

Inhoud | Contents

282	Colofon
283	Redactioneel <i>Derk Pik</i>
284	Agenda
286	Nieuws
291	In memoriam Herman Duparc <i>E. van Spiegel</i>

Oratie | Inaugural lecture

294	Het denken bevorderen <i>Anne van Streun</i>
-----	--

Onderzoek | Research

302	Analysis of survival data <i>Svetlana Borovkova</i>
308	Automatic summation using Zeilberger-Wilf theory <i>Andries Brouwer</i>
313	A greenhouse growth model for unselfish roses <i>Nick Ovenden, Vivi Rottschäfer</i>

Recreatieve Wiskunde | Recreational Mathematics

320	Set! <i>N.G. de Bruijn</i>
326	Het zeven-kaartenprobleem <i>Hans van Ditmarsch</i>

Onderwijs | Education

333	Wiskundedidactiek in Nederland: de opbrengst <i>Fred Goffree</i>
-----	--

Opinie | Opinion

346	XML workflow in de praktijk <i>Rob Schrauwen</i>
-----	--

Boeken | Books

350	Dichtung und Wahrheit <i>Friedrich Katscher</i>
353	Boekbesprekingen

Problemen | Problem section

372	Universitaire Wiskunde Competitie
375	Problemen

Rubrieken | Departments

317	TeX <i>Michael van Hartskamp</i>
319	From the Big Apple <i>Sandjai Bhulai</i>
348	Oud Archief <i>Danny Beckers</i>
349	Instroom <i>Erwin van den Brink</i>

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
<http://www.math.leidenuniv.nl/~naw>

Hoofredactie

Ger Koole (koole@cs.vu.nl)
Chris Zaal (zaal@math.leidenuniv.nl)

Eindredactie

Derk Pik (drpik@math.leidenuniv.nl)

Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@wens.kun.nl)
Hans Melissen (j.b.m.melissen@its.tudelft.nl)
Jaap Molenaar (j.molenaar1@tue.nl)
André Ran (ran@cs.vu.nl)
Bert Zwaneveld (Bert.Zwaneveld@ou.nl)

Bureauredactie

Jos Brakenhoff (naw@math.leidenuniv.nl)
Annelies Hafkenscheid (naw@math.leidenuniv.nl)

Medewerkers

Danny Beckers (dbeckers@sci.kun.nl)
Wieb Bosma (bosma@sci.kun.nl)
J.A.W. van Casteren (vcaster@uia.ua.ac.be)
Jan van de Craats (jcr@euronet.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@its.tudelft.nl)
Michael van Hartkamp
(michael@vanhartkamp.com)

Geertje Hek (ghek@science.uva.nl)
Teun Koetsier (teun@cs.vu.nl)
Joop Kolk (kolk@math.uu.nl)
Pieter Moree (moree@science.uva.nl)
Jan van Neerven (j.vanNeerven@its.tudelft.nl)
Mark Peletier (mark.peletier@cwil.nl)
Hans Sterk (sterk@win.tue.nl)
Jaap Top (j.Top@math.rug.nl)

TeX-ondersteuning

Marco Boon (m.a.a.boon@tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@its.tudelft.nl)

Abonnementstarieven/Subscription rates

Nederland € 90 (4 nummers)
Buitenland € 105 (4 issues)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Exchange subscriptions

Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam

Bladmanager/Advertenties

Reinie Ern  (erne@math.leidenuniv.nl)
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101

Vormgeving

Kitty Molenaar, Amsterdam

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEX)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Wiskundig Genootschap

Het Wiskundig Genootschap is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. Het genootschap werd in 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Het is 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap.

Leden van het Wiskundig Genootschap ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het Wiskundig Genootschap bedraagt € 70 per jaar en gepensioneerden betalen € 35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden tegen het gereduceerde tarief van € 25 per jaar.

Leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO kunnen aanspraak maken op een gereduceerd tarief van € 50.

Members of the Société Mathématique de France, and of the American, Australian, Belgian, Indian, London and South-African Mathematical Societies pay € 50 instead of the full membership fee of € 70 a year.

Homepage

<http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Eduard Looijenga (UU, *voorzitter*), Mark Peletier (CWI, *secretaris*), Luc Florack (TUE, *penningmeester*), Harm Bakker (RUG), Geertje Hek (UvA), Metha Kamminga (NHL), Annette Kik (CWI), Jaap Molenaar (TUE, UT), Michel Vellekoop (UT), Koos Vrieze (UM).

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient u elektronisch aan te bieden aan de hoofdredactie: koole@cs.vu.nl
Uitgebreidere informatie en auteursinstructies kunt u vinden op de homepage:
<http://www.math.leidenuniv.nl/~naw>

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	uiterste inleverdatum kopij
1	10-03-2003	06-12-2003
2	09-06-2003	07-03-2003
3	05-09-2003	06-06-2003
4	08-12-2003	08-09-2003

Instituutsleden

De publicaties van het Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen.



Centrum voor Wiskunde
en Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit

Op het omslag

Set! is een gezelschapsspel voor jong en oud, gebaseerd op de vectorruimte $(F_3)^4$. Zie verder pagina 320.

Kennis zonder kosten

Deze zomer bezocht ik een operatorentheorie workshop aan Virginia Tech, een grote technische universiteit (25000 studenten). Op een avondwandeling kwamen we langs een winkelcentrum waar in een grote hal honderden splinternieuwe computers stonden opgesteld. Studenten deden hier allerlei cursussen voor beginners, zoals calculus en lineaire algebra. Het bleek dat ze deze vakken geheel met de computer moesten voltooien, zonder college en zonder practicum. De vakken werden ook per computer getentamineerd.

De financiële voordelen van zo'n aanpak zijn groot: dure docenten die de colleges en de practica moeten verzorgen worden uitgespaard. Het is onderwijs op z'n allerindividueelst waarbij de student niet leert om vragen te stellen of te communiceren over wiskunde. Dat is jammer, want daar zijn bètastudenten vaak niet goed in.

In september van dit jaar is het Massachusetts Institute of Technology (MIT) gestart met het *OpenCourseWare* (OCW) project. Het OCW is een initiatief om alle cursussen die op het MIT worden gegeven op internet te plaatsen (zie <http://ocw.mit.edu>). Het gaat om alle cursussen; dit zijn er ongeveer 2000 in totaal, van wiskunde tot politicologie. Het doel van het project is het creëren van een goed toegankelijke website waar het cursusmateriaal gratis beschikbaar is voor mensen in de non-profitsector, voor studenten en mensen die aan zelfstudie doen.

Het project is in 1999 begonnen en voor de initialisatie alleen al was elf miljoen dollar beschikbaar. Dit geld is afkomstig uit twee particuliere stichtingen. Op dit moment zijn er achtendertig cursussen beschikbaar, waarvan vier voor wiskundeonderwijs. In maart 2003 moeten er 250 cursussen klaar zijn en in september 2003 vijfhonderd. Volgens plan moet een steady state bereikt worden in 2007. Op de site is te lezen dat het iedereen vrij staat om het materiaal naar eigen inzicht aan te passen voor bijvoorbeeld gebruik bij eigen onderwijs.

De lijst van reeds beschikbare cursussen is al indrukwekkend, zeker als je als eerste de calculus-cursus bekijkt. Dit is een ambitieus op internet opgezet dictaat, dat ruim is voorzien van prachtige java-applets en opgaven met aanklikbare oplossingen. Als je echter kijkt bij complexe functietheorie haal je opgelucht adem: dit vak wordt gewoon met een boek gegeven. Ook deze cursus is heel goed verzorgd; elke week moeten de studenten een se-

rie vraagstukken maken. De oplossingen zijn mooi gedrukt en in een apart bestand aan te klikken. Je vindt hier ook algemene berichten voor studenten die prettig informeel overkomen: "Te laat inleveren van huiswerk wordt niet geaccepteerd!" Zulke opmerkingen horen eigenlijk op deze site niet thuis. De site wil alleen al het onderwijsmateriaal op het MIT laten zien.

Het is niet de bedoeling van het MIT om een studie via internet te doen. Je krijgt geen contact met stafleden en je kunt je opgaven niet inleveren. De achterliggende gedachte van de site is het tegengaan van de privatisering van kennis. MIT president Charles M. Vest noemt het OpenCourseWareproject een tegen-intuïtieve activiteit in een door markten aangestuurde wereld. Het is gratis en mondiaal beschikbare kennis. Hij is niet bang dat zich minder studenten bij het MIT zullen inschrijven; hij denkt juist dat de openheid van de site studenten zal aantrekken.

Natuurlijk wordt op bijna alle universiteiten onderwijs via internet aangeboden. Vorig jaar vond een groot onderzoek in Israël plaats over het effect van computergebruik op de lagere en middelbare school (zie de *Economist*, 26 oktober 2002). De prestaties van klassen met en zonder computer werden vergeleken voor de vakken Hebreeuws en wiskunde. Het effect van de computerondersteuning was gering. Een echt negatieve invloed werd echter gemeten voor het basisonderwijs. Omdat het onderwijs over een heel jaar werd gevolgd, denken de onderzoekers dat onwennigheid met computers niet de oorzaak is. Zij wijten het effect vooral aan een gebrek aan kwaliteit van de computerondersteuning. Hun conclusie: het kost veel en het effect is twijfelachtig.

Het MIT initiatief is echter gericht op het vrij beschikbaar maken van al het onderwijsmateriaal. Dit heeft vooral een ordenend effect en maakt de opzet van het onderwijs transparant. Voor buitenstaanders is het inspirerend om te kunnen rondneuzen in het lesmateriaal van andere universiteit, en zeker van een gerenommeerde. Ik kan u aanraden de wiskunde- en natuurkunde-applets te bekijken.

Derk Pik eindredacteur Nieuw Archief voor Wiskunde

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Postbus 9512, 2300 RA Leiden,

drpik@math.leidenuniv.nl



Agenda

december 2002

16–18 december

❑ Winter school on financial mathematics

Special Topics: Credit Risk and Calibration

plaats Oegstgeest

info <http://remote.science.uva.nl/~spreij/stieltjes/winterschool2002.html>

16–18 december

❑ Twente conference on Lie groups

plaats Universiteit Twente

info www.math.utwente.nl/~lie

17 december

❑ Lerarendag

Ons wiskundeonderwijs: nu en in de toekomst. Sprekers zijn onder andere Jan de Lange en Anne van Streun.

plaats RuG, Groningen

info www.math.rug.nl/didactiek/doc.dag.html

18 december

❑ Studiedag: Maken van de website

Cursus voor wiskundeleraars om een website te maken speciaal voor gebruik op school.

plaats APS Utrecht

info www.aps.nl/wiskunde/L6.htm

januari 2003

9 januari

❑ Eerste Reehorstconferentie wiskunde

Conferentie voor leraren basisvorming, vmbo en havo/vwo met als thema de leerling.

plaats Ede

info www.aps.nl/wiskunde/K1.htm

11 januari

❑ Wintersymposium

Thema: Wiskunde in Techniek. Zie ook de nieuwsrubriek.

plaats Johan van Oldenbarneveltdt Gymnasium, Amersfoort

info www.cs.rug.nl/~bakker/WG

14–16 januari 2003

❑ 28th Conference on the Mathematics of Operations Research

Met op de 16de een seminar over 'New developments in Operations Research software'.

plaats Conferentie Centrum De Werelt, Lunteren

info www.math.leidenuniv.nl/~lnmb/conferences/lunteren2003

15–17 januari

❑ 21ste Panama-conferentie

Conferentie voor het primair rekenonderwijs.

Thema: hoe om te gaan met grote verschillen in begaafdheid.

plaats Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/panama

15–17 januari

❑ Fifth international workshop on computational semantics

Topics: computational aspects of formal semantic theories, theoretical issues in building natural language understanding systems.

plaats Tilburg

info <http://let.kub.nl/research/TI/sigsem/iwcs>

15–18 januari

❑ Statistical learning in classification and model selection

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl/announcements.htm

17 januari

❑ Nederlandse Wiskunde Olympiade

De eerste ronde van de jaarlijkse wiskunde wedstrijd voor leerlingen uit de bovenbouw van de middelbare school.

plaats Middelbare scholen in Nederland

info <http://olympiads.win.tue.nl/nwo>

21–25 januari

❑ Nationale Onderwijs Tentoonstelling

Vakbeurs voor alle vormen van onderwijs. Activiteiten: een expositie, diverse congressen, workshops en onderzoekspresentaties.

plaats Jaarbeurs, Utrecht

info www.not-online.nl

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

29 januari

❑ **Studiedag: Applets naar je hand zetten**

Computercursus waar geleerd wordt hoe een bestaande applet in een website kan worden opgenomen en hoe een dynamische meetkundefiguur in Cabri wordt ontwikkeld.

plaats APS Utrecht

info www.aps.nl/wiskunde/L7.htm

31 januari

❑ **Analyse symposium**

Symposium ter ere van de tachtigste verjaardag van Jaap Korevaar.

plaats Agnietenkapel, Amsterdam

info <http://staff.science.uva.nl/~janwieg/jaap80.html>

31 januari–1 februari

❑ **Nationale Wiskunde Dagen**

Conferentie voor wiskundeleraren. Onderwerpen: cryptografie, wiskunde en zeevaart, modelleren, statistiek en sport, filosofie in de wiskunde, wiskunde op het vmbo.

plaats Leeuwenhorst Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/nwd

februari 2003

7 februari en 3 april

❑ **Mastercourse voor docenten**

Het realiseren van een onderzoek dat door leerlingen uitgevoerd kan worden. De cursus 'Stilstaan bij lopen' gaat over de onderwerpen: hoe snel kun je eigenlijk lopen, bestaat er een ideale stapfrequentie?

plaats FNWI, Korteweg-de Vries Instituut, Amsterdam

info www.nvww.nl/Agenda2.html

17–21 februari

❑ **Studiegroep wiskunde met de industrie**

Wiskundigen werken aan vraagstukken uit de industrie en het bedrijfsleven. Zie ook de nieuwsbrief.

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.math.leidenuniv.nl/~swi

maart 2003

20–21 maart

❑ **Nationale Rekendagen**

Thema's: realistisch rekenonderwijs, rekenonderwijs voor zwakke rekenaars en ICT-werkgroepen.

plaats Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/rekenweb/rekendagen

21 maart

❑ **Kangoeroe wedstrijd**

Wiskundewedstrijd voor het voortgezet onderwijs en groepen 7 en 8 van het basisonderwijs.

plaats Middelbare scholen in Nederland

info www-math.sci.kun.nl/math/kangoeroe

april 2003

15 april

❑ **Statistische dag 2003**

Jaarlijks congres van de Vereniging voor statistiek en operationele research (VVS).

plaats Vrije Universiteit, Amsterdam

info www.vvs-or.nl

24 april

❑ **Conferentie ICT in het wiskundeonderwijs**

Thema's: voorbeelden uit de klassenpraktijk van de basisvorming, vmbo en Tweede Fase, overzicht van de actuele stand van zaken, integratie van applets in de bestaande wiskunde methoden.

plaats APS, Utrecht

info www.aps.nl/wiskunde/K2.htm

mei 2003

1–2 mei

❑ **Nederlands Mathematisch Congres**

Openingsvoordracht: Robin Hartshorne.

Slotvoordracht: Robbert Dijkgraaf.

plaats Katholieke Universiteit Nijmegen

info www-math.sci.kun.nl/nmc2003

12–16 mei

❑ **Minicourse on Public Key Cryptography**

Minicourse door Victor Shoup van het Courant Institute, New York University

plaats EIDMA

info www.win.tue.nl/math/eidma/courses

17 mei

❑ **Symposium IX: Historische Kring Reken- en WiskundeOnderwijs**

plaats Hogeschool Domstad, Utrecht

info ed@fi.uu.nl

juni-augustus 2003

28 juli–2 augustus

❑ **Conference diophantine approximation**

Symposium ter ere van de zestigste verjaardag van Robert Tijdeman, gewijd aan hoogtepunten van zijn werk.

plaats Lorentz Center, Leiden

info <http://www.lc.leidenuniv.nl/lorentz.center>

18–29 augustus

❑ **15th European summer school in logic, language and information**

plaats Wenen, Oostenrijk

info www.folli.uva.nl/2003/esslli-2003.html

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur dan uw bijdrage ($\pm$ 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar naw@math.leidenuniv.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Wintersymposium 11 januari 2003

Zoals vanouds organiseert het Wiskundig Genootschap op een van de eerste zaterdagdagen in het kalenderjaar haar Wintersymposium. Dit symposium is bedoeld voor docenten uit het voortgezet onderwijs, maar iedere belangstellende is van harte welkom. De bedoeling van het Wintersymposium is het contact tussen leraren en wiskundigen uit de academische wereld en het bedrijfsleven te onderhouden en te verstevigen.

Het komende symposium zal op 11 januari 2003 gehouden worden in het Johan van Oldenbarnevelt Gymnasium in Amersfoort en heeft als thema *wiskunde in techniek*. In een drietal voordrachten belichten ervaren sprekers facetten van een gekozen thema.

In de eerste voordracht laat Jaap Molenaar zien dat op grond van de fysische dimensies in een model kan worden bepaald of sommige conclusies wel en andere niet uit het model kunnen worden afgeleid. Bijvoorbeeld: kan uit de baan van een regeldruppel op het raam van een trein de snelheid van de trein worden afgeleid? Dimensie-analyse geeft op deze vraag zonder rekenwerk onmiddellijk antwoord.

Een modern probleem is het volgende: kunnen we een zoekmachine op internet een plaatje van een voorwerp aanbieden, waarna de machine informatie over dit voorwerp opzoekt? Patrick Oonincx schetst welke modellen en technieken gebruikt kunnen worden om een dergelijke zoektocht op internet in bepaalde omstandigheden daadwerkelijk te realiseren.

In de afsluitende lezing leren we dat de putjes in een golfbal er niet alleen zijn om de speler meer grip te geven als hij het balletje op wil pakken, maar dat het alles te maken heeft met turbulentie. Een aantal technieken die nodig zijn bij het numeriek benaderen van turbulentie worden door Roel Verstappen uitgelegd.

Het programma begint om 9.30 uur en eindigt om 14.30 uur. Er is een gezamenlijke lunch gepland. Deelname aan het symposium is gratis. Wie wil deelnemen aan de gezamenlijke lunch wordt verzocht voor 25 december 2002 8 euro over te maken op gironummer 3762917 t.n.v. H. Bakker te Marum. Meer informatie: <http://www.wiskgenoot.nl>

Harm Bakker

Verdwijnt de Nijmeegse wiskundeopleiding?

De Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica overweegt om al per 2003 de opleiding wiskunde aan de Katholieke Universiteit Nijmegen te beëindigen. De faculteit is in grote financiële problemen door bezuinigingen van de overheid en door (interne verrekening van) de kosten voor huisvesting. Naar aanleiding van de cijfers, uitgedeeld door de onderwijsvisitatie-commissie bij wiskunde (zie het septembernummer van NAW), hebben College van Bestuur en Faculteitsbestuur bij monde van decaan en bioloog Wendelaar Bonga uitgesproken er geen vertrouwen in te hebben dat de huidige medewerkers van het Mathematisch Instituut in staat zijn een kwalitatief volwaardige wiskunde-opleiding te verzorgen. Omdat daarom de gewenste groei van het aantal eerstejaars niet te verwachten valt, zal een deel van de (naar verwachting circa vijftig) ontslagen die nodig zullen zijn in de faculteit bij wiskunde vallen. Wiskunde zal dan alleen nog in een instituut voor service-onderwijs voortbestaan.

Het bestuur van de Faculteit Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica van de Universiteit Nijmegen heeft het *Voorlopig voorname tot reorganisatie* openbaar gemaakt. Het beschrijft hoe de benodigde 4 miljoen per jaar (op een budget van 37 miljoen euro) bezuinigd moet worden: er is "gekozen voor een plan waarbij enkele taken van de

faculteit tot een minimum worden teruggebracht. Dit plan omvat een faculteitsbrede reorganisatie waarin het onderwijs- en onderzoeksprofiel verder wordt aangescherpt, en de onderdelen/afdelingen die daarvoor minder wezenlijk zijn worden opgeheven dan wel sterk worden ingekrompen en geïntegreerd in afdelingen die wel wezenlijk zijn voor het nagestreefde profiel." Uit de rest van het stuk blijkt dat hier wordt bedoeld op twee afdelingen, namelijk Technische Zaken en de subfaculteit Wiskunde.

In de conclusies voor het onderwijsprofiel staat "Ten opzichte van de huidige situatie zal de personele omvang van de subfaculteit wiskunde aanzienlijk worden gereduceerd; dit voornemen is gebaseerd op de beperkte belangstelling voor de wiskundestudie alsmede de slechte resultaten van de onderwijsvisiteatie wiskunde, gevoegd bij de noodzaak tot drastische bezuinigingen. De faculteitsleiding onderzoekt de mogelijkheden tot voortzetting van de bacheloropleiding wiskunde met een beperkte personele formatie. Daarnaast dient het wiskunde-onderwijs aan de andere opleidingen zoveel mogelijk te worden gecontinueerd. Voor wat betreft de masteropleiding wordt de mogelijkheid onderzocht om een beperkt aanbod te ontwikkelen op het terrein van de computerwiskunde en dit in te brengen bij de geplande landelijke masteropleiding wiskunde." Wat het onderzoeksprofiel betreft: "De capaciteit en breedte van het wiskundig onderzoek dient te worden beperkt. Hierbij zullen het symbolic computing onderzoek en het wiskunde-onderzoek dat van belang is voor het profielbepalende onderzoek binnen de andere facultaire disciplines zoveel mogelijk worden ontzien." Noch wat onderwijs betreft, noch met betrekking tot onderzoek worden andere bèta-vakken expliciet genoemd. Uit het lijstje cijfers blijkt vervolgens dat al in gang gezette bezuinigingen en goedkopere nieuwbouw 1 miljoen moeten opleveren, net als kortingen op loonkosten van alle medewerkers en extra 'strategische' bezuinigingen samen, terwijl de overige 2 miljoen moet komen van Technische Zaken en Wiskunde, elk 1 miljoen per jaar. Volgens de interne rekenmethode kost de huidige subfaculteit wiskunde ongeveer 1.8 miljoen euro per jaar (als de vorige bezuinigingsronde is voltooid); dat moet terug naar ongeveer 0.8 miljoen. In deze kosten zitten ook de financiering van bibliotheek, meubilair, en de huur en onderhoud van gebouwen et cetera, zodat als vuistregel gebruikt wordt dat het ontslaan van 10 medewerkers bij wiskunde circa 1 miljoen per jaar uitspaart.

Wieb Bosma

Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2003

Van 17 tot en met 21 februari 2003 vindt aan het Lorentz Center van de Universiteit Leiden de vijfenvierdige Europese Studiegroep Wiskunde met de Industrie plaats. Tijdens de Studiegroep zullen wiskundigen zich storten op industriële en bedrijfsvraagstukken. In een week van brainstormen en wiskundig modelleren zal door een groep van wiskundigen een eerste aanzet worden gemaakt tot het oplossen van de problemen. In de eerste plaats is dit samenwerken aan een probleem uit het bedrijfsleven heel erg leuk! Ook is het een goede manier voor wiskundigen, jong en ouder, om in aanraking te komen met het bedrijfsleven en om het gebruik van wiskundig modelleren in het bedrijfsleven te bevorderen. Een aantal beschrijvingen van problemen die behandeld zijn in de vorige Studiegroep zijn al verschenen in vorige edities van het Nieuw Archief.

Een aantal problemen is reeds bekend: de groei van oesters in de Oosterschelde, de flexibiliteit van vluchtschema's van de KLM en het voorspellen van de spreiding van leegstaande huizen. Registratie en informatie: www.math.leidenuniv.nl/~swi

Nick Ovenden, Derk Pik, Vivi Rottschäfer

5e internationale congres voor industriële en toegepaste wiskunde

Het vijfde internationale congres voor industriële en toegepaste wiskunde de *ICIAM 2003* zal in Sydney worden gehouden van 7 tot 11 juli. Er zullen ongeveer 2000 wiskundigen aan deelnemen. Onderwerpen die uit elk gebied van de wiskunde komen vinden hun plaats in dit zeer grote congres. Er worden zes andere conferenties voor en na dit congres georganiseerd.

In het bijzonder wordt de *Australian-New Zealand Mathematics Convention*, het jaarlijkse congres van de Australische en Nieuw-Zeelandse wiskundige genootschappen gehouden. Het Wiskundig Genootschap heeft een reciprociteitslidmaatschap met de Australian Mathematical Society. Hendrik Lenstra heeft voor het jaar 2003 de Mahler leerstoel van de Australian Mathematical Society aanvaard. In deze rol zal hij ook op dit congres een lezing geven.

De vorige congressen van de ICIAM 2003 vonden plaats in Parijs (1987), Washington (1991), Hamburg (1995) en Edinburgh (1999). Meer informatie: www.iciam.org

Derk Pik

Mathematikum Giessen

In het Duitse Giessen is het *Mathematikum* geopend door bondspresident Rau. Dit wiskundig 'Mitmachmuseum' heeft een tentoonstellingsruimte van 500 m², en meer dan 40 speciaal ontworpen wiskundige experimenten. Zie: <http://www.math.de>.

Gerard Koolstra, Wiskunde PersDienst



Escher in het Paleis

Minister-president Balkenende heeft zaterdagmiddag 16 november een nieuw museum in Den Haag geopend dat geheel gewijd is aan het oeuvre van de vermaarde graficus Maurits Cornelis Escher (1898–1972) onder de naam *Escher in het Paleis*. Het museum is gevestigd in het voormalige woon- en werkpaleis van koningin Emma aan de Haagse Lange Voorhout.

Het nieuwe museum besteedt naast een uitgebreide opstelling van de grafische werken veel zorg aan een actuele presentatie van het werk van Escher. Zo is er een speciaal Virtual Reality programma ontwikkeld waarin Peter Faber een rondleiding geeft door het

werk van Escher. Verder is er een Foto Shoot kamer gebouwd waarin op monitoren zichtbaar wordt hoe onderlinge verhoudingen visueel omgedraaid worden, zodat een vader kleiner lijkt dan zijn kind.

Gerard Koolstra, Wiskunde PersDienst

Biografie van L.E.J. Brouwer op de AKO longlist

Onlangs is de pocketeditie verschenen van de biografie van L.E.J. Brouwer, de Nederlandse wiskundige die aan de basis heeft gestaan van onder andere de topologie en het intuïtionisme. De auteur Dirk van Dalen geeft een genuanceerd beeld van Brouwers leven, dat een tijdperk omvatte waarin zich de twee wereldoorlogen hebben afgespeeld. In de landelijke pers is de biografie zeer lovend ontvangen.

Enige perscitaten: Arnold Heertje (Vrij Nederland): "Negatieve le-gendevorming heeft de geniale wiskundige L.E.J. Brouwer veel kwaad gedaan. Dirk van Dalen behandelt hem in zijn biografie met gepaste afstand en wijsheid." Michael Zeeman: "De gedachtevorming vindt als het ware opnieuw plaats onder onze ogen. Een plezier om te lezen." In het juninummer van dit jaar van het Nieuw Archief verscheen een bespreking van Willem Schaafsma.

In september werd deze biografie geplaatst op de longlist van de AKO-literatuurprijs 2002. Deze grote belangstelling laat zien dat wiskunde ook in het Nederlandse culturele leven er toe doet. Meer informatie: <http://www.ako.nl>

Derk Pik



De succesvolle pocketeditie van de biografie

Arjan Van der Schaft IEEE Fellow

Het Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) heeft de Twentse hoogleraar Arjan van der Schaft benoemd tot Fellow. De ingenieursorganisatie reikt hem op 12 december 2002 de onderscheiding uit tijdens een congres in Las Vegas. Van der Schaft, hoogleraar Wiskundige Systeem- en Besturingstheorie aan de faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica, krijgt de erkenning vanwege zijn onderzoek naar niet-lineaire systemen. In totaal wordt jaarlijks wereldwijd niet meer dan eentiende procent van de IEEE-leden benoemd tot Fellow. Dat hij juist als toegepast wiskundige is benoemd in dit gezelschap, vindt Van der Schaft een extra erkenning.

Arjan van der Schaft (47) studeerde Wiskunde in Groningen. Sinds

1982 is hij werkzaam aan de Universiteit Twente, waar hij sinds 2000 hoogleraar Wiskundige Systeem- en Besturingstheorie is. Internationaal heeft Van der Schaft een grote reputatie opgebouwd in met name de theorie van de niet-lineaire systemen. Hij heeft tientallen artikelen geschreven over modellering van fysische systemen en besturingssystemen. De IEEE (www.ieee.org) is een organisatie met wereldwijd bijna 400.000 leden in 150 landen, en geeft onder meer een aantal gerenommeerde vaktijdschriften uit. Elk jaar benoemt de organisatie een zeer beperkt aantal van haar Senior Members tot Fellow. Dit jaar zijn er wereldwijd 259 Fellows benoemd. Behalve naar Van der Schaft ging de eer dit jaar naar drie andere in Nederland werkzame onderzoekers, van de TU Delft en Philips Research.

bron: Universiteit Twente

Stichting 108+ hoogleraren

Op 10 september 2002 hebben de onderwijsspecialisten van zeven van de negen fracties in de Tweede Kamer een petitie van *Stichting 108+ hoogleraren* aangeboden gekregen van de voorzitter drs. H. van Aken-van de Leur. Samen met Henk Barendregt, aan wie kortgeleden de Spinozaprijs is toegekend, representeren zij mensen in en buiten het onderwijs. Zij hebben zich tot de volksvertegenwoordiging gewend, omdat de kwaliteitsbewaking van examens en diploma's dreigen te gaan worden uitbesteed aan de scholen zelf. Dat zal voor alle, of althans vele, scholen tot verdere niveauverlaging leiden. Stichting 108+ hoogleraren wil voor het lopende cursusjaar duidelijkheid hebben van de Minister van O.C.&W., mevrouw Maria van der Hoeven, over de vraag wie er verantwoordelijk is voor de examens en de diploma's: de Minister, de inspectie of de leiding van de middelbare scholen. De Stichting verzoekt de onderwijsspecialisten hierover vragen te stellen aan de Minister.

Hier volgt de tekst van de petitie 'Onderwijsmanifest 27 juni 2002: Investeren in waardevaste landelijke diploma' die op 10 september werd aangeboden aan de vaste commissie van Onderwijs.

"Er is een ernstige crisis in het Voortgezet Onderwijs. Door de overladen programma's kunnen leerlingen onvoldoende aandacht geven aan ieder vak apart en is de leerstof over de hele linie 'infantiel' geworden. Hierdoor haken zowel leerlingen als leraren af. Het niveau van de opgaven van het centraal schriftelijk eindexamen is navenant bedroevend laag. Desondanks worden deze examens met de grootste soepelheid nagekeken, zodat de diploma's hun waarde verliezen. Er dreigt dat alleen op scholen met draagkrachtige ouders goed onderwijs gegeven zal worden. Dit schaadt het algemeen maatschappelijk belang. Deze situatie is ontstaan door het regeringsbeleid waarin steeds minder belang aan de centrale examens wordt toegekend. Daarnaast heeft de Minister het advies van de SER overgenomen waarin de docenten tot taak krijgen een maximaal aantal leerlingen op te nemen in het havo/vwo en door te laten stromen naar het Hoger Onderwijs. Daar moet de selectie plaatsvinden, terwijl door de output-financiering ook bij deze instellingen de druk hoog is veel studenten te laten slagen. De mythe die erop zou wijzen dat het goed gaat met het onderwijs en de examens in Nederland berust op misleidende informatie. Zo gaat het rapport van de Onderwijsinspectie over de kwaliteit van de examens (2001) niet over vakinhoudelijke kwaliteit, maar vrijwel alleen over de scores. Kansen die studenten krijgen behoren onafhankelijk te zijn van de draagkracht van de ouders. Wij pleiten voor waardevaste landelijke diploma's op welke school dan ook behaald, met een Ministeriële verantwoordelijkheid. Wij vragen aan de leden van de Tweede Kamer hun vertegenwoordigende en controlerende rol waar te maken en krachtig in te grijpen."

Maria Rietdijk-Helmer

Ledenadministratie WG verhuisd

De ledenadministratie van het WG is met ingang van 1 december 2002 verhuisd van Utrecht naar Meppel.

Van oudsher werd de ledenadministratie van het WG gedaan op het Mathematisch Instituut in Utrecht, de laatste jaren door Corrie van Os. Omdat de ledenadministratie steeds ingewikkelder werd, heeft het WG-bestuur besloten de ledenadministratie uit te besteden aan Uitgeverij Ten Brink.

Het nieuwe adres is: Mirjam Worst, Uitgeverij Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel. Telefoon: 0522-855175, fax: 0522-855176. E-mail: admin@wiskgenoot.nl

Luc Florack, Mark Peletier, Chris Zaal

EMS-leden gezocht

De EMS is de organisatie achter de vierjaarlijkse Europese Mathematische Congressen (waarvan we hopen dat de vijfde in 2008 in Amsterdam zal plaatsvinden) en de prijzen voor jonge Europese wiskundigen, die bij deze gelegenheden worden uitgereikt. Jong betekent niet ouder dan 32 op het moment van ontvangst. Zij het dat deze leeftijdsgrens binnenkort verhoogd wordt naar 34.

De leden krijgen een paar keer per jaar een Newsletter. Voorts geeft de EMS het wetenschappelijke tijdschrift *Journal of the EMS* uit. De organisatie is nu bezig een 'publishing house' in het leven te roepen (vergelijkbaar met de AMS) dat kan concurreren met de commerciële wetenschappelijke uitgevers. Verder probeert ze in Brussel poot aan de grond te krijgen om de toewijzing van EU-subsidies transparanter te maken. Zie: <http://www.emis.de> voor meer informatie.

De EMS wil niet in de plaats komen van de nationale genootschappen en daarom is de contributie bescheiden. Maar om de taken die zij zich gesteld heeft uit te kunnen voeren is het dan wel nodig dat veel leden van die genootschappen zich hiervoor aanmelden. Wat dat aangaat, is enig missiewerk in Nederland zinvol, want van de in totaal 1402 WG-leden zijn er slechts 33 EMS-lid. WG-leden kunnen zich via de ledenadministratie opgeven als EMS-lid.

Eduard Looijenga

Spinoza-premie voor Henk Barendregt

Henk Barendregt, hoogleraar in de Grondslagen van de Wiskunde en de Informatica aan de Katholieke Universiteit Nijmegen, heeft de Spinoza-premie 2002 ontvangen: de belangrijkste wetenschappelijk prijs in Nederland. De Nederlandse Organisatie van Wetenschappelijk Onderzoek (NWO) verleent hem de prijs van anderhalf miljoen euro vanwege zijn buitengewone prestaties op het terrein van de wiskunde, logica en informatica.

De wiskundige logicus Henk Barendregt (1947) opereert op het grensvlak van wiskunde, logica en informatica. Zijn internationale reputatie verwierf hij door baanbrekend werk op het gebied van de zogeheten *lambda-calculus*. Hij wordt mondiaal beschouwd als de meest gezaghebbende onderzoeker op dit gebied. De resultaten van het onderzoek zijn niet alleen van theoretisch belang voor de informatica, maar ook voor de ontwikkeling van nieuwe software die de betrouwbaarheid van computersystemen verhogen. Barendregts monografie *The lambda-calculus, its syntax and semantics* wordt beschouwd als het meesterwerk op het gebied van de ongetypeerde *lambda-calculus* en kent vertalingen in onder andere het Russisch en Chinees.

In het juryrapport van NWO wordt Barendregt niet alleen geroemd om zijn 'technische ontdekkingen', maar ook in 'het ontdekken van revolutionaire nieuwe betekenis in resultaten van anderen.' Of zoals een

referent het zegt: "Vergelijk hem met een diamantbewerker. Hij onthult aspecten aan de steen waarvan de diamantgraver nooit had kunnen dromen." Aan de KU Nijmegen is hij gekend als een inspirerend onderzoeksleider. Hij bezit de gave om complexe zaken eenvoudig weer te geven: het bestaand onderzoek krijgt zijn plaats, hij zoekt dwarsverbanden met andere onderzoeksgebieden en benoemt belangrijke nieuwe gebieden voor toekomstig onderzoek.

De afgelopen vier jaar werkte Barendregt actief samen met onderzoekers van het Nijmeegs Instituut voor Cognitie en Informatie en het F.C. Donders Centrum aan modellen van het menselijk brein. Hij probeert wiskundige begrippen toe te passen op theorieën over de algemene werking van de menselijke geest. Dit is ingebed in zijn algemene wereldbeeld waarin het boeddhisme een centrale rol speelt. Opmerkelijk is zijn uitspraak in het maandblad *Natuur en Techniek* (april 2001) dat als hij het boeddhisme op jongere leeftijd had gevolgd, hij nu misschien monnik zou zijn in plaats van hoogleraar.

Henk Barendregt studeerde wiskunde aan de Universiteit Utrecht en behaalde reeds op twintigjarige leeftijd cum laude het eindexamen. Na zijn promotie, ook cum laude, op het gebied van de *lambda-calculus* werkte hij na een jaar Stanford bij het Utrechtse Mathematisch Instituut. Vanaf 1986 is Barendregt hoogleraar aan de Katholieke Universiteit Nijmegen.

bron: Katholieke Universiteit Nijmegen



Henk Barendregt

Tuning educational structures

In 1999 in Bologna zijn de ministers van onderwijs van 29 Europese landen overeengekomen een bachelor-masterstructuur in te voeren. In 2001-2002 is een project *Tuning Educational Structures in Europe* uitgevoerd, waarin binnen een zevental disciplines op opleidingsniveau voorstellen zijn ontwikkeld voor de afstemming van opleidingen in Europa. Het project was een samenwerking van 101 universiteiten en was mede mogelijk gemaakt door financiële steun van de EU. Een van de disciplines was de wiskunde en ondergetekende was lid van de wiskundegroep van het project. De wiskundegroep zag het als haar belangrijkste taak om gemeenschappelijke uitgangspunten en doelstellingen van bachelor- en masteropleidingen te formuleren en daarmee de studentenmobiliteit in Europa te bevorderen. In de groep was grote eenstemmigheid hierover en de ideeën staan beschreven in het document *Towards a common framework for Mathematics degrees in Europe* (zie <http://www-math.sci.kun.nl/math/~keune>).

