangssysteem een niet-negatieve impulsresponsie heeft. Dit mooie resultaat is de spil waar het hier besproken boek van Gil' om draait. Veel van de techniek die bij het bewijs van pas komt is interessant op zich; onder meer wordt gebruik

gemaakt van precieze normschattingen voor exponenten van matrices. Stabiliteitsresultaten, normschattingen, majorisaties en minorisaties worden in het boek verder gegeven voor eindigdimensionale lineaire systemen met tijdsafhankelijke parameters en met statische niet-lineaire terugkoppelingen. Een belangrijk deel van het boek is gewijd aan generalisaties hiervan naar systemen met vertragingen en naar partiële differentiaalvergelijkingen.

Resultaten rondom het vermoeden van Aizerman staan momenteel nog altijd in de belangstelling; misschien kan zelfs van een opleving worden gesproken, vooral in verband met uitbreidingen naar niet-gladde terugkoppelingen waarmee bepaalde typen van hybride (gemengd continue/discrete) systemen kunnen worden beschreven. Wie op zoek is naar concrete en gedetailleerde informatie rond de stabiliteit van lineaire systemen, eventueel in combinatie met niet-lineaire terugkoppelingen, zal het soms wat vreemde Engels in het boek van Gil' graag voor lief nemen om de gelegenheid te hebben uit een rijk arsenaal aan resultaten te kunnen putten. Voor aanschaf door de individuele wiskundige is het boek overigens, gezien de prijsstelling, niet door de uitgever bedoeld.

J.M. Schumacher



O. Hermández-Lerma and J.B. Laserra
Further topics on discrete-time Markov control processes

(Applications of mathematics stochastic modelling and applied probability; 42)

New York: Springer-Verlag, 1999

276 p., prijs €60,84

ISBN 0-387-98694-4

This book is part 2 in a two-volume series about Markov control processes in discrete time. The two volumes are reasonably self-contained. In part 2 subjects, several of which were already discussed in part 1, are studied using a different and usually more restrictive set of conditions. The differences have to do with the boundedness and the sign of the cost functions, the control-constraint sets and the transition laws. In part 2 this leads to a dynamical programming operator that is a contraction with respect to some weighted norm. Such weighted norms, which allow sharper and more detailed results, play a role in much of part 2. As in part 1, the presentation of the material is in general clear and coherent and is at the level of a graduate seminar. No problem sets have been included. The main subjects of part 2 can be gleaned from the following list of chapters: Ergodicity and Poisson's equation, discounted dynamic programming with weighted norms, the expected total cost criterion, undiscounted cost criteria, sample path average cost, the linear programming approach.

E.J. Balder

Problemen/UWC

Universitaire Wiskunde Competitie

Met ingang van het dit jaar zijn de Universitaire Wiskunde Competitie en de problemenrubriek samengevoegd. De rubriek zal steeds drie problemen bevatten waar studenten op de gebruikelijke manier punten mee kunnen verdienen. De ladderstand is gewoon naar het nieuwe jaar getransporteerd. Niet-studenten worden uitgedaagd om *hors-concours* hun oplossingen in te zenden.

De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.

Opgave A

Een Pythagoreïsche driehoek is een rechthoekige driehoek waarvan alle zijden geheel-tallig zijn. Van een Pythagoreïsche driehoek is de straal van de ingeschreven cirkel ook geheel-tallig. Bepaal alle Pythagoreïsche driehoeken waarvan de straal van de ingeschreven cirkel N bedraagt ($N = 1, 2, 3, \dots$)

Opgave B

Een rechthoekige tafel waarvan de vier poten precies even lang zijn, staat in een historisch pand met een glooiende vloer. Is het mogelijk om de tafel ergens neer te zetten zodat deze niet wiebelt?

Opgave C

Het is algemeen bekend dat de oneindige rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ niet sommeerbaar is. Verwijder nu uit bovenstaande rij alle getallen die 9 aaneengesloten negens in hun decimale ontwikkeling hebben. Houden we een sommeerbare rij over?

Ster-opgave

Zij V de complexe vectorruimte van alle functies $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Zij W de kleinste lineaire deelruimte van V met de volgende twee eigenschappen:

1. de functie $f(z) = z$ behoort tot W ;
2. voor alle $f \in W$ geldt $|f| \in W$.

Behoort de functie $f(z) = \bar{z}$ tot W ?

Opmerking: Een vermoeden in de theorie van Boolese algebra's kan tot deze vraag worden herleid.

Oplossingen van de Universitaire Wiskunde Competitie editie 2002/3

We ontvingen 7 inzendingen.