Het document is niet meer dan de gezamenlijke visie van de leden

van de wiskundegroep. Wel is *Tuning* het enige project op deze schaal en dat zal van invloed zijn op de waarde die aan dit document wordt gehecht. Nu in Nederland het opleidingsaanbod in de exacte vakken in de Bachelor-Masterstructuur wordt gegoten, is het van belang dat deze plannen sporen met het op gang gebrachte proces van afstemming binnen Europa. Dit document kan daarbij nuttig zijn.

Een gemeenschappelijk deel bestaat uit analyse/calculus en lineaire algebra. Er wordt niet een lijst van verplichte onderwerpen voorgesteld, maar van bachelors wiskunde mag wel worden verlangd dat zij in zekere mate in staat zijn een bewijs te begrijpen, wiskundig te modelleren en problemen met wiskundige middelen op te lossen. Verder zou in de bacheloropleiding met minstens een toepassingsgebied kennis gemaakt moeten worden. Buiten het basisdeel en zeker in de Masteropleiding moeten grote verschillen mogelijk blijven, vooral door de vele mogelijke verbindingen met andere disciplines. *Frans Keune*

Meisjes beter in wiskunde dan jongens

Volgens het examenverslag 2002 van het Cito scoorden meisjes bij het laatste Centraal Schriftelijk wiskunde A1,2 en B1 gemiddeld significant beter dan jongens. Ook bij wiskunde B1 op het havo scoorden meisjes beter dan jongens, maar bij wiskunde A1,2 was het net andersom. Bij de andere wiskundevakken was er geen significant verschil te bespeuren. Bij de examens vbo/mavo waren de resultaten van de jongens belangrijk beter dan die van de meisjes.

Deze trend is met name in Engeland al een tijdje gaande. Daar maakt men zich inmiddels ernstig zorgen over de achterblijvende resultaten van jongens. Voor meer informatie zie het examenverslag vbo/mavo/havo/vwo 2002 op de internetpagina <http://www.cito.nl/vo/ce/verslag/exverslago2.pdf> *Gerard Koolstra, Marja Bos*

Tetris

Recent onderzoek van drie computerwetenschappers van het MIT (Boston) heeft aangetoond dat Tetris een ontzettend ingewikkeld spel is, wanneer je geïnteresseerd bent in een optimale strategie. Het probleem is 'NP-compleet', evenals het beroemde handelsreizigersprobleem en een optimale aanpak van een ander bekend computerspelletje — mijnenvegen. Dit betekent — heel kort gezegd — dat je een efficiënt algoritme om Tetris spelen wel kunt vergeten. Meer informatie: <http://wiskgenoot/wpd> *Gerard Koolstra, Wiskunde PersDienst*



Ere-doctoraat voor Jacob Murre

Woensdag 2 oktober heeft de universiteit van Turijn vier *Lauree Honoris Causa* aan algebraïsch meetkundigen uitgereikt. Dit is het Italiaanse equivalent van een ere-doctoraat. Deze uitreiking vond plaats geduren-

de de conferentie ter herdenking van het feit dat vijftig jaar geleden de Italiaanse meetkundige Gino Fano (1871–1952) overleed. De vier laureaten zijn H. Clemens, V. A. Iskovskikh, S. Mori en J.P. Murre.

Clemens en Murre kregen hun laurea voor het bewijs van het irrationaal zijn van het kubische drievoud in karakteristiek 0, respectievelijk groter dan 2. Iskovskikh en Mori kregen hun laurea voor hun bijdragen aan de classificatie van Fano drievouden. Mori (winnaar van een Fields medaille in 1990) kreeg zijn laurea mede voor zijn bijdrage aan de classificatie van hoger dimensionale variëteiten (het Mori-programma). Gedurende de conferentie gaf Mori overigens toe, dat er nog een ontbrekend geval was in zijn classificatie van Fano drievouden.

Het resultaat van Clemens en Murre is het volgende, geformuleerd in het speciale geval van de complexe getallen. Neem een polynoom $F(w, x, y, z)$ van graad 3 (die aan zekere technische voorwaarden voldoet). Dan is de verzameling $\{(w, x, y, z) \in C^4 \mid F(w, x, y, z) = 0\}$ niet te parametriseren met rationale functies, dat wil zeggen, met functies die het quotiënt van twee polynomen zijn.

Een gedeelte van het werk van Murre aan het bewijs van deze stelling vond plaats gedurende 1971–1972, toen er in Warwick een speciaal jaar gewijd aan de algebraïsche meetkunde plaats vond. Gedurende dit speciale jaar leerde hij Alberto Conte uit Turijn kennen. In de daarop volgende periode hebben zij gezamenlijk veel onderzoek verricht, onder andere hebben zij het bewijs voor het Hodge vermoeden voor een klasse van vier dimensionale variëteiten geleverd. Daarnaast is er een hechte vriendschap tussen deze twee meetkundigen ontstaan.

Remke Kloosterman



Eredoctoor Jacob Murre

Erratum septembernummer 2002

In de introductie van "How to grow a mathematical model", pagina 110, staat "De studiegroep is een initiatief van Stichting Wiskunde Toegepast (STW) ...". Dit moet zijn: "De Studiegroep Wiskunde met de Industrie wordt gesubsidieerd door Wiskunde Toegepast, een gezamenlijk programma van de Technologiestichting STW en het Gebiedsbestuur Exact van NWO."

De eindredactie

E. van Spiegel

Hoenwaardseweg 15-a

8051 SH, Hattem

In memoriam Herman Duparc (1918–2002)

Een drievoudig leven

Wederom is ons een wiskundige ontvallen die in de eerste na-oorlogse uitbreidingsgolf van de subfaculteiten en onderafdelingen der wiskunde van onze universitaire instellingen werd benoemd tot hoogleraar. Op 1 juli jongstleden overleed prof. dr. H.J.A. Duparc, die van 1956 tot 1984 als hoogleraar in de zuivere en toegepaste wiskunde en de mechanica was verbonden aan de Technische Hogeschool Delft, thans Technische Universiteit Delft geheten.

Herman Johan Arie Duparc werd op 29 april 1918 geboren in een Amsterdams gezin dat tot de gegoede burgerij behoorde. In de biografische schets van haar leven beschrijft Duparc's zeven jaar oudere zuster Else Atie Franken-Duparc hoe Franse conversatie en pianospel van de vader sfeerbepalend waren in de huiselijke kring. Duparc verloor zijn vader reeds op vierjarige leeftijd. Het gezin bleef in een tamelijk moeilijke financiële situatie achter. De moeder, die onderwijzeres was geweest, slaagde er met ondersteuning van haar schoonzuster in haar twee begaafde kinderen de voor hen aangewezen middelbare en universitaire opleidingen te laten volgen. Duparc doorliep het gerenommeerde Barlaeus gymnasium, waar hij in 1936 het gymnasium bèta-diploma behaalde.

Zijn uitzonderlijke begaafdheid voor wiskunde kwam tijdens zijn middelbare schooltijd al tot uiting. In één van de *WFH* verzamelkranten over leven en werk van Willem Frederik Hermans vindt men een tabel met de overgangcijfers van klasse V-bèta, waarin Duparc op eenzame hoogte met een 10 voor wiskunde prijkt. Cornelia Hermans, de zuster van Willem

Frederik was een klasgenoot van Duparc. Tijdens zijn middelbare schooltijd werd Duparc sterk gestimuleerd door zijn wiskundeleraar Van Hasselt. Bij diverse gelegenheden heeft Duparc uiting gegeven aan zijn dankbaarheid jegens deze voortreffelijke leraar.

In 1936 begint de studie van wiskunde aan de Gemeente Universiteit van Amsterdam, waar hij onder andere colleges volgt van Brouwer, Mannoury, De Vries, Freudenthal en Weitzenböck. In 1939 behaalt hij zijn kandidaatsexamen met het predikaat cum laude. Op 10 mei 1940 neemt Duparc zich voor tentamen aan te vragen bij Weitzenböck in het vak differentiaalvarianten. Weitzenböck was in de jaren twintig benoemd in Amsterdam om les te geven in de veldentheorie. Weitzenböck was Oostenrijker van geboorte en had gedurende de eerste wereldoorlog gediend in het Oostenrijkse leger. Aan die oorlogsepisode had hij een diepe afkeer overgehouden van de Fransen. Toen Duparc op genoemde datum op het Mathematisch Instituut verscheen trof hij daar niet aan Weitzenböck, maar wel Freudenthal, die nogal somber gestemd was en voorspelde dat het Mathematisch Instituut gedurende de oorlog wel gesloten zou blijven. Daarop besloot Duparc zoveel mogelijk thuis te studeren en daartoe zo snel mogelijk aan studiegenoten uitgeleende dictaten terug te halen. Als laatste bezocht hij op 14 mei een collega in de Zuider-Amstellaan (thans Rooseveltlaan), waar hij hoorde over de radio dat de Koningin en de regering naar Engeland waren uitgeweken. Het heette dat ieder die dat ook zou lukken, daar welkom zou zijn. Thuiskomende besloot hij een poging te wagen, zich daarbij een brief van Engelse familie herinne-



Herman Duparc (1918–2002)

rende, waarin stond: "Why don't you all come to England".

Op 14 mei 1940 begaf Duparc zich per fiets naar IJmuiden en wist zich een plaats te verwerven op één van de laatste schepen die nog naar Engeland wisten te ontkomen. Op het moment dat hij ons land verliet speelde voor hem nadrukkelijk dat hij aldus ontkwam aan de aanstaande Duitse bezetting, doch had hij uiteraard geen enkele voorstelling over wat hem te wachten stond tijdens "een zesjarige reis om de wereld in oorlog", zoals hij jaren later zijn oorlogsherinneringen aan de hand van gemaakte aantekeningen vastlegde.

Een beknopte weergave van een aantal hoofdmomenten tijdens deze zesjarige reis is onontbeerlijk om zich enigszins een beeld te vormen van de persoon van Duparc.. Op 20 september 1940 vertrok Duparc uit Liverpool op weg naar Indië. Een sollicitatie naar een leraarsbaan op Java bij het Ministerie van Koloniën had succes gehad. Na enkele dagen op zee werd het schip ten westen van Ierland door een Duitse duikboot getorpedeerd. Vele opvarenden kwamen om, doch een aantal, waaronder Duparc, werden door een Canadese destroyer uit zee opgepikt en na enkele dagen ergens in Schotland aan wal gezet. Op 6 oktober vertrok Duparc ten tweede maal uit Liverpool en arriveerde tenslotte op 3 december in Priok. Reeds negen dagen later kon Duparc beginnen aan de bekende Koning Willem III school in Batavia. Tijdens deze eerste kennismaking als leraar ontving hij veel steun van zijn collega Leeman, die sommige oudere wiskundigen zich ongetwijfeld zullen herinneren van de Middelbare Akte examens voor wiskunde. Precies een jaar na zijn eerste verschij-

ning voor de klas werd Duparc gemobiliseerd en ingedeeld in het Koninklijk Nederlands-Indisch Leger, het zogenaamde K.N.I.L. om na korte tijd in Japanse krijgsgevangenschap te geraken. Na een verblijf in diverse kampen op Java werd Duparc op 14 januari 1943 in het ruim van een Duits schip geladen, getransporteerd naar Singapore, en vandaar naar het kamp Rin Tin aan de beruchte Burma spoorweg vervoerd. Zijn ervaringen aan de Burma spoorweg zijn opgetekend in het boek *Werkers aan de Burma spoorweg* van H.L. Leffelaar en E. van Witsen.

Op 29 mei 1944 vertrok Duparc, nu in omgekeerde richting, weer naar Singapore om op 6 juni 1944, juist het begin van de invasie in Normandië, te worden ingescheept voor Japan. In Japan is hij veroordeeld tot dwangarbeid in mijnen die tot het Mitsubishi concern behoren. Na het vallen van de tweede atoombom op Nagasaki capituleert Japan op 15 augustus 1945 en breekt ook voor Duparc na zes jaren van ontberingen tenslotte ook de vrijheid aan. Demobilisatie en repatriëring naar Nederland nemen nog een hele tijd in beslag. Eerst op 17 februari 1946 is Duparc terug in Holland. In zijn nuchter oorlogsrelaas verhaalt Duparc hoe hij er telkens weer in slaagt onder de meest bizarre omstandigheden zijn kennis van de wiskunde verder uit te bouwen en soms zijn kennis over te dragen aan lotgenoten. Zelfs in een hospitaalkamp in Burma studeert hij er lustig op los, zoals hij zelf noteert. Dit geeft enerzijds blijk van een sterke overlevingsdrang en anderzijds van een doorzettingsvermogen teneinde de noodgedwongen achterstand in zijn studie zoveel mogelijk te beperken.

Terug in Holland vat Duparc onmiddellijk weer de draad van het normale leven op. In zijn oorlogsrelaas zegt hij zelfs met zoveel woorden: "Sinds het eerste levensteken van thuis op 30 september 1945 voelde ik me dolgelukkig en liet alle verdere na-oorlogse ellende me eigenlijk koud." Deze zinsnede tekent treffend het toenmalige tijdsbeeld waarin er geen tijd en plaats was voor reflectie op oorlogservaringen, maar alleen herstel en wederopbouw aandacht verdienden. Voor Duparc betekende dat zo snel mogelijk de studie afmaken en een baan zoeken. Op 1 april 1946 wordt Duparc student-assistent bij prof. Van der Corput, die zijn leerstoel in Groningen had verwisseld voor die in Amsterdam, teneinde zijn krachten voor een belangrijk deel te kunnen wijden aan de opbouw van het in 1946 opgerichte Mathematisch Centrum.

Tijdens dit student-assistentschap ontwikkelde zich een hechte samenwerking met Van

der Corput. Zo vervulde hij niet alleen allerlei onderwijsverplichtingen zoals het afnemen van tentamens voor Van der Corput, maar was hij ook behulpzaam bij het samenstellen van het deel over wiskunde in het tweedelige werk *Geestelijk Nederland 1920-1940* onder redactie van dr. K.F. Proost en prof. dr. Jan Romein. Vooral deze laatste ervaring kwam goed van pas toen vele jaren later Duparc, nu samen met zijn Delftse collega Grootendorst opnieuw een retrospectie gaf op de wiskunde beoefening in Nederland in het interbellum, naar aanleiding van het 200 jarig bestaan van het Wiskundig Genootschap. In de jaren 1946 en 1947 publiceerde Duparc een drietal artikelen, waarvan twee tezamen met Van der Corput in de Proceedings van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Deze wetenschappelijke prestatie, zo snel na zulke ingrijpende oorlogsbelevissen wijst er op dat de wetenschappelijke potentie van Duparc door de zes barre oorlogsjaren nauwelijks had geleden. In januari 1950 sloot Duparc zijn studie af met het doctoraal examen, wederom cum laude. Direct daarna, op 1 februari 1950 trad hij in dienst van het Mathematisch Centrum als medewerker van de afdeling zuivere wiskunde. Tijdens de zes jaren dat hij verbonden was met het Mathematisch Centrum was hij wetenschappelijk gezien zeer productief. Hij publiceerde tal van artikelen, veelal in de vorm van rapporten van het Mathematisch Centrum. Diverse rapporten werden geschreven samen met zijn collega's Peremans en Lekkerkerker. Ook ontwikkelde zich een vruchtbare werkkrelatie met Van Wijngaarden, die zich juist in die tijd bezighield met de ontwikkelingen van de eerste Nederlandse rekenmachine. In feite zette Van Wijngaarden Duparc op het spoor van de recurrente rijen, hetgeen uiteindelijk resulteerde in zijn proefschrift *Divisibility properties of recurring sequences* waarop Duparc cum laude promoveerde bij Van der Corput.

Gedurende de jaren 1950-1955 trad hij regelmatig op als docent bij avondcursussen, die verzorgd werden door het Mathematisch Centrum, onder andere in de algebra en analytische meetkunde, functietheorie en differentierekening. Tevens werd hij belast met het geven van onderwijs aan de Universiteiten van Amsterdam, Utrecht en Leiden in verband met het verblijf van verschillende hoogleraren van die Universiteiten in het buitenland.

Het lag dan ook zeer voor de hand dat in 1956 de benoeming tot hoogleraar in de zuivere en toegepaste wiskunde en de mechanica aan de Technische Hogeschool in Delft volgde. Hoewel het oogmerk van de benoe-

ming betrof het verzorgen van het algemene wiskunde-onderwijs voornamelijk in de propaedeutische fase van de diverse ingenieursopleidingen, was het voor Duparc gezien zijn brede kennis van de wiskunde tevens aangewezen een duidelijke rol te vervullen in de juist in het jaar van zijn benoeming gestarte opleiding voor wiskundig ingenieur. Zijn ruime geverseerdheid in de wiskunde manifesteert zich nog eens in zijn bijdrage aan het driedelige *Handboek der Wiskunde* onder redactie van Kuipers en Timman, waarin Duparc drie onderwerpen voor zijn rekening neemt: functietheorie, differentierekening en discrete processen. Zijn langjarig hoogleraarschap kenmerkt zich door zijn voorliefde voor het geven van onderwijs en zijn nimmer aflatende bereidheid tot het geven van wiskundige ondersteuning aan studenten en medewerkers van de onderscheiden studierichtingen. Meerdere jaren is Duparc betrokken bij onderwijs en onderzoek ten behoeve van de groep rondom prof. Oberman, de hoogleraar schakeltechniek in de Afdeling Electrotechniek. Met vrucht kan men daar zijn voordeel doen met de bijzondere expertise, zoals die wordt weerspiegeld in zijn dissertatie en in tal van zijn publicaties.

Doch Duparc is niet éénkennig wat de wiskunde betreft. Altijd is hij bereid zich te verdiepen in het specifieke karakter van de benodigde wiskunde voor de diverse technische disciplines. In het milieu van de Technische Hogeschool ontwikkelt Duparc zich meer en meer tot raadsman op het gebied van het wiskunde-onderwijs. In de roerige jaren zeventig weet hij het vertrouwen te winnen van de Afdeling der Bouwkunde en daar nog wat wiskunde te doceren, niettegenstaande de heersende neiging de wiskunde maar te elimineren in het curriculum.

Naast de eigen afdeling Wiskunde is Mijnbouwkunde Duparc's meest favoriete afdeling. Dit gevoel van verbondenheid heeft natuurlijk iets te maken met zijn gedwongen kennismaking met de mijnarbeid tijdens de oorlogsjaren. Duparc neemt talrijke malen deel aan de jaarlijkse kennismakingsexcursie voor eerstejaarsstudenten aan een mijn. Docenten en studenten bij Mijnbouwkunde vormen traditioneel een hechte gemeenschap. Op volkomen natuurlijke wijze integreert Duparc in deze gemeenschap. Dit leidt tenslotte tot zijn benoeming tot gouden erelid van de Mijnbouwkundige Studievereniging, een onderscheiding die hoogst zelden wordt toegekend. Naast zijn normale taak als hoogleraar vervult Duparc ook talrijke bestuurlijke functies. Zo is hij onder meer betrokken bij het

Universitair Asylfonds afdeling Delft; de Taalcommissie, die zorg draagt voor cursussen in diverse talen voor studenten en medewerkers; treedt hij op als regelaar voor de propaedeutische examens, hetgeen in Delft met de veelheid van ingenieursopleidingen geen sinecure is.

Eind jaren zestig is Duparc lid van diverse commissies, die beogen de onderlinge verhoudingen in de hogeschoolgemeenschap zo vreedzaam mogelijk te houden. Door zijn belangstelling voor wiskunde-onderwijs in het algemeen raakt hij ook betrokken bij landelijke commissies die zich buigen over meer algemene vraagstukken zoals aansluitingsproblemen tussen diverse onderwijsvormen en dergelijke.

Vele jaren is Duparc actief betrokken in het werk van de Nederlandse Onderwijscommissie van het Wiskundig Genootschap. Hier bemoeit hij zich intensief met de Wiskunde Olympiade voor middelbare schoolleerlingen. Dikwijls fungeert Duparc als begeleider van de jeugdige deelnemers bij de tocht naar verre oorden, waar de Olympiade plaats zal vinden. Tijdens één van deze Olympiades, namelijk die in Hongkong, bewerkstelligt hij een tocht van de Nederlandse delegatie naar de Burma spoorweg, waarbij hijzelf optreedt als gids. Naast de min of meer professionele activiteiten spelen nog een aantal andere zaken die het leven van Herman Duparc kleuren.

Tijdens de roerige tijden aan de universiteiten rondom 1970 voltrekt zich een opmerkelijke verandering in Duparcs opvattingen en gedragingen. Was hij tot dan een hoogleraar die zich in zijn optreden nauwelijks onderscheidde van zijn collega's, met als enige uitzondering misschien het gebruik van de spelling van De Vries en Te Winkel, tijdens de omwentelingen ontpopt hij zich tot iemand die vol begrip is voor de opstandige studenten. Hij heeft een zekere sympathie voor anti-autoritaire opvattingen, hetgeen niet altijd door collega's wordt geapprecieerd. Uitingen, zowel in woord als in uiterlijk, doen vermoeden dat zijn oorlogservaringen een rol spelen bij deze opmerkelijke verandering in geesteshouding. Doordat hij begrip kan opbrengen voor ongewone opvattingen en daarbij geholpen door zijn relativiseringsvermogen en zijn humor, dikwijls in de vorm van woordgrapjes, is hij in staat een brugfunctie te vervullen tussen groeperingen, die drastische veranderingen willen doorvoeren en zij die aan het oude vertrouwde zoveel mogelijk willen vasthouden. Duparc is geen revolutionair, integendeel. Hij verstaat de kunst om personen, die tegenstrijdige meningen er op na houden

'on speaking terms' te laten blijven.

De voor Duparc zo kenmerkende ruimheid van denken wordt nog eens beklemtoond door twee merkwaardige ontmoetingen. In 1988 bezoekt Duparc in Stuttgart de Duitse duikbootkapitein, die in augustus 1940 het schip torpedeert waarmee hij op weg was naar Indië. Een foto van deze ontmoeting symboliseert deze unieke verzoening. In het eerder genoemde boek *Werkers aan de Burma spoorweg* staat een beschrijving van Duparcs eerste terugkeer in 1977 naar de beruchte spoorbaan. Door deze weergave, die doorspekt is met tal van diepzinnige vergelijkingen, kan men misschien iets beter aanvoelen wat deze oorlogsperiode voor Duparc heeft betekend. Bij één van de volgende reizen in 1979 naar de onheilsplek komt een ontmoeting tot stand tussen Duparc en een Japanner, die als soldaat aan de spoorlijn werkte. Het verhaal van deze ontmoeting wordt door een Japanse journalist, wiens opgave het is te schrijven over "Waar onze vaders vchten", gepubliceerd in Yomiuri Shinbun, een Japans dagblad.

Naast de wiskunde en zijn oorlogsgeschiedenis is er nog een belangrijke activiteit die de veelkleurigheid van Duparcs leven bepalen. Reeds op jeugdige leeftijd koesterde hij een grote belangstelling voor alles wat met het tramwezen te maken heeft. Vele jaren is hij intensief betrokken bij de activiteiten van de Nederlandse Vereniging van Belangstellenden in het Spoor- en tramwegwezen. Hij wordt eerst lid van deze vereniging na terugkeer uit het Verre Oosten, voordien vond hij de vereniging te veel een spoorwegclub.

Na zijn toetreding verwerft hij spoedig een grote faam als kenner van de tramwegen in Nederland en Nederlands-Indië. Hij publiceert in een lange reeks van jaren meer dan honderd artikelen in het verenigingsorgaan *Op de rails*. Opvallend is het grote aantal dat handelt over onderdelen en facetten van de Amsterdamse tram. Buiten het normale patroon vallen een tweetal artikelen over de Burma spoorweg, teneinde in een door hem geconstateerde leemte te voorzien. Ook publiceert hij een vijftal boeken onder andere over de elektrische stadstrams op Java en de Amsterdamse paardentrams.

Zijn laatste boek verschijnt in 2000 onder de titel *Een eeuw elektrische exploitatie van de tram in Amsterdam*. Dit bijzondere cijferboek, zoals Duparc dit boek zelf benoemt, onderstreept nog eens zijn affiniteit tot getallen en cijferreeksen. In 1965 zag Duparc zijn grote wens in vervulling gaan met de oprichting van de Tramwegstichting, die zich bezig houdt



In 1994 bracht Herman Duparc (in het midden) met de Nederlandse deelnemers aan de Wiskunde Olympiade een bezoek aan de begraafplaats van de slachtoffers van de Burma spoorweg.

met het behouden, restaureren en laten rijden van oud trammaterieel. Duparcs activiteiten bleven niet beperkt tot het verzamelen van een overvloed aan documenten, maar bestond ook uit het verrichten van lichamelijke arbeid in de vorm van het hem niet onbekende grondverzet.

Met het verscheiden van Herman Duparc verliest wiskundig Nederland een begaafd wiskundige, die vele generaties ingenieurs als een aimabele leermeester heeft onderwezen in talrijke onderdelen van de wiskunde; verliest de kleiner wordende kring van overlevenden van de oorlog in het Verre Oosten een man die in staat was als een soort waarnemer zijn ervaringen in de kampen in Nederlands-Indië, in Burma en in Japan helder en met een zekere mildheid uit te beelden en verliest de Nederlandse Vereniging van Belangstellenden in het Spoor- en tramwegwezen een archivaris en historicus die door zijn jarenlange arbeid van bijzondere betekenis zal blijven voor de Vereniging.

Dankwoord

De auteur is dank verschuldigd aan de heer J.W.A. Jekel van de Nederlandse Vereniging van Belangstellenden in het Spoor- en tramwegwezen, de heer drs. J.M. Notenboom van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap en prof. dr. A.W. Grootendorst, emeritus hoogleraar van de Technische Universiteit Delft voor de door hen verschaft informatie.

Anne van Streun

Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen

Universitair Centrum voor de Lerarenopleiding

Rijksuniversiteit Groningen

a.van.streun@fwn.rug.nl

Inaugurele rede

Het denken

Anne van Streun is zijn carrière in de wiskunde in 1964 als docent op een middelbare school begonnen. Op 18 december 2001 heeft hij het ambt van hoogleraar in de didactiek van de wiskunde en natuurwetenschappen aan de Rijksuniversiteit Groningen aanvaard. Hij is altijd zeer betrokken geweest bij de kwaliteit van het wiskunde onderwijs op de middelbare school. Op de website www.fwn.rug.nl/betaplus/staf/vanStreun/oratie.html is een forumdiscussie te volgen naar aanleiding van de invoering van de Tweede Fase havo-vwo en de voortgaande uitholling van de bètavakken. Dit is een verkorte weergave van zijn inaugurele rede; de gehele tekst met literatuurverwijzingen zijn op bovengenoemde website te lezen.

Traditioneel wordt er in de onderwijskundige en didactische literatuur veel aandacht besteed aan de werkvormen in het onderwijs. Zo gaan publicaties over het studiehuis in de Tweede Fase havo-vwo meer over werkvormen dan over de *onderwijsdoelen*, die met de voorgestelde werkvormen worden nagestreefd. Wat wil je eigenlijk bereiken? In sommige onderwijskundige kringen is het trendy om de werkvorm *doceren* af te zetten tegen *samenwerken* aan projecten of communiceren in een *digitale leeromgeving*, zoals onze universitaire *Nestor*. De boodschap is dat mensen nu eenmaal niet lang geconcentreerd kunnen luisteren en daarom heeft klassikale instructie of een hoorcollege zelden een waardevol leereffect. Een niet erg stimulerende gedachte voor een spreker die zijn oratie aan het voorbereiden is.

Aan het begin van dit Academisch jaar werd de socioloog Abram de Swaan erin de NRC door zijn eigen collegevoorzitter van de Universiteit van Amsterdam, de heer S. Noorda, op gewezen dat hij zijn hoorcolleges maar wat moest opwaarderen met PowerPoint presentaties, korte zinnen en grappen (Noorda, de Swaan, 2001). Alsof het niet gaat om de *functie* van een hoorcollege in het geheel van het onderwijs. Ik denk bij functie aan het oriënteren, het stellen van een probleem, het verhelderen, het bieden van overzicht, het inspireren van de studenten, (Mettes en Pilot 1980, Arends 1998, Cruickshank & Metcalf 1994). Ook

bij een wervelende multimedia show met beamer en PowerPoint is het *nadenken* over de inhoud en het gewenste leereffect op het gehoor niet overbodig.

Dat brengt mij op mijn keuze voor de werkvorm en de hulpmiddelen bij deze oratie. Van mijn kant is er geen interactie met het gehoor gepland, ik zie af van het inzetten van beamer en overheadprojector en daarmee ook van de vaak zo fraaie visualisaties of simulaties en ik heb hier zelfs niet de beschikking over een bord en een krijtje, waarmee als regel het doceren in onze faculteit wordt ondersteund. Nog erger, ik mag er ook niet vanuit gaan dat u pen en papier bij de hand hebt om mijn voorbeelden uit te werken of aantekeningen te maken. En groepswork ligt in deze zaal ook niet voor de hand...

Ondanks deze handicap streef ik er naar om u, mijn gehoor, tot *actief meedenken* te verleiden. Het *denken bevorderen*, dat is ook het doel van deze oratie. In mijn betoog maak ik onderscheid tussen het *denken* over het onderwijs, over de kwaliteit van het onderwijs en over de onderwijsvernieuwing aan de ene kant en aan de andere kant het bevorderen van *het denken als leerdoel* in het onderwijs. Het gaat over de basisvorming, de Tweede Fase havo-vwo en de nieuwe Bachelor-Master structuur voor het hoger onderwijs. En natuurlijk over de leerdoelen en de didactiek van het onderwijs in de wiskunde en natuurwetenschappen.

Een goede didactiek beperkt zich niet tot abstracties en verbaal geweld, maar werkt met voorbeelden. Authentieke voorbeelden om over na te denken en wellicht algemene lering uit te trekken. Ik hoop dat ik u door die voorbeelden inderdaad tot actief meedenken kan verleiden.

Heit en Kees

Het wordt tijd voor een voorbeeld. Het heeft tot doel u te laten meedenken over leerdoelen die de *reproductie van basiskennis* overstijgen. Ik neem u mee naar het Friese platteland tijdens de Tweede Wereldoorlog. De hoofdpersonen in dit authentieke



Anne van Streun

bevorderen

ke verhaal zijn Heit (mijn Friese schoonvader) en Kees (zijn oudste zoon, mijn zwager). Niet lang nadat Heit op heel hoge leeftijd was overleden, legde Kees mij het volgende probleem voor. In mijn eigen woorden beschrijf ik nu de context. Heit woonde in de Tweede Wereldoorlog met zijn vrouw en vijf kinderen in Leeuwarden. Voor de oorlog vertegenwoordigde hij in Friesland de firma Insulinde, die koffie, thee en cacao produceerde en direct leverde aan wederverkopers. In de oorlog handelde hij in van alles en nog wat en kon zo regelmatig op het platteland wat extra levensmiddelen voor zijn gezin aankopen. De zakken aardappelen waren het lastigst om langs de Duitse controles te smokkelen, dus dat ging 's nachts in het pikkedonker. Samen op de ene fiets die het gezin nog had, trokken Heit en Kees er dan op uit, soms tientallen kilometers ver, om de aangekochte zak aardappelen Leeuwarden binnen te smokkelen. Nu komt het probleem. *“Heit en Kees kunnen op de terugweg niet samen met de zak aardappelen op één fiets. Heit beslist daarom als volgt over de logistiek op de terugweg. Eerst fietst Heit een aantal kilometers met de zak aardappelen, terwijl Kees loopt. Dan zet Heit de fiets met de zak aardappelen langs de weg tegen een boom of hek en loopt zelf door. Kees ziet vervolgens de fiets staan en fietst met de zak aardappelen door totdat hij Heit heeft ingehaald. Dan neemt Heit de fiets over en fietst weer verder, enzovoort”* De onopgeloste vraag waar Kees na vijftig jaar nog steeds mee zat was de volgende: *“Maakt het wat uit hoe lang die perioden van fietsen en wandelen zijn? Maakt het sowieso wat uit dat wij stukje bij beetje fietsten en liepen? Had het beter gekund?”* U begrijpt dat in die tijd de gezagsverhoudingen zo waren dat Kees zijn twijfel over de gekozen strategie niet als een open vraagstelling aan de groep kon voorleggen.

Een slecht gedefinieerd probleem

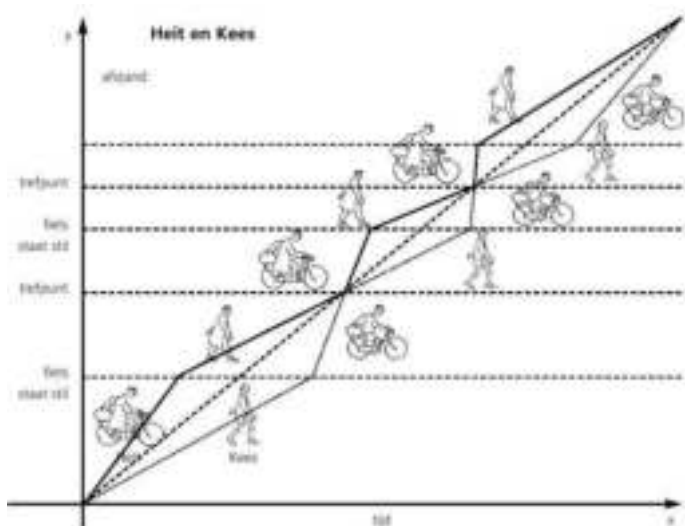
In nascholing over de basisvorming heb ik deze vraag in deze context regelmatig voorgelegd aan groepen leraren wiskunde en natuurwetenschappen. De eerste reactie was meestal dat het een slecht gedefinieerd of een slecht gestructureerd probleem was. Je weet geen fiets-

loopsnelheden en geen afstanden, zo iets kun je niet aan leerlingen voorleggen. De tweede reactie was dat je zonder nadenken zo kon zien wat het goede antwoord was. Die ‘goede’ antwoorden varieerden van “Ze kunnen beter gaan lopen” tot “Je kunt het niet weten” en “Het maakt niets uit”. Leerlingen die getraind zijn op het maken van enkelvoudige routineopgaven komen niet verder. In het hoger onderwijs vormen slecht gedefinieerde problemen het startpunt van projecten rondom modelleren, want daar heb je met het toepassen van wiskundige of natuurwetenschappelijke kennis mee te maken.

Een systematische probleemaanpak

Aan de hand van dit voorbeeld wil ik voor u een aantal aspecten van het oplossen van problemen bespreken. In navolging van Duncker en De Groot spreek ik van de ontwikkeling van de *mentale voorstelling van een probleem of context*, het probleem zoals de oplosser het ‘ziet’ (Van Streun, 1989, 1994). Dat is het geheel aan ideeën dat de oplosser over de context of probleemsituatie op een bepaald moment heeft. Wat is uw mentale voorstelling van dit probleem? Begrijpt u de context? Ziet u in gedachten Heit en Kees in het donker worstelen met die zak aardappelen? Ziet u de fiets met de zak aardappelen staan terwijl Kees er naar toe en Heit er van weg loopt? In de buurt van Leeuwarden, met de patrouilles van de Landwacht op pad, is het allicht zaak om op een bepaald moment te stoppen met het wisselen van de fiets en samen de stad in te sluipen. Hoe krijgen we nu greep op het onderliggende wiskundige probleem? Hoe kunnen we onze mentale voorstelling van die probleemsituatie verder ontwikkelen?

Helaas kan ik u nu geen tijd geven om zelf een half uur in groepjes te gaan werken aan een oplossing. Als u de kerndoelen van de basisvorming voor wiskunde of natuurkunde enigszins beheerst, ontbreekt het u niet aan de nodige vakkennis. Maar dat is geen garantie voor het kunnen toepassen van die kennis in een context. Het is geen garantie voor *transfer*, zoals dat in de psychologie wordt genoemd. Laat ik een aantal aspecten van een mogelijk oplossingsproces, opvoeren.



Figuur 1 Grafische voorstelling van het probleem van Heit en Kees

Een heuristische probleemverkenning

We beginnen met een heuristische probleemverkenning. Direct lettervariabelen invoeren voor alle onbekenden? De snelheden per fiets en lopend van Heit en Kees (dat zijn al vier variabelen), de fietsafstanden per keer of de tijd per periode. En dan kijken of de totale tijd afhankelijk is van de lengte van die periode. Het kan, maar ik heb het niet veel leraren in een half uur zien doen. Door al dat *rekenen* ontwikkelt onze mentale voorstelling van het probleem zich nauwelijks.

We proberen een andere heuristiek, het doorrekenen van eenvoudige *gevallen*. Neem aan dat Heit en Kees beiden fietsen met een snelheid van 12 km/u en beide lopen met een snelheid van 4 km/u. Neem aan dat ze een afstand van een kilometer aan één stuk fietsen. Even hoofdrekenen. Rekent u mee? Na 5 minuten zet Heit de fiets neer en 10 minuten later neemt Kees de fiets over. Na nog eens 5 minuten heeft Kees zijn kilometer op de fiets afgelegd en Heit heeft ondertussen een kwartier gelopen en zijn tweede kilometer afgelegd.

Monitoren, even uittreden en kijken naar je eigen aanpak

Bent u er nog? Want nu komen onze metacognitieve vaardigheden van pas. Even uittreden en naar je eigen aanpak kijken. Monitoren heet dat. Goede probleemoplossers doen dat, leerlingen en studenten moeten dat leren.

Interne dialoog: Waar ging ons probleem ook al weer over?

Oh ja, maakt het wat uit? In dit eenvoudige voorbeeld hebben ze een afstand van 2 kilometer in 20 minuten afgelegd. Met het aangenomen looptempo van 4 km/u had dat een half uur gekost. En als we de periode bijvoorbeeld 4 km hadden gemaakt dan doen Heit en Kees dat gewoon in 40 minuten. De lengte van de periode doet er dus in dit voorbeeld niet toe. En afwisselend lopen en fietsen gaat echt vlugger.

Interne dialoog: Kunnen we al een algemene conclusie trekken?

Onze mentale voorstelling van de probleemsituatie is intussen flink ontwikkeld en we hebben het gevoel dat we op grond van dit ene voorbeeld al 'zien' hoe alles in elkaar zit. Hopelijk bent u ook al zover.

Interne dialoog: Hoe nu verder? Een plan maken.

U kunt er voor kiezen om nog meer voorbeelden door te rekenen om op die manier meer zekerheid te krijgen over uw oplossing. Of u bedenkt dat wellicht een grafische voorstelling, zoals in figuur 1, nu meer inzicht geeft dan meer van hetzelfde.