Opgave 2002/3-A

Toon aan dat

$$\ln 2 = \frac{2}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(4n^2 - 1)}.$$

Oplossing Deze opgave werd door alle inzenders correct opgelost. De hier volgende oplossing werd door velen gevonden. Breuksplitsen en vervolgens termen tegen elkaar wegstrepen in de partiële sommen geeft:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(4n^2 - 1)} &= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{2}{2n} + \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= -\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\frac{2}{3} + \ln 2. \end{aligned}$$

Opgave 2002/3-B

Definieer, voor $t > 0$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{t}{n^2}\right).$$

Toon aan dat de limiet $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)/\sqrt{t}$ bestaat en bepaal zijn waarde.

Oplossing Het gemakkelijkst gaat dit door de som, via een substitutie, om te werken tot een Riemannsom van een zekere oneigenlijke integraal. De moeilijkheid bestaat er dan in om aan te tonen dat de limieten verwisseld mogen worden.

We substitueren $u = t^2$ en bewijzen dat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{t^2}{n^2}\right) = \int_0^{\infty} \sin^2(1/x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Zij $\varepsilon > 0$ vast. Kies $T > 0$ zo groot dat $1/(3T^3) < \varepsilon$; wegens $\sin^2(1/x^2) \leq 1/x^4$ is dan ook $\int_T^{\infty} \sin^2(1/x^2) dx < \varepsilon$. We splitsen de som als volgt:

$$\frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{t^2}{n^2}\right) = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\lceil tT \rceil} \sin^2\left(\frac{t^2}{n^2}\right) + \frac{1}{t} \sum_{n=\lceil tT \rceil+1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{t^2}{n^2}\right).$$

De eerste som is een Riemannsom voor de integraal van $\sin^2(1/x^2)$ over het interval $[0, \lceil tT \rceil/t]$ en convergeert naar $\int_0^T \sin^2(1/x^2) dx$ als $t \rightarrow \infty$; dit volgt uit het feit dat $\sin(1/x^2)$ begrensd en continu is voor $x > 0$. De tweede som schatten we af:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \sum_{n=\lceil tT \rceil+1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{t^2}{n^2}\right) &\leq \frac{1}{t} \sum_{n=\lceil tT \rceil+1}^{\infty} \left(\frac{t^2}{n^2}\right)^2 \\ &\leq t^3 \int_{\lceil tT \rceil}^{\infty} \frac{1}{x^4} dx = \frac{t^3}{3\lceil tT \rceil^3} \leq \frac{1}{3T^3} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Voor t voldoende groot vinden we aldus:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{t^2}{n^2}\right) - \int_0^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{x^2}\right) dx \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\lceil tT \rceil} \sin^2\left(\frac{t^2}{n^2}\right) - \int_0^T \sin^2\left(\frac{1}{x^2}\right) dx \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{t} \sum_{n=\lceil tT \rceil+1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{t^2}{n^2}\right) \right| + \left| \int_T^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{x^2}\right) dx \right| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Opgave 2002/3-C

Bewijs voor alle $n, k \geq 1$ met $n \geq 2k$ de volgende identiteit:

$$\binom{n+1}{k} = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j+1} \binom{2j}{j} \binom{n-2j}{k-j}.$$

Oplossing We geven de oplossing van het team Hendrik Hubrechts en Steven Delvaux. Zij $D := \{(n, k) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : n \geq 2k\}$ en definieer

$$f(n, k) := \sum_{j=0}^k \frac{1}{j+1} \binom{2j}{j} \binom{n-2j}{k-j}, \quad (n, k) \in D.$$

We willen aantonen dat $f(n, k) = \binom{n+1}{k}$ voor alle $(n, k) \in D$. We doen dit via inductie naar k .

Voor $k = 0$ is dit triviaal. Stel nu dat $n = 2k$ met $k \geq 1$. Enig rekenwerk geeft

$$\begin{aligned} f(2k, k) &= \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2j}{j} \binom{2k-2j-2}{k-j-1} \cdot \frac{2k-2j-1}{j+1} \\ &\quad + \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2j}{j} \binom{2k-2j-2}{k-j-1} \cdot \frac{2k-2j-1}{k-j} + \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}. \end{aligned}$$

Door in de tweede som $i = k - j - 1$ te substitueren en de resulterende uitdrukkingen op te tellen en gebruik te maken van de inductiehypothese vinden we

$$\begin{aligned} f(2k, k) &= \frac{4}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j+1} \cdot \binom{2j}{j} \binom{2k-2j-2}{k-j-1} + \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \\ &= \frac{4}{k+1} \binom{2k-1}{k-1} + \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} = \binom{2k+1}{k}. \end{aligned}$$

Door inductie naar k merken we vervolgens op dat f voldoet aan de identiteit

$$f(n+1, k+1) = f(n, k) + f(n, k+1)$$

voor alle $(n+1, k+1)$, (n, k) en $(n, k+1)$ in D . Het bewijs kan nu worden voltooid door dubbele inductie: naar $k \geq 0$ bij vaste $n \geq 0$, en naar $n \geq 2k$ waarbij het geval $n = 2k$ hierboven al beschouwd is.