Interne dialoog: Terugblik of reflectie achteraf

Als u over uw oplossing tevreden bent, dan is het zaak om nog even om te kijken. Hoe verliep het? Waar liep ik eerst op vast? Dat heet het ontwikkelen van je eigen metacognitieve kennis. Dit kan ik goed, daar moet ik om denken.

Denken

Aan de hand van dit voorbeeld zijn een aantal aspecten van het denken, zoals die op dit moment worden begrepen, duidelijk te maken. (Zie Bransford 2000, Donovan 1999, Pellegrino, Chudowsky & Glaser 2001.)

Typen kennis

- Weten dat: kennis van feiten en begrippen, reproduceren
- Weten hoe: probleemaanpak, toepassen, onderzoeksvaardigheden
- Weten waarom: principes, abstracties, rijke cognitieve schema's, overzicht
- Weten over weten: reflecteren, monitoren, kennis over je eigen weten en aanpak

Weten dat

Het is duidelijk dat dit voorbeeld alleen kan worden aangepakt als de oplosser een zekere vakinhoudelijke basis heeft betreffende rekenen, snelheden, grafieken of tabellen of formules. Met dat type kennis werd veel geoefend en getoetst.

Weten hoe

Hierbij gaat het om de analyse van het probleem, het toepassen van heuristische methoden, een systematische probleemaanpak, het controleren, het ontwikkelen van een onderzoeksopzet, het stellen van een probleem, het formuleren van een onderzoeksvraag en dergelijke. In dit voorbeeld is het kiezen van een aanpak, zoals het doorrekenen van eenvoudige gevallen, een voorbeeld van *Weten hoe*. Zonder dit type kennis is de toepassing van feiten en begrippen in nieuwe situaties, waarbij geen sprake is van louter reproductie, niet mogelijk.

Weten waarom

Experts verschillen van leerlingen of studenten op een vakgebied door hun inzicht in fundamentele principes en abstracties en vooral in de samenhang van begrippen, methoden en abstracties. De kennis van leerlingen of studenten blijkt vaak fragmentarisch te zijn opgeslagen, zonder onderlinge verbanden, waardoor die kennis ook slecht toegankelijk is voor gebruik bij het oplossen van problemen. In dit voorbeeld is de selectie van de toe te passen methode van belang. Dat kan snel leiden tot de keuze voor een grafische voorstelling, omdat die het meeste inzicht geeft in de situatie.

Weten over weten

Dit type kennis wordt *metacognitie* genoemd, de bekwaamheid om je eigen inzicht en denken te beoordelen, bijvoorbeeld tijdens het oplossen van een probleem. Vaak neemt dat de vorm aan van een *interne dialoog*, praten met jezelf over je vorderingen, over de vraag waar je ook al weer mee bezig bent, het controleren en reflecteren, het zoeken van een probleemaanpak enzovoort. In dit verband wordt de term '*monitoren*' gebruikt, even uit je eigen oplossingspoging stappen en daar van buitenaf naar kijken voordat je verder gaat. *Reflecteren* op de toegepaste aanpak en de methoden, afwegen wanneer welke probleemaanpak veelbelovend is, het eigen repertoire aan methoden uitbreiden. Hoe heeft onze voorstelling van het probleem zich ontwikkeld? Zijn er nog interessante variaties over het hoofd gezien? Maakt het bijvoorbeeld nog uit als de fietser, nadat hij de zak aardappelen heeft neergezet, weer terug fietst om de looper op te halen? Enzovoort. Goede denkers, probleemoplossers en experts onderscheiden zich daarin van zwakke oplosers van problemen. Zelfstandig werkende leerlingen plegen bij een verkregen oplossing onmiddellijk door te stomen naar de volgende opgave zonder even terug te kijken.

Waar leren denken het hoofddoel is

Sinds Dewey (1964) in de eerste helft van de twintigste eeuw publiceerde over het denken in het onderwijs en de gesignaleerde discrepantie tussen het *onderwijs* in de natuurwetenschappen en het natuurwetenschappelijk *onderzoek* zijn internationaal de vernieuwingen van het onderwijs in de natuurwetenschappen mede gericht op het versterken van de overeenkomst tussen het onderwijs en de onderzoeksmethoden, de sociale interactie en de werkwijzen in de praktijk van natuurwetenschappers (Edelson 1998). Zo benadrukken bijvoorbeeld de National Science Education Standards (National Research Council 1995) in de Verenigde Staten de noodzaak tot het ontwikkelen van *natuurwetenschappelijke onderzoeksvaardigheden* als een belangrijk doel in het onderwijs. Aspecten van die onderzoeksvaardigheden zijn het onderkennen van een natuurwetenschappelijk probleem, het formuleren van een hypothese, het ontwerpen van een experiment, het verzamelen, analyseren en interpreteren van data, het toepassen van resultaten, het doen van voorspellingen, het plannen en monitoren van het eigen onderzoek.

In 1947 verscheen deel 1 van de serie Werkboek der Meetkunde (auteurs het echtpaar Van Hiele) met op het kaft de aankondiging dat dit leerboek was voor scholen waar *zelfstandig werken en denken* hoofddoel is. De schoolboekenauteur Wim Bos (van de bekende serie Wegwijzer in de Meetkunde, Bos & Lepoeter) schreef al in de vijftiger jaren van de vorige eeuw dat je de moeilijkheidsgraad van meetkundige opgaven net zo ver moest opvoeren, totdat ook de slimste leerlingen een *bewuste probleemaanpak* nodig hadden. Want dat is juist wat je ze wilt leren, stelde hij. De wiskundige Polya is bekend geworden door zijn opvatting dat het *oplossen van problemen* centraal moet staan in het wiskundeonderwijs op elk niveau. Hij beargumenteerde dat wiskunde sterkt lijkt op de natuurwetenschappen in het proces van vermoeden, begrijpen en ontdekken. Leerlingen en studenten moeten de kans krijgen om *inductief* te exploreren en te ontdekken, waarna *deductief* een redenering of bewijs op een geschikt niveau kan worden geleverd. Bekend is ook de opvatting van Freudenthal dat wiskunde als een *menselijke activiteit* moet worden onderwezen; de nadruk moet liggen op het zelf inductief ontdekken, exploreren, redeneren, modelleren, abstraheren en deduceren.

Conclusie: Bij het onderwijs in de wiskunde en natuurwetenschappen moet het niet voornamelijk gaan om 'Weten dat', maar veel meer om 'Weten hoe', 'Weten waarom' en 'Weten over weten'.

Denken en transfer

De bespreking van de basisvorming en het peil van ons onderwijs in die leeftijdsgroep sloot ik af met de opmerking dat de roep "Back to Basics" en de eis om terug te gaan naar eenvoudige onderwijsvormen, gericht op overdracht en oefenen, berust op een denkfout. De denkfout is dat onderwijs volgens het bedoelde model, *het overdragen van kennis*, het zogenaamde vullen van holle vaten, aan leerresultaten precies datgene oplevert wat je er in stopt. Het resultaat is fragmentarische kennis in kleine brokjes opgeslagen in het geheugen zonder enige onderlinge samenhang, met moeite op de eerstvolgende toets oproepbaar maar niet bruikbaar voor toepassingen, niet leidend tot transfer, om van creativiteit en het vermogen tot zelfstandig denken en toepassen maar te zwijgen. Dat type onderwijs leidt bovendien tot aversie tegen leren (Waar is dit goed voor?) in plaats van tot levenslang plezier in leren.

De laatste decennia hebben cognitieve psychologen, constructivisten en didactici veel gepubliceerd over de manier waarop door middel van onderwijs het denken kan worden bevorderd. Centraal staat het begrip *transfer*, het toepassen van kennis, begrippen en methoden uit het

ene gebied op een ander terrein. Ondanks onderlinge verschillen zijn de onderzoekers op dit terrein het eens over een aantal voorwaarden waar onderwijs aan moet voldoen om transfer te bevorderen. Transfer is *geen vanzelfsprekende* zaak, sterker nog in ons gebruikelijke onderwijs is transfer van inzicht, kennis en vaardigheden naar een andere situatie dan waarin die is verworven eerder uitzondering is dan regel. Bekend is het onderzoek naar de kloof tussen de wereld van elke dag en de schoolse kennis. Rekenvaardigheden en natuurwetenschappelijke concepten functioneren heel vaak niet in contexten buiten de school. Omgekeerd worden het rekenen van de straat en gezond verstand niet verbonden met een meer formele of abstracte benadering in de school. Eveneens bekend is het onderzoek naar de *systeemscheiding* tussen de schoolvakken, waardoor de kennis opgedaan bij het ene vak niet wordt geactiveerd in het andere vak.

Ook van algemene vaardigheden, bijvoorbeeld *studievaardigheden*, mag niet automatisch transfer worden verwacht. Een voorbeeld is de mislukking van de studielessen in de brugklas, ingevoerd bij wet in 1968, waarin wetenschappelijk goed onderbouwde studiemethoden werden aangeleerd, die vervolgens bij de vakken niet werden herkend of toegepast. De nadruk op algemene vaardigheden in het studiehuis berust op eenzelfde optimisme, namelijk dat die vaardigheden als vanzelf in alle vakken en ook in het naschoolse leven zullen worden toegepast. Simons geeft in zijn overzichtsstudie voor NWO (Simons 2000) toe dat de idee van algemene vaardigheden in de constructivistische stroming, waarop hij en andere ideologen van het studiehuis graag een beroep doen, de nodige vragen oproept.

Wat we weten over leren en onderwijs

Zoals al eerder is opgemerkt lijkt de wetenschappelijke kennis over leren en onderwijs te convergeren naar een aantal concepten en principes, die een goed uitgangspunt opleveren voor inhoudelijke onderwijsvernieuwing. Kort samengevat gaat het om de koppeling van wat we weten over *typen kennis*, over *feedback en toetsing* (formatieve en summative assessment) en over *onderwijzen*. Op elk vakgebied kun je de typen kennis in leerdoelen formuleren en operationaliseren. (Zie bijvoorbeeld de taxonomie van Bloom, aldus Shulman 2001.) Daar moet je dan de bijpassende diagnostische feedback en beoordelende toetsing voor ontwikkelen. De aard van de toetsing hangt sterk af van het type kennis, dat je wilt toetsen (Shavelson 2001).

Weten dat is goed te toetsen met traditionele pen-en-papier-toetsen (zoals in onze centrale examens gebeurt).

Weten hoe wordt zichtbaar door de aanpak van problemen, open vraagstellingen en zelfstandig onderzoek (zie van Schalkwijk 1998).

Weten waarom vereist vragen naar samenhangen, bijvoorbeeld met behulp van concept maps (White & Gunstone 1992) en kennisgrafien (Zwaneveld 1999).

Weten over weten vraagt om rapportage door de leerlingen zelf over hun werkwijze en zelfkennis (learner reports, de Groot 1978, van Streun 1989) en om observatie door docenten en medeleerlingen.

Tijdens het leerproces is een goede *feedback* door de docent essentieel, door interactie of bijvoorbeeld door diagnostische toetsing, formative assessment. Dat begint al met de start van het onderwijs in een nieuw onderwerp, want niets is belangrijker voor het goed plannen van onderwijs dan het aansluiten bij de voorkennis. In het vervolg bij de opbouw van begrippen en methoden is een directe terugkoppeling naar de leerlingen noodzakelijk. Die feedback moet betrekking hebben op alle genoemde typen kennis om het denken van de leerlingen zichtbaar te maken voor henzelf en voor docenten en begeleiders. Integratie van metacognitieve instructie en vakinhoudelijke kennis en feedback

Denken bevorderend onderwijs

Streven naar de verwerving van de volgende vier typen kennis

- Weten dat: kennis van feiten en begrippen, reproduceren
- Weten hoe: probleemaanpak, toepassen, onderzoeksvaardigheden
- Weten waarom: principes, abstracties, rijke cognitieve schema's, overzicht
- Weten over weten: reflecteren, monitoren, kennis over je eigen weten en aanpak

Leeromgeving	Stimuleren van vertrouwen en reflectie, intensieve interactie met docenten en medeleerlingen.
Opbouw cognitief schema	Contexten in wisselwerking met abstracties. Probleemaanpak en denkmethode ingebed in de vakinhoudelijke schema's.
Feedback	Frequente terugkoppeling op alle vier typen kennis om het denken van de leerlingen zichtbaar te maken.
Werkvorm	Interactie in grote en kleine groepen, individueel werk.
Functie docent	Ontwerpen van opdrachten en feedback, interactieve instructie en explicitering van alle vier typen kennis.
Beoordeling	Toetsing van alle vier typen kennis met de daarbij passende toetsmethoden en opdrachten.

op de metacognitie van leerlingen kan hun kennis op een hoger niveau brengen en zelfstandig leren stimuleren.

Naast die feedback en diagnostische toetsing zal de docent *werkvormen* moeten organiseren die passen bij het type leerdoelen, het type kennis, dat door de leerlingen moet worden verworven. Soms poneert de docent een probleem en moedigt leerlingen aan om na te denken over een oplossing. Of hij vraagt de leerlingen om uit te leggen wat zij hebben gedaan of hij gaat samen met hen een overzicht van begrippen en methoden samenstellen. Op een ander moment werken leerlingen in tweetallen achter de computer aan een probleem of werken zij in viertallen aan een open opdracht. Soms zijn de leerlingen individueel en zelfstandig aan het werk om hun beheersing van de basiskennis te vergroten, dan weer maken ze in hun digitale werkruimte een diagnostische toets en krijgen automatisch de feedback retour die de docent voor hen heeft ontworpen.

Aansluitend op die intensieve feedback en een breed palet van passende werkvormen is de manier van *beoordelen* beslissend voor de aandacht die leerlingen en docenten aan de leerdoelen besteden. Worden leerlingen en docenten door middel van de standaard pen-en-papier-toetsen alleen afgerekend op het verwerven van kennis van het eerste type, dan zal een inhoudelijke niveauverhoging weinig kans maken. De dominantie van centrale schriftelijke of elektronische toetsing leidt automatisch tot een concentratie op beperkte leerdoelen en tot een training op typen opgaven die op de centrale toets verwacht worden. De keuze voor kennisdoelen van de andere types impliceert een decentrale toetsing volgens de geschetste toetsmethoden.

De inrichting van de Tweede Fase

Helaas zijn we bij de structuurfouten van de Tweede Fase nog niet aan het einde van de ellende. Ik verzoek u nog even met mij terug te gaan naar de invoering van het nieuwe onderwijsstelsel met de schooltypen havo-vwo in 1968. De voornaamste structurele verandering binnen die nieuwe schooltypen was wel dat de leerlingen in de bovenbouw havo-vwo de gelegenheid kregen om zich op zes of zeven examenvakken te concentreren. Dat sluit aan bij de *belangstelling* van de leerlingen en geeft hen de kans om zich in een beperkt aantal vakgebieden te *verdiepen*, zo was de gedachte. Geen verplichte eenheidsworst meer, maar *honoreren* van *verschillen* in aanleg en belangstelling tussen de leerlingen. Het verplichte aantal van 15 theorievakken in de hbs en nog meer in het gymnasium werd kennelijk op goede gronden teruggebracht tot zes of zeven. Daarin sloot Nederland zich bovendien aan bij de andere West-Europese landen.

Geheel anders is het politieke klimaat bij de invoering van de basisvorming en de Tweede Fase havo-vwo. Het ene verplichte vak of deelvak wordt bovenop het andere gestapeld met als argument dat wij in Nederland moeten zorgen voor een *algemene* en vooral *brede* vorming. Dat uit zich vooral in de introductie van algemeen verplichte nieuwe vakken, zoals Techniek, Verzorging, Informatiekunde, Algemene Natuurwetenschappen, Culturele en Kunstzinnige Vorming, meer moderne talen en wiskunde voor iedereen verplicht. Met name de Tweede Kamer was bijna niet te stuiten in het bedenken van verplichtingen en het invoeren van nieuwe vakken. De argumentatie voor de *beperking* tot zes of zeven examenvakken vanaf 1968 werd zelden gehoord. In de basisvorming zijn het er vijftien geworden, in de Tweede Fase van havo-vwo tien tot twaalf. De versnippering ten top. Dat goede curricula zich kenmerken door een combinatie van diepgang met een zekere breedte (Schmidt, TIMMS, 1997, 2000) in plaats van "a mile wide and an inch deep" is nog niet doorgedrongen tot de Nederlandse beleidsmakers.

U kunt ongetwijfeld voorspellen wat er nu komt. In het inspectierapport over de basisvorming wordt gesteld dat het aanbod van vijftien vakken en ook nog eens vijftien verschillende leraren erg versnipperd is en dat leraren niet kunnen overzien hoe zo'n totaalpakket op de leerlingen overkomt. Ook in de rapportage over de Tweede Fase havo-vwo (Tweede Fase Adviespunt, 2001) merken veel scholen op dat de ervaren overladenheid mede een gevolg is van de enorme versnippering over zoveel vakken.

Laat ik ter afwisseling een politica, Mevrouw Lambrechts, onderwijspecialist voor D66 in de Tweede Kamer, citeren (NRC 2001):

"Ik zie de overladenheid en versnippering nu beter dan een aantal jaren geleden, dat geef ik toe."

"Met de onderwijsvernieuwingen is te veel de verbreding en te weinig de verdieping gezocht."

"Vijftien vakken in de basisvorming is veel te veel. Zeker voor de leerlingen in het vmbo."

"Ondanks waarschuwingen heeft de huidige staatssecretaris een vmbo-programma vastgesteld waarvan de onderwijsraad schreef dat het onuitvoerbaar was voor leraar en leerling."

"Ik bewaar dan ook alle dossiers, documenten en brieven over de Tweede Fase veilig achter slot en grendel voor de onvermijdelijke parlementaire enquête over dit onderwerp."

Profielen

Is er dan niets goeds te zeggen over de structuurverandering door middel van de Tweede Fase? Voor de zogenaamde pretpakketten, met alleen een tweetal moderne vreemde talen en wat zaakvakken, zijn nu toch solide *profielen* met een optimale aansluiting op het hoger

onderwijs in de plaats gekomen?! Het vervolgonderwijs, het hbo en het wo, zal toch wel erg blij zijn met die profielen, omdat ze zo mooi *aansluiten* op de clusters van studierichtingen in dat hoger onderwijs. Laat ik mij beperken tot de twee natuurwetenschappelijke profielen Natuur en Gezondheid en Natuur en Techniek op het vwo.

Voor wie waren die profielen bestemd? Dat was duidelijk, Natuur en Gezondheid sluit aan op de levenswetenschappen, de medische en de biologische studies, Natuur en Techniek op de meer exacte technische wetenschappen en natuurwetenschappen. De profielvakken wiskunde B1, natuurkunde 1 en scheikunde 1 uit N&G moeten dus in N&T hun meer exacte verdieping hebben in de vakken wiskunde B2, natuurkunde 2 en scheikunde 2. Elders (van Streun 2000) heb ik al onderbouwd dat een zwakte in het Nederlands onderwijs (internationaal gezien) tot nu toe lag bij het ontbreken van differentiatie voor de B-leerlingen, het niet op niveau aanbieden van het voortgezette, meer op onderzoek gerichte en meer exacte onderwijs in de wiskunde en natuurwetenschappen voor leerlingen, die daardoor intellectueel en emotioneel worden uitgedaagd. In de N&T groepen bevinden zich de echte bèta's, zodat we in Nederland eindelijk weer voor die doelgroep op hun exact niveau wiskunde en natuurwetenschappen kunnen bedrijven. Een mooie kans om dat deel van de Nederlandse jeugd te inspireren voor techniek en natuurwetenschappen op het hoogste niveau, in samenwerking met het hoger onderwijs.

Zijn de programma's van wiskunde B2, natuurkunde 2 en scheikunde 2 daar ook op geschreven? En hoe pakt dat uit in de scholen? (Zie Tweede Fase Adviespunt, 2001.) Wiskunde B2 is gericht op het leren probleemoplossen, redeneren en bewijzen aan de hand van Euclidische meetkunde en het onderwerp rijen. Het stapelt niet erg op het vak wiskunde B1 en heeft daardoor een eigen karakter. Leraren en leerlingen lijken tevreden. Natuurkunde 1 is volgens de natuurkundeleraren te zwaar voor de doelgroep N&G en Natuurkunde 1,2 is slechts een zwakke uitbreiding van Natuurkunde 1 zonder een eigen karakter. Voor het vak Scheikunde geldt precies hetzelfde. De twee laatstgenoemde vakken zijn kennelijk niet goed afgestemd op de doelgroepen. Terecht vragen leraren om een inhoudelijke herverkaveling tussen het deelvak 1 en het gehele vak 1,2.

Nog even terug naar de *aansluiting* van de profielen op de bijbehorende clusters in het hoger onderwijs. Onder druk van vooral de technische universiteiten is de toelating niet meer gekoppeld aan het profiel Natuur en Techniek, maar aan een combinatie van Natuur en Gezondheid en Wiskunde B1,2. Die laatste conditie is vervolgens ook geschrapt en de algemene universiteiten zijn uit concurrentieoverwegingen gevolgd. *Dwaas* als men verwacht op die manier meer goede studenten te kunnen trekken, dus studenten voor wie het profiel Natuur en Techniek te zwaar is! *Dwaas* omdat niet alleen de gewenste verbeterde aansluiting geen kans krijgt, maar ook omdat het enige profiel



Den Haag, Malieveld, 6 december 1999: scholierenstaking tegen de gevolgen van de invoering van het studiehuis op het havo en het vwo.

dat interesse van leerlingen voor de meer exacte studies kan wekken op de tocht komt te staan.

Wat zeggen de scholen? Een citaat uit het rapport (Tweede Fase Adviespunt, 2001): “Men heeft de indruk dat door veranderde instroom-eisen in het hoger onderwijs het profiel Natuur en Techniek op (korte) termijn niet af nauwelijks meer gekozen zal worden.” (Het keuzepercentage is nu nog 20% op het vwo.)

“Het wordt als zeer teleurstellend ervaren dat het hoger onderwijs is gaan schuiven met de instroom-eisen, en het doet scholen dan ook opmerken dat een onderzoek naar de wenselijkheid en mogelijkheid te komen tot één N-profiel voor de hand liggend is.”

Het risico is groot dat op deze manier de kans om onderwijs te ontwerpen en uit te voeren dat toegesneden is op de potentiële bèta's door de universiteiten om zeep wordt gebracht. Onderwijs dat zich vanzelfsprekend in de eerste plaats richt op het verwerven van kennis van het type *Weten hoe* en *Weten waarom*, en niet op nog meer leerstof en kennis van het type *Weten dat*.

Samenvattend kom ik tot de volgende systeemfouten in de inrichting en uitvoering van de Tweede Fase havo-vwo.

Systeemfouten Tweede Fase

1. De werkelijk beschikbare studielast is hooguit 70% van de studielast waarop de examenprogramma's zijn vastgesteld.
2. De versnippering over het grote aantal vakken maakt het onmogelijk om de vereiste diepgang en beheersing van de profielvakken te bereiken.
3. Voor de profielvakken is sprake van een achteruitgang in kennis, niveau en praktische vaardigheden in plaats van een vooruitgang.
4. De overladenheid en versnippering heeft mede tot gevolg dat van didactische vernieuwingen zoals bedoeld niets terecht is gekomen.
5. De overladenheid en versnippering heeft geleid tot een duidelijke taakverzwaring voor de leraren die in minder contacttijd en met minder werkelijk beschikbare studielast gelijke prestaties op examens moeten nastreven.
6. De profielvakken natuurkunde en scheikunde van het profiel Natuur en Techniek in het vwo zijn niet goed op de doelgroep afgestemd.
7. Door het laten vallen van het profiel Natuur en Techniek als verplichte toelatingseis voor technische en natuurwetenschappelijke opleidingen ondermijnen de universiteiten dat profiel en de aansluiting vwo-wo.

Werken aan inhoudelijke onderwijsvernieuwing

Het is uit het voorgaande voldoende duidelijk geworden dat analoog aan de beoogde herinrichting van de basisvorming ook de systeemfouten in de inrichting van de Tweede Fase eerst op korte termijn moeten worden gerepareerd, voordat er ruimte komt voor inhoudelijke onderwijsvernieuwing. De centrale overheid zal een andere rol moeten gaan vervullen, gekenmerkt door minder regelgeving en het meer stimuleren van inhoudelijke onderwijsvernieuwing. Dat heeft consequenties voor de dominante positie van de centrale examens. De scholen moeten net als bij de basisvorming veel meer ruimte krijgen om naar eigen inzicht de Tweede Fase havo-vwo in te richten. Vervolgens moeten maatregelen worden getroffen om leraren tijd te geven voor het ontwikkelen van hun deskundigheid in het ontwerpen en uitvoeren van vernieuwend onderwijs. Tenslotte moet de inhoudelijke onderwijsvernieuwing worden ontworpen in projecten waarin de veldexpertise van scholen en de vakinhoudelijke en vakdidactische know-how van het hoger onderwijs worden samengebracht.

Rol van de centrale overheid

Het Sociaal Cultureel Planbureau bracht in 1999 een studie uit onder de titel 'Scholen onder druk'. Die studie werd ingegeven door bezorgdheid over de positie van scholen. Uit rapporten van de onderwijsinspectie en uit onderzoek blijkt telkens weer hoe groot de afstand is tussen de beleidsambities en de dagelijkse onderwijspraktijk. Als gevolg van alle eisen, wensen en verwachtingen dreigt de kerntaak van de school — het geven van goed onderwijs — in het gedrang te komen. Aldus een conclusie uit deze studie. De inspecteur-generaal van het onderwijs, Mertens (2000), verklaarde in een workshop en bij zijn vertrek naar een ander ministerie dat de maat van de bemoeienis van de centrale overheid met het onderwijs vol was. Ik citeer Mertens: “Decennia is er aan het onderwijsbestel gecureerd; de resultaten stemmen niet tot tevredenheid.”

“Het is nu weer tijd de afzonderlijke school in haar eigen verantwoordelijkheid te beschouwen, mogelijkheden te bieden en haar op die verantwoordelijkheden aan te spreken.”

“Een belangrijk verschil met eerdere fasen in de ontwikkeling van het onderwijs is nu dat niemand precies weet hoe het onderwijs zal moeten veranderen. De verandering als zodanig kan derhalve geen object zijn van centraal beleid gewoon omdat het beleid het ook niet weet.”

“Uiteraard zal het centraal beleid wel de voorwaarden moeten creëren dat er elders voldoende ruimte is om beleid te voeren. Op dit ogenblik is de belangrijkste opgave: hoe kunnen scholen toegerust worden opdat ze adequaat onderwijskundig beleid zelfstandig kunnen voeren?” “Deze werkwijze heeft als voordeel dat scholen en het personeel — docenten dus — in hun professionaliteit serieus genomen worden omdat ze uitgenodigd worden zelf antwoord te geven op de gestelde vragen. Ze zijn niet langer object van een nationale innovatiestrategie waarbij externe evaluatoren vaststellen of de scholen al dan niet voldoen aan de van buiten opgelegde doelen.”

Het lijkt erop dat het beleid van het ministerie zich ook in die richting gaat bewegen. De proef op de som is de reactie van het beleid op de evaluatie van de basisvorming en de structurele problemen in de Tweede Fase havo-vwo. Krijgen de scholen meer ruimte voor een eigen invulling en wordt de centrale regelgeving versoepeld of durft de politiek de consequentie, namelijk een grotere differentiatie tussen scholen, niet aan? Daar hangt vanaf of de gewenste inhoudelijke onderwijsvernieuwing een kans krijgt.

Balans tussen schoolexamen en centraal examen

Een belangrijke beperking van de didactische vrijheid van scholen is de dominantie van de centrale toetsing. Het centraal examen toetst uitsluitend *Weten dat* en domineert zodanig dat het werken aan andere vormen van kennis daardoor wordt weggedrukt. De Stuurgroep Tweede Fase stelde daarom voor om de resultaten van het schoolexamen en het centraal schriftelijk examen niet meer op één hoop te gooien en afzonderlijk te beoordelen. Leerlingen moeten voor beide examens slagen. Op het centraal schriftelijk examen moet dan een heel beperkt deel van de leerstofdoelen (kennis van het eerste type) worden getoetst. Dat vond ik een waardevol idee (Van Streun, 1995), een idee dat overigens al veel eerder door A.D. de Groot was geopperd (1993), met als argument dat op die manier de vrijheid van identiteit van een school kan worden gewaarborgd. Waardevol, mits het schoolexamen inderdaad andere kennis en vaardigheden beoordeelt dan het centraal schriftelijk examen. Door middel van het schoolexamen zijn onder andere de hogere typen kennis te toetsen en te beoordelen. Helaas liet het beleid dat idee van de Stuurgroep vallen.

Reconstructie Tweede Fase

1. De voorgeschreven studielast terugbrengen tot de realiseerbare studielast met behoud van het beoogde niveau van de profielvakken. In 4 en 5 havo betekent dat een voorgeschreven studielast van 2200 uur (in plaats van 3200 uur) en in 4, 5 en 6 vwo wordt dat 3500 uur in plaats van 4800 uur.
 - a. In 4 en 5 havo Nederlands en Engels (nu samen 760 uur) verplicht en per profiel drie of vier profielvakken (nu samen 1160 uur) voorschrijven. In de resterende 280 uur de leerlingen twee vakken laten kiezen uit het schoolaanbod aan vakken.
 - b. In 4, 5 en 6 vwo Nederlands, Engels en Wiskunde A1 (nu samen 1240 uur) verplicht en per profiel drie of vier profielvakken (nu samen 1840 uur) voorschrijven. In de resterende 420 uur de leerlingen drie vakken laten kiezen uit het schoolaanbod.
2. Een evenwichtige verdeling aanbrengen tussen de weging van het centraal examen en het schoolexamen.
 - a. Het schoolexamen loskoppelen van het centraal schriftelijk examen, waarbij leerlingen voor beide examens moeten slagen.
 - b. De omvang van de toetsing van leerstof door het centraal schriftelijk examen in het havo-vwo per vak sterk beperken.
 - c. Analooch het eerste voorstel van de Stuurgroep de gelegenheid bieden om een vak vaker af te sluiten met een centraal examen.
3. De centrale sturing door gedetailleerde regelgeving te vervangen door sturing en stimulering op afstand.
 - a. De juristerij in het onderwijs terugdraaien door bijvoorbeeld het bureaucratische dwangbuis van het Programma van Toetsing en Afsluiting te vervangen door een model dat wel ruimte biedt voor didactische vernieuwing en creativiteit.
 - b. Met inbreng van het hoger onderwijs en de inspectie een systeem van onderwijsvisiteatie opzetten gekoppeld aan zelfstudies waarin scholen onder andere verantwoording afleggen over hun didactische invulling van de verkregen ruimte.
 - c. Netwerken en projecten van voortgezet en hoger onderwijs stimuleren en financieren, waarin concreet gewerkt wordt aan inhoudelijke onderwijsvernieuwing en deskundigheidsbevordering van leraren.

Op dit moment vragen de scholen om organisatorische redenen toestemming om meer vakken alleen met een schoolexamen af te mogen sluiten. En de staatssecretaris heeft toetsing van grote onderdelen van vakken tijdelijk verwezen naar het schoolexamen. De stap naar een wijziging van de examenregeling, zoals voorgesteld door de Stuurgroep, is een belangrijke voorwaarde voor de realisering van de bedoelde inhoudelijke onderwijsvernieuwing. Een forse verlichting van de omvang van het centraal examen maakt het mogelijk om een zwaarder accent te leggen op de toetsing van algemene vaardigheden en kennis van de tweede tot en met vierde type, bijvoorbeeld door praktische opdrachten, zelfstandig onderzoek en profielwerkstuk. We hebben gezien dat het zwaar laten meewegen van de beoordeling van dat type kennis juist een voorwaarde is voor het slagen van deze inhoudelijke onderwijsvernieuwing (Shavelson 2001).

Reconstructie Tweede Fase havo-vwo

Voor een didactische vernieuwing moeten de scholen ook in de Tweede Fase meer ruimte krijgen om in de *programmering* van het onderwijs eigen keuzes te maken. Dat is de enige manier om iets te doen aan de verlamdende versnippering en overladenheid van onze onderwijsprogramma's. De centrale regelgeving moet die ruimte scheppen door op een drietal gebieden meer keuzevrijheid aan de scholen te geven, namelijk door minder vakken *verplicht* voor te schrijven, een evenwichtige *balans* mogelijk te maken tussen de studielast voor het centraal schriftelijk examen (kennis van feiten en begrippen) en het schoolexamen (kennis over het hoe, het waarom en het weten over weten) en de verstikkende bureaucratische regelgeving te vervangen door *sturing op afstand*, analoog het hoger onderwijs. Mijn overwegingen om zo tot een herstructurering van de Tweede Fase te komen lopen volstrekt parallel aan de argumentatie in het advies van de Onderwijsraad ten aanzien van de toekomst van de basisvorming. Zo kom ik tot de volgende voorstellen voor de noodzakelijke herstructurering van de Tweede Fase, zoals die op korte termijn moet worden gerealiseerd. Elk voorstel bestaat uit een hoofddoelstelling, die moet worden gerealiseerd, en een mogelijke uitwerking op detailniveau. Op detailniveau is discussie mogelijk over de uitwerking van de hoofddoelstelling.

Masters of Science in Education

Tien jaar ben ik met veel plezier fulltime wiskundeleraar geweest en tijdens mijn promotieonderzoek heb ik de kans gegrepen om weer een paar jaar parttime les te geven. Nog altijd voel ik mij een echte leraar en ben ik solidair met mijn collega's in de scholen. In deze 25 jaar heb ik met honderden leraren samengewerkt en u hebt ongetwijfeld begrepen dat deze rede mede tot doel heeft om hun creatieve ruimte voor inspirerend onderwijzen te vergroten tegen de druk van falend onderwijsbeleid en schoolmanagement in.

Zo kom ik op onze studenten en leraren in opleiding. Toen ik aantrad in 1974 leidde ik 50 wiskundeleraars per jaar op, 25 met wiskunde als eerste en 25 met wiskunde als tweede onderwijsbevoegdheid. De laatste vijftien jaar waren wij voor het vak wiskunde in Groningen de grootste universitaire lerarenopleiding in het land met een gemiddelde van ruim tien studenten per jaar. Dankbaar werk. Mijn zorg ligt niet bij het afnemende aantal, maar bij de reden voor die afname. De beeldvorming en de werkomstandigheden in het voortgezet onderwijs zijn in die periode door het overheidsbeleid zodanig verslechterd, dat te weinig studenten zich gemotiveerd voelen om als leraar aan de slag te gaan. Overal in het land blijken studenten die zich in de scholen oriënteren op het beroep van leraar af te haken door de waargenomen werkomstandigheden en de gesignaleerde uitholling van het beroep door de "zelfstandig werken trend" in veel scholen. Ons tegengif was de afstudeerrichting Educatief Ontwerpen, waarin wiskundestudenten ervoeren dat je ook in het huidige onderwijs spannend en inspirerend onderwijs kunt ontwerpen. In de laatste tien jaar zijn 36 wiskundestudenten in die richting afgestudeerd. Masters of Science in Education, voordat die term was uitgevonden.



Svetlana Borovkova

Technische Universiteit Delft
Faculteit Informatietechnologie en Systemen
Postbus 5031, 2600 GA Delft
s.a.borovkova@its.tudelft.nl

Vakantiecursus 2002

Analysis of survival data

Jaarlijks organiseert het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) onder auspiciën van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars een vakantiecursus voor wiskundeleraars en andere belangstellenden. Bij deze gelegenheid verschijnt steeds een syllabus met teksten bij de voordrachten. Die syllabi zijn ook afzonderlijk bij het CWI verkrijgbaar. Het NAW heeft een serie gestart waarin geselecteerde teksten uit recente syllabi worden geplaatst. Het tweede artikel is afkomstig uit de syllabus bij de Vakantiecursus 2002, die als thema had: 'Wiskunde en Gezondheid'. Het onderwerp is het schatten van de tijdsduur die nodig is voor het plaatsvinden van een gebeurtenis. Svetlana Borovkova is wetenschappelijk onderzoeker bij de sectie Control, Risk, Optimization, Systems and Stochastics van de faculteit Informatietechnologie en Systemen van de Technische Universiteit Delft.

In many biomedical applications the primary endpoint of interest is the time it takes for a certain event to occur ('time to event'). Examples are the time it takes for an organism to die, the time it takes for a patient to respond to a therapy, or the time from response until disease relapse. We may be interested in characterizing the distribution of 'time to event' for a given population as well as comparing this 'time to event' among different groups (e.g., treatment vs. control), or modelling the relationship of 'time to event' to other covariates (prognostic factors or predictors). Typically, in

biomedical applications the data are collected over a finite period of time and consequently the 'time to event' may not be observed for all the individuals in our study population (sample). This results in what is called *censored data*. It is also common that the amount of follow-up for the individuals in a sample vary from subject to subject. The combination of censoring and differential follow-up creates some unusual difficulties in the analysis of such data that cannot be handled properly by the standard statistical methods. Because of this, a new research area in statistics has emerged which is called *Survival Analysis* or *Censored Survival Analysis*.

To study it, we must introduce some notation and concepts for describing the distribution of 'time to event' for a population of individuals. Let the random variable T denote the time to the event of our interest. Of course, T is a positive random variable which has to be unambiguously defined; that is, we must be very specific about the start and end with the length of the time period in-between corresponding to T .

Some examples:

- Survival time (in general): measured from *birth to death* for an individual.
- Survival time of a treatment for a population with certain disease: measured from the time of *treatment initiation until death*.

- Survival time due to heart disease (the event is death from heart disease): measured from *birth* (or other time point such as treatment initiation for heart disease patients) to *death caused by heart disease*. (This may be a bit tricky if individuals die from other causes. In this case the survival time of interest is censored.)

The time of interest may be the time to something ‘good’ happening. For example, we may be interested in how long it takes to eradicate an infection after treatment with antibiotics, or how long it takes for a woman to get pregnant from the moment of ‘start trying’.

Describing the distribution of time to an event

In routine data analysis, we may first present some summary statistics such as mean, standard error for the mean, etc. In analyzing survival data, however, because of possible censoring, the summary statistics may not have the desired statistical properties, such as unbiasedness. For example, the sample mean is no longer an unbiased estimator of the population mean (of survival time). So we need to use other methods to present our data. One way is to estimate the underlying true distribution. When this distribution is estimated, we can then estimate other quantities of interest such as mean, median, et cetera.

The distribution of the random variable T can be described in a number of equivalent ways. There is of course the usual (cumulative) distribution function

$$F(t) = P[T \leq t], \quad t \geq 0,$$

which is right continuous, i.e., $\lim_{u \rightarrow t+} F(u) = F(t)$. When T is a survival time, $F(t)$ is the probability that a randomly selected subject from the population will die before time t . If T is a continuous random variable, then it has a density function $f(t)$, which is related to $F(t)$ through following equations

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}, \quad F(t) = \int_0^t f(u) du.$$

In biomedical applications, it is often common to use the survival function

$$S(t) = P[T \geq t] = 1 - F(t^-),$$

where $F(t^-) = \lim_{u \rightarrow t-} F(u)$. When T is a survival time, $S(t)$ is the probability that a randomly selected individual will survive to time t or beyond. (So $S(t)$ has the name of *survival function*.) Some authors use the following definition of a survival function $S(t) = P[T > t] = 1 - F(t)$. This definition will be identical to the above one if T is a continuous random variable, which is the case we will focus on in this article.

The survival function $S(t)$ is a non-increasing function over time taking on the value 1 at $t = 0$, i.e., $S(0) = 1$. For a proper random variable T , $S(\infty) = 0$. However, we will also allow the possibility that $S(\infty) > 0$. This corresponds to a situation where there is a positive probability of not ‘dying’. For example, if the event of interest is the time from response until disease relapse and the disease has a cure for some proportion of individuals in the population, then we have $S(\infty) > 0$.

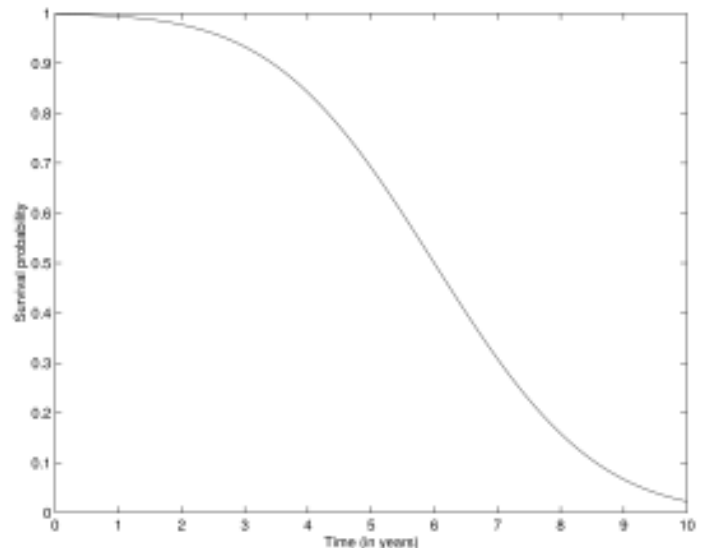


Figure 1 The survival function for a hypothetical population.

If T is a continuous random variable, we have

$$S(t) = \int_t^{\infty} f(u) du, \quad f(t) = -\frac{dS(t)}{dt}.$$

For example, in the hypothetical population shown in Figure 1, we have a population where 70% will survive approximately five years and the median survival time is approximately six years (i.e., 50% of the population will survive at least 6 years).

We say that the survival distribution for group 1 is stochastically larger than the survival distribution for group 2 if $S_1(t) \geq S_2(t)$ for all $t \geq 0$, where $S_i(t)$ is the survival function for group i . If T_i is the corresponding survival time for group i , we also say that T_1 is stochastically larger than T_2 . Note that T_1 being stochastically larger than T_2 does NOT necessarily imply that $T_1 \geq T_2$. But at any time point a greater proportion of group 1 will survive as compared to group 2.

Hazard rate

The hazard rate is a useful way of describing the distribution of ‘time to event’ because it has a natural interpretation that relates to the aging of a population. We motivate the definition of hazard rate by first defining the mortality rate, which is a discrete version of the hazard rate.

The *mortality rate* at time t , where t is generally taken to be an integer in terms of some unit of time (e.g., years, months, days, et cetera), is the proportion of the population who fail (die) between times t and $t + 1$ among individuals alive at time t , i.e.,

$$m(t) = P[t \leq T < t + 1 | T \geq t].$$

The hazard rate $\lambda(t)$ is the limit of the mortality rate if the interval of time is taken to be small (rather than one unit). The hazard rate is the instantaneous rate of failure at time t given that an individual is alive at time t . Specifically, $\lambda(t)$ is defined by the following equation

$$\lambda(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[t \leq T < t + h | T \geq t]}{h}.$$

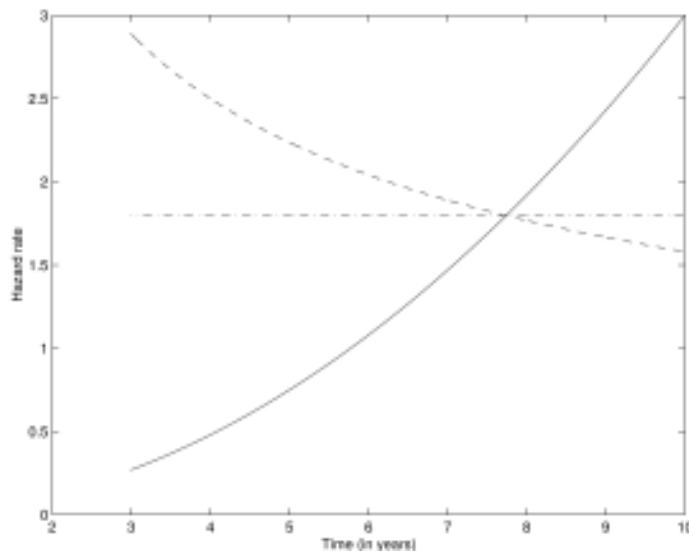


Figure 2 Three hazard patterns.

This can be expressed as

$$\lambda(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[t \leq T < t+h]}{P[T \geq t]} = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{d \log(S(t))}{dt}.$$

From this, we can integrate both sides to get

$$(t) = \int_0^t \lambda(u) du = -\log(S(t)),$$

where (t) is referred to as the *cumulative hazard function*. Here we used the fact that $S(0) = 1$. Hence,

$$S(t) = \exp(-(t)) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u) du\right).$$

We like to remark that there is a one-to-one relationship between the hazard rate $\lambda(t)$, $t \geq 0$ and the survival function $S(t)$, given by the formulas above. Notice that the hazard rate is not a probability, it is a probability rate. Therefore it is possible that a hazard rate can exceed one in the same fashion as a density function $f(t)$ may exceed one.

If we have a constant hazard, i.e., $\lambda(t) = \lambda$ for all $t \geq 0$, then $S(t) = e^{-\lambda t}$. This distribution is the exponential distribution with hazard equal to λ .

Another class of distributions widely used in survival analysis is the *Weibull model*, where the survival function is given by

$$S(t) = \exp(-\lambda t^a), \quad a, \lambda > 0.$$

The Weibull model has hazard function

$$\lambda(t) = a\lambda t^{a-1}.$$

This model allows for constant hazard ($a = 1$), increasing hazard ($a > 1$) and decreasing hazard ($a < 1$). The corresponding hazard patterns are shown in Figure 2.

Censoring

As we already said above, *censored data* are those observations whose times to event we do not get to observe completely. In biomedical applications, especially in clinical trials, two important issues arise when studying 'time to event' data (we will assume the event to be death, but it can be any event of interest):

- Some individuals are still alive at the end of the study or analysis so the event of interest, namely death, has not occurred. In this case we only know that 'time to event' is greater than a certain value, namely the time from entry to the end of study. Therefore we have *right censored data*.
- Length of follow-up varies due to staggered entry. So we cannot observe the event for those individuals with insufficient follow-up time.

In addition to censoring because of insufficient follow-up (i.e., end of study censoring due to staggered entry), other reasons for censoring include:

- loss to follow-up: patients stop coming to clinic or move away.
- deaths from other causes: competing risks.

Censoring from these types of causes may be inherently different from censoring due to staggered entry.

There is an important assumption in Survival Analysis that individuals who are censored are at the same risk of subsequent failure as those who are still alive and uncensored. The risk set at any time point (the individuals still alive and uncensored) should be representative of the entire population alive at the same time. Statistically, this assumption is equivalent to the one that the censoring process is independent of the survival time. If censoring only occurs because of staggered entry, then the assumption of independent censoring seems plausible. However, when censoring results from loss to follow-up or death from a competing risk, then this assumption is more suspect. If at all possible, censoring from these later situations should be kept to a minimum.

Other types of censoring are:

- Left censoring, where for some individuals the time of *entry* into the 'control group' it is not known. For example, if the 'time to event' is the time from contraction of HIV until death of AIDS, then we have a typical left-censoring situation, since the time of contracting HIV is unknown in many cases.
- Interval censoring, where neither the time of entry nor the event time are known for some individuals in the study.

Statistical Inference for Survival Data

Survival analysis methods are tailored to work well with the specific characteristics of the data and the specific objectives that arise in survival studies. Often, survival data are distinguished from other types of data because they are censored. Censored data prevent the use of standard methods of statistical summarization and inference. In particular, right censored data are reported as lower bounds for the actual unobserved event times. Survival times frequently have a distribution in the population that is very different from a Gaussian (Normal) distribution. Many standard approximate statistical methods are not accurate for such data. It may happen that we are interested in the whole distribution of survival times. Many standard statistical methods are instead oriented towards inference for the mean survival time and its standard deviation. The extremes of the distribution of times to event (extreme

quantiles) are often of interest in survival analysis. For example, many people hope that they will live to the 95th percentile, rather than the 50th percentile. The rate of occurrence of events per unit time (i.e., hazard or mortality rate) is often of interest in survival analysis.

Estimation of the survival function

If we have a dataset where no censored observations are present, estimation of the survival function is straightforward and similar to the estimation of the distribution function. Namely, we can use the *empirical survival function*:

$$\hat{S}(t) = \frac{\text{number of individuals still alive at time } t}{\text{total number of individuals in the study}}.$$

This is a *nonparametric estimate* of the survival function (i.e., in obtaining it we did not assume any parametric form of the distribution of 'time to event' T).

Alternatively, one can assume that the data come from e.g., Exponential or Weibull distributions. Then estimation of the survival function boils down to estimating the unknown parameters of these distributions. (This is the so-called *parametric approach*). The parameters can be estimated by e.g., the method of maximum likelihood.

In practice it is difficult to make reasonable parametric assumptions about the distribution of the survival time. Hence, we shall not go into details of the parametric approach here and shall concentrate on the nonparametric approach.

Censoring and differential follow-up create certain difficulties in the above nonparametric approach as is illustrated by the following example taken from a clinical trial of 148 patients treated after they had a myocardial infarction (MI). The data have been grouped into one year intervals and all time is measured in terms of patient time (table 1).

The question is to estimate the 5 year survival probability, i.e., $S(5) = P[T \geq 5]$.

Year since entry into study	Number alive and under observation at beginning of interval	Number dying during interval	Number censored or withdrawn
[0, 1)	146	27	3
[1, 2)	116	18	10
[2, 3)	88	21	10
[3, 4)	57	9	3
[4, 5)	45	1	3
[5, 6)	41	2	11
[6, 7)	28	3	5
[7, 8)	20	1	8
[8, 9)	11	2	1
[9, 10)	8	2	6

Table 1 Data from a clinical trial on myocardial infarction (MI)

duration $[t_{i-1}, t_i)$	$n(x)$	$d(x)$	$w(x)$	$\hat{m}(x)$	$1 - \hat{m}(x)$	$\hat{S}_R(t_i)$
[0, 1)	146	27	3	0.185	0.815	0.815
[1, 2)	116	18	10	0.155	0.845	0.689
[2, 3)	88	21	10	0.239	0.761	0.524
[3, 4)	57	9	3	0.158	0.842	0.441
[4, 5)	45	1	3	0.022	0.972	0.432

Table 2 Life-table estimate of $S(5)$ assuming censoring occurred at the end of interval. The estimated mortality rate $m(x)$ equals $\frac{d(x)}{n(x)}$.

duration $[t_{i-1}, t_i)$	$n(x)$	$d(x)$	$w(x)$	$\hat{m}(x)$	$1 - \hat{m}(x)$	$\hat{S}_L(t_i)$
[0, 1)	146	27	3	0.189	0.811	0.811
[1, 2)	116	18	10	0.170	0.830	0.673
[2, 3)	88	21	10	0.269	0.731	0.492
[3, 4)	57	9	3	0.167	0.833	0.410
[4, 5)	45	1	3	0.024	0.976	0.400

Table 3 Life-table estimate of $S(5)$ assuming censoring occurred at the beginning of interval. The estimated mortality rate $m(x)$ equals $\frac{d(x)}{n(x)-w(x)}$.

Two naive and incorrect answers are

$$\hat{F}(5) = P[T \leq 5] = \frac{76 \text{ deaths in 5 years}}{146 \text{ individuals}} = 52.1\%,$$

$$\hat{S}(5) = 1 - \hat{F}(5) = 47.9\%$$

and

$$\hat{F}(5) = P[T \leq 5] = \frac{76 \text{ deaths in 5 years}}{146-29 \text{ (withdrawn in 5 years)}} = 65\%,$$

$$\hat{S}(5) = 35\%.$$

The first estimate would be correct if all censoring occurred after 5 years. Of course, this was not the case, leading to overly optimistic estimate (i.e., we overestimated $S(5)$). The second estimate would be correct if all individuals censored in the 5 years were censored immediately upon entering the study. This was not the case either, leading to overly pessimistic estimate (i.e., we underestimated $S(5)$).

Our clinical colleagues have suggested eliminating all individuals who are censored and use the remaining 'complete' data. This would lead to the following estimate:

$$\hat{F}(5) = P[T \leq 5] = \frac{76 \text{ deaths in 5 years}}{146-46 \text{ (censored)}} = 88.4\%, \quad \hat{S}(5) = 11.6\%.$$

This is even more pessimistic than the estimate given by (2).

Life-table or actuarial method

More appropriate method is the so-called *life-table or actuarial method*.

First note that $S(5)$ can be expressed as $S(5) = q_1 \times q_2 \times q_3 \times q_4 \times q_5$, where $q_i = 1 - P[i-1 \leq T < i | T \geq i-1]$, $i = 1, \dots, 5$. So we just need to estimate q_i in order to estimate $S(5)$. Note that $1 - q_i$ is the mortality rate $m(x)$ at year $x = i-1$ by our definition.

duration $[t_{i-1}, t_i]$	$n(x)$	$d(x)$	$w(x)$	$\hat{m}(x)$	$1 - \hat{m}(x)$	$\hat{S}(t_i)$
$[0, 1)$	146	27	3	0.187	0.813	0.813
$[1, 2)$	116	18	10	0.162	0.838	0.681
$[2, 3)$	88	21	10	0.253	0.747	0.509
$[3, 4)$	57	9	3	0.162	0.838	0.426
$[4, 5)$	45	1	3	0.023	0.977	0.417

Table 4 Life-table estimate of $S(5)$ assuming censoring occurred during the interval.

The estimated mortality rate $m(x)$ equals $\frac{d(x)}{n(x) - (w(x)/2)}$.

$[t_{i-1}, t_i]$	$n(x)$	$d(x)$	$\hat{m}(x)$	$1 - \hat{m}(x)$	$\hat{S}(t_i)$	S.E.
0	10	0	0	1.0	1.0	
$[0, 3)$	9	1	1/9	$8/9 \approx 0.89$	0.89	0.10
$[3, 5)$	7	2	2/7	$5/7 \approx 0.71$	0.63	0.15
$[5, 7)$	4	2	2/4	$2/4 = 0.5$	0.32	0.13

Table 5 Kaplan-Meier estimate computations. The estimated mortality rate $m(x)$

equals $\frac{d(x)}{n(x)}$.

From the estimates $\hat{m}(x)$ of the mortality rates we get the estimate for the survival function as $\hat{S}(t_i) = \prod_{x \leq t_i} (1 - \hat{m}(x))$.

Above we denoted the number of subjects still under observation at time x as $n(x)$. The number of subjects with an event (death) at this time is $d(x)$ and the number of censored observations is denoted as $w(x)$.

Case 1: Let us first assume that anyone censored in an interval of time is censored at the end of that interval. Then the life table estimate would be computed as shown in table 2. So the 5 year survival probability estimate is 0.432. (In this case, the estimator $\hat{S}_R(5)$ is unbiased to $S(5)$.)

Case 2: Let us assume that anyone censored in an interval of time is censored right at the beginning of that interval. Then the life table estimate would be computed as shown in table 3. Here the 5 year survival probability estimate is 0.400. (In this case, the estimator $\hat{S}_L(5)$ is also unbiased to $S(5)$.)

The naive estimates range from 35% to 47.9% for the five year survival probability, while the 'complete case' (i.e., eliminating anyone censored) estimator giving an estimate of 11.6%. The life-table estimate ranges from 40% to 43.2% depending on whether we assume censoring occurred at the left (i.e., the beginning) or right (i.e., the end) of each interval.

More than likely censoring occurs during the interval. A compromise is to use the modification in table 4. The 5 year survival probability estimate is now 0.417, which is between the two estimates above. The quantity $n(x) - w(x)/2$ is often referred to as the *effective sample size*.

The Kaplan-Meier estimator

The *Kaplan-Meier* or *product limit estimator* is the limit of the life-table estimator when intervals are taken so small that only at most one observation occurs within an interval. Kaplan and Meier demonstrated in a paper in JASA (1958) that this estimator is the *maximum likelihood estimate*.

Let $d(x)$ denote the number of deaths at time x . Generally $d(x)$

is either zero or one, but we allow the possibility of tied survival times in which case $d(x)$ may be greater than one. Let $n(x)$ denote the number of individuals at risk just prior to time x , i.e., the number of individuals in the sample who neither died nor were censored prior to time x . Then the Kaplan-Meier estimate can be expressed as

$$KM(t) = \prod_{x \leq t} \left(1 - \frac{d(x)}{n(x)}\right).$$

Note that in the notation above, the product changes only at times x where $d(x) \geq 1$, i.e., only at times where we observed deaths or, in general, events.

We illustrate the computation of the Kaplan-Meier estimator here on a simple example. Let us have the dataset of 10 individuals observed during 8 years; 5 of them died during the study and 5 were censored.

The calculations for the Kaplan-Meier survival function estimate correspond to the following steps.

The first step is to list all of the observed times, both censored and uncensored, from smallest to largest. If there are censored times equal to complete times, list the complete times first. Distinguish the censored and uncensored observations in some way.

The ordered data of our example are listed below.

1+; 3; 4+; 5; 5; 6+; 7; 7; 7+; 8+

Censored observations are denoted with a plus sign.

Next, we form a table similar to those in the actuarial table method (table 5). Each distinct uncensored time in the ordered list forms one row in the table. The first line serves to start the computations with all subjects under observation at time 0.

No subject was observed to die before 3 years. Although one subject was censored at year 1, we estimate that the probability of survival equals 1.0 up until 3 years. If T is the time to death for a random subject, we estimate that $\hat{S}(t) = \hat{P}[T > t] = 1$ for $0 < t < 3$. Note that there is no reason to believe that the subject lost to follow-up at 1 year died before 3 years.

Of the nine subjects still being observed at 3 years, one died at that time. Thus,

$$\hat{P}[T = 3 | T \geq 3] = 1/9.$$

The natural estimate for being alive past year 3 is $\hat{P}[T > 3] = 8/9$. The estimated death probability at each time is based on those subjects who are still being followed in the study at that time. Note that we are not assuming that the person lost to follow-up at year 1 did not die, which would have led to an estimate of 9/10 for the fraction alive after 3 years. Instead, we also give that person a 1/9 chance of dying at year 3. Conceptually, of the original 10 subjects, the expected number of people that die at year 3 is thus hypothesized to be $1 + 1/9$ (one observed and 1/9 hypothesized for the censored subject). The resulting hypothetical estimate for the probability of dying at year 3 would thus be $(1 + 1/9)/10 = 1/9$. This method assigns the same death probabilities to subjects who were previously censored as we observe among those who remain in the study.

No more deaths were observed between years 3 and 5, so the

natural estimate for $P[T > t]$ is $8/9$ for $3 < t < 5$.

Of the 7 subjects still alive and under observation just before year 5, two died at year 5. Among those still alive just before year 5, the natural estimate for dying at year 5 is $2/7$. That is, $\hat{P}[T = 5|T \geq 5] = 2/7$. Among those still alive at the beginning of year 5, the natural estimate for survival during that year is $5/7$. That is, $\hat{P}[T > 5|T \geq 5] = 5/7$. The cumulative probability of surviving through year 5 is equal to the probability of surviving until the beginning of year 5 multiplied by the probability of surviving through year 5 for subjects who survive until year 5. The product is $8/9 \times 5/7 = 40/63$. That is,

$$\hat{P}[T > 5] = \hat{P}[T \geq 5] \times \hat{P}[T > 5|T \geq 5].$$

Note that this multiplication of probabilities is the essential feature of the actuarial and Kaplan-Meier approaches. The conditional probability is estimated on the basis of subjects who are still being followed and who have not yet died.

The standard error (S.E.) of the Kaplan-Meier estimator for survival curve can be approximated using the Peto equation $S.E. = \hat{S}(t) \sqrt{(1 - \hat{S}(t))/n}$. We like to point out that the so-called *Greenwood's formula* yields a more accurate estimate of the standard error than does the formula presented above.

Note that if the subject with the longest follow-up has an event (i.e., has died and has not been censored), then the Kaplan-Meier survival curve drops to 0 at the time of that event. If the subject with the longest follow-up is censored, then the Kaplan-Meier estimate is undefined after that time.

Advanced statistical packages, such as Splus or SPSS, have procedures for computing the Kaplan-Meier estimator of the survival curve, together with the confidence intervals. Other quantities, such as the hazard and cumulative hazard functions, are usually estimated via formulas that relate them to the survival function, given above. Other relevant information, such as mean survival time, can also easily be extracted from the estimated survival curve (see figure 3).

Further issues

Here we presented a clever and powerful nonparametric method for estimating the survival function from a dataset possibly containing censored observations: the Kaplan-Meier estimator. Of course, the subject of survival analysis is a lot more broad and complex and addresses a variety of other issues. For example, given two groups of individuals (e.g., males and females, smokers and non-smokers or people treated with different drugs), one

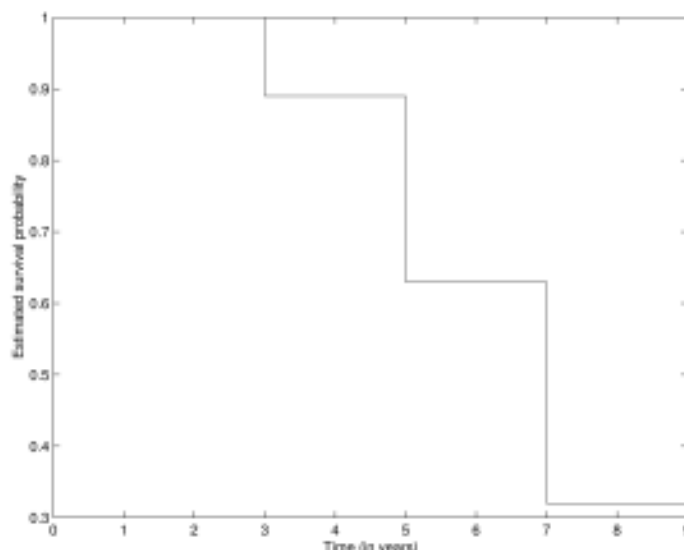


Figure 3 The estimated survival curve is a step function, i.e., it is plotted as a series of horizontal lines based on the computed values of the Kaplan-Meier estimator.

can test whether one group has better chances of survival than the other group. A number of tests, such as the *log-rank test* (based on, e.g., the Kaplan-Meier estimator), were developed to give a statistically significant answer to this question.

Another very important issue is modelling the dependence of the hazard rate or survival function on external factors, such as blood pressure, dosage of a certain drug or sex or age of an individual. A celebrated method, called *Cox' proportional hazard model*, addresses this issue. This very general method was introduced in 1972 by Sir David Cox, a professor of statistics in Oxford, and since then has enjoyed wide recognition and was applied in thousands of studies and clinical trials. In fact, the original paper Cox published in the *Journal of the Royal Statistical Society*[2], where he introduced and studied this method, remains until today the most cited mathematical paper in the world.

For those who are interested in knowing more about survival analysis, there are plenty of books and monographs available. A good introduction into survival analysis is the book by Miller[4]. A good treatment of statistical methods of survival analysis can be found in the book by Kalbfleisch and Prentice[3]. Mathematically more advanced is the book by Andersen et al[1]. The study of this book requires sound knowledge of counting processes and of martingale theory.

References

- 1 Andersen, P.K., Borgan, O. Gill, R.D., Keiding, N. (1992). *Statistical Models Based on Counting Processes*. Springer-Verlag.
- 2 Cox, D.R. (1972). Regression Models and Life-Tables. *J. Royal Stat. Soc.*, No. 2, pp. 187–220.
- 3 Kalbfleisch, J.D., Prentice, R.L. (1980). *The Statistical Analysis of Failure Data*. Wiley.
- 4 Miller, R.G. (1998). *Survival Analysis*. John Wiley & Sons, Inc.

Andries Brouwer

Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
aeb@cwi.nl

Automatic summation using Zeilberger-Wilf theory

Het vinden van een expliciete uitdrukking voor een som van de vorm

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3$$

was tot voor kort alleen mogelijk met behulp van behoorlijk wat menselijke slimheid en inventiviteit. Echter, computers kunnen dergelijke uitdrukkingen nu ook vinden; het probleem wanneer een hypergeometrische som is uit te drukken in gesloten vorm is geheel opgelost. Andries Brouwer beschrijft het proces van de zogenaamde automatische sommering. Het is gebaseerd op theorieën van Zeilberger en Wilf.

The problem of discovering whether or not a given hypergeometric sum is expressible in a simple closed form, and if so, finding

Hypergeometric sums

Informally, a hypergeometric sum has the shape

$$f(n) = \sum_k F(n, k),$$

where $F(n, k)$ involves factorials and binomial coefficients as in

$$F(n, k) = (-1)^k \binom{n}{k}^3.$$

A precise definition is given in formula (2). Sums and series with such summands occur in the field of special functions, viz. hypergeometric functions.

that form, and if not, proving that the sum is not expressible in a closed form, has now been completely automated. There is no ingenuity or mathematician required: a computer algebra package can do it all.

In his treatise [2], Exercise 1.2.6.63, Knuth asks: *Develop computer programs for simplifying sums that involve binomial coefficients*, and rates this exercise M50, the same difficulty as assigned to Fermat's last Theorem!

Here is the recipe for finding $f(n) = \sum_k F(n, k)$:

- i. Go to <http://www.cis.upenn.edu/~wilf/progs.html> and download EKHAD. (While you are there you might as well also take `hyper`, `wz` and `gasper.m`.)
- ii. Start Maple (some might prefer Mathematica, but that has a serious flaw: whenever you really need it, it turns out that your license has expired, or the password of your computer has changed because you exchanged your ethernet card, and it may well take a while before it is usable again).
- iii. Read EKHAD.
- iv. Define the summand $F(n, k)$.
- v. Call `zeil(F(n, k), k, n, N)`.
- vi. Your problem is solved.

For example, look at the sum $\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k}^3$. For odd m this vanishes since the terms for k and $m - k$ cancel, so take $m = 2n$. Here are the relevant snippets of the maple session, after reading in EKHAD.

```
> F := (n, k) -> (-1)^k * binomial(2*n, k)^3;
```

```

                                     k
F := (n, k) -> (-1)  binomial(2 n, k)
                                     3
```

```
> z := zeil(F(n, k), k, n, N);
```

Maple returns two expressions:

$$-6(3n+2)(3n+1) - 2(n+1)^2N,$$

and a fraction with numerator

$$\begin{aligned} & k^3(784n - 207k - 48k^3 + 2084n^2 - 1113nk + 147k^2 - 2214n^2k \\ & + 594nk^2 + 2728n^3 + 6k^4 + 448n^5 + 1760n^4 + 116 - 1932n^3k \\ & - 624n^4k + 792n^2k^2 + 348n^3k^2 - 132nk^3 - 90n^2k^3 + 9k^4n) \end{aligned}$$

and denominator

$$(2n - k + 1)^3(2n + 2 - k)^3.$$

What is it that we found? The function `zeil` will find recurrences of the form

$$\sum_{j=0}^I a_j(n)F(n+j, k) = G(n, k+1) - G(n, k) \quad (1)$$

given the function $F(n, k)$. Once we have such a recurrence, summing over k will yield

$$\sum_{j=0}^I a_j(n)f(n+j) = 0$$

where $f(n) = \sum_k F(n, k)$, a recurrence relation for the sum that we wanted to find. In the maple call, N is the forward shift operator, which action is given by $(Nf)(n) = f(n+1)$. The first part of the answer says that

$$-6(3n+2)(3n+1)f(n) - 2(n+1)^2f(n+1) = 0,$$

that is, $f(n+1) = -3(3n+1)(3n+2)f(n)/(n+1)^2$. Since $f(0) = 1$ we find that

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3}.$$

How can we verify that this really is true? The second part of the answer is the *certificate*, a rational function $R(n, k)$ that makes it possible to verify all claims by straightforward checking. It defines the G of (1) by $G(n, k) = R(n, k)F(n, k)$. Now dividing both sides of (1) by $F(n, k)$ yields a claimed equality of two rational functions in n and k , multiplying by the denominators yields a claimed equality between polynomials, and this is true by inspection.

```
> R := (an, ak) -> subs(n=an, k=ak, z[2]):
> simplify(expand(- 6*(3*n + 2)*(3*n + 1)
> - 2*(n+1)^2*F(n+1, k)/F(n, k)
> - R(n, k+1)*F(n, k+1)/F(n, k) + R(n, k)));
0
```

The final 0 is what we wanted (and we could have done it by hand, if necessary). This proves our result.

The mathematics behind automatic summation

When precisely does this work? As we saw before, the heart of the matter is to find suitable recurrence relations. Before we formulate the two results stating the existence of such recurrence relations in a convenient form, we describe the exact shape of the term $F(n, k)$ in $f(n) = \sum_k F(n, k)$ for which the results hold.

Recurrence relations

Suitable recurrence relations for the $F(n, k)$ and, subsequently, the $f(n) = \sum_k F(n, k)$ are the key to producing closed forms. Solving an appropriate system of equations, one can come up with a recurrence relation like

$$\begin{aligned} & a(n)F(n, k) + b(n)F(n+1, k) + c(n)F(n, k+1) \\ & + d(n)F(n+1, k+1) = 0. \end{aligned}$$

(In a given case, possibly more terms are needed in a recurrence relation.) For example, with $F(n, k) = 2^k \binom{n}{k}$, solving

$$a(n) + b(n)\frac{n+1}{n+1-k} + c(n)\frac{2n-2k}{k+1} + d(n)\frac{2n+2}{k+1} = 0$$

for $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$ and $d(n)$ leads to $F(n+1, k+1) = 2F(n, k) + F(n, k+1)$. Summing over k then gives the recurrence $f(n+1) = 3f(n)$ for $f(n)$. It is in this step that the dependence of $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$, $d(n)$ on n only (in our simple example just constants) is crucial. Of course, $f(n) = 3^n$.

Definition. A function $F(n, k)$ is said to be a *proper hypergeometric term* if it can be written in the form

$$F(n, k) = P(n, k) \frac{\prod_{r=1}^s (a_r n + b_r k + c_r)!}{\prod_{r=1}^t (u_r n + v_r k + w_r)!} x^k \quad (2)$$

in which x is an indeterminate, P a polynomial, the a_r , b_r , u_r , v_r are specific integers (i.e., do not contain additional parameters) and s , t are finite, nonnegative, specific integers. (The c_r and w_r are allowed to be arbitrary parameters that take complex values. Also the coefficients of the polynomial P may contain additional parameters.)

The following theorem was already discovered in the fourties.

Theorem [Mary Celine Fasenmyer]. If $F(n, k)$ is a proper hypergeometric term, then it satisfies a recurrence relation

$$\sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J a_{ij}(n)F(n-j, k-i) = 0 \quad (3)$$

where the $a_{ij}(n)$ are polynomials in n , not all zero, and the equation holds for all n , k for which $F(n, k) \neq 0$ and all occurring $F(n-j, k-i)$ are defined. Furthermore, there is such a recurrence with $(I, J) = (I_0, J_0)$, where $J_0 = \sum_r |b_r| + \sum_r |v_r|$ and $I_0 = 1 + \deg(P) + J_0(\sum_r |a_r| + \sum_r |u_r| - 1)$.

Proof. The idea is to rewrite (3), for suitable I and J , as a system of equations with more unknowns than equations.

Define (for integral nonnegative x) $\text{rf}(x, y) := \prod_{j=1}^x (y+j)$ and $\text{ff}(x, y) := \prod_{j=0}^{x-1} (y-j)$. Extend ff for integral negative x by $\text{ff}(-x, y) := \text{rf}(x, y)^{-1}$. (The abbreviations should suggest raising resp. falling factorial.) Then, if $H(n, k) = (an + bk + c)!$, we

have

$$\frac{H(n-j, k-i)}{H(n, k)} = \frac{1}{\text{ff}(aj+bi, an+bk+c)}.$$

Thus $x^i \frac{F(n-j, k-i)}{F(n, k)}$ is a rational function in n, k , say $\frac{\nu_{ij}(n, k)}{\delta_{ij}(n, k)}$, and

$$\delta_{ij}(n, k) = P(n, k) \prod_{a_r j + b_r i \geq 0} \text{ff}(a_r j + b_r i, a_r n + b_r k + c_r) \prod_{u_r j + v_r i < 0} \text{rf}(-u_r j - v_r i, u_r n + v_r k + w_r).$$

We now try to solve (3) for the coefficients $a_{ij}(n)$. Place the expressions over a single common denominator, collect the numerator as a polynomial in k , and equate the coefficient of each power of k to zero. This will work when the number of unknowns is larger than the number of equations. Put $x^+ := \max(x, 0)$. Then

$$\max\{aj+bi \mid aj+bi \geq 0, 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J\} = a^+J + b^+I,$$

$$\begin{aligned} \max\{-aj-bi \mid aj+bi < 0, 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J\} \\ = (-a)^+J + (-b)^+I. \end{aligned}$$

The least common multiple of all $\delta_{ij}(n, k)$ divides

$$\begin{aligned} \Delta := P(n, k) \prod_r \text{ff}(a_r^+J + b_r^+I, a_r n + b_r k + c_r) \\ \prod_r \text{rf}((-u_r)^+J + (-v_r)^+I, u_r n + v_r k + w_r). \end{aligned}$$

After multiplying by $x^I \Delta$, we have to find the $a_{ij}(n)$ from the polynomial equation

$$\sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J a_{ij}(n) \nu_{ij}(n, k) \frac{\Delta}{\delta_{ij}(n, k)} x^{I-i} = 0.$$

The number of unknowns a_{ij} equals $(I+1)(J+1)$. The number of different powers of k occurring is at most

$$1 + \deg(P) + (\sum |a_r| + \sum |u_r|)J + (\sum |b_r| + \sum |v_r|)I.$$

For sufficiently large I, J , e.g. for the I_0, J_0 given in the theorem, there are more unknowns than equations, and we find a solution where a_{ij} equals x^i times a polynomial in n . $\square$

Telescoped recurrences

So, we found, in a constructive way, a recurrence satisfied by $F(n, k)$. But it is not in a form convenient for summation.

Theorem [Doron Zeilberger]. If $F(n, k)$ is a proper hypergeometric term, then it satisfies a nontrivial recurrence relation of the form

$$\sum_{j=0}^J a_j(n) F(n+j, k) = G(n, k+1) - G(n, k)$$

in which $G(n, k)/F(n, k)$ is a rational function of n and k .

Proof. Let N, K be the forward shift operators in n and k . Then a recurrence $\sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J a_{ij}(n) F(n+j, k+i) = 0$ can be written as $p(n, N, K)F(n, k) = 0$ for a certain polynomial p with coefficients in $\mathbb{Z}[x]$. Take such a p that has minimal degree in K .

Write

$$p(n, N, K) = p(n, N, 1) + (1-K)q(n, N, K).$$

Then

$$\begin{aligned} p(n, N, 1)F(n, k) &= (K-1)q(n, N, K)F(n, k) \\ &= G(n, k+1) - G(n, k), \end{aligned}$$

where $G(n, k) = q(n, N, K)F(n, k)$. This proves the claim, since shift operators multiply $F(n, k)$ by a rational function. But could $p(n, N, 1)$ be identically zero? Then $G(n, k)$ does not depend on k and hence is a hypergeometric term in the single variable n and satisfies some recurrence (of order 1) $r(n, N)G(n, k) = 0$. Now $r(n, N)q(n, N, K)F(n, k) = 0$, a recurrence of lower degree in K than the one we started with. $\square$

An example

As an example of the above theorems, we prove Boersma's identity. This identity was found in 1961 by Boersma, and later shown to Askey. Askey forgot, and many years later rediscovered and published it (with the same proof Boersma had given). The final version of the paper [1] contains an acknowledgement to Boersma. Define the *up-down factorial* $\text{ud}(x, y)$ by

$$\text{ud}(x, y) := \frac{(x+1)(x+3)\dots(x+2y-1)}{x(x+2)(x+4)\dots(x+2y)}.$$

Theorem [Boersma, 1961]. Let a, b, c be nonnegative integers such that $a+b+c$ is odd, and $c \leq a+b$. Then

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\min(b,c)} \frac{\binom{2b-2k}{b-k} \binom{2c-2k}{c-k} \binom{2k}{k}}{\binom{2b+2c-2k}{b+c-k}} \cdot \frac{(b+c-2k+\frac{1}{2})}{(b+c-k+\frac{1}{2})} \times \\ \times \frac{1}{(a-b-c+2k)(a+b+c+1-2k)} \\ = \text{ud}(a-b-c, c) \cdot \text{ud}(a+b+1-c, c). \end{aligned}$$

Note that the left-hand side is symmetric in b and c . But so is the right-hand side: if $c > b$, then the zigzags from $a-b-c$ to $a-b+c$ and from $a+b+1-c$ to $a+b+1+c$ overlap, and we see that $\text{ud}(a-b-c, c) \cdot \text{ud}(a+b+1-c, c) = \text{ud}(a-b-c, b) \cdot \text{ud}(a+c+1-b, b)$.

```
> F := (a,b,c,k) -> binomial(2*(b-k), b-k)*
> binomial(2*(c-k), c-k)*binomial(2*k, k)*
> (b+c-2*k+1/2) / (binomial(2*(b+c-k), b+c-k)*
> (b+c-k+1/2)*(a-b-c+2*k)*(a+b+c+1-2*k)):
> T := (c,k) -> F(a,b,c,k):
> z := zeil(T(c,k), k, c, C);
bytes used=245350904, alloc=3276200, time=181.68
z :=
```

$$\begin{aligned} (c+2)(c+1)(a-b+c+1)(a-b-c-1)(a+b+c+2)(a+b-c) \\ - (c+2)(c+1)(a+b+c+3)(a+b-c-1)(a-b+c+2) \end{aligned}$$

$$\frac{2}{(a-b-c-2)C},$$

...