Stel dat $k \geq 1$ en $n \geq 2k+1$ gegeven zijn, dan zitten (n, k) , $(n-1, k-1)$ en $(n-1, k)$ in D en vinden we met behulp van de inductiehypothese dat

$$f(n, k) = f(n-1, k-1) + f(n-1, k) = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Hubrechts en Delvaux merken tenslotte op dat dit bewijs zonder veel moeite kan worden uitgebreid naar paren (r, k) met $r \in \mathbf{R}$ en $k \in \mathbf{Z}$, mits men afsprekt dat $\binom{r}{k} = 0$ als $k \leq -1$ en $\binom{r}{k} = r(r-1) \cdots (r-k+1)/k!$ als $k \geq 0$.

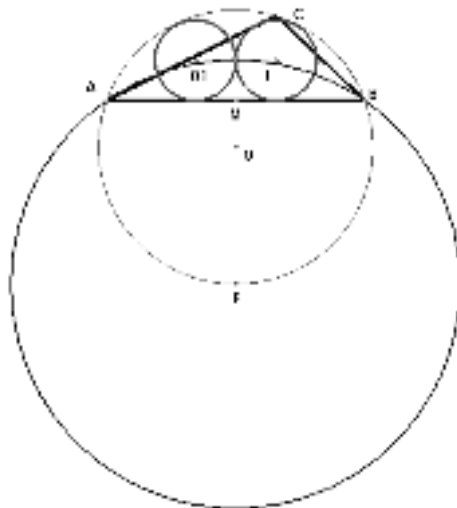
Solutions to the problem sections volume 3, numbers 3 and 4

Problem 35 (Floor van Lamoën)

Let two congruent circles (O_1) and (O_2) be tangent to each other, to segment AB and to the circumcircle of triangle ABC , in such a way that O_1, O_2 and C lie on the same side of AB . Prove that the point of contact of (O_1) and (O_2) is concyclic with A, B and the incenter I of ABC .

Solution Solved by A.J.Th. Maassen and by Floor van Lamoën. Let O be the circumcenter and P the point of contact of (O_1) and (O_2) . Let F be the midpoint of the arc AB opposite to C and let M be the midpoint of AB . Denote the radius of (O_1) as r and let s be the

length of MO . Then in the triangle OO_1P we find that $(R - r)^2 = r^2 + (r - s)^2$ which gives $r = s - R + \sqrt{2R(R - s)}$ where we used the fact that r is positive. From this we see that $FP = r - s + R = \sqrt{2R(R - s)}$. On the other hand $MB^2 = R^2 - s^2$ and $MF = R - s$ so that $FB = FP$. Recall that a quadrilateral $ABCD$ is inscribed in a circle if and only if opposite angles are complementary. Since $AFBC$ is in (O) the angles F and C are complementary. This implies that $APB = AIB$ so $APIB$ is on (F) .



Problem 36

Let k be a positive integer, and write $n = 4k + 1$. Prove that $(n^n - 1)/(n - 1)$ is not a prime number.

Solution The only interesting case is n is prime. Let z be a primitive n -th root of unity. Then $(n^n - 1)/(n - 1)$ is equal to the norm $N(n - z)$. Now $\sqrt{n} \in \mathbf{Q}(z)$ so $n - z = a^2 - b^2$ for two elements of $\mathbf{Q}(z)$. Then $N(n - z) = N(a + b)N(a - b)$ is a non-trivial factorization.

Problem 37 (Open problem)

Does there exist a continuous surjection $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ such that every convex set has a convex image?

Solution This problem remains open. See e.g., Pach and Rogers, Partly convex Peano curves, Bull. London Math. Soc. 15 (1983), no. 4, 321–328.

Problem 38

Let $S = 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, \dots$ be the set of positive integers that are proper powers. Evaluate the sum $\sum_{s \in S} \frac{1}{s-1}$.

Solution Dick Tjaden recognizes this as an identity of Jan Kristian Hauglund as communicated through the internet. The sum equals 1 and Hauglund has a very cute argument. Let s denote an integer ≥ 2 and let σ be equal to $\sum_{s \in S} \frac{1}{s}$. All series below converge.

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{s \notin S} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \dots = \sum_{s \notin S} \frac{1}{s(s-1)} = 1 - \sum_{s \in S} \frac{1}{s(s-1)} \\ &= 1 - \sum_{s \in S} \frac{1}{s(s-1)} = 1 - \sum_{s \in S} \left\{ \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \right\} = 1 - \sum_{s \in S} \frac{1}{s-1} + \sigma. \end{aligned}$$

So the sum equals 1. The true identity of σ remains unknown, but its appearance is appreciated.