Thus, after 3 minutes on a Pentium with Linux (it was 7 minutes on a Sparcstation with SunOS) we find a recurrence relation for the sum $S(a, b, c) = \sum F(a, b, c, k)$ of the left-hand side. Here C is the shift operator in c . It says

$$\begin{aligned} & (c+2)(c+1)(a+b+c+3)(a+b-c-1) \\ & (a-b+c+2)(a-b-c-2)S(a, b, c+2) = \\ & (c+2)(c+1)(a-b+c+1)(a-b-c-1) \\ & (a+b+c+2)(a+b-c)S(a, b, c). \end{aligned}$$

This recurrence is valid for all integers b and c , and for arbitrary complex a different from the integers $b+c$, $b+c-2$, ..., $b-c$, $-b-c-1$, $-b-c+1$, ..., $-b+c-1$ (for $c \leq b$). We need integers b and c to make sure that only finitely many summands are nonzero. For negative c the sum vanishes, for nonnegative c it is interesting, and the factor $(c+2)(c+1)$ in the relation makes sure we cannot continue the recurrence down past $c=0$. Clearly, $\text{ud}(a-b-c, c) \cdot \text{ud}(a+b+1-c, c)$ satisfies this same recurrence (for $c \geq 0$). It remains to compute $S(a, b, 0) = F(a, b, 0, 0) = 1/(a-b)(a+b+1)$ and, as desired

$$\begin{aligned} S(a, b, 1) &= F(a, b, 1, 0) + F(a, b, 1, 1) \\ &= (a-b)(a+b+1)/(a+b)(a-b+1)(a+b+2)(a-b-1) \end{aligned}$$

Note that we proved a slightly more general result — the integrality of a (and that $a+b+c$ is odd) does not play a role, we only need a to be a complex number distinct from a handful of given integers.

Another example

Aart Blokhuis asked for the value of $\sum_{j=0}^k \binom{-a}{j} \binom{b}{k-j} \binom{c+j}{r}$ for $b = k+a-1$ and $b = k+a-2$, where a, b are nonnegative integers. This one is much easier than the previous example. Within two seconds we find a recurrence relation.

But let us first worry a little about the meaning of $\binom{x}{m}$ for possibly negative m . For nonnegative m we have the definition $\binom{x}{m} = \frac{x(x-1)\dots(x-m+1)}{m!} = \text{ff}(x, m)/\text{rf}(0, m)$, valid for all x . Below we shall use the convention $\binom{x}{m} = 0$ for $m < 0$. Then $\binom{x+1}{m} = \binom{x}{m} + \binom{x}{m-1}$ for all integers m .

[Note however, that this is not Maple's convention. Indeed, Maple says for negative m that $\binom{x}{m} = \text{ff}(0, -m)/\text{rf}(x, -m)$ and this is zero, unless x is an integer with $m \leq x \leq -1$, in which case $\binom{x}{m} = \text{ff}(x, x-m)/\text{rf}(0, x-m) = \binom{x}{x-m}$. Thus, with this convention we have $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$ for all integers m, n .]

Proposition. Let a, b be nonnegative integers.

(i) If $b = k+a-1$, we have

$$\sum_{j=0}^k \binom{-a}{j} \binom{b}{k-j} \binom{c+j}{r} = (-1)^k \binom{b}{k} \binom{c}{r-k}.$$

(ii) If $b = k+a-2$, we have

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^k \binom{-a}{j} \binom{b}{k-j} \binom{c+j}{r} \\ &= (-1)^k \left(\binom{b}{k} \binom{c}{r-k} + \binom{b}{k-1} \binom{c+1}{r+1-k} \right) \end{aligned}$$

Proof. If the sum is $S(k)$, then in the first case we find (regarding a, c, r as constants) the recurrence $(k-r)(k+a)S(k) = (k+1)(k-r+c+1)S(k+1)$ and $S(0) = \binom{c}{r}$. The certificate is $(c+j-r)j(k+a)/(k+1-j)$.

In the second case we find the recurrence

$$\begin{aligned} & (k-r-1)(k+a-1)(kc-ka+ar+2k-r+c+1)S(k) = \\ & (k+1)(k-r+c+1)(kc-ka+ar+2k-r+a-1)S(k+1). \end{aligned}$$

This means that with $T(k) := S(k)/(kc-ka+ar+2k-r+a-1)$ we have $T(k+1) = \frac{(k-r-1)(k+a-1)}{(k+1)(k-r+c+1)} T(k)$ (essentially the same recurrence as before), so that

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^k \binom{-a}{j} \binom{b}{k-j} \binom{c+j}{r} \\ &= (-1)^k \binom{b}{k} \binom{c+1}{r+1-k} \cdot \frac{k(c+1) + (a-1)(r+1-k)}{(a-1)(c+1)}. \quad \square \end{aligned}$$

Generalization and a Maple proof

Inspired by the above we conjecture that

$$\begin{aligned} & (-1)^k \sum_j \binom{k-b-e-1}{j} \binom{b}{k-j} \binom{c+j}{r} \\ &= \sum_j \binom{e}{j} \binom{b}{k-j} \binom{c+j}{r-k+j}. \end{aligned}$$

We shall give both a Maple and a traditional proof. It suffices to prove the identity in case $c=0$ (see below for the argument), so we assume this, since it greatly simplifies the recurrences obtained.

Let $F(r, j)$ and $H(r, j)$ be the summands on the left-hand and right-hand side. Then we have for $j \geq 0$

$$\begin{aligned} & (k-r-e-1)(r+1)F(r+1, j) - (k-r)(k-b-r-e-1)F(r, j) \\ &= G(r, j+1) - G(r, j) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & (k-r-e-1)(r+1)H(r+1, j) - (k-r)(k-b-r-e-1)H(r, j) \\ &= J(r, j+1) - J(r, j), \end{aligned}$$

where $G(r, j) = (k-b-j)(j-r)F(r, j)$ and $J(r, j) = (k-b-j)(k-r)H(r, j)$, as one easily checks by dividing both sides by $F(r, j)$ resp. $H(r, j)$. (We need not worry about $b = k-j-1$, since both sides are polynomials in b , and if they agree for all nonintegral b , they are identical.)

Sum over $j \geq 0$, and note that $G(r, 0) = J(r, 0) = 0$. We see that both sums satisfy the same recurrence relation

$$(k-r-e-1)(r+1)S(r+1) = (k-r)(k-b-r-e-1)S(r).$$

Both sums vanish for $r < 0$, and if we check that they agree for $r=0$ the recurrence will show that they always agree. (Again, we need not worry about $r = k-e-1$.)

But for $r = 0$ we find (this time taking b integral)

$$\begin{aligned} (-1)^k \sum_j \binom{k-b-e-1}{j} \binom{b}{k-j} &= (-1)^k \binom{k-e-1}{k} \\ &= \binom{e}{k} = \sum_j \binom{e}{j} \binom{b}{k-j} \binom{j}{k}. \end{aligned}$$

This proves the claimed identity.

A traditional proof

Let Δ_x be the forward difference operator in x (acting on the space of polynomials in x), that is, $\Delta_x f(x) := f(x+1) - f(x)$. Then Δ_x decreases the degree of nonzero polynomials by one (if we agree that the zero polynomial has degree -1), and it follows that $f = g$ when $\Delta_x f = \Delta_x g$ and $f(c) = g(c)$ for some c . This operator is useful when manipulating binomial coefficients, since $\Delta_x \binom{x}{m} = \binom{x}{m-1}$.

Lemma. Let m, n be integers, and $m \geq 0$. Then

$$\sum_i (-1)^i \binom{m}{i} \binom{x+i}{n} = (-1)^m \binom{x}{n-m}.$$

Proof. Δ_x turns this equation into the same equation with n decreased by 1. Thus, it suffices to check this identity for $x = 0$. Then both sides equal $(-1)^m$ if $n = m$ and 0 otherwise. $\square$

Proposition. Let k, m, n be integers. Then

$$\begin{aligned} \sum_i (-1)^i \binom{x}{i} \binom{x+y-i}{k+m-i} \binom{z+k-i}{n} \\ = \sum_i \binom{x}{k-i} \binom{y}{m+i} \binom{z+i}{n-k+i}. \end{aligned}$$

Proof. Δ_y and Δ_z decrease m and n , respectively, so it suffices to prove this for a suitable choice of y and z . Pick $y = 0$ and $z = n - k$. We have to show that

$$\sum_i (-1)^i \binom{x}{i} \binom{x-i}{k+m-i} \binom{n-i}{n} = \binom{x}{k+m} \binom{n-k-m}{n-k-m}.$$

But $\binom{x}{i} \binom{x-i}{k+m-i} = \binom{x}{k+m} \binom{k+m}{i}$, so it remains to show that if $p \geq 0$ then

$$\sum_i (-1)^i \binom{p}{i} \binom{n-i}{n} = \binom{n-p}{n-p}.$$

But this is the case $m = p, x = -1$ of the above lemma. $\square$

Of course the identity we had is obtained by substituting $b, e, c, 0, r, j$ for x, y, z, m, n, i and interchanging j and $k - j$ on the left. $\Leftarrow$

References

- 1 Richard Askey, Tom H. Koornwinder & Mizan Rahman, *An integral of products of ultraspherical functions and a q -extension*, J. London Math. Soc. (2) **33** (1986) 133–148.
- 2 Donald E. Knuth, *The art of computer programming*, Vol. 1, Addison Wesley, 1968.
- 3 Marko Petkovšek, Herbert S. Wilf & Doron Zeilberger, *A = B*, A.K. Peters, Massachusetts, 1996.

Nick Ovenden

*Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
n.c.ovenden@tue.nl*

Vivi Rottschäfer

*Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
vivi@math.leidenuniv.nl*

Studiegroep wiskunde in de industrie

A greenhouse growth model for unselfish roses

In februari 2002 vond de tweeënveertigste Studiegroep Wiskunde met de Industrie plaats. Een van de problemen betrof het modelleren van de groei van kasrozen. Het uiteindelijke doel van de studie is het construeren van een model dat door middel van terugkoppeling het klimaat in een kas zo regelt dat een optimale groei wordt verkregen. Het probleem is aangedragen door het bedrijf Phytocare, een adviesbureau voor rozenkwekers.

In recent years, production of roses has become increasingly more competitive and commercialised. Whilst the rose-grower's experience remains the key to producing a large rose harvest, qualitative and quantitative modelling of the biochemical processes continues to take an ever more prominent role in optimising production even further. Nowadays, it is commonplace for the internal climate of a greenhouse to be computer-controlled, although the question of how to develop a climate control model to maximise production cannot yet be answered. Indeed, maintaining a constant internal climate is not enough, as the model must react to changes in weather and seasonal climate outside the greenhouse. Sudden rainfall, for instance, can lead to a sharp drop in temperature, which can, in turn, adversely affect the rose harvest some days or weeks later.

Our task during the study group was to develop a mathematical model of rose production, which given the internal climate conditions can predict the total mass of rose harvest produced per square metre of greenhouse per week. It is hoped that eventually the model will enable the rose grower to tune these climatic conditions inside the greenhouse dynamically to maximise the rose harvest.

Leaf photosynthesis

Rose stems grow by assimilating CO_2 from the air. This process is performed in the leaves and is called photosynthesis. The CO_2 assimilation and, therefore, the growth of the roses is influenced by several environmental factors. Some of these can be controlled by the rose-grower, for example by using heaters or lamps, opening or closing the windows and putting up blinds for shade. These actions, in turn, alter

the CO_2 concentration in the air C_a (by ventilation), the relative humidity R_H , the temperature in the greenhouse T_a , and the overall light intensity I_0 .

We began the project with a model, derived from [2–3], that calculates the photosynthetic rate of a single leaf given its age a , the greenhouse temperature, humidity and CO_2 concentration, as well as the amount of light intensity I the leaf receives. This leaf model was very intricate and our initial task involved unravelling all the effects of climate and leaf properties on the local photosynthetic rate. In fact, the photosynthetic rate P per unit area of leaf can be written as an equation of the form

$$P = f(P, a, T_a, R_H, C_a, I),$$

where f is explicitly known and is a non-linear function. It was found that this model could be simplified a great deal and linearised in various limits, whilst retaining the most important biological properties.

The greenhouse model

Given the photosynthesis model for a single leaf, our main challenge for the study group was to use this leaf model to determine how an entire rose crop inside a greenhouse would grow under certain climatic conditions. It was clear from the photosynthesis model that the task would not be completely straightforward, as the amount of biomass produced depends on the age of the leaf and on the amount of light each leaf receives. Both of these variables will clearly change dynamically in time as the rose plants grow, producing new young leaves whilst increasingly shading the lower leaves from the light above.

Model assumptions

To model the rose plants in the greenhouse, we assume that each plant can be divided into two constituent parts: (i) the *rose crop* above which consists of one or more rose stems to be harvested and (ii) the *rose bush* below that supports the stems but is not harvested. A rough sketch of our idealised greenhouse can be seen in figure 1.

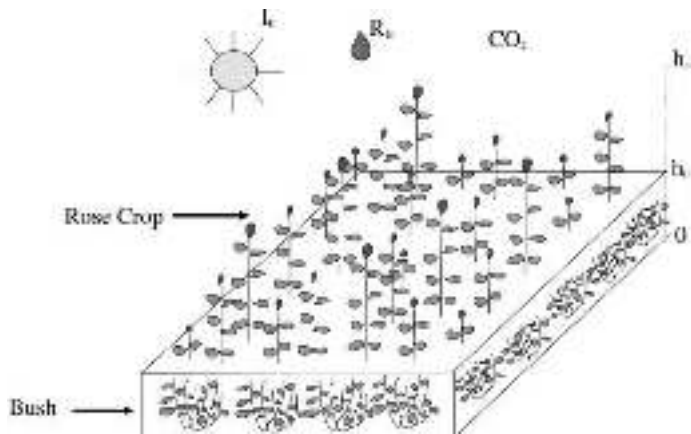


Figure 1 A sketch of an idealised greenhouse, where RH denotes the relative humidity, I_0 the overall light intensity, h_0 the level at which the harvested stems are cut on reaching height h_{cut} .

The bush is taken to have a constant height h_0 and contains leaves that assimilate and thus contribute to the total photosynthetic rate of the greenhouse. The rose stems grow vertically out of the rose bush and are harvested once they reach a certain height h_{cut} . Furthermore, the harvested stems are all cut at the level h_0 , so that they are all of the same length, $h_{cut} - h_0$. As the mature roses are cut, new stems are assumed to grow out of the top of the bush appearing at a rate proportional to the current net photosynthetic rate in the greenhouse. For simplicity, we ignore the part of the acquired photosynthetic energy that is used for maintenance, storage and blossoming, and assume that the photosynthesis in the crop and bush is entirely used to increase the mass of stems in the crop.

As the photosynthesis in a leaf depends on the age of the leaf, we have to know where the young and old leaves are positioned on a rose plant. For this reason we assume that any new leaves appear at the top of the rose stems, agreeing reasonably well with observations. We also suppose that the leaves, and therefore the leaf area, are distributed uniformly along the stem. In other words, the leaf area of each stem is proportional the stem's length. As the rose-grower is concerned with the productive mass of the crop, we also assume that the mass of each rose stem is proportional to its length.

The principle of unselfishness

A further assumption which simplifies the greenhouse model greatly is the so-called *unselfishness principle*. The principle states that any

biomass obtained from photosynthesis of a single leaf, either located on a stem or within the bush, contributes equally to the growth of all rose stems, whether large or small. Hence, although a taller stem, which has more leaves, will assimilate more CO_2 than a shorter stem, the combined biomass produced will be shared equally between them. As a result, every stem grows at the same speed, independent of its own photosynthetic rate.

The unselfishness principle reflects both real data and the observation that a single rose plant, possessing a number of rose stems of differing heights, acts as a single entity. In this way new young stems can develop quickly, even though they do not possess a large leaf area.

The growth equation

From these assumptions, the state of the rose crop at any given instant of time can be described by a stem density function $d(h, t)$, representing the distribution of stems of differing heights. The function $d(h, t)$ describes the number of stems per square metre of greenhouse as a function of height h and time t . From the unselfishness principle stating that every rose stem grows at the same speed, it follows that this density function is advected by a growth rate $v = v(t; d)$, which is *independent* of h (see figure 2). The dynamics of d can be written down in the following way

$$\frac{\partial d}{\partial t} + v \frac{\partial d}{\partial h} = 0.$$

The equation requires an initial state of the greenhouse rose crop at a given time and a boundary condition at $h = h_0$, representing the creation of new stems from the rose bush. From an assumption already stated, it follows that these new stems are created at a rate proportional to the net photosynthesis denoted by $P_{net}(t)$. This photosynthetic rate represents the net biochemical intake or loss of CO_2 per square metre of greenhouse from both bush and crop.

Since roses are cut once they have reached height h_{cut} , the harvest rate $H(t)$ per square metre of greenhouse is given by

$$H(t) \propto v(t; d)(h_{cut} - h_0)d(h_{cut}, t),$$

where, from here on, $\propto$ means 'proportional to'.

Note that this harvest rate is exactly what the rose-grower wishes to maximise.

Determining the growth speed

The growth speed v is determined by using a mass balance. The net photosynthetic rate P_{net} changes not only due to the greenhouse climate, but also because of growth of the roses (crop and bush) and the harvesting of the rose crop. More specifically, P_{net} is proportional to the change in productive mass plus the harvest rate

$$P_{net}(t; d) \propto \frac{dM}{dt} + H(t). \quad (1)$$

Here M is the total mass of the rose crop and it is given by

$$M(t) \propto \int_{h_0}^{h_{cut}} (h - h_0) d(h, t) dh,$$

where the stem density is properly weighed by the stem length $h - h_0$ in order to obtain the mass.

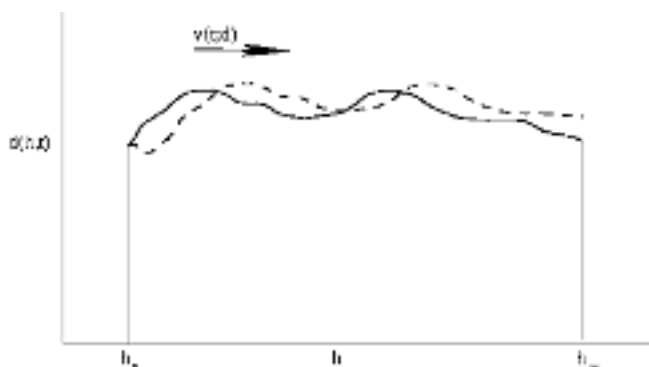


Figure 2 Every rose grows at the same rate. Here $d(h, t)$ denotes the number of stems per square metre of greenhouse as a function of height h and time t and $v(t; d)$ denotes the growth rate by which the density function is advected.

Differentiating this expression for M leads, after integrating by parts, to

$$\frac{dM}{dt} \propto v(t; d) \int_{h_0}^{h_{cut}} d(h, t) dh - H(t).$$

By substituting this into (1) and solving for v , we obtain

$$v(t; d) \propto \frac{1}{\int_{h_0}^{h_{cut}} d(h, t) dh} P_{net}(t; d), \quad (2)$$

as the advection speed in terms of P_{net} .

The net photosynthetic rate

Our next step is to obtain an expression for the net photosynthetic rate P_{net} in (2). This must be determined by adding the local photosynthetic contribution from each leaf in the rose crop and the rose bush. Thus, we have

$$P_{net} = P_{crop} + P_{bush},$$

where the contributions from the crop and the bush are to be calculated separately.

As the leaf's local photosynthetic rate depends both on its age and on the amount of light it receives, an ability to model the age and height

distribution of leaves is very important. To begin with, we define a leaf-density function $\rho(h, t)$, where $\rho(h, t) dh$ yields the leaf area located at heights between h and $h + dh$ per square metre of greenhouse. For $h_0 < h < h_{cut}$, it is related to $d(h, t)$ by

$$\rho(h, t) = k_\rho \int_h^{h_{cut}} d(\zeta, t) d\zeta,$$

(k_ρ is a constant of proportionality) using the fact that only rose stems of heights greater than h contribute to the leaf area at height h .

Furthermore, we define the age density distribution $q(t, a, h)$ in such a way that $q(t, a, h) dh da$ yields the total leaf area of ages between a and $a + da$ located at heights between h and $h + dh$ per square metre of greenhouse. Physically, it is clear from our model assumptions that the age of a leaf bears some relation to its distance from the top of the rose stem (see figure 3). By simplifying this relationship to assume that the age of a leaf is directly proportional to this distance, we can deduce that

$$q(t, a, h) \propto d\left(h + \frac{a}{k}, t\right)$$

for an average inverse growth speed k .



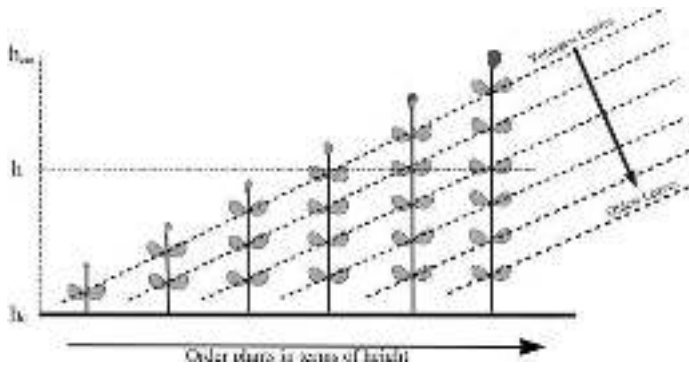


Figure 3 The age of a leaf is assumed to be proportional to its distance from the top of the rose stem.

The local light intensity reaching a particular leaf depends on the amount of shading or, in other words, on the leaf coverage (leaf area) above it. Observing that all stem heights tend to be distributed evenly throughout the greenhouse suggests that all leaves at the same height have approximately the same amount of shade. Therefore, the change in light intensity $\frac{dI}{dh}$ between h_0 and h_{cut} is a function of h as well as t and taken to be proportional to $\rho(h, t)$ and $I(h, t)$ (with proportionality constant k_I), leading to

$$I(h, t) = I_0(t) e^{-k_I \int_h^{h_{cut}} \rho(\zeta, t) d\zeta}.$$

Now, the net photosynthesis produced per square metre in the crop follows by integration of the local rate of photosynthesis over all the leaf ages and heights in the crop, weighted by the age density distribution:

$$P_{crop}(t; d) = \int_{h_0}^{h_{cut}} \int_0^{T_{max}} q(t, a, h) P(t, a, h) da dh.$$

The time T_{max} is the age of the oldest leaf in the current rose crop and is comparable to the average total growth time of a stem from its first appearance on the bush to harvest; T_{max} differs for each type of rose and each growth season. The net photosynthetic rate in the bush P_{bush} still needs to be determined to obtain P_{net} and this requires some knowledge of the leaf distribution in the unharvested part of each rose plant. Indeed, what is needed are expressions for $\rho(h, t)$ and $q(t, a, h)$ in the bush and the actual position of the bush in relation to the crop (directly below the stems or overhanging on the side). One simple bush model adopted during the study group was to assume that leaves of different ages were uniformly distributed throughout the bush between $h = 0$ and $h = h_0$. Moreover, for the purposes of gauging the amount of light received, we assumed the bush to be located directly below the crop (well shaded). Other bush models are equally possible to implement into our model and, for the rose-grower, the question of how the bush part should be grown and maintained is fundamental to the aim of continuously maximising the rose harvest.

Fitting the data

So far, we have obtained a rose production model for a greenhouse. In this model, several proportionality constants still appear as parameters. Most of these parameters can be determined by the rose-grower either by direct measurement of the rose plants or by relating the theoretical harvest and rates of new stem appearance to (seasonally or yearly) averaged harvest data. The remaining parameters can be obtained by fitting the model to weekly harvest data. In [1], we describe how the estimation of these parameters can be accomplished. The model should then, in principle, be able to aid the rose-grower to optimise the weekly amount of harvested roses. However, a comparison between data and the model, as well as the desired optimisation of the rose production by running the model in a forecasting mode, is still work in progress.

Future work

Some of our modelling assumptions are an oversimplification of the real situation. One drawback in our approach seems to be the fact that the only measure for the development of a rose stem is the total conversion of photosynthetic energy into stem length. This is not very realistic, as can be seen for example from the seasonal differences in the thickness of the harvested rose stems. In particular, the process of blossoming, which is a crucial guide as to when the rose should be cut, is not modelled at all. Neither is the diverting of photosynthetic energy into storage and maintenance of the rose plant. To model the roses more realistically, some detailed knowledge of how the total photosynthesis is allocated to growing, producing more leaves, generating new stems (which is only basically modelled here) and blossoming is required. Models of these processes in single rose plants are beginning to appear in the literature and should be investigated further.

Despite these shortcomings, we hope that our modelling approach via stem, leaf, and age density functions will prove flexible enough to be coupled to more complex and precise rose growth models, leading eventually to an accurate interactive model of an entire greenhouse. One benefit of our greenhouse model to the industrial partner (*Phytocare*) is that it can be compared to the real greenhouse data that is measured; this is something that could not be done with a single leaf model. Further improvements to the model, together with the continuation of the work on parameter estimation and bush design, form an intriguing challenge for further research in optimising rose production.

Acknowledgements

This work was done in collaboration with Onno Bokhove (Twente), Johan Dubbeldam (Eindhoven), Philipp Getto (Utrecht), Bas van 't Hof (Vortech Computing), Derk Pik (Leiden) and Georg Prokert (Eindhoven). The rose-growing problem was proposed by Dick van der Sar of *Phytocare*.

1 O. Bokhove, J.L.A. Dubbeldam, P. Getto, B. van 't Hof, N.C. Ovenden, D.R. Pik, G. Prokert, V. Rottschäfer, D. van der Sar, *Roses are unselfish: a greenhouse growth model to predict harvest rates*, *Proceedings 42nd Eur. Study Group Ind.* 2002.

2 P.C. Harley, R.B. Thomas, J.F. Reynolds, & B.R. Strain, *Plant, Cell, and Environment* **15**, 271–282, 1992.

3 S.-H. Kim & J.H. Lieth, *Proc. III Rose Research*, 111–119, 2001.

Michael van Hartskamp

Venuslaan 405, 5632 HM Eindhoven

michael@vanhartskamp.com

T_EX-rubriek

PDF_TEX

Het drukprogramma T_EX en de daarvan afgeleide programma's heeft het publiek in staat gesteld om wiskundige teksten op een professionele wijze te zetten. Vaak wordt hierbij gebruik gemaakt van lokale bibliotheken van fonts en macro's die afhankelijk zijn van het computersysteem waar je op werkt. Hoe kan het resultaat op een ander systeem worden bekeken? Michael van Hartskamp, gepromoveerd topoloog, bespreekt deze keer het 'portable document format', dat dit mogelijk moet maken.

De komst van de computer maakte het voor auteurs mogelijk om zelf elektronisch documenten te maken of te bewerken. De grote verschillen in computersystemen enerzijds en professionele afdrukapparaten en thuisprinters anderzijds introduceerde echter nieuwe problemen die een soepele uitwisseling tussen de verschillende apparaten in de weg stonden. Door de opkomst van Internet werd nog een ander facet aan dit probleem toegevoegd: het elektronisch publiceren van documenten voor gebruik door anderen.

Deze keer bespreken we PDF, het 'portable document format' van Adobe. Wat biedt het? Waar komt het vandaan en wat kunnen we ermee vanuit T_EX?

Bij de ontwikkeling van T_EX voorzag Knuth al problemen met de grote verschillen in computers en apparaten die kunnen drukken of printen. De verschillen tussen computers omzeilde hij door het gebruik van een beperkte vorm van de programmeertaal Pascal en door weinig eisen te stellen aan de machine. Zo worden alle T_EX-interne berekeningen uitgevoerd op gehele getallen. Verder introduceerde Knuth het DVI formaat, een "device independent" beschrijving van een document: DVI is de uitvoer van T_EX en de invoer voor de uiteindelijke afdrukapparatuur. DVI is in wezen heel simpel. Het vertelt precies welke teken uit welk lettertype van welke grootte waar op de pagina moet worden geplaatst. DVI heeft echter een groot nadeel. Rasterafbeeldingen (foto's bijvoorbeeld) of zelfs lijnen zijn niet voorzien. Hiervoor zijn uitbreidingen nodig: de zogenaamde \special commando's en daarmee begint de ellende

want de specials zijn apparaatafhankelijk en dus is een DVI-bestand voor een iets ingewikkelder document ook apparaatafhankelijk.

Knuth was niet de enige met zijn DVI-oplossing. Het Amerikaanse bedrijf Adobe zag de oplossing in Postscript, haar eigen pagina-beschrijvingstaal ook voorzien van programmeermogelijkheden. Postscript is een taal die nog wat verder van de gebruiker afstaat dan T_EX. Postscript werd in 1984 gelanceerd en sprak dankzij de combinatie met de grafische 'Desktop Publishing software' op de nieuwe Apple Macintosh computers vooral in de drukkerswereld erg aan. Al snel werd Postscript een defacto standaard.

Voor T_EX-gebruikers kwam er 'DVIPS' het programma dat DVI omzet in Postscript. Verder was en is er het (gratis) programma Ghostscript. Dit maakt het mogelijk om postscriptbestanden te printen op 'gewone' printers of te bekijken op het scherm. Deze combinatie maakte het mogelijk om postscriptbestanden, bij wetenschappers meestal van artikelen, te verspreiden zo dat ieder er mee overweg kan. Een nadeel was dat de postscriptbestanden vaak erg groot waren. Verder waren Windows gebruikers bijna nooit voorzien van Ghostscript.

Ook John Warnock, mede-oprichter van Adobe en medebedenker van Postscript dacht na over de uitwisseling van documenten. In 1991 leidde dit tot het zogenaamde 'Interchange Postscript': een enerzijds beperkte variant van Postscript die ook weer extra's bood voor interactief gebruik. Uit het hobbyproject van Warnock werd zo Acrobat / PDF geboren: een nieuw documentformaat (PDF) bedoeld voor de uitwisseling van documenten tussen gebruikers. Acrobat is de naam die Adobe gaf aan de lezer (Acrobat Reader) en schrijver (Acrobat Distiller).

Vanaf het moment dat Adobe de Acrobat Reader gratis ging weggeven nam de populariteit toe: het formaat is goed geschikt om (bestaande) documenten met behoud van vormgeving op het web te zetten en het veranderen van een PDF-document is misschien niet onmogelijk, maar zeker niet gemakkelijk. Tegenwoordig kan in een PDF-document een verbod voor de gebruiker zijn opgenomen om het document af te drukken of afdrukken uitsluitend met een slechts geringe kwaliteit toe

	voordeel	nadeel
T _E X-code	te veranderen	lokale macro's geven problemen
DVI	simpel	niet geschikt voor afbeeldingen
Postscript	zeer geschikt voor de drukker	vaak grote bestanden
PDF	zeer geschikt voor lezen van het scherm	minder gemakkelijk om professioneel te printen/drukken

Tabel 1 Voor- en nadelen van verschillende documentformaten

te staan. Dit zijn belangrijke eisen voor sommige gebruikers. Andere functies, die de meeste gebruikers meer zullen aanspreken, zijn de mogelijkheden rond het gebruik van hyperlinks en zelfs het uitvoeren van complete programma's in de taal JavaScript.

Ook PDF heeft zijn nadelen. Het is vaak moeilijker om na te gaan of een document alle noodzakelijke onderdelen bevat voor een goede afdruk: zijn alle lettertypen inbegrepen? Zijn afbeeldingen van de juiste scherpte? Zetten we alles op een rijtje dan krijgen we tabel 1.

Voor wie overtuigd is van de mogelijkheden van PDF geven we nu aan hoe het te gebruiken. Om PDF te generen zijn er drie mogelijkheden. De eerste is de door Adobe verkochte Acrobat Distiller. Deze 'vermomt' zich als een printer. Zodra een printopdracht wordt gegeven, genereert de Distiller een PDF bestand. De Acrobat Distiller is overigens niet gratis.

Wel gratis is het programma PS2PDF dat postscriptbestanden omzet naar PDF. Het spreekt voor zich dat er zo geen winst valt te behalen met de nieuwe mogelijkheden van PDF.

De derde, ook gratis, mogelijkheid is PDF_TEX. PDF_TEX is een volledig met T_EX-compatibel nieuw stuk software dat als uitvoer PDF levert in plaats van het klassieke DVI. Daarnaast biedt PDF_TEX toegang tot de nieuwe interactieve mogelijkheden die het PDF formaat biedt.

De rest van deze aflevering zullen we daarom aan PDF_TEX besteden. Allereerst de installatie en configuratie van PDF_TEX. Wie in het bezit is van een recente T_EX-distributie kan PDF_TEX meestal kant en klaar aantreffen. De eerder besproken MikT_EX-distributie (aflevering van juni 2002) bevat PDF_TEX. Voor wie nog geen PDF_TEX heeft en het toch wil gebruiken loont het zich wellicht om het gehele T_EX systeem nog eens na te lopen. PDF_TEX installeren is namelijk eerder vergelijkbaar met het installeren van een hele T_EX distributie dan met het installeren van 'klassiek' T_EX. Dit komt omdat naast het T_EX-deel ook het DVI-deel van de installatie moet worden uitgevoerd waarbij de lettertypes, virtuele lettertypes, en dergelijke moeten worden ingesteld. Voor wie dit pad kiest: Let er op om de zogenaamde outline fonts te gebruiken. Deze geven een veel beter resultaat bij schermweergave dan de standaard T_EX-pk-fonts die voor een bepaalde vaste resolutie worden gegenereerd.

We hebben hier consequent over PDF_TEX gesproken, er is echter ook PDF_LAT_EX. Met PDF_LAT_EX is het mogelijk om PDF-documenten te maken vanuit L^AT_EX. Ook de meeste L^AT_EX-macropakketten werken probleemloos samen met PDF_LAT_EX. De pakketten die echter gebruik maken van niet-standaard T_EX-trucs in de DVI-driver zoals bijvoorbeeld het veel gebruikte PSTricks dat zijn niet geschikt voor PDF_TEX. De meest gangbare aanvullende macropakketten voor L^AT_EX werken (inmiddels) wel goed samen met PDF_LAT_EX.

Hoe genereren we nu PDF? In vroegere versies van PDF_TEX was het meestal noodzakelijk om voor het eind van de eerste pagina de PDF_TEX-opdracht `\pdfoutput=1` te geven. Alleen zo werd PDF in plaats van het

standaard DVI gebruikt. Tegenwoordig is PDF standaard voor PDF_TEX en is voor het maken van DVI de opdracht `\pdfoutput=0` nodig.

We zullen aan de hand van drie kleine voorbeeltoepassingen het gebruik van PDF_TEX nader illustreren.

Allereerst het gebruik van afbeeldingen. De normale manier om afbeeldingen in L^AT_EX te gebruiken is middels het pakket `graphics` of `graphicx` en vervolgens op de gewenste plaats de opdracht `\includegraphics{naam.eps}` te plaatsen. Echter niet alle mogelijkheden van Postscript zijn opgenomen in PDF en daarom is het voor PDF_TEX niet mogelijk om willekeurige EPS-plaatjes te gebruiken. De oplossing bestaat uit het programma `epstopdf` dat een EPS-plaatje in een PDF-bestand omzet. Vervolgens kan via `\includegraphics` het plaatje, nu als PDF-bestand, in het document worden gebruikt. In principe kunnen alle PDF-bestanden worden opgenomen in een ander bestand, maar alleen de eerste pagina wordt gebruikt.

Een erg handige aanvulling bij het werken met PDF_TEX is het L^AT_EX-macropakket `hyperref`. Dit pakket is bij de meeste T_EX-distributies meegeleverd. Voeg voor gebruik vlak vóór de regel met

```
\begin{document}
```

de volgende regel toe:

```
\usepackage[pdftex]{hyperref}.
```

Zonder verdere werkzaamheden van de auteur worden nu al enkele referenties automatisch aanklikbaar. De lezer kan zo makkelijker door het document bladeren en verwijzingen volgen zoals ook gebruikelijk is op het web.

Als extraatje is de inhoudsopgave zichtbaar in een apart venster. Alle hoofdstukken en secties kunnen worden aangeklikt en de Acrobat Reader zal onmiddellijk de juiste pagina weergeven.

Tot slot de document eigenschappen. Wie in het 'File Menu' van de Acrobat Reader op Document Properties / Summary klikt ziet dat het PDF-bestand gegevens bevat over de titel en auteur van het document, maar ook over onderwerp en keywords. Met het `hyperref` pakket is het eenvoudig mogelijk om deze eigenschappen zelf in te stellen. We gebruiken de opdracht `\hypersetup` om enkele van de vele opties van `hyperref` in te stellen. Een voorbeeld:

```
\hypersetup{
  pdftitle = {Over PDF en PDFTEX},
  pdfauthor = {Michael},
  pdfsubject = {Het gebruik van PDF en PDFTEX},
  pdfkeywords = {PDFTEX, pdf, Acrobat, hyperref},
  pdfcreator = {standaard staat hier TEX},
  pdfproducer = {standaard staat hier pdfTEX}
}
```

Samenvattend, PDF_TEX is een onmisbare aanvulling op (of eigenlijk een vervanging van) T_EX. Het kan namelijk naast DVI ook PDF genereren. PDF is een geschikt bestandsformaat voor het elektronisch uitwisselen van documenten.

Dankzij het pakket `Hyperref` is het eenvoudig mogelijk om enkele van de nieuwe mogelijkheden van PDF_TEX te benutten. Over een andere belangrijke toepassing van PDF_TEX in combinatie met de Acrobat Reader, het maken van presentaties, zullen we het een volgende keer hebben.