J. Groeneveld gives the following solution. Let S be the set of proper powers and let T be the complement of S in the set of integers > 1 . If $t^m = s^k$ for $t, s \in T$ then m is a multiple of k since the order of the prime divisors of t has gcd 1. By symmetry $s = t$. So every element of S is a proper power of a unique element of T and we may write

$$\sum_{n \in S} \frac{1}{n-1} = \sum_{n \in S} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} = \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{t \in T} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{t^{qm}}$$

Since $\{t^m : t \in T, m \in \mathbf{N}\}$ equals the set of integers > 1 we rewrite this sum as

$$\sum_{q=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^q} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

This is a telescopic series that adds up to 1.

Problem 39 (M. Bencze)

Let $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ be a differentiable function for which $f(x^2) + f(y^2) \leq 2f(\sqrt{xy})$. Prove that $f(1) - f(\frac{1}{e}) \leq \int_0^1 \sqrt{x} f'(x) dx$.

Solution Ruud Jeurissen shows that f is trivial, assuming only that f is continuous in 0. Let $0 \leq z < 1$. Taking $x = \sqrt{z}$, $y = 0$ we see that $f(z) \leq f(0)$. Taking $x = y = z$ we see that $f(z^2) \leq f(z)$. So the $f(z^{2^n})$ form a non-increasing sequence. Its limit is $f(0)$ and all terms are $\leq f(0)$, so f is a constant function, and the inequality to prove is $0 \leq 0$, which is left to the reader.

Problem 40 (Matthé van der Lee)

For $t, m \in \mathbf{N}$, let $b_m(t) = \binom{tm-1}{t-1}$, let $a(t)$ be a sequence of natural numbers and let $n \in \mathbf{N}$ be fixed. Verify the equivalence of the following statements:

- For all $t|n$ we have that $\sum_{d|t} a(d) = 0 \pmod t$
- For all $t|n$ there is an $m \in \mathbf{N}$ such that $\sum_{d|t} a(d)b_m(t/d) = 0 \pmod t$
- For all $t|n$ and $m \in \mathbf{N}$ we have that $\sum_{d|t} a(d)b_m(t/d) = 0 \pmod t$

Solution By Matthé van der Lee. Let G be a finite group of order tm acting on the family $X = \{T \subset G : |T| = t\}$ by translation. Then T is fixed by g if and only if it is a union of cosets. In particular $o(g)|t$. Denote $d = t/o(g)$. Then g has exactly

$$\binom{dm}{d} = m \binom{dm-1}{d-1}$$

fixed points in X , provided that $d|t$. Apply Burnside's Lemma to find

$$\sum_{d|t} b_m(d)w(t/d) = 0 \pmod t$$

where $w(k)$ denotes the number of points of order k in G .

Consider the set A_n of all functions $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ endowed with the usual ring structure of addition and convolution. An element f is a unit if and only if $f(1)$ is a unit in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. In particular, the functions b_m and w above are units in A_n . Consider the set R_n of all functions that satisfy $f(t) = 0 \pmod t$ if $t|n$. It is subring of A_n and if $f \in R_n$ is a unit in A_n then it is a unit in R_n as well.

Let $E(t) = 1$ for all $t \in \mathbf{N}$ and let μ be the Möbius function. We have to show the equivalence of $a * E \in R_n$ and $a * b_m \in R_n$. If $f \in R_n$ then also $f * E \in R_n$ and, since E is a unit with inverse μ , if f is a unit so is $f * E$. Observe that $w * E \in R_n$ where w is the function defined above. Now

$$a * E = a * b_m * (b_m * w)^{-1} * (w * E) \in R_n,$$

which demonstrates the equivalence of the statements.

Oplossingen

Uitslag Editie 2002/3

De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

	<i>Naam</i>	A	B	C	<i>Totaal</i>
1.	Team Hendrik Hubrechts (Leuven)	8	9	11	115
2.	Team Gerben Stavenga (Utrecht)	8	9	10	110
3.	Filip de Smet (Gent)	8	5	8	84

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie

We vermelden alleen de top 5. Voor de complete ladderstand verwijzen we naar de UWC-website.

	<i>Naam</i>	<i>Punten</i>
1.	Roelof Oosterhuis	356
2.	Team Hendrik Hubrechts	238
3.	Mark Veraar	208
4.	Jan Maas	200
5.	Team Filip Cools	199

Reglement

De Universitaire Wiskunde Competitie is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina <http://academics.its.tudelft.nl/uwc>

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Er worden drie editieprijs toegekend, van 100, 50 en 25 Euro. De puntentotalen van winnaars tellen voor 0, 50 en 75 procent mee in de laddercompetitie. De aanvoerder van de ladder ontvangt een prijs van 100 Euro en begint daarna weer onderaan. Daarnaast wordt twee maal per jaar een ster-opgave aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend.

Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in L^AT_EX wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 augustus 2003. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

Optiver