Sandjai Bhulai

Bell Laboratories, Lucent Technologies

Room 2C-308, 700 Mountain Avenue

Murray Hill, New Jersey, 07974-0636, USA

sbhulai@research.bell-labs.com

Column Wiskundigen in den vreemde

From the Big Apple

Juni 2002 promoveerde Sandjai Bhulai aan de Vrije Universiteit. In september werd hem voor een tijdsduur van een jaar het NWO talent-stipendium toegekend om bij Bell Laboratories van Lucent Technologies onderzoek te doen. Een jaar lang doet hij verslag van zijn ervaringen als wetenschapper in den vreemde.

"A mind that is stretched by a new experience can never go back to its old dimensions." Met dit citaat van de negentiende-eeuwse Amerikaanse arts en dichter Oliver Wendell Holmes in gedachten trok ik de stoute schoenen aan, op weg naar New York, om als postdoc mij verder te ontwikkelen in de wetenschap. Op Schiphol moesten mijn schoenen echter al weer snel uit om door de x-ray machine geïnspecteerd te worden. Mijn handbagage werd grondig doorzocht en mijn laptop moest voor de zekerheid maar even aangezet worden. De aangescherpte veiligheidsmaatregelen na 11 september 2001 waren duidelijk merkbaar op de luchthaven.

Bij de voorbereidingen van de reis manifesteerde de verscherpte controle zich in extra veel papierwerk. Bij het aanvragen van mijn visum moest ik alle landen die ik in de afgelopen tien jaren heb bezocht, alle onderwijsinstellingen waar ik les heb gehad, en de adresgegevens van mijn ouders en broers vermelden. Daarbij moest ik ook nog eens twee personen buiten mijn familiekring opgeven die deze gegevens konden verifiëren. Hoewel dit allemaal erg streng overkomt, is het toch nog mogelijk om het visum in een dag te bemachtigen als alle papieren naar beste weten zijn ingevuld.

De ontvangst in Amerika was heel erg hartelijk; de douane stelde tot mijn grote verbazing helemaal geen vragen en mijn bagage werd ook niet gecontroleerd. Het hotel dat ik vanuit Nederland geboekt had, bevond zich echter op een zeer ongunstige locatie. Gelukkig werd er voor mij binnen een aantal uren een nieuw onderkomen geregeld. Dat bleek niet erg lastig te zijn, want na een paar telefoongesprekken had ik de luxe om te kiezen tussen verschillende kamers met allerlei faciliteiten.

De volgende stap voor een langdurig verblijf in Amerika is het aanvragen van een 'social security number'. Het verwerken van de aanvraag duurt doorgaans twee à drie weken, en daarna wordt er een pas via de post verstuurd. Het social security nummer speelt een hele belangrijke rol in het leven van een Amerikaan; het is gekoppeld

aan de persoonlijke gegevens van de persoon welke in een centrale databank opgeslagen worden. Het nummer wordt daarom gebruikt voor identificatie doeleinden, het openen van een bankrekening, het kopen van een auto, het huren van een appartement, et cetera.

Bell Labs, Lucent Technologies is ook helemaal ingesteld op het gebruik van het social security nummer. De badge voor de toegang tot het gebouw, de computeraccount en de bibliotheek maken hier allemaal gebruik van. De eerste drie weken kreeg ik dan ook de status van een gast; de bijbehorende badge, waarvan de eerste regel "Escort Required" luidde, moest elke dag opnieuw aangemaakt worden. Elke ochtend meldde ik mij dus braaf aan bij de receptie en werd ik door een personeelslid opgehaald. Het stricte beleid is enigszins voor te stellen als je nagaat dat bij dit bedrijf de eerste digitale computer, de laser, de C/C++ programmeertaal, het UNIX operating system en de High Definition TV zijn ontwikkeld.

Ik ben werkzaam op de afdeling 'Mathematics of Networks and Systems' van het 'Mathematical Sciences Research Center' van Lucent Technologies. Het wiskundig centrum herbergt momenteel 146 personeelsleden met een breed scala aan expertise in zowel de fundamentele als toegepaste wiskunde. Het hoofd van het centrum organiseert regelmatig informele (lunch)bijeenkomsten waarbij de recente ontwikkelingen in de telecommunicatie sector worden besproken. Deze bijeenkomsten bevorderen de informatiewisseling tussen de wiskundigen (fundamenteel en toegepast). Deze besprekingen hebben tot gevolg dat er richting gegeven wordt aan het onderzoek en dat er interessante samenwerkingsverbanden ontstaan, zowel intern tussen afdelingen onderling als extern met bedrijven. Zo ontstaat er een onderzoeksomgeving die buitengewoon verrijkend is voor de pas gepromoveerde onderzoeker.

De bijeenkomsten zorgen ervoor dat de personen ook sociaal goed ontwikkeld zijn. Het was daarom ook niet moeilijk om goed in de groep opgenomen te worden. De sfeer op de afdeling is hartelijk en het kost niet veel inspanning om af en toe een babbeltje te maken. In ben blij dat mijn collega's, ondanks hun drukke werkschema, serieuze interesse tonen in mijn werk en de hand uitreiken om samen te werken. In de drie weken dat ik me hier bevind, heb ik nog niet veel van de omgeving gezien. Nu mijn primaire zaken geregeld zijn, heb ik meer tijd om de buurten te verkennen in the Big Apple. ←

N.G. de Bruijn

Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Wiskunde en Informatica
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
n.g.d.bruijn@tue.nl

Set!

Het kaartspel SET! is bedacht door Marsha J. Falco, toen zij als populatie-geneticus werkte in Cambridge (Engeland). Daar deed ze onderzoek naar epilepsie bij Duitse herders. Het was ingewikkeld werk en voor haar studie gebruikte Falco genetische symbolen die ze op 3 bij 5 kaarten zette. Een paar dierenartsen die over haar schouder meekijken zagen de 'sets'. In eerste instantie werd het spel gespeeld door post-docs en graduate students. Later werd het een gezinsspel. Rond 1990 werd het spel officieel uitgebracht in Amerika, waar het al snel een hit werd. Veel later bereikte het Nederland, onder andere via de getaltheorieconferentie ANTS-III in Portland, waar Joe Buhler het spel introduceerde bij een aantal Nederlandse aio's. Tegenwoordig is SET! te koop in elke goedgesorteerde speelgoedwinkel.

Bij SET! liggen er steeds twaalf kaarten op tafel. N.G. de Bruijn, die het spel leerde kennen via zijn kinderen en kleinkinderen, bestudeert in dit artikel de verdeling van het aantal 'sets' in die twaalf kaarten.

In speelgoedwinkels is het spel SET! te koop (Ravensburger Spielverlag). Volgens de doos is het geschikt voor kinderen van 10–99 jaar. Die 99 zal wel zoiets als een millenniumfout zijn, want boven de honderd moet het ook nog wel kunnen. Maar of het dan nog leuk is? Het is een zenuwenspel: wie niet het snelst is verliest steeds. Geen spel voor oudere heren die hun hart ook nog voor andere dingen nodig kunnen hebben. Die laten het snelle denkwerk beter aan hun computer over, wanneer ze die tenminste nog kunnen programmeren. Ik deed dat op mijn huiscomputer van het jaar nul-nul (om misverstand te voorkomen, dat is het jaar 2000). Die liet ik een paar honderd miljoen keer spelen om wat inzicht in de spelkansen te krijgen.

Het spel SET! wordt gespeeld met 81 kaarten waarop figuurtjes staan. De kaarten zijn te onderscheiden door vier kenmerken. Het eerste kenmerk is het *aantal* figuurtjes: een kaart kan een figuurtje hebben, of twee onderling gelijke, of drie onderling gelijke. Het tweede kenmerk is de *kleur* van de figuurtjes. Ze kunnen rood, groen of paars zijn. Het derde kenmerk is de *vorm* van de figuurtjes. Het kunnen rechthoeken (soms ook wel ruiten) zijn, of ellipsen, of slingers. Het vierde kenmerk is de *vulling*: ze kunnen

massief gekleurd zijn, of gespikkeld, of leeg (dat wil zeggen dat alleen de randen gekleurd zijn).

Elke combinatie van de vier kenmerken zit precies een keer in de doos. Doorgewinterde numerici weten wel dat $81 = 3^4$.

Om er wat gemakkelijker over te kunnen schrijven vervang ik hier de kenmerken door tekens. Voor het eerste kenmerk geef ik de mogelijkheden 1, 2, 3, voor het tweede de kleine letters a, b, c , voor het derde de hoofdletters X, Y, Z , en voor het vierde de tekens $+, -, *$. Een kaart is nu een woord van vier tekens, bijvoorbeeld $3cZ^*$ of $2bZ^+$.

Set en sets

Ik zal hier niet alle spelregels noemen, maar het alleen hebben over de steeds terugkerende situatie van 12 kaarten die uit een geschud spel zijn gehaald en zichtbaar op tafel worden gelegd. Gemakshalve zal ik zo'n greep van 12 een *tafel* noemen. De kaarten worden grondig bestudeerd door de spelers (op de doos staat dat er 2 tot 8 deelnemers kunnen zijn, maar ik zou zeggen dat het ook wel gaat met 0, 1 of oneindig). Het is de kunst om in de collectie van 12 kaarten een drietal aan te wijzen die een SET vormen. Wie dat denkt te zien roept vlug SET!, maar als het daarna aangewezen drietal geen echte SET blijkt te zijn volgt een straf.

Wat is een SET? Dat is voor velen nogal verwarrend, maar de ervaring leert dat ook kinderen ermee overweg kunnen. Een SET is een stel van drie kaarten met de volgende eigenschap: voor elk van de vier kenmerken geldt dat de kaarten of alle drie gelijk of alle drie verschillend zijn. Een voorbeeld is het drietal

$$2bY^*, 2aZ^*, 2cX^*.$$

Naar het eerste kenmerk zijn ze alle drie gelijk (2, 2, 2), naar het tweede alle drie verschillend (b, a, c), naar het derde ook (Y, Z, X), en naar het vierde weer alle drie gelijk ($*, *, *$).

Het is gemakkelijk in te zien dat bij elk tweetal kaarten uit het pak van 81 er precies een is die met die andere twee een SET vormt. Daaruit blijkt dat het aantal mogelijke SETs 1080 bedraagt

— het aantal paren is C_2^{81} (ik gebruik C_k^n voor de binomiaalcoëfficiënt $n!/(k!(n-k)!)$, en als men bij elk paar de bijbehorende derde kaart zoekt krijgt men elke SET drie keer). Tabel 1 geeft een voorbeeld van een tafel, zie ook figuur 1.

$2aZ-$	$3cY+$	$2bZ+$	$2cZ+$
$1bY*$	$3cZ*$	$3aY+$	$3bY-$
$2aZ*$	$3aX-$	$2cY-$	$3aZ*$

Tabel 1 Twaalf set-kaarten met drie sets.

$1aX+$	$1bY+$	$2aX+$	$2bY+$
$1aX-$	$1bY-$	$2aX-$	$2bY-$
$1aZ+$	$1bZ+$	$2aZ+$	$2bZ+$

Tabel 2 Twaalf kaarten zonder sets.

De verdeling in rijen en kolommen dient voor het overzicht maar heeft verder geen bijzondere betekenis. In tabel 1 zijn er drie SETs:

- 1: $1bY*$ $3aY+$ $2cY-$
 2: $1bY*$ $3aX-$ $2cZ+$
 3: $3aY+$ $3aX-$ $3aZ*$

Het komt ook wel voor dat er geen enkele SET op tafel ligt. Een voorbeeld staat in tabel 2 (zie ook figuur 2). Een redenering is hier: de 3 en de c komen niet voor, dus een SET moet drie keer 1 of drie keer 2 bevatten, en ook drie keer a of drie keer b . Het zou dus een van de 4 kolommen moeten zijn, maar die hebben allemaal twee keer + en een keer -.

Ter oefening voor de lezer staan in tabellen 3 en 4 een tweetal tafels (ze hebben respectievelijk 5 en 6 SETs; zie ook figuren 3 en 4).

$2bX+$	$1aY-$	$2aY+$	$3bX+$
$2cZ+$	$3bZ+$	$1cX+$	$2aX+$
$3bY+$	$2aZ-$	$2bY*$	$3bX*$

Tabel 3 Twaalf kaarten met 5 sets

$1bY*$	$3aY+$	$3aX-$	$1aY+$
$3cX-$	$2bZ*$	$1cX-$	$1bZ*$
$3bX-$	$1cY-$	$2cY-$	$3bX+$

Tabel 4 Twaalf kaarten met 6 sets

Het ligt voor de hand een computer in te schakelen om experimenteel vast te stellen wat ongeveer de verdeling is van het aantal SETs in een aselechte trekking van 12 kaarten uit het pak van 81 stuks. Om een snel programma te maken dat een groot aantal gevallen achter elkaar behandelt, is het verstandig de kaarten te nummeren van 0 tot en met 80, en te beginnen met de aanleg van een 81×81 matrix waaruit voor elk paar i en j het nummer is af te lezen van de kaart die samen met kaart i en kaart j een SET vormt. Hier is het resultaat van een run van 250 miljoen stuks. Daarbij

was, als m_k het aantal gevallen met k SETs voorstelt:

$$\begin{aligned} m_0 &= 8077176, & m_1 &= 36294878, & m_2 &= 65238204, \\ m_3 &= 68149583, & m_4 &= 45063382, & m_5 &= 19968806, \\ m_6 &= 5829548, & m_7 &= 1169702, & m_8 &= 170948, \\ m_9 &= 29468, & m_{10} &= 7326, & m_{11} &= 571, \\ m_{12} &= 322, & m_{13} &= 73, & m_{14} &= 13, & m_{15} &= m_{16} = \dots = 0. \end{aligned}$$

We zien dat er maar een paar procent kans is dat er geen enkele SET op tafel ligt, en dat er maar een doodenkele keer een tafel tevoorschijn komt met 14 SETs. In tabel 5 staat er zo een (zie ook figuur 5).

Zouden we nog hoger dan 14 kunnen komen? Na zoiets als een half miljard probeersels bleek 14 nog steeds het absolute record te zijn, en 14 kwam zo om de 23 miljoen keer voor.

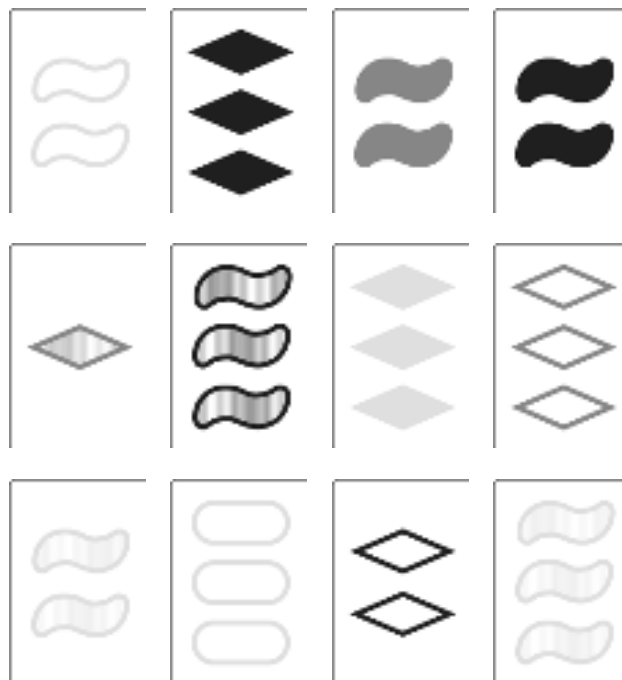
$2bX*$	$3cY*$	$2cY+$	$3cY-$
$2aZ-$	$2cY-$	$1cY*$	$1aZ+$
$3aZ*$	$2cY*$	$1bX-$	$3bX+$

Tabel 5 Twaalf kaarten met 14 sets

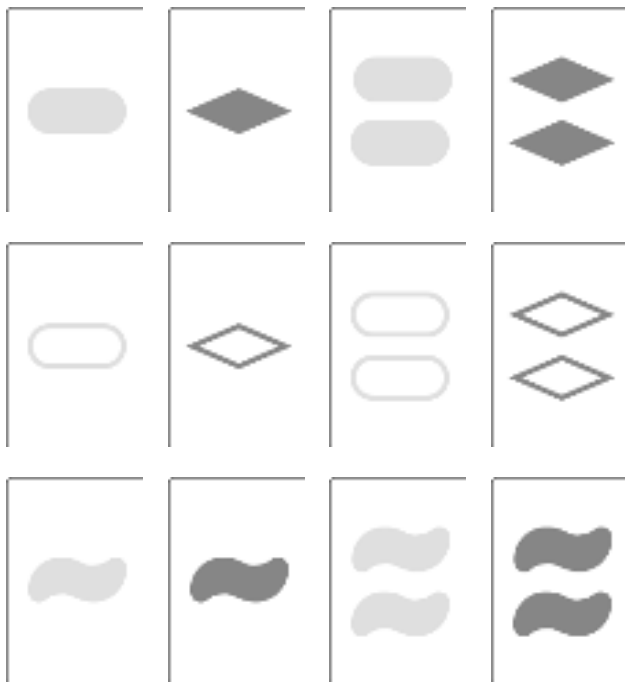
Een beetje wiskunde

Laten we er nu eens wat wiskunde omheen gaan bouwen. Eerst gaan we over op een notatie die wat lastiger is te lezen dan de hierboven gebruikte, maar duidelijk beter is voor de wiskundige behandeling: bij elk kenmerk geven we de waarden met 0, 1 of 2 aan. Een kaart is nu een getal van 4 cijfers (soms beginnend met nullen, zoals 0201) in het drietallige stelsel. Deze drietallige codes representeren de getallen van 0 tot en met 80.

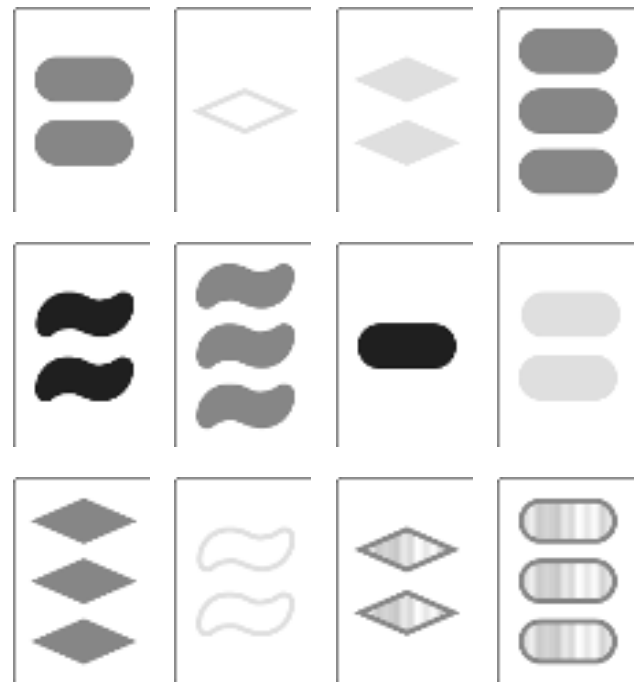
Nog leuker is het om kaarten als punten in een eindige lineaire ruimte te zien. We werken dan in de vierdimensionale affiene ruimte met F_3 als grondlichaam. Deze F_3 wordt ook wel aange-



Figuur 1 Een 'tafel' met twaalf set-kaarten. Er zijn drie sets.



Figuur 2 Twaalf kaarten zonder sets.



Figuur 3 Twaalf kaarten met 5 sets

duid als $GF(3)$, of als $Z(\text{mod } 3)$, of $Z/(3Z)$, of $Z/(3)$. Maar F_3 laat zich het gemakkelijkst schrijven. De elementen zijn 0, 1 en 2, en de operaties zijn de gewone optelling en vermenigvuldiging modulo 3.

De verzameling kaarten is nu de verzameling punten in de ruimte $(F_3)^4$. Een paar belangrijke opmerkingen:

1. Laat x, y, z elementen van F_3 zijn. Dan is de conditie

of ze zijn alle drie gelijk, of ze zijn alle drie verschillend

gelijkwaardig met de conditie $x + y + z = 0$.

2. Een SET is dus een drietal verschillende punten

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4), \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

met

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 + z_1 &= 0, & x_2 + y_2 + z_2 &= 0, \\ x_3 + y_3 + z_3 &= 0, & x_4 + y_4 + z_4 &= 0. \end{aligned}$$

3. Als $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ en $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ twee verschillende punten uit de ruimte $(F_3)^4$ zijn, dan is het derde punt van de rechte lijn die door deze punten gaat het punt $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ bepaald door de conditie dat $\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$. De punten van de verbindinglijn zijn namelijk gegeven door $u\mathbf{x} + v\mathbf{y}$ met $u, v \in F_3, u + v = 1$. De waarde $u = 0$ (dus $v = 1$) levert het punt $\mathbf{x}$ op, de waarde $u = 1$ (dus $v = 0$) het punt $\mathbf{y}$, het derde punt komt daarom van $u = 2$ (dus ook $v = 2$), en is daarom het punt $2\mathbf{x} + 2\mathbf{y}$. Opgeteld bij $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ geeft dat $\mathbf{0}$.
4. Een SET is dus hetzelfde als een drietal verschillende punten $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ die op één lijn liggen.

Lijnen, vlakken en hypervlakken

We bekijken een affiene ruimte en geen vectorruimte, dus lijnen, vlakken en hypervlakken hoeven niet door de oorsprong te gaan. Laten we ze even tellen.

Er zijn in de ruimte $81 \cdot 80/2$ puntenparen, en op elke lijn lig-

gen er drie, zodat er $81 \cdot 80/6 = 1080$ lijnen zijn. Dit werd al eerder gevonden bij het tellen van de SETs.

Het aantal hypervlakken kunnen we tellen door naar hun vergelijkingen te kijken. Die hebben de vorm $ax + by + cz + dw = e$ (E. Landau zou hieraan toegevoegd hebben: waarin e niet de basis van de natuurlijke logaritmen is). Met $e = 0$ zijn er 80 combinaties voor a, b, c, d , want we moeten het geval $a = b = c = d = 0$ uitsluiten. Dan hebben we wel alles dubbel geteld, want vermenigvuldiging van een vergelijking met een van nul verschillende factor levert geen nieuw hypervlak op. We krijgen er dus 40. Om dezelfde reden kunnen we ons, als e van 0 verschilt, beperken tot $e = 1$, en we krijgen er nog eens 80. Totaal 120 hypervlakken.

Op dezelfde manier kunnen we, door naar vergelijkingen te kijken, het aantal vlakken binnen een hypervlak tellen. In plaats van drie keer $(81 - 1)/2$ krijgen we drie keer $(27 - 1)/2$, dus 39 stuks. En weer een dimensie lager: het aantal lijnen in een vlak is drie keer $(9 - 1)/2$, dus 12.

Tafels met 14 SETs.

De tafels met 14 SETs, voorzover ik die aantrof, hadden allemaal dezelfde structuur, en konden door (niet-homogene) lineaire transformaties uit elkaar worden afgeleid. De structuur is eenvoudig te beschrijven. In de eerste plaats merk je op dat alle 12 punten in één hypervlak liggen. En binnen dat hypervlak liggen er 9 van de twaalf in eenzelfde vlak V (dat ze dus helemaal opvullen). Binnen het hypervlak zijn er twee andere vlakken evenwijdig aan V . De drie resterende punten P, Q, R liggen in deze evenwijdige vlakken, maar niet alle drie in hetzelfde. Laat P in het ene liggen, Q en R in het andere. De verbindingslinies PQ en PR snijden het vlak V en leveren dus SETs op. Samen met de 12 lijnen uit het vlak V komen we tot 14 SETs.

Tafels met deze speciale structuur zal ik 3D14-tafels noemen.

Tabel 6 geeft een voorbeeld (terwille van de algebraïsche discussie zijn de kaarten als viercijferige getallen in het drietalig stelsel aangegeven).

1200	1101	2101	2220
0101	1002	2002	1012
0220	0200	2200	0002

Tabel 6 Een 3D14-tafel

In tabel 6 zijn er 14 SETs:

1200 1101 1002, 1200 2101 0002, 1200 0101 2002,
 1200 0200 2200, 1101 2101 0101, 1101 2002 0200,
 1101 2200 0002, 2101 1002 0200, 2101 2002 2200,
 2101 1012 0220, 2220 0101 1012, 0101 1002 2200,
 0101 0200 0002, 1002 2002 0002.

In dit stel van 12 kaarten zijn er negen die een vlak vormen: 1200, 1101, 1002, 2200, 2101, 2002, 0200, 0101, 0002. In dat vlak liggen 12 lijnen, dus 12 SETs. Buiten dat vlak vallen 1012, 2220, 0220.

De lijn van 2220 naar 0220 loopt evenwijdig aan het vlak, maar die van 1012 naar 2220 snijdt het vlak in 0101, zodat dit drietal een SET vormt. Ook de verbinding van 1012 met 0220 snijdt het vlak, en wel in 2101. Dat levert dan de veertiende SET op.

Als vergelijkingen van het vlak (in de variabelen x, y, z, w) kan men opgeven: $z = 0, y + w = 2$. Een parametervoorstelling van het vlak is: $(1200) + k * (0201) + m * (1000)$.

Het hypervlak dat alle 12 punten bevat heeft de vergelijking $y + w = 2$.

Hoeveel van zulke 3D14-tafels zijn er binnen een gegeven hypervlak? Er zijn, zoals boven vastgesteld, 39 mogelijke vlakken om vol te leggen met de eerste negen punten, daarna nog 18 mogelijkheden voor P , en dan nog C_2^9 voor het paar Q, R . In dat hypervlak liggen dus $39 \cdot 18 \cdot C_2^9 = 25272$ kopieën van die 3D14-tafel.

Door een volledige zoekactie naar *alle* gevallen met 14 of meer SETs in een gegeven hypervlak kon worden vastgesteld dat er daarvan ook precies 25272 zijn. Daaruit volgt dat, nog steeds binnen een hypervlak, *alle* gevallen met 14 SETs zulke 3D14-tafels zijn, en dat er geen zijn met 15 of meer SETs.

Overigens is het amusant gebruik te maken van de mogelijkheid de zoekactie met een factor $117/22$ te verkorten door beperking tot tafels die twee gefixeerde kaarten uit het hypervlak bevatten. Met een eenvoudige redenering laat je eerst zien dat het er niet toe doet welke kaarten je fixeert: het levert steeds hetzelfde aantal. Door te sommeren over alle mogelijke paren van twee te fixeren kaarten krijg je een 66 keer te grote uitkomst, want $66 = C_2^{12}$ is het aantal paren in een stel van 12 (dit is een geval van de schaapherderstelling: om vast te stellen hoeveel schapen er in een wollige kluwen zitten, gaat de herder op de grond liggen, telt het aantal poten en deelt door 4. In dit geval zijn poten puntenpa-



ren, waarvan elk schaap er 66 heeft). Op deze manier werkende kan je je beperken tot het doorploegen van C_{10}^{25} tafels in plaats van C_{12}^{27} , en dat scheelt die genoemde factor $117/22$. Erg belangrijk is het overigens niet, want de afwerking van $C_{12}^{27} = 17383860$ tafels kost maar een half uurtje (mijn programma doet er 10000 per seconde). Maar het gebruik van symmetrieargumenten is charmant, altijd leerzaam en soms knapjes gevaarlijk (het gevaar van wishful thinking).

De conclusie is dat, wanneer er binnen de gehele $(F_3)^4$ een geval met 15 of meer SETs zou liggen, dat geen driedimensionale zou zijn.

Als we met random tafels werken zonder beperking tot lagerdimensionale, komen we af en toe zo'n 3D14-tafel tegen. Hoe vaak is dat te verwachten?

Zoals eerder werd gezegd, zitten er in elk hypervlak 25272 van deze. En er zijn 120 hypervlakken. We komen daarmee op 3032640 stuks, want een tafel kan nooit in twee verschillende hypervlakken liggen (de doorsnede van twee verschillende hypervlakken heeft nooit meer dan 9 punten).

Het totale aantal tafels is $C_{12}^{81} = 70724320184700$. Dus zo één op de 23 miljoen keer kan je een 3D14-tafel tegenkomen. Bij een wilde zoektocht over meer dan een half miljard tafels naar gevallen van 14 of meer SETs kwam ik er nooit eentje tegen die niet driedimensionaal is. Wat ik vond waren dus allemaal 3D14's. Ik merk op dat het checken op driedimensionaliteit een fluitje van een cent is, en veel gemakkelijker dan het checken of een tafel isomorf is met een 3D14-tafel.

Dit is voor mij dan de stand van de wetenschap. Maar het kan heel goed zijn dat de een of andere slimmerik met een eenvoudig bewijs laat zien dat alle tafels met 14 SETs in hypervlakken liggen, en dat tafels met meer dan 14 SETs er helemaal niet zijn. Dan sta ik een beetje voor schut met al mijn machinekracht.

Naschrift

Dit stukje "Set!" verscheen als bijdrage aan het "Liber Amicorum" aangeboden aan J.K.M. Jansen, numericus aan de Technische Universiteit Eindhoven, ter gelegenheid van zijn 65ste verjaardag.

Ger Koole moedigde mij aan het in het Nieuw Archief voor Wiskunde een ruimer publicatie te geven, en Chris Zaal gaf enkele tekortkomingen aan die ik hierboven heb hersteld. De belangrijkste was dat ik een verkeerde tafel had laten afdrucken als voorbeeld van een situatie zonder enige SET.

Projectiemethode

Aan het eind van het stukje vroeg ik me af of er iemand was die met een eenvoudig bewijs kon laten zien dat alle tafels van 14 SETs in hypervlakken liggen en dat tafels van meer dan 14 SETs er helemaal niet zijn.

Zo iemand was er inderdaad. Joe Buhler, Portland (Oregon, U.S.A) gaf een idee aan waarmee uit het feit dat er geen driedimensionale tafels met 15 SETs zijn kan worden afgeleid dat tafels met 15 SETs helemaal niet bestaan. Dat idee kan ook worden gebruikt om te laten zien dat alle tafels met 14 SETs driedimensionaal zijn.

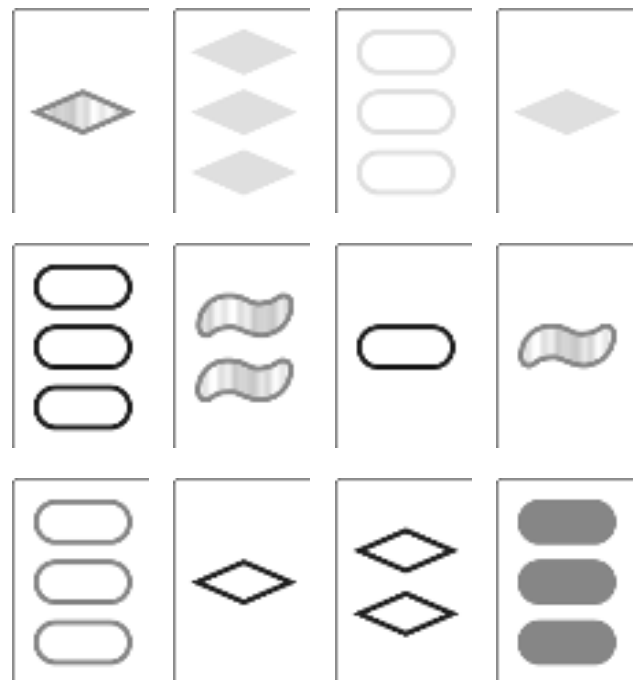
Joe Buhler stelde voor om te laten zien dat er bij een tafel met 15 SETs, dus bij een in de ruimte $(F_3)^4$ gelegen verzameling van 12 punten met 15 collineaire drietallen, er in de $(F_3)^4$ een richting te

vinden is zodanig dat geen enkele lijn in die richting meer dan één punt van de twaalf bevat. Deze richting kan worden gebruikt om evenwijdig te projecteren op een hypervlak dat die richting niet bevat, en dan is de rest van de zaak eenvoudig.

Laten we uitgaan van een tafel, dus een verzameling V van 12 punten in $(F_3)^4$, met m SETs waarbij $m \geq 14$. We willen weten hoeveel lijnen er in $(F_3)^4$ kunnen zijn waarop meer dan één punt van V ligt. Er zijn C_2^{12} , dus 66 paren van punten van V . Maar er zijn m SETs, en de 3 puntenparen die op een SET liggen leveren 3 keer dezelfde verbindingslijn op. Dus met 66 hebben we er m keer twee teveel geteld. Daarmee stellen we vast dat er maar $66 - 2m$ lijnen in $(F_3)^4$ zijn met meer dan één punt van V . Doordat $m \geq 14$ is dit aantal ≤ 38 . Dit aantal is kleiner dan het aantal richtingen in $(F_3)^4$. Dat bedraagt namelijk 40, wat we zien door een punt P te kiezen en te verbinden met de 80 resterende punten, die twee aan twee op lijnen door P liggen. Daarmee is bewezen dat er een richting bestaat zo dat geen enkele lijn in die richting meer dan één punt van V bevat. We kiezen vervolgens een (driedimensionaal) hypervlak dat de gekozen richting niet bevat, en projecteren de verzameling V in die richting op dat hypervlak. Dat geeft een verzameling V^* van 12 verschillende punten. Als drie punten van V op één lijn liggen, geldt dat ook voor de projecties van die drie punten. De driedimensionale tafel V^* heeft derhalve m of meer SETs.

Uit onze zoekerij met computer weten we dat er geen driedimensionale tafels met meer dan 14 SETs zijn, zodat nu bewezen is dat er ook in $(F_3)^4$ geen tafels met meer dan 14 SETs zijn.

Ook de vraag of werkelijk *alle* tafels met 14 SETs driedimensionaal zijn is met deze projectiemethode gemakkelijk te beantwoorden. Als V 14 SETs heeft weten we dat de projectie V^* er 14 of meer heeft, en mijn door computer ondersteunde tellerij had voor dat driedimensionale geval vastgesteld dat het er dan precies 14 moeten zijn en dat de structuur van V^* daarmee geheel vast ligt. Die structuur had ik 3D14-tafels genoemd.



Figuur 4 Twaalf kaarten met 6 sets

Laat V bestaan uit de punten $A_1, \dots, A_{12}$. De projectie V^* , bestaande uit de punten $A_1^* \dots A_{12}^*$, is een 3D14-tafel. We nemen aan dat de nummering zo gekozen was dat $A_1^* \dots A_9^*$ de 9 punten van een vlak vormen, A_{10}^* buiten dat vlak ligt, A_{11}^* op de verbindingslijn van A_{10}^* met A_8^* , A_{12}^* op de verbindingslijn van A_{10}^* met A_9^* . Ook nemen we aan dat de nummering zo gekozen was dat de overige 12 SETs in V^* zijn:

$$\begin{aligned} &\{A_1^*, A_2^*, A_3^*\}, \{A_4^*, A_5^*, A_6^*\}, \{A_7^*, A_8^*, A_9^*\}, \{A_1^*, A_4^*, A_7^*\}, \\ &\{A_2^*, A_5^*, A_8^*\}, \{A_3^*, A_6^*, A_9^*\}, \{A_1^*, A_5^*, A_9^*\}, \{A_2^*, A_6^*, A_7^*\}, \\ &\{A_3^*, A_4^*, A_8^*\}, \{A_1^*, A_6^*, A_8^*\}, \{A_2^*, A_4^*, A_9^*\}, \{A_3^*, A_5^*, A_7^*\}. \end{aligned}$$

Als $\{A_i^*, A_j^*, A_k^*\}$ met $1 \leq i < j < k \leq 12$ een SET vormen moeten ook $\{A_i, A_j, A_k\}$ een SET opleveren, want anders zou V geen 14 SETs kunnen hebben. We gaan nu uit van drie punten die niet op één lijn liggen, waarvoor we kiezen A_1^*, A_3^* en A_5^* . Het vlak door de hiermee corresponderende punten A_1, A_3, A_5 noemen we α . Op de lijn $A_1^*A_3^*$ ligt A_2^* . Bijgevolg ligt A_2 op de lijn A_1A_3 , zodat ook A_2 in α ligt. Op analoge wijze vinden we A_9 op de lijn A_1A_5 en A_7 op de lijn A_3A_5 , dus ook A_9 en A_7 liggen in α . Verder gaande merken we op dat A_8 op A_2A_5 ligt, A_6 op A_3A_9 en A_4 op A_1A_7 . Daarmee is vastgesteld dat $A_1, \dots, A_9$ allemaal in α liggen. Het vlak α en het punt A_{10} bepalen een driedimensionale ruimte. Gemakkelijk zien we dat tenslotte ook A_{11}^* en A_{12}^* in die ruimte liggen, want omdat A_{11}^* op $A_{10}^*A_8^*$ ligt zal ook A_{11} op $A_{10}A_8$ moeten liggen, en evenzo A_{12} op $A_{10}A_9$.

Hiermee is aangetoond dat *alle* tafels met 14 SETs driedimensionaal zijn.

Zonder krukken

Ik heb me tot nu toe op computerresultaten beroepen voor het feit dat alle driedimensionale tafels met 14 SETs die 3D14-structuur hebben en voor het feit dat er geen driedimensionale tafels met meer dan 14 SETs zijn. Ik laat nu zien dat deze uitspraken ook zonder computer kunnen worden afgeleid.

Laat W een verzameling van 12 punten zijn in $(F_3)^3$ met m SETs, waarbij $m \geq 14$. Dan zijn er twee van deze SETs evenwijdig, want W heeft meer SETs dan er richtingen zijn. Er zijn namelijk in $(F_3)^3$ maar 13 verschillende richtingen, wat we constateren door een punt te nemen en dat met alle andere 26 punten te verbinden; die lijnen vallen twee aan twee samen.

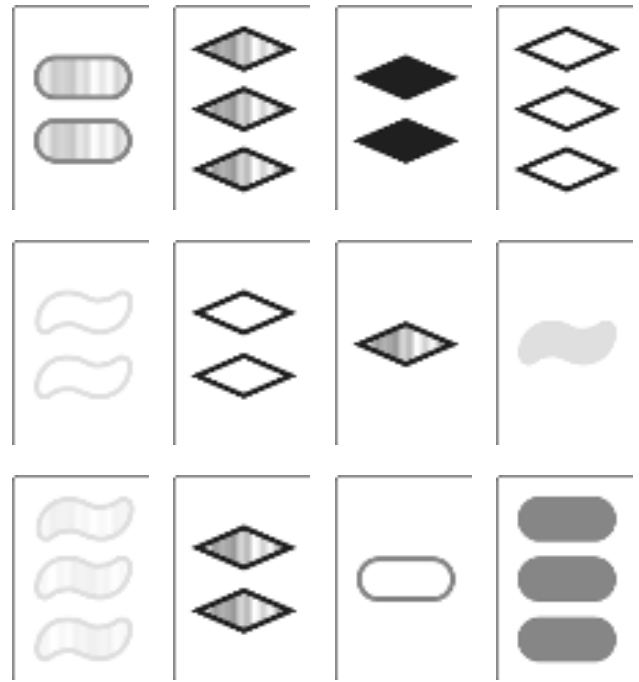
Neem nu twee evenwijdige SETs van W . Laat β het vlak zijn dat deze lijnen bevat. Laat verder γ en δ de twee vlakken zijn die evenwijdig zijn met β , zodat de verzameling der 27 punten van $(F_3)^3$ is opgesplitst: 9 punten in elk van β, γ en δ .

Laat p, q, r de aantallen punten voorstellen die W respectievelijk in β, γ, δ heeft, dus $p + q + r = 12$.

Het grootste aantal SETs dat een deelverzameling van k punten in een vlak (van 9 punten) kan hebben stellen we door $\theta(k)$ voor. Gemakkelijk valt te constateren dat

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \theta(1) = \theta(2) = 0, \theta(3) = \theta(4) = 1, \theta(5) = 2, \\ \theta(6) &= 3, \theta(7) = 5, \theta(8) = 8, \theta(9) = 12. \end{aligned}$$

Nu kan een ongelijkheid worden afgeleid voor m , het aantal SETs van W . Een SET van W zal óf geheel in één van de vlakken β, γ, δ liggen, óf ze alle drie snijden. Van de laatste soort kunnen er niet meer dan qr zijn omdat er q resp. r mogelijkheden zijn voor het



Figuur 5 Twaalf kaarten met 14 sets

snijpunt in γ respectievelijk δ . Daarmee is een bovengrens voor m afgeleid:

$$m \leq \theta(p) + \theta(q) + \theta(r) + qr.$$

Wanneer $p = 6$ mag de eerste term in het rechterlid worden vervangen door het getal 2, want er is vastgelegd dat de 6 punten in β langs twee evenwijdige lijnen zijn gerangschikt, zodat het aantal van 3 SETs daar niet kan worden gehaald.

Alle gevallen (p, q, r) met $p + q + r = 12$ kunnen nu worden onderzocht. Daarbij is $6 \leq p \leq 9$, terwijl het geen beperking is om te onderstellen dat $q \geq r$. Voor (p, q, r) komen dan alleen in aanmerking de tripels $(6,6,0)$, $(6,5,1)$, $(6,4,2)$, $(6,3,3)$, $(7,5,0)$, $(7,4,1)$, $(7,3,2)$, $(8,4,0)$, $(8,3,1)$, $(8,2,2)$, $(9,3,0)$, $(9,2,1)$, waarbij als bovengrens voor m respectievelijk gevonden wordt: 5, 9, 11, 13, 7, 10, 12, 9, 12, 12, 13, 14. Al deze getallen zijn ≤ 14 , en het enige geval dat 14 oplevert is $(9,2,1)$. Dat is precies de situatie van de 3D14-tafels: het vlak β helemaal vol, één punt in δ en twee punten in γ .

Hiermee is de zaak van het maximale aantal SETs geheel afgerond zonder hulp van computers. Een wiskundige kan ook nog wel eens een eindje zonder krukken lopen! $\Leftarrow$

Verwijzingen

De referee van dit artikel maakte mij attent op verschillende stukjes van de hand van Chris Zaal in Pythagoras, december 1999, en op het artikel "Het tellen van Sets" van Dion Gijsswijt in Pythagoras, december 2000, p.18-21. Ook wees hij op de website <http://setgame.com/set> waar men de 'Set Puzzle Contest of the Day' kan spelen (vind 6 SETs in een gegeven stel van 12 kaarten). Dat stel wordt dagelijks verversd.

Hans van Ditmarsch

Computer Science, University of Otago
P.O. box 56, Dunedin 9015
New Zealand
hans@cs.otago.ac.nz

Het zeven-kaartenprobleem

Op de wiskunde-olympiade in Moskou in 2000 luidde een van de problemen als volgt. Uit zeven kaarten, genummerd 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 trekken Anna en Bert er ieder drie. Cees krijgt de resterende kaart. Hoe kunnen Anna en Bert elkaar openlijk van hun kaarten op de hoogte brengen, zonder dat Cees hieruit op kan maken wie welke kaart heeft? Het probleem heeft tot diepgaande discussie geleid en er zijn artikelen in de vakliteratuur over verschenen. Hans van Ditmarsch, logicus aan de University of Otago in Nieuw-Zeeland, is een groot liefhebber van het analyseren van spellen. Van zijn hand zijn ook diverse publicaties op het educatieve vlak verschenen.

Het 'zeven-kaartenprobleem' werd gesteld tijdens de wiskunde-olympiade in Moskou in 2000. Inmiddels is het ook verschenen in de Mathematical Intelligencer [1] en in Natuur & Techniek [2–3]. Soortgelijke problemen circuleren onder coderingstheoretici [4]. Er zijn meerdere goede oplossingen. De Moskouse commissie werd destijds ook geconfronteerd met een aantal 'foute oplossingen' die op het eerste gezicht eigenlijk niet zo onredelijk waren. Om deze te analyseren blijkt een vrij recente tak van logica de helpende hand te bieden, namelijk *kennislogica* (epistemic logic). Kennislogica wordt momenteel veel gebruikt voor het specificeren van multi-agentsystemen [5]. We analyseren eerst een aantal 'foute oplossingen' in termen van wat spelers van elkaar weten. Daarna introduceren we de kennislogica die het een en ander formaliseert. We besluiten met oplossingen van het probleem, een kort historisch overzicht, en enige andere toepassingen van de kennislogica.

Schijnbare oplossingen

De voorwaarden voor de oplossing van het probleem zijn:

- Anna kent Berts kaarten, (*aweeb*)
- Bert kent Anna's kaarten, (*bweeta*)
- Cees kent geen van Anna's of Berts kaarten. (*cweetniet*)

Neem nu verder aan dat de hand van Anna $\{0, 1, 2\}$ is (schrijf 012), dat de hand van Bert 345 is, en dat Cees kaart 6 heeft. De 'foute oplossing van de Olympiade' wordt genoemd in [1]:

Anna zegt: "Als jij 0 niet hebt, dan heb ik 012." en Bert zegt: "Als jij 3 niet hebt, dan heb ik 345." (i)

Waarom 'lijkt' dit een oplossing? Stelt u zich het standpunt voor van een 'insider' Dirk, die in ieders kaarten kan kijken:

Dirk zegt: "Als Bert 0 niet heeft, dan heeft Anna 012, en als Anna 3 niet heeft dan heeft Bert 345." (ii)

We bereiken dan een informatietoestand waarin *aweeb*, *bweeta* en *cweetniet* allemaal het geval zijn; *cweetniet* geldt, omdat na Dirk's uitspraak Anna nog een van de handen 012, 345 (en 134, 135, 234, 235 en 123) kan hebben, dus Cees kan geen enkele kaart uitsluiten. Waarom verschillen (i) en (ii) van betekenis, en is (i) geen oplossing van het probleem? Dit is omdat Anna en Bert *minder* weten dan de virtuele Dirk. Hun uitspraken zijn daarom juist *informatiever*:

Cees redeneert als volgt: "Anna kent in deze spelsituatie alleen haar eigen kaarten. Ze kan dus niet weten of Bert kaart 0 heeft, tenzij ze die zelf vasthoudt. Anna kan dus alleen naar waarheid haar uitspraak doen, als zij zelf 012 heeft."

Het ligt voor de hand dat de uitspraken van de spelers gebaseerd moeten zijn op de informatie die hen ter beschikking staat. Maar hiermee zijn we er nog niet, gezien het volgende:

Anna zegt: "Ik heb kaart 6 niet" en Bert zegt: "Ik heb ook kaart 6 niet." (iii)

Na Anna's uitspraak, ook onder de aanname dat ze weet wat ze zegt, weet Cees geen van haar kaarten: *cweetniet* geldt. Echter, *Anna weet niet dat cweetniet!* Dit komt omdat na een andere uitvoering van het protocol dat Anna kennelijk hanteert, Cees wél een

van haar kaarten geleerd had. Ze had immers ook kunnen zeggen "Ik heb kaart 4 niet." Om Anna zeker van haar zaak te laten zijn, moeten we dus kennelijk ook verlangen dat na haar uitspraak *Anna weet dat cweetniet geldt*. Ook dit blijkt niet genoeg, gezien het volgende:

Anna zegt: "Ik heb 012 of ik heb geen van die kaarten." en Bert zegt: "Ik heb 345 of ik heb geen van die kaarten." (iv)

We bereiken nu een informatietoestand waarin *cweetniet* geldt. Ook weet Anna dat *cweetniet* geldt: het protocol dat ze hanteert heeft maar één uitvoering. Echter, *Cees weet niet dat Anna weet dat cweetniet!* De situatie blijkt opnieuw informatief voor Cees:

Cees redeneert als volgt: "Stel dat Anna kaart 0 niet heeft. Dan weet Anna niet of ik 0 heb. Stel ik had 0. Dan was Anna's hand niet 012. Dan had Anna, volgens haar eigen uitspraak, geen van die kaarten. Ik had dan geleerd dat Anna 1 en 2 niet heeft. Dus dan had Anna niet gezegd wat ze zei. Maar ze zei het wel. Dus heeft ze kaart 0 wel. Dus, volgens haar eigen uitspraak, heeft ze 012."

Met andere woorden: Cees leert Anna's kaarten uit de aanname dat Anna alleen uitspraken doet waaruit Cees haar kaarten niet leert. En zonder die aanname had Cees Anna's kaarten niet geleerd. De tegenspraak is maar schijn, want de tegengestelde beweringen gelden in *verschillende* informatietoestanden. Het scenario lijkt op dat in het bekende 'modderige-kinderen'-probleem, waarin de modderige kinderen leren dat ze modderig zijn, nadat publiek bekend wordt dat geen van de kinderen weet of ze modderig zijn [5].

U vraagt zich inmiddels natuurlijk af waar dit stopt. Het stopt bij *gemeenschappelijke kennis* van de oplossingscriteria. Een bewering is gemeenschappelijk bekend als (en alleen als) deze het geval is en iedereen het weet dat het gemeenschappelijk bekend is (preciezer: als het kleinste dekpunt — 'least fixed point' — van deze operatie). Hieruit volgt dat Anna weet dat Cees weet dat Anna weet dat Bert het weet, et cetera.

Een eindig aantal uitspraken van Anna en Bert is een oplossing voor het zeven-kaartenprobleem, als na elk van deze *cweetniet* gemeenschappelijk bekend is en na de laatste eveneens *aweeb* en *bweeta* gemeenschappelijk bekend zijn. In de context van ons probleem is een bewering gemeenschappelijk bekend als deze bekend is aan een virtuele *buitenstaander* ('outsider') Erna, die zelf geen kaarten vasthoudt maar alles hoort wat er gezegd wordt. Met nog andere woorden: als de bewering geldt onafhankelijk van de werkelijke kaartverdeling.

Dit vraagt natuurlijk allemaal om verdere precisering. Om de lezer te intrigeren, presenteren we alvast, zonder verdere toelichting, één oplossing van het probleem:

Anna zegt: "Ik hernoem kaart 0 tot 6, 6 tot 7, 1 tot 4, 4 tot 1, en de rest blijft hetzelfde. De som van mijn hand kaarten is nu 12." en Bert zegt: "Cees heeft kaart 6." (v)

Kennislogica voor multi-agentsystemen

De in het voorgaande geïntroduceerde noties zoals 'weten dat' en 'informatietoestand' gaan we nu formaliseren. We beginnen met een nog eenvoudiger voorbeeld dan 'zeven kaarten': er zijn nu slechts drie kaarten 0, 1 en 2, waarvan Anna (*a*), Bert (*b*) en Cees (*c*) er ieder één vasthouden. Neem aan dat Anna kaart 0 heeft, Bert kaart 1, en Cees kaart 2. Noteer dit als 012. Er zijn zes mogelijke kaartverdelingen, namelijk 012, 021, 102, 120, 201



De Russische Olympiade van het jaar 2000.

en 210. Twee kaartverdelingen zijn voor een speler niet van elkaar te onderscheiden, als deze in beide dezelfde kaart heeft. Deze equivalentierelatie induceert een partitie op de verzameling kaartverdelingen. Bijvoorbeeld voor Anna is de partitie: $\{\{012, 021\}, \{102, 120\}, \{201, 210\}\}$. Met feiten identificeren we een deelverzameling van de verzameling kaartverdelingen. Bijvoorbeeld met 'Anna heeft kaart 0' correspondeert $\{012, 021\}$. De informatietoestand waarin iedere speler alleen zijn eigen kaarten kent en de kaartverdeling 012 is, kunnen we formeel representeren als een relationele structuur: deze bestaat uit het domein van de (zes) mogelijke kaartverdelingen, drie equivalenties daarop (corresponderend met de kennis van de spelers), negen deelverzamelingen ervan (corresponderend met feiten), en een 'speciaal object' (de werkelijke kaartverdeling, in dit geval 012). Zie figuur 1. We hebben nu alleen nog een formele taal nodig die beweringen zoals 'Anna weet niet dat Bert kaart 1 heeft' kan interpreteren op deze structuur. Deze introduceren we in zijn algemeenheid:

Definitie [Kennistoestand]. Gegeven is een verzameling agents (actoren) N en een verzameling atomen (feiten) P . Een *mogelijke-werelden model* M (kennismodel, Kripke-model) is een drietal $M =$

$\langle W, \sim, V \rangle$. Domein W is een verzameling abstracte objecten genaamd *werelden* of feitelijke toestanden. *Toegankelijkheid* $\sim$ is een functie van agents $n \in N$ naar equivalentierelaties $\sim_n \subseteq W \times W$. *Waardering* V is een functie van atomen $p \in P$ naar deelverzamelingen $V_p \subseteq W$. Een paar (M, w) bestaande uit een model M en een wereld $w \in D(M)$ is een *informatietoestand* of *kennistoestand* (M, w) .

Voor het interpreteren van gemeenschappelijke kennis, hierna, gebruiken we de reflexieve en transitieve afsluiting $\sim_N$ van alle equivalentierelaties: $\sim_N := (\bigcup_{n \in N} \sim_n)^*$.

Definitie [Taal van de kennislogica]. Gegeven is een verzameling agents N en een verzameling atomen P . Kennislogica (met ‘common knowledge’ en ‘updates’) $L_N(P)$ is de kleinste verzameling die alle atomen $p \in P$ bevat en voor alle ϕ, ψ die er reeds deel van uitmaken tevens $\neg\phi, (\phi \wedge \psi), K_n\phi, C\phi, [\psi]\phi$.

Formule $\neg\phi$ staat voor ‘niet ϕ ’, $(\phi \wedge \psi)$ staat voor ‘ ϕ en ψ ’, $K_n\phi$ staat voor ‘agent n weet dat ϕ ’, $C\phi$ staat voor ‘ ϕ is gemeenschappelijk bekend’ (bij groep N), $[\psi]\phi$ staat voor ‘na update met ψ geldt ϕ ’. Behalve ‘ ψ is de update-formule’ zeggen we ook ‘ $[\psi]$ is de update’. Andere logische connectieven kunnen als afkortingen worden ingevoerd ($\rightarrow$ voor ‘impliceert’, $\vee$ voor ‘of’, $\leftrightarrow$ voor ‘dan en slechts dan’), en desgewenst kan sequentie van of keuze tussen updates eveneens als afkorting worden ingevoerd. De updates zijn zogenaamde *publieke* en *waarheidsgetrouwe* updates: iedereen hoort wat er gezegd wordt en liegen is verboden. Andere vormen zijn ook voorstelbaar, maar vergen een complexere logica.

Definitie [Semantiek]. De interpretatie van een formule $\phi \in L_N(P)$ in een wereld $w \in M = \langle W, \sim, V \rangle$ is als volgt inductief gedefinieerd:

$M, w \models p$	iff	$w \in V_p$,
$M, w \models \phi \wedge \psi$	iff	$M, w \models \phi$ en $M, w \models \psi$,
$M, w \models \neg\phi$	iff	niet $(M, w \models \phi)$,
$M, w \models K_n\phi$	iff	$\forall v \in W : v \sim_n w \Rightarrow M, v \models \phi$,
$M, w \models C\phi$	iff	$\forall v \in W : v \sim_N w \Rightarrow M, v \models \phi$,
$M, w \models [\psi]\phi$	iff	$M, w \models \psi \Rightarrow M_\psi, w \models \phi$.

M_ψ is de restrictie van model M , inclusief equivalenties, tot de werelden waar ψ geldt, d.w.z. $D(M_\psi) := \{w \in D(M) \mid M, w \models \psi\}$.

Voor $M, w \models \phi$ lezen we ‘In wereld w van model M geldt formule ϕ ’ of ‘In wereld w van model M is ϕ waar’.

Behalve logica’s van kennis zijn er ook logica’s van geloof, waarin wat je ‘weet’ niet noodzakelijk het geval is. Je kunt geloven dat ϕ , terwijl ϕ niet waar is. Dit betekent dat de ‘werkelijke toestand’ van de wereld voor jou niet voorstelbaar (‘toegankelijk’) is, met andere woorden: de met de operator K_n corresponderende toegankelijkheidsrelatie $\sim_n$ in de hiervoor gegeven definitie is niet reflexief, dus geen equivalentierelatie.

Het zal duidelijk zijn dat de hiervoor beschreven structuur voor kaartverdeling 012 een informatietoestand is in de hier gede-

finieerde zin. Het model noemen we *Hexa*, het betreft dus de informatietoestand $(Hexa, 012)$. In dit geval zijn de werelden kaartverdelingen en atomen/feiten q_n drukken uit dat kaart q in handen is van speler n . We kunnen nu de geldigheid van allerlei beweringen over deze kennistoestand uitrekenen: ‘Anna houdt kaart 0 vast in kaartverdeling 012’ correspondeert met

$$Hexa, 012 \models 0_a$$

en dit geldt omdat $012 \in V_{0_a} = \{012, 021\}$. ‘Anna weet dat ze kaart 0 heeft’ correspondeert met

$$Hexa, 012 \models K_a 0_a$$

en dit geldt omdat er een a -verbinding is tussen 012 en 021, en omdat zowel $Hexa, 012 \models 0_a$ als $Hexa, 021 \models 0_a$. Merk op dat er kennistoestanden voorstelbaar zijn waarin Anna wel kaart 0 heeft maar dit nog niet weet, bijvoorbeeld als de kaarten al wel verdeeld zijn over de spelers maar deze de kaarten nog niet opgepakt hebben van de tafel.

‘Anna kan zich voorstellen dat Bert zich kan voorstellen dat zij kaart 1 heeft’ (terwijl ze in werkelijkheid kaart 0 heeft) correspondeert met

$$Hexa, 012 \models \neg K_a \neg K_b \neg 1_a$$

en dit geldt omdat $012 \rightarrow_a 021$ en $021 \rightarrow_b 120$ en $Hexa, 120 \models 1_a$ (Anna heeft kaart 1 in kaartverdeling 120). ‘Zich kunnen voorstellen dat’ is de duale van ‘weten dat’. ‘Agent n kan zich voorstellen dat ϕ ’ is gedefinieerd als $\neg K_n \neg \phi$.

‘Het is gemeenschappelijk bekend dat Anna haar eigen kaart kent’ correspondeert met

$$Hexa, 012 \models C(K_a 0_a \vee K_a 1_a \vee K_a 2_a)$$

en dit geldt omdat alle kaartverdelingen in *Hexa* met 012 verbonden zijn, en omdat een van de disjuncten dan altijd geldt.

Beweringen over het gevolg van updates kunnen we ook berekenen. Als Anna tegen Bert zegt: “Als ik kaart 2 heb dan heb jij kaart 0” dan komt dit overeen met update $[K_a(2_a \rightarrow 0_b)]$. Bewering $2_a \rightarrow 0_b$ is alleen onwaar als Anna 2 heeft en Bert niet 0, d.w.z. als Bert 1 heeft: kaartverdeling 210. Maar dit kan ze alleen *weten* als ze zelf niet 2 heeft, dus $K_a(2_a \rightarrow 0_b)$ is overal waar behalve in (Anna’s equivalentieklasse) 201 en 210. Zie figuur 1.

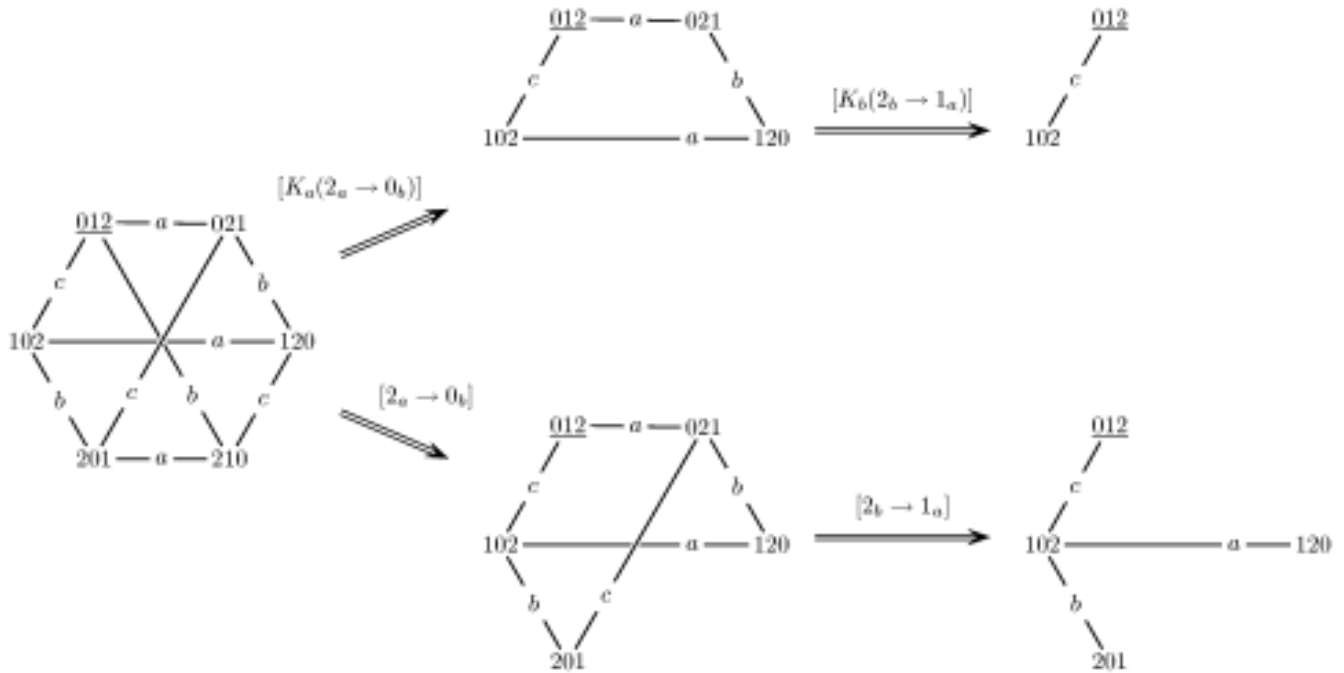
‘Nadat Anna dit gezegd heeft is gemeenschappelijk bekend dat Anna kaart 2 niet heeft’ correspondeert met

$$Hexa, 012 \models [K_a(2_a \rightarrow 0_b)] C \neg 2_a$$

en bewering $C \neg 2_a$ is eenvoudig te verifiëren in de uit de update resulterende informatietoestand.

Met de insider Dirk correspondeert een (virtuele) agent d wiens toegankelijkheid op het model de identiteit is ($\sim_d := \{(x, x) \mid x \in D(Hexa)\}$). Met de outsider Erna correspondeert een (virtuele) agent e wiens toegankelijkheid op het model de universele relatie is ($\sim_e := D(Hexa) \times D(Hexa)$). De insider Dirk ‘weet alles wat het geval is’, met andere woorden $K_d\phi \leftrightarrow \phi$ geldt. De outsider Erna ‘weet alles wat openbaar is’ met andere woorden $K_e\phi \leftrightarrow C\phi$ geldt. Als $C\phi$ geldt dan is ϕ geldig op het hele model, of met nog andere woorden: voor alle kaartverdelingen $d \in D(Hexa)$ geldt $Hexa, d \models \phi$.

Stel dat niet Anna maar insider Dirk had gezegd “Als Anna kaart 2 heeft dan heeft Bert kaart 0.” Dit komt overeen met de update $[K_d(2_a \rightarrow 0_b)]$ die dus hetzelfde effect heeft als $[2_a \rightarrow 0_b]$. Nu geldt de update formule overal behalve in kaartverdeling 210. Zie opnieuw figuur 1.



Figuur 1 Updates in de informatietoestand (*Hexa*, 012). De actuele toestanden zijn onderlijnd. Toestanden in dezelfde n -equivalentieklasse zijn verbonden, en de verbinding is gelabeld met die speler n .

De analyse van ‘foute oplossingen’ verduidelijken we aan updates in de informatietoestand (*Hexa*, 012). We willen dat: Anna weet dat Bert 1 heeft ($K_a 1_b$), Bert weet dat Anna 0 heeft ($K_b 0_a$) en Cees niet weet wie van Anna of Bert 0 of 1 heeft ($\neg K_c 0_a \wedge \neg K_c 0_b \wedge \neg K_c 1_a \wedge \neg K_c 1_b$).

Maar in feite moet dit natuurlijk onafhankelijk van de werkelijke kaartverdeling 012 geformuleerd worden en krijgen we dus:

$$\begin{aligned}
 aweetb & \quad \bigwedge_{q=0,1,2} (q_b \rightarrow K_a q_b) \\
 bweeta & \quad \bigwedge_{q=0,1,2} (q_a \rightarrow K_b q_a) \\
 cweetniet & \quad \bigwedge_{q=0,1,2} \bigwedge_{n=a,b} (q_n \rightarrow \neg K_c q_n)
 \end{aligned}$$

Na de sequentie $[2_a \rightarrow 0_b][2_b \rightarrow 1_a]$ van twee updates ontstaat een informatietoestand waarin Anna en Bert elkaars kaart weten maar Cees dit niet van hen weet. Deze informatietoestand is weinig stabiel (er is geen gemeenschappelijke kennis), want als Anna nu zou zeggen “Ik weet Berts kaart” dan resulteert deze update $[K_a(K_a 0_b \vee K_a 1_b \vee K_a 2_b)]$ in het (niet gevisualiseerde) model dat bestaat uit niet verbonden werelden 012 en 201. Daarin is de kaartverdeling 012 (alsnog) gemeenschappelijk bekend.

Na de sequentie $[K_a(2_a \rightarrow 0_b)][K_b(2_b \rightarrow 1_a)]$ van twee updates ontstaat een informatietoestand waarin $C(aweetb \wedge bweeta \wedge cweetniet)$ geldt. Helaas geldt na uitsluitend de update $[K_a(2_a \rightarrow 0_b)]$ wel $cweetniet$ maar niet $Ccweetniet$. Daarom is dit geen oplossing van het ‘drie-kaartenprobleem’. Als Anna en Bert beide hadden gezegd “Ik heb kaart 2 niet” had dit tot dezelfde informatietoestand geleid. De situatie is dus analoog aan die in voorbeeld (iii).

Overigens is hier interessant om op te merken dat voor het geval van één kaart per speler geen oplossing bestaat (wat niet lastig is in te zien binnen de context van epistemische logica, maar zie ook [4] voor een bewijs van zes pagina’s waarvan dit een karakteristiek geval is).

U kunt dit soort publieke updates in het model *Hexa* ook online zelf uitvoeren, zie [6].

We vatten de resultaten nog even samen, waarbij we over wat technische hindernissen en impliciete generalisaties zonder verdere uitleg heenlopen (voor details, zie [7]). Als een speler n in een kaartenprobleem een uitspraak ϕ doet, dan is dit geen update $[\phi]$ en ook geen update $[K_n \phi]$ en ook geen update $[K_n \phi \wedge [K_n \phi] cweetniet]$, maar een update $[K_n \phi \wedge [K_n \phi] Ccweetniet]$. We noemen dit een veilige kennis-update. Zo’n veilige kennis-update is gelijk aan de sequentie van twee updates $[K_n \phi][Ccweetniet]$. Na het uitvoeren hiervan geldt (nog steeds) $Ccweetniet$. Dit is niet triviaal, want we hebben een voorbeeld gezien (iv) van een informatietoestand waarin $[K_n \phi][cweetniet] \neg cweetniet$ geldt (met andere woorden, $cweetniet$ geldt na update met $[K_n \phi]$ en $\neg cweetniet$ geldt na update met $[K_n \phi][cweetniet]$). Een oplossing voor het kaartenprobleem is een sequentie van veilige kennis-updates waarna tevens $C(aweetb \wedge bweeta)$ geldt.

Oplossingen van het zeven-kaartenprobleem

Omdat updates restricties zijn op de verzameling mogelijke kaartverdelingen, zal duidelijk zijn dat iedere uitspraak van een speler equivalent is met keuze tussen alternatieve kaartverdelingen. Tevens is te bewijzen dat een uitspraak zelfs equivalent is met een aantal alternatieven voor de hand kaarten van die speler (in het model komt dit overeen met een vereniging van equivalentieklas-

sen kaartverdelingen voor die speler). Dit maakt het mogelijk om systematisch naar oplossingen te zoeken. Alle mij bekende oplossingen voor het zeven-kaartenprobleem bestaan uit één uitspraak van Anna en één van Bert (of zijn daartoe te reduceren). Daarom weet Bert na de uitspraak van Anna reeds wat haar kaarten zijn. Dus weet Bert de kaart van Cees en kan zijn uitspraak die kennis openbaar maken. We laten Berts deel dus verder achterwege. Voor de aangenomen kaartverdeling waarin Anna 012 heeft, Bert 345 en Cees 6, is dit dus altijd:

Bert zegt: "Cees heeft kaart 6."

Berts uitspraak is uiteraard eveneens equivalent met een — steeds wisselend, afhankelijk van wat Anna zegt — aantal alternatieven voor zijn eigen hand.

Voor het zeven-kaartenprobleem bestaan alle oplossingen die uit twee uitspraken bestaan uit vijf, zes of zeven alternatieve handen kaarten voor Anna (het bewijs dat het niet in vier of acht kan, laat ik achterwege). Oplossing (*v*) die hiervoor genoemd is, is een variant waarin Anna de som modulo 7 van haar kaarten zegt. In dit geval dus:

Anna zegt: "De som modulo 7 van mijn kaarten is 3."

Dit is eigenlijk:

Anna zegt: "Mijn hand kaarten is een van 012, 046, 136, 145, 235."

Bert heeft 345, behalve in 012 komen een of meer van Berts kaarten in de alternatieven voor, dus deze informatie is voor Bert voldoende om Anna's kaarten te leren en daarmee de kaart van Cees: dus hij kan zijn bewering naar waarheid doen. Tevens moeten we aantonen dat na Anna's bewering gemeenschappelijk bekend is dat Cees geen van Anna's of Berts kaarten kent. Met andere woorden, Cees leert geen van Anna's of Berts kaarten, wat ook de werkelijke kaartverdeling was:

Als Cees kaart 0 had gehad, dan had Anna nog 136, 145 en 235 kunnen hebben. Cees leert nu geen van Anna's of Berts kaarten, want elk van 1, 2, 3, 4, 5, 6 komt in ten minste een van die drie handen *wel* en in ten minste een van die drie handen *niet* voor.

Als Cees kaart 1 had gehad, dan... et cetera. Nadat Bert heeft gezegd dat Cees kaart 6 heeft, is gemeenschappelijk bekend dat *aiweeth*, *bweeta* en *cweetniet*. De eerste twee zijn eenvoudig in te zien, voor de laatste volstaat de bovenstaande redenering voor Cees te herhalen voor kaart 6.

Deze oplossing is zowel minimaal als maximaal. Minimaal, omdat uitspraken van vier handen Cees altijd informatie geven. Het bewijs van de maximaliteit laten we zien, omdat het typerend is voor andere maximaliteits- en ook minimaliteitsbewijzen. Stel we breiden de vijf alternatieven voor Anna met een andere hand *h* uit. Twee van de in deze zesde hand voorkomende kaarten moeten eveneens in ten minste een van die vijf handen voorkomen (ga na!). Noem die hand *h'*. Als Bert precies de drie kaarten had gehad die niet in *h* of *h'* voorkomen, dan had hij niet op grond van Anna's uitspraak haar hand kaarten kunnen bepalen: hij kan dan immers niet bepalen of ze *h* of *h'* heeft. Maar hij kon het *wel*. Dus heeft Anna noch *h* noch *h'*. De vier resterende handen zijn dan weer te informatief voor Cees.

Het volgende is een hele andere oplossing, die uit zeven handen kaarten bestaat:

Anna zegt: "Ik heb een van 012, 034, 056, 135, 146, 236, 245."

Deze oplossing kan gezien worden als de zeven lijnen in een projectief vlak van zeven punten. De oplossing is maximaal maar niet minimaal: een willekeurige van die zeven handen, behalve de werkelijke, kan weggelaten worden en ook *dat* is een oplossing. Die is dan wel minimaal.

Door variatie op deze oplossingen is te bewijzen dat er 102 niet-equivalente oplossingen zijn voor deze gegeven kaartverdeling (namelijk 6 van zeven handen, 36 van zes, en 60 van vijf). Dit zijn *alle* manieren om met twee communicaties het probleem op te lossen.

Een interessante zijweg, waarmee we deze rondgang langs oplossingen afsluiten, is te bewandelen als we alleen eisen dat Cees niet de *hele* hand van Anna en/of van Bert te weten komt. Dus één of zelfs twee van hun kaarten leren mag wel. Alle voorgaande oplossingen lossen uiteraard ook dit eenvoudiger probleem op, maar tevens is nu een simpeler oplossing voorhanden, namelijk:

Anna zegt: "Mijn hand is een van 012, 034, en 056."

Hierna is gemeenschappelijk bekend dat Anna kaart 0 heeft en dat Bert Anna's hand kent, waarna Bert dus wederom de kaart van Cees bekend maakt.

Geschiedenis en relevantie van de kennislogica

Kennislogica is een zogenaamde *modale logica*. In zekere zin begint de modale logica al bij Aristoteles. De relationele semantiek voor modale logica komt van Kripke [8], kennislogica (voor individuele agents) van Hintikka [9], de uitbreiding met gemeenschappelijke kennis van Lewis [10] en daarna Aumann [11], met verschillende belangrijke bijdragen van auteurs van [5]. Dynamische kennislogica, dus met update-operatoren, maar dit kan nog veel wilder, is van meer recente datum, zie [12–15]. Dit is eigenlijk de integratie van kennislogica met dynamische logica. De laatste heeft weer een geheel eigen voorgeschiedenis, zie [16–17].

Multi-agentsystemen dateren van ruwweg de afgelopen 25 jaar. Dit is de verzamelnaam voor distributieve computersystemen die 'net als mensen' doelgericht gedrag vertonen op basis van interactie met hun omgeving. (Voor een recente introductie in dit gebied, zie [18]). Kennislogica wordt gebruikt voor het specificeren van de abstracte architectuur van zo'n multi-agentsysteem. Hiervoor is een heel elegant model voorhanden [5]. Een (voor een computer) redelijke aanname is dat iedere agent of processor $n \in N$, en ook de omgeving, een eindig aantal lokale toestanden $l_n \in L_n$, respectievelijk $o \in O$, kan aannemen. Een globale toestand van een multi-agentsysteem voor $|N| = m$ agents is dan simpelweg een punt $(l_1, \dots, l_m, o)$ in het Cartesisch product $L_1 \times \dots \times L_m \times O$. Een andere redelijke aanname is dat iedere processor zijn eigen toestand kent (net zoals iedere kaartspeler zijn eigen kaarten kent). Dit induceert equivalentierelaties op deze waardenverzameling, namelijk tussen globale toestanden met dezelfde n -coördinaat: $(l_1, \dots, l_n, \dots, l_m, o) \sim_n (l'_1, \dots, l'_n, \dots, l'_m, o')$, zodat zo'n systeem formeel volgens voorgaande definitie als informatietoestand te representeren is.

Het zeven-kaartenprobleem is dus maar een van de multi-agentsystemen waarvan het gedrag zich goed met kennislogica laat specificeren. Kennislogica wordt tevens toegepast voor het correctbewijzen van protocollen voor informatieoverdracht, zoals het alternating-bit protocol [5] en het TCP/IP protocol [19]. En behalve publieke updates, zijn ook ingewikkelder updates voorstelbaar. Een voorbeeld binnen de huidige setting is de actie van

het laten zien van je kaart aan (alleen) een andere speler [20]: alle kaartverdelingen blijven nu actueel, maar alleen de equivalentierelaties ertussen veranderen.

De studie van het uitwisselen van geheimen tussen kaartspeelers is tevens relevant voor het ontwerpen van cryptografische protocollen. Een interessant verschil met 'public/private key encryption' is dat het geheim niet gegarandeerd is door de complexiteit van een berekening (namelijk het ontbinden in priemfactoren van een groot getal), maar dat het geheim fundamenteel (dat wil zeggen, ook voor 'computationally unlimited agents') niet achterhaalbaar is. Dit lichten we toe aan een simpele maar niet helemaal serieuze analogie.

Stel dat Anna de bank is die de credit card van Bert wil identificeren, en Cees de boef die geld van Bert wil stelen. Anna weet dat Cees en Bert beide slecht in hoofdrekenen zijn. Dus ter identificatie vraagt Anna wie van hen het eerst 161393 in priemfactoren kan

ontbinden. (En kunt u dit?) Bert beschikt over 'private key' 643, voert een staartdeling uit, en geeft als antwoord: 643×251 . Cees druipt af. (In termen van de veel grotere priemgetallen waar het in werkelijkheid om gaat: Cees heeft meer tijd nodig om de priemfactorontbinding te maken dan de ouderdom van het heelal.) In ons huidige scenario houdt Anna voor mogelijk dat Cees een 0 is en zegt daarom dat haar hand kaarten een is van 251, 203, 246, 504, 536, 106, 134. Wederom kan Bert zich als eerste identificeren met gebruikmaking van de informatie ('hand kaarten') 643 waar hij over beschikt, door Anna mede te delen dat zij 251 heeft, of, veiliger, door en public Cees te ontmaskeren als een 0. Anders dan hiervoor kan Cees zich nu onmogelijk zonder risico als Bert doen voorkomen, hoe goed hij ook kan hoofdrekenen.

De ontwikkeling van de kennislogica lijkt deels te drijven op de analyse van puzzels waarin kennis een rol speelt. Het 'Modderige-kinderenprobleem' is al genoemd [5]. Een van de andere klassiekers is 'Som en Product' (zie volgende pagina).



Som en product

A zegt tot S en P: Ik heb twee gehele getallen x, y gekozen met $1 < x < y$ en $x + y \leq 100$. Straks deel ik $s = x + y$ aan S alleen mee, en $p = xy$ aan P alleen. Deze mededelingen blijven geheim. Maar jullie moeten je inspannen om het paar (x, y) uit te rekenen. Hij doet zoals aangekondigd.

Nu volgt dit gesprek:

1. P zegt: Ik weet het niet.
2. S zegt: Dat wist ik al.
3. P zegt: Nu weet ik het.
4. S zegt: Nu weet ik het ook.

Bepaal het paar (x, y) .

Dit probleem is door John McCarthy, Martin Gardner, en anderen gepopulariseerd vanaf de jaren zeventig, en is onlangs door Rineke Verbrugge met veel verve tijdens de Nationale Wiskundedagen 2002 opnieuw ten tonele gebracht. Internationaal lijkt minder bekend dat de oudste publicatie over dit raadsel van Hans Freudenthal is, in het Nieuw Archief [21–22]. De formulering van het probleem hiervoor is het letterlijke citaat. De lijst van goede inzenders in [22] is onthullend voor de huidige stand van wiskunde en informatica in Nederland. ✠

Dankwoord

De auteur dankt Barteld Kooi en Ger Koole voor hun gedetailleerde commentaar.

References

- 1 K.S. Makarychev and Yu.S. Makarychev, The Importance of Being Formal, *Mathematical Intelligencer*, 23(1):41–42, 2001.
- 2 H.P. van Ditmarsch, Killing Cluedo, *Natuur & Techniek*, 69(11):32–40, 2001.
- 3 H.P. van Ditmarsch, Oplossing van het mysterie (Solution of the murder mystery), *Natuur & Techniek*, 70(2):17, 2002.
- 4 M.J. Fischer and R.N. Wright, Bounds on Secret Key Exchange Using a Random Deal of Cards, *Journal of Cryptology*, 9(2):71–99, 1996.
- 5 R. Fagin and J.Y. Halpern and Y. Moses and M.Y. Vardi, *Reasoning about Knowledge*, MIT Press, Cambridge MA, 1995.
- 6 van Ditmarsch Hexagon, Open college UvA 'Hoe Wiskunde Werkt, van Natuur tot Cognitie', <http://www.science.uva.nl/projects/opencollege/cognitie/hexagon>, 2002.
- 7 H.P. van Ditmarsch, The Russian cards problem: a case study in cryptography with public announcements, University of Otago, Computer Science technical report series OUCS-2002-08 <http://www.cs.otago.ac.nz/trseries/oucs-2002-08.pdf>.
- 8 S. Kripke, A completeness theorem in modal logic, *Journal of Symbolic Logic*, 24:1–14, 1959.
- 9 J. Hintikka, *Knowledge and Belief*, Cornell University Press, Ithaca, NY, 1962.
- 10 D. Lewis, *Convention, a Philosophical Study*, Harvard University Press, Cambridge MA, 1969.
- 11 R.J. Aumann, Agreeing to disagree, *Annals of Statistics*, 4(6):1236–1239, 1976.
- 12 J.A. Plaza, Logics of Public Communications, M.L. Emrich and M.S. Pfeifer and M. Hadzikadic and Z.W. Ras, editors, *Proceedings of the 4th International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems*, pages 201–216, 1989.
- 13 J.D. Gerbrandy, *Bisimulations on Planet Kripke*, PhD thesis, University of Amsterdam, 1999 ILLC Dissertation Series DS-1999-01.
- 14 A. Baltag, A Logic for Suspicious Players: Epistemic Actions and Belief Updates in Games, *Bulletin of Economic Research*, 54(1):1–45, 2002.
- 15 H.P. van Ditmarsch, *Knowledge games*, PhD thesis, University of Groningen, 2000. ILLC Dissertation Series DS-2000-06.
- 16 J.F.A.K. van Benthem, *Exploring logical dynamics*, CSLI Publications, 1996.
- 17 D. Harel and D. Kozen and J. Tiuryn, *Dynamic Logic*, MIT Press, Cambridge MA, 2000 Foundations of Computing Series.
- 18 M. Wooldridge, *An Introduction to Multiagent Systems*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, UK, 2002.
- 19 F. Stulp and L.C. Verbrugge, A Knowledge-based Algorithm for the Internet Transmission Control Protocol (TCP), *Bulletin of Economic Research*, 54(1):69–94, 2002.
- 20 H.P. van Ditmarsch, Descriptions of game actions, *Journal of Logic, Language and Information*, 11:349–365, 2002.
- 21 H. Freudenthal, (Formulering van het 'somen-product'-probleem), *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 17:152, 1969.
- 22 H. Freudenthal, (Oplossing van het 'somen-product'-probleem), *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 18:102–106, 1970.

Fred Goffree

Bremlaan 16

3735 KJ Bosch en Duin

f.goffree@fi.uu.nl

De opbrengst

Wiskundendidactiek in Nederland

In het septembernummer van het Nieuw Archief voor Wiskunde heeft Fred Goffree een beschrijving gegeven van de ontwikkeling van de Nederlandse na-oorlogse wiskundendidactiek. Als leidraad gebruikte hij de verschillende proefschriften die er op dit terrein zijn verschenen. Het is opvallend dat het accent van het onderzoek zich in een halve eeuw heeft verplaatst van beschouwingen over de leraar naar de relatie leerling-leerstof. Goffree positioneert de onderzoeken in de didactische driehoek en staat uitgebreid stil bij alles wat het onderzoek heeft opgeleverd.

In het voorgaande overzicht heeft men een globale indruk kunnen krijgen van negentien verschillende, en prominente didactische onderzoeken van de afgelopen vijftig jaar. De onderzochte problematiek, de context waarin het onderzoek plaatsvond, enkele methodologische overwegingen, de achtergrond van de onderzoeker en zijn (haar) algemeen onderwijskundig referentiekader werden summier aangeduid. Om nu nog wat dieper op enkele aspecten van didactisch onderzoek in te kunnen gaan, willen we nagaan wat dit onderzoek heeft opgeleverd. We kijken achtereenvolgens naar bijdragen aan de didactiek van de wiskunde, methodologische gezichtspunten en de rol en positie van de wiskundig-didactische onderzoeker.

Bijdragen aan de didactiek

Didactisch onderzoek, dat zal hiervoor duidelijk zijn geworden, heeft in alle gevallen tot (uiteindelijk) doel de praktijk (van het wiskundeonderwijs) te verbeteren. We zagen dat er op alle posities in de didactische driehoek

kan worden aangevangen met ontwikkel- en onderzoekswerk op het micro-didactisch niveau van de schoolklassen. En daar draait het om het leren van leerlingen, de kwaliteit van hun leerprocessen en het niveau van hun leerresultaten. Wil de didactisch onderzoeker het wat grootser aanpakken, en op meso-didactisch niveau verbeteringen aanbrengen, dan moet een positie op enige afstand van de didactische driehoek worden gekozen. Maar hoe het ook zij, de elementen ervan geraken ook dan niet geheel uit zicht (zie figuur 1).

Zo gezien moet het didactisch onderzoek uit voorgaande jaren in elk geval iets hebben bijgedragen aan de praktijk. Nu eens wordt er iets (een didactische werkvorm, werkmateriaal voor leerlingen) ontworpen op basis waarvan onderzoek kan worden gedaan, dan weer is het juist het ontwerp zelf (een uitleg, een leergang, een toepassing) dat in de onderwijs-leersituatie onderzocht wordt. In het laatste geval spreekt men van 'flankerend onderzoek', vaak in de context van innovatie. We kunnen in het eerstgenoemde geval dan spreken van 'flankerend ontwerpwerk', in de context van didactisch onderzoek. Dergelijke flankerende ontwerpen vormen in bepaalde gevallen bijdragen aan het wiskundeonderwijs. Voor wat betreft het laatste bieden de besproken dissertaties een rijk aanbod, hetgeen uit onderstaande voorbeelden mag blijken.

Het onderwerp 'Tegels'

Dieke van Hiele-Geldof beschrijft hoe ze, uitgaande van vier wetten van de Gestaltpsychologie (overeenkomst, naburigheid, geslotenheid en voortzetting), tot haar ontwerp van materiaal en, voegt ze met klem toe, invulling

van het bijbehorende klassengesprek is gekomen. In de compleet uitgeschreven lesprotocollen laat ze zien hoe de leerlingen actief bezig zijn met het maken (construeren) van bestratingen van trottoirs, het uitbreiden van sterzeshoeken en het onderzoeken of je met gegeven kartonnen figuren (regelmatige drie-, vier-, vijf-, zes- en achthoeken) een vloer kunt bedekken. Vervolgens dezelfde vraag, maar nu met onregelmatige figuren. In de aandacht komen dan 'hoeken' en vanzelf de vraag naar het waarom van wel en niet bedekken. Hiermee komen eigenschappen van veelhoeken (som van de hoeken) in zicht. Een totaalplaatje ervan wordt dan in verband gebracht met de eerdere onderzoeken van het bedekken. Het is lesmateriaal waarmee de leerlingen, onder leiding van de leraar, van concreet handelen met visuele patronen komen tot het nadenken over die regelmatigheden en de eigenschappen van die patronen.

Leerboek-kenmerken als praktijkkennis

Hein Krammer, wiskundeleraar en opleider van wiskundeleraars, doet zijn onderzoek aan de toenmalige Technische Hogeschool Twente (nu Universiteit Twente) en móet een onderwijskundig standpunt innemen. Dit heeft tot gevolg dat methodologische zaken veel aandacht vragen. Maar de andere invalshoek brengt ook zaken aan het licht die voor wiskundeleraars nieuw zijn en voor schoolboekauteurs wellicht nuttig. Hij stelt leerboekkenmerken op om vervolgens drie bestaande (en destijds zeer veel gebruikte) series leerboeken (*Getal en Ruimte*, *Moderne wiskunde* en *Sigma*) te kunnen vergelijken. De kenmerken vallen niet uit de lucht, ze zijn naar voren gekomen in interviews met leraren. En

ook eigen inzicht als leraar (face-value) speelde een rol.

Leerboeken voor wiskunde onderscheiden zich van elkaar door de mate waarin: a) ze leerlingen helpen de structuur van de leerstof te doorzien en te onthouden; b) ze bruikbaar zijn als naslagwerk voor leerlingen; c) ze het mogelijk maken om voorkennis op te halen; d) in de vraagstukken tijd wordt besteed aan de relatie met de werkelijkheid; e) het cognitief niveau dat van de routines overstijgt; f) er vraagstukken in voorkomen; g) er (nieuwe stof) introducerende problemen in voorkomen; h) ze geschikt zijn voor zelfstandig werken van de leerlingen; i) ze geschikt zijn om een discussie tot stand te brengen; j) er aandacht is voor differentiatie binnen klasverband; k) ze diagnostisering en remediëring ondersteunen. Gesteld mag worden dat deze kenmerken de praktijkkennis van onderzoeker en geïnterviewden weerspiegelen.

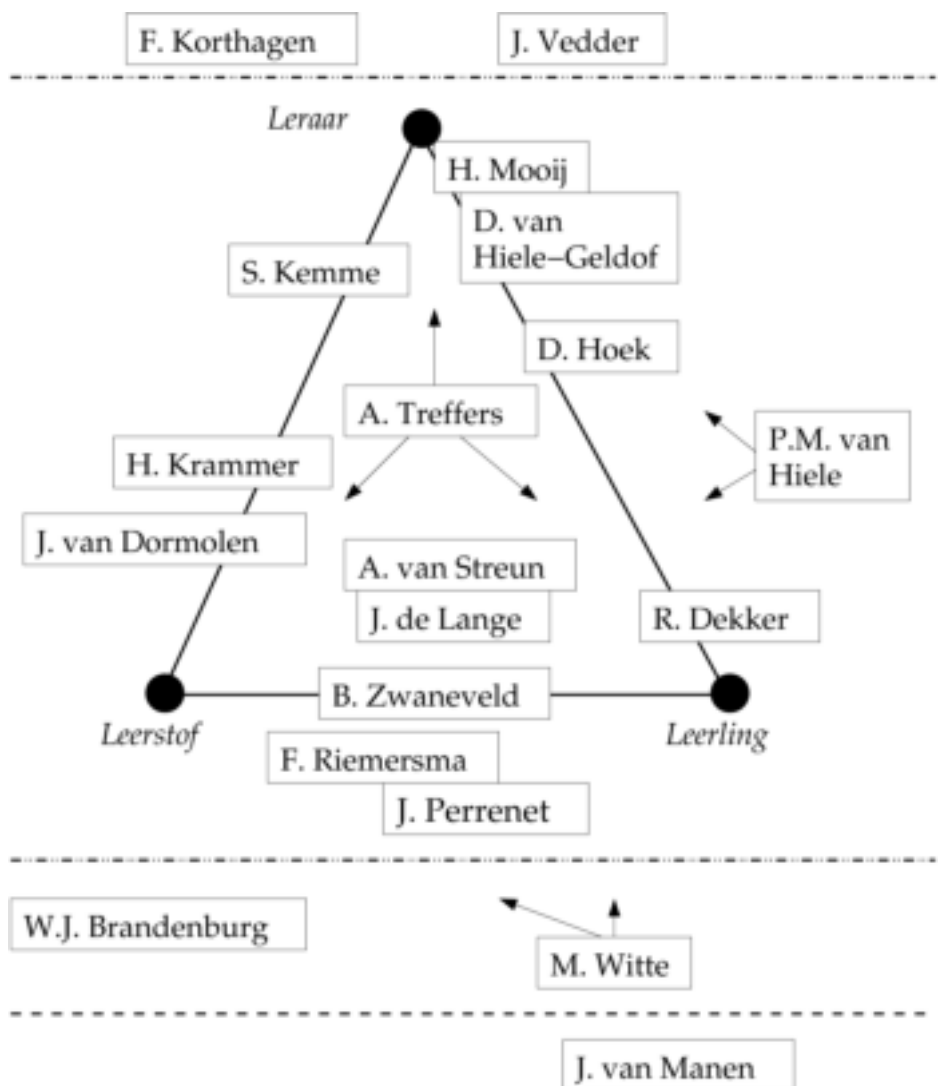
Alternatieve toetsvormen voor wiskunde A

Jan de Lange doet niet alleen evaluatieonderzoek met betrekking tot het HEWET-project (Herverkaveling Eindexamenprogramma Wiskunde Een en Twee), maar wil ook een bij wiskunde A passende toetsmethode ontwikkelen. De behoefte daaraan kwam in toenemende mate tot uitdrukking in de (52) proefscholen. Hij bedenkt dan een praktijkgericht onderzoek, met de trekken van beginnend ontwikkelingsonderzoek, in de fase tussen 'idee' en 'eerste ontwerp'. Alle proefwerken van de twaalf scholen 'van het eerste uur', door de (bijgeschoolde) leraren zonder hulp van de cursusleiders zelf samengesteld, worden verzameld en geanalyseerd op de vraag of in de proefwerken de doelen van wiskunde A zijn geoperationaliseerd, en vervolgens wat de leraren zelf aan nieuws hebben bedacht. De opbrengst blijkt niet mee te vallen, slechts achter twintig procent van de opgaven worden de hogere doelen van wiskunde A zichtbaar, zoals 'mathematiseren', 'het werken in toepassingscontexten' en 'het tonen van een kritische houding'. De onderzoeker wijt deze teleurstellende opbrengst voor een groot deel aan het feit dat proefwerken, zoals gebruikelijk, in vijftig minuten moeten worden gemaakt. Positief zijn evenwel de zelfbedachte, en nadien in de literatuur gelegitimeerde, alternatieve toetsvormen: de tweefasen opdracht, de thuiswerk opdracht, de schrijf-een-essay opdracht en het mondeling tentamen. Van elke vorm zijn voorbeelden gegeven, voorzien van leerlingenwerk en de wijze van scoring, zo in de praktijk van wiskunde A te gebruiken.

Praktijkverhalen

Hoewel Sieb Kemme een studie maakt van het uitleggen van wiskunde met het doel om bij te dragen aan een theorie van het uitleggen, is hij als onderzoeker-lerarenopleider veel aanwezig in klassen. In de neerslag van zijn studie komen dan ook diverse praktijkverhalen voor. Veel daarvan zijn te beschouwen als 'praktische opbrengsten' van het didactisch onderzoek. Neem bijvoorbeeld de welbekende rekenregel uit de aanvankelijke algebra: 'min maal min is plus'. Juist omdat deze regel al in het begin van het voortgezet onderwijs aan de kinderen wordt voorgelegd, heeft men in alle toonaarden getracht de aannemelijkheid ervan bij de leerlingen over te brengen. Twee didactische vondsten, die het omstreeks 1990 goed deden in de wiskundeles, zijn de uitleg van bijvoorbeeld $(-2) - (-3) = +1$ met 'de heks' en de uitleg $(-2) \times (-3) = +6$ met 'het treintje'. De negatieve getallen in het geval van de heks staan

voor de temperatuur van een toverdrank-in-de-maak, en koude blokjes: $t = -2$ (temperatuur toverdrank is -2), de heks haalt drie koude blokjes (-3) eruit, en t stijgt 3. Deze didactiek blijkt te werken, constateert Kemme. Maar met het treintje wordt de vertaling zo ingewikkeld, dat leerlingen het spoor kwijtraakten. Hij schrijft op bladzijde 93 van zijn proefschrift: "Er zijn twee soorten locomotieven, positieve en negatieve. De positieve staan met hun voorkant naar rechts, de negatieve staan naar links. $3 \times \dots$ betekent dat het betreffende treintje vooruit rijdt, $-3 \times \dots$ betekent dat het betreffende treintje achteruit rijdt. 3×-2 is dus: het negatieve treintje legt 3 keer de afstand 2 vooruit af, -3×-2 is: het negatieve treintje legt 3 keer de afstand 2 achteruit af." Wat hier zichtbaar wordt overstijgt de gegeven didactische situatie. Leraren kunnen naar aanleiding van dit praktijkverhaal voortaan een afweging maken of een bepaalde uitleg de zaak voor leerlingen niet



Figuur 1 De positionering van de promovendi in de didactische driehoek

moeilijker maakt dan de wiskunde zelf is. 'Vertaling' wordt later ook wel 'didactisering' genoemd. Ook Kemmes gereedschapskist voor uitleggers verdient een vermelding in de rubriek opbrengsten.

Taal in wiskunde

Van Dormolen, op zoek naar aandachtspunten voor het analyseren van leerteksten in schoolboeken voor wiskunde (voordat er leerlingen bij gedacht worden), komt begrijpelijkerwijs ook uit op het taalgebruik in die teksten. Interessante opbrengst is hier, in het bijzonder voor leraren die willen dat het schoolboek de leerlingen aanmoedigt actief met de auteur mee te denken, het onderscheiden van drie soorten taalgebruik (met verwijzing naar Freudenthal): demonstratieve taal, feitvaststellende taal en actietaal.

Met deze vijf voorbeelden zijn de negentien studies nog niet uitgeput. Niet genoemd zijn onder meer de 'kennisgraaf' van Zwaneveld, de 'ladder en zaag' van Dieke van Hiele-Geldof, de 'heuristieken bij probleemoplossen' van Van Streun, de 'aanwijzingen voor educatief ontwerpen' van Riemersma en Van Streun, en die voor het 'reviseren van bestaande ontwerpen' van Dekker, de voorbeelden van 'gebruikerswiskunde' van Witte, het construeren van hints en groepsopgaven bij probleemoplossen in de wiskundeles bij Perrenet en niet te vergeten het idee van Jan van Maanen om 'delen uit de geschiedenis van de wiskunde' functioneel in het wiskundeonderwijs op te nemen.¹

Theoretisch en flankerend onderzoek

Na het verschijnen van deel 1 van dit artikel, in het vorige nummer van het *Nieuw Archief* werd ik verblijd met de dissertatie van L.T.J.M. van Schalkwijk: *Onderzoekend wiskunde leren*. Het onderzoek speelt zich af in de bovenbouw van het vwo (klas 5) en richt zich op getalenteerde wiskundeleerlingen. Die krijgen een cursus Hogere Wiskunde (Fractals en dynamische processen) aangeboden door de Universitaire Lerarenopleiding van de Katholieke Universiteit Nijmegen. Een van doelstellingen is om deze leerlingen het leren bewijzen te onderwijzen en daarbij na te gaan welke didactische strategieën tot de beste resultaten voeren. Van Schalkwijk stelt zijn onderzoek in dienst van deze doelstelling, ook met het oog op een verbetering van de cursus. Maar er is ook iets van kritiek op het huidige wiskundeonderwijs in te lezen. Daarin krijgt het leren bewijzen nauwelijks aandacht. Interessant is het feit dat de onderzoeker zijn

inspiratie put uit het denken van Thales van Milete, die door Van der Waerden (*Ontwaken de Wetenschap*) aldus wordt geciteerd: "Het prille begin van wiskunde ontstaat uit problemen van het dagelijks leven, juist door de band daarmee te verbreken." De kernvraag van dit (flankerend) onderzoek betreft de leeromgeving die met behulp van het cursusmateriaal Hogere Wiskunde wordt gecreëerd: is die krachtig genoeg om de leerlingen de vaardigheid van het bewijzen te doen verwerven? In die leeromgeving worden de leerlingen gestimuleerd, en ook geholpen, zich op te stellen als een soort onderzoeksgroep, die begint met een brainstormsessie, dan in kleine groepen uiteen gaat om de volgende gezamenlijke sessies, symposium genoemd, voor te bereiden. Daarin gaat het onder meer om het formuleren van vermoedens, het luisteren naar elkaars redeneringen, het verwoorden van de eigen gedachtengangen en het komen tot overeenstemming over bewijsvoeringen. Ten wordt er een verslag gemaakt. De leerlingen kunnen bovendien colleges volgen, ze maken gebruik van het uitgekende lesmateriaal en kunnen experimenteren met de lesstof via speciaal bij de lesstof ontwikkelde computerprogramma's (*IFS-laboratorium* en *Funter*).

De verslaggeving van dit didactische onderzoek geschiedt op 'beschrijvend' en op 'theoretisch niveau', naar model van Van Hiele's niveautheorie en de gedachte (geuit door beide Van Hieles) dat die ook van toepassing is op de didactiek van de wiskunde. De parameters voor de data-analyse vormen mijns inziens een belangrijke opbrengst:

1. Leefwereld en wiskunde wereld, wiskundige representaties
 2. Zin en betekenis van bewijzen
 3. Lokale ordening
 4. Vaktaal
 5. Bewijzen binnen onderzoek.
- Wat leverde deze studie op voor het handwerk van de leraar? Weet die nu voortaan wat te doen als de leerlingen moeten leren bewijzen? Van Schalkwijk praat evenwel in termen van leeromgeving en geeft aanwijzingen om die, in dit verband, 'krachtiger' te maken: de leraar mag best wat meer hulp bieden, wat meer leraarsgestuurd bezig zijn en op gezette tijden aanleiding en gelegenheid geven om te reflecteren.

Over theoretische bijdragen aan de didactiek van de wiskunde moet ik hier kort zijn omdat een volledige behandeling van de gevallen teveel ruimte zou innemen. De volgende opsomming moet voldoende zijn om zich een idee te vormen: 'Denkniveaus' van P. van Hiele,

'Didactische dilemma's' van J. van Dormolen, het idee van 'expertwiskunde' van M. Witte en de begrippen 'moeilijkheidsgraad' (van het wiskundige onderdeel) en 'duidelijkheid' (van de uitleg) van S. Kemme.

Voor flankerend onderzoek komen we terecht bij Anne van Streun, die zijn ontwerp van een volledige wiskundemethode, *Wiskundelij*, vergezeld liet gaan van onderzoek naar aanwijzingen voor revisie. In het geval van ontwikkelingsonderzoek, waar de onderzoekscomponent ook bedoeld is voor het aanbrengen van praktijkgeoriënteerde verbeteringen, zou ik niet van flankerend onderzoek willen spreken omdat in dat geval onderzoek en ontwikkeling in samenhang en zo mogelijk geïntegreerd voorkomen, en onderzoeker en ontwikkelaar in dezelfde persoon verenigd zijn.

Methodologische overwegingen vooraf

Didactische onderzoekers die het resultaat van hun onderzoek wetenschappelijk willen onderbouwen, houden zich van meet af aan bezig met de systematiek van de dataverzameling. Het meest voor de hand ligt dan dat de methodologische overwegingen vooraf plaatsvinden en het onderzoeksdesign bepalen. Maar wiskundig-didactisch onderzoek heeft per definitie ook de doelstelling om de praktijk van het wiskundeonderwijs te verbeteren. Is de onderzoeker in staat om een goede balans te vinden tussen de aandacht besteed aan de methodologie en de aandacht voor de inhoudelijke vraagstellingen? Hieronder volgt een aantal op dit punt van aandachtsverdeling geselecteerde voorbeelden.

Het didactisch experiment

Het eerste hoofdstuk in de dissertatie van D. van Hiele-Geldof is getiteld: Wat is een didactisch experiment? Het wordt niet duidelijk of deze vraag ook vóór is gegaan aan haar promotiestudie, of misschien pas achteraf is beantwoord als reflectie op haar onderzoeksanpak. Hoe het ook zij, er zijn aan het eind van de jaren vijftig weinig voorbeelden van wiskundig-didactisch onderzoek voor handen. Die omstandigheid verklaart waarom zij begint met afstand te nemen van de opzet van natuurwetenschappelijke experimenten, waarin natuurverschijnselen kwalitatief beschreven en kwantitatief gemeten worden. Bij de meting kunnen de natuurwetenschappers namelijk factoren, die van betekenis worden geacht, (op één na) constant houden. Dit lukt niet als het experiment leerprocessen van kinderen betreft. De didactisch onderzoe-



Figuur 2 Deelnemers aan de conferentie van de Wiskunde Werkgroep in het Marten Maartenshuis te Doorn op 13 en 14 november 1948. Van links naar rechts en indien achter elkaar staande van voor naar achteren: L.N.H. Bunt (vooraan), A.O. Beckendorf, onbekend (vooraan), onbekend, mw. A.B. Veuger, onbekend, onbekend, onbekend, Joh. H. Wansink (vooraan), onbekend, H. Geurts, D.J.E. Schrek, M. van Tol (vooraan), H. Mooij, J.J. Boogaard, W.H. Veldhuis, H.J. Jacobs jr (secretaris), H. Freudenthal (vooraan), D. Kijne, J. Ph. Steller, H. Th. Otten, H.J. Boom jr, B.W. Steggerda, J.R. Janssen (voorzitter; vooraan), H.J. Struik, S.J. Geurtsen, H. Turksma, J.K. Timmer (vooraan), onbekend, P.G.J. Vredenduin, A. van Haselen, D. Leujes (vooraan), J.H. van Dam, P. Bronkhorst, A. Orie (?), onbekend, mw. A.H.M. van der Geijn (vooraan), onbekend, onbekend, mw. G.M. Langeler (vooraan).

ker dient zich pedagogisch verantwoord op te stellen. Ook moet hij zich bewust zijn van de subjectiviteit van zijn waarnemingen. Ze gaat ook in op, wat we nu zouden noemen, het quasi-experimentele design, waarin de effecten van de 'treatment' vergeleken worden bij een experimentele en een controlegroep. Er zijn zoveel factoren die beide groepen onderscheiden, dat het onmogelijk lijkt verschillen in leerresultaten aan één bepaalde factor toe te schrijven. Op dit punt kan ze de onderzoeksofzet van Mooij (1948) kritiseren, die voorbij ging aan de verschillen tussen scholen en tussen leerlingen en docenten. Met enige waardering wijst ze op de didactische experimenten van Boormeester, op het gebied van meetkundeonderwijs op de mulo. Maar zelf ziet ze niets in een dergelijk design, al was het alleen al om het feit dat ze zich niet in staat acht zowel 'traditioneel' (in een controlekلاس) als 'volgens haar nieuwe methode' (in een experimentele klas) meetkunde te onderwijzen. In de terminologie van recentere onderzoeken: geen 'matchingsproblematiek' en 'covariabelen', maar een 'naturalistisch' design, per definitie kwalitatief. Als onderzoeker-ontwerper maakt ze een grondige (psychologisch-didactische) analyse van leerstof, leerlingen en het leren van meetkunde in de eerste klas van het vmo. En vervolgens geeft ze als leraar-onderzoeker het on-

derwijs volgens haar eigen didactische methode, op haar eigen manier zoals ze dat gewoonlijk pleegt te doen. Van het voorwerk en de onderbouwing ervan, komt een zorgvuldig verslag en van de lessen nauwkeurige protocollen, die het materiaal vormen voor een grondige analyse. Mevrouw Van Hiele stelt: 'Wie het wil kan mijn lessen precies herhalen in de eigen situatie en vervolgens de resultaten met die van mij vergelijken.' Geen zorgen over de betrouwbaarheid van haar observaties, want de herhalingen in andere schoolklassen, met andere docenten en in andere omstandigheden moeten wel andere leerresultaten opleveren. Met deze methodische overwegingen bij haar onderzoeksaanpak worden diverse elementen aangedragen, die in enkele van de latere studies pregnant naar voren komen. Die studies zijn van na 1961, het jaar dat A.D. de Groot de eerste druk van zijn *Methodologie* liet verschijnen. Aan de orde komen (onderdelen van) de promotie-onderzoeken van Hein Krammer (1984), Anne van Streun (1989) en Fré Riemersma (1991), die hun onderzoeken vooraf lieten gaan door methodologisch denken. Vervolgens wordt nagegaan hoe men een beschrijvend onderzoek methodologisch kan onderbouwen, zoals Fred Korthagen (1983) en Jaap Vedder (1984) dat deden in hun onderzoek van de lerarenopleiding. Tenslotte proberen we na te

gaan hoe ontwikkelingsonderzoek, zoals Van Streun (1989) dat als onderdeel van zijn omvangrijkere studie heeft ervaren, methodologisch kan worden onderbouwd.

Een proces-productstudie begin jaren tachtig
Hein Krammer verricht zijn didactisch onderzoek in het kader van een groots opgezet internationaal onderzoek door de *International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA)* naar verbanden tussen onderwijsactiviteiten en leerresultaten. In Nederland spreekt men van het *Leeromgevingsproject*. Een onderdeel hiervan vormt het onderzoek van Krammer, naar de invloeden van het (wiskunde-)leerboek op de onderwijsactiviteiten van de leraar en ook op de effecten daarvan, de leerresultaten van leerlingen dus. Door deze omstandigheid is Krammer genoodzaakt bij het ontwerpen van het onderzoeksdesign zorgvuldig de stand van zaken en inzichten op het terrein van methodologie in acht te nemen. Dat betekent onder meer dat zijn onderzoek op de vijftig scholen van het *Leeromgevingsonderzoek* dient te worden uitgevoerd. Een gevolg is dat de onderzoeker veel van het onderzoekswerk op de werkvloer uit handen moet geven aan anderen. Daartoe moeten betrouwbare meetprocedures worden bedacht en valide meetinstrumenten ontwikkeld, en 'leken' moeten worden opgeleid om daarmee deskundig aan de slag te kunnen gaan. De onderzoeksproblematiek en daaruit afgeleide onderzoeksvragen worden omgezet in diverse variabelen, waarmee de (onderwijs-leer-)werkelijkheid in de havo-2 en vwo-2 klassen in de greep gekregen kan worden. Om een indruk te krijgen: Er dienen gegevens verzameld te worden over 'contact met het leerboek', daartoe worden 'vraagstukvariabelen' opgesteld, zoals 'de tijd die aan de oplossing ervan besteed wordt', 'praktische inkleding', 'introducerende functie', 'cognitief niveau' en 'aantal vraagstukken'. Dan moet er voor die variabelen een 'codering' bedacht worden, zodat de beschikbare vraagstukken door de opgeleide codeurs in de goede categorie geplaatst kunnen worden. Er blijken teveel vraagstukken te zijn, dus gaat men over op een steekproef. Die ingreep vereist weer een statistische onderbouwing. Deze aanpak wordt gevolgd met betrekking tot 'kenmerken van de leerboeken' (hiervoor genoemd), 'onderwijsactiviteiten' en 'leerresultaten'. Na de kwantitatieve analyse van de data volgt dan toch nog een kwalitatieve analyse, die voor leraren onder de lezers ongetwijfeld herkenbare elementen in zich draagt. De vraag dringt zich

nu, anno 2002, op of hier sprake is van een voor wiskundig-didactisch onderzoek verantwoord evenwicht tussen de methodologische en wiskundig-didactische activiteiten.

Een non-equivalent groups design

Het proefschrift van Anne van Streun heeft als ondertitel 'Verslag van een onderwijsexperiment'. Na het ontwikkelen van een leerboek voor Wiskunde A, waarin aandacht wordt besteed aan de basisvaardigheden van wiskunde die in de onderbouw dienen te zijn verworven en aan een reflectieve aanpak van het probleemoplossen. In het HEWET-project worden, zo is de kritiek van Van Streun, andere accenten geplaatst. Om het verschil in leereffecten bij beide aanpakken na te gaan, verricht hij een vergelijkend (hypothesetoetsend) onderzoek. Er zijn drie didactische aanpakken van wiskunde A, te weten: de HEWET-aanpak, met de kenmerken van realistisch wiskunde-onderwijs, de HWO-aanpak, zoals Van Streun die zelf voorstaat: heuristisch wiskunde-onderwijs en natuurlijk de zogenoemde WEDT-aanpak, de gangbare didactiek van wiskunde eerst, dan toepassen. In zijn 'methodologische overwegingen' herkent men ook de door Dieke van Hiele-Geldof genoemde punten. De promovendus pakt het onderzoek, begeleid door onder meer A.D. de Groot, gedegen aan. Om een indruk te geven, staan in tabel 1 delen van zijn 'Overzicht van de variabelen en meetinstrumenten'.

Het onderzoek geschiedt op 21 scholen, waarvan er vijf (parallelklassen) tot experimentele kern worden verheven. In die vijf klassen wordt het onderwijs (HEWET, WEDT en HWO) door twee leraren gegeven. Een situatie die Dieke van Hiele-Geldof dus niet aandurfde. Maar ook deze onderzoeker noemt het een hachelijke zaak, vanwege de vele variabelen die invloed kunnen hebben op de leereffecten. En later moet hij bekennen dat aan de leraar van de parallelklassen hoge eisen van flexibiliteit worden gesteld. (Een eigenschap die Dieke van Hiele-Geldof zich niet toedichtte.) Een verbetering door een grotere steekproef uit alle mogelijke scholen te nemen, ziet Van Streun niet zitten. Hij besteedt liever zijn energie en tijd aan intensief contact over een langere onderwijsperiode (een heel schooljaar) met een geringer aantal scholen. Een kwalitatief getinte gedachtegang, die vertaald wordt in de uitspraak: "...heeft het voordeel dat meer covariabelen en criteriumvariabelen in het onderzoek kunnen worden betrokken, terwijl de kwaliteit van het verzamelen van de data beter kan worden bewaakt." In de dertien bijlagen kan een geïnteresseerde

lezer inschatten wat de metingen en statistische bewerkingen van het cijfermateriaal van de onderzoeker hebben gevraagd. In vergelijking met de hiervoor genoemde studie wordt onmiskenbaar de indruk gewekt dat er meer sprake is van evenwicht tussen methodologie en didactiek. Tussen de regels door is de wiskundeleraar Van Streun steeds aanwezig.

Een eenvoudig onderzoek

Fré Riemersma is onderzoeker met een onderwijspsychologische achtergrond. Hij blijkt op de hoogte te zijn van het heuristisch wiskunde-onderwijsconcept, zoals dat door Anne van Streun is ontworpen en op leereffecten onderzocht. In zijn onderzoek voegt Riemersma aan de heuristische methoden het element van metacognitieve vaardigheden toe. Reflectie (op het eigen leren), is hier het codewoord, een bewustmaking van hoe je 'het doet'. In feite liggen het leren van heuristieken en het verwerven van metacognitieve vaardigheden hier niet ver uiteen. Riemersma volgt, zeker vanuit de psychologisch onderzoekstraditie gezien, een eenvoudig onderzoeksdesign (quasi-experimenteel, met voor-, na- en retentietoetsen). Na, net als Van Streun, op basis van literatuurstudie een onderwijsprogramma voor probleemoplossen te hebben ontworpen, gaat hij op onderzoek naar moge-

lijke en gewenste leereffecten. Het ontwerp-programma kan beschouwd worden als het flankerend materiaal bij zijn onderzoek naar een verbetering van de didactiek van het probleemoplossen bij wiskunde. Hij vindt zeven klassen voor het experimentele onderwijs, en zeven controleklassen, in andere scholen en met andere docenten. Via 'matching' worden beide condities gelijkgeschakeld op de variabelen 'type school', 'klasniveau', 'leerboek' en 'belangstelling van de leraar voor probleemoplossen'. De bron van informatie over deze variabelen is de leraar, het meetinstrument bestaat uit een vraaggesprek. In tegenstelling tot Van Streun neemt Riemersma genoeg met een korte onderwijsperiode en voegt hij aan zijn vergelijkend onderzoek een implementatieonderzoek toe. Om namelijk de uitkomsten van het eerste deelonderzoek te kunnen wegen, moet er informatie zijn over de wijze waarop met het experimentele programma is gewerkt:

- In welke mate is het programma met betrekking tot de gestelde doelen geïmplementeerd?
- In welke mate komt het programma overeen met de opvattingen van de leraren over probleemoplossen?
- Welke knelpunten traden op tijdens de uitvoering?

Covar.	Omschrijving	Instrument	Waarde
X1	Beheersing basiskennis wiskundige begrippen en technieken	Eindtoets 3 vwo	Aantal gescoorde punten op de BT-opgaven
X2	Vermogen wiskundige kennis te gebruiken bij het oplossen van problemen	Eindtoets 3 vwo	Aantal gescoorde punten op de P-opgaven
X3	Gebruik van de begrippen en technieken (bt) bij goed opgeloste BT-opgaven	Eindtoets 3 vwo	Aantal keren dat bt met succes bij BT-opgaven is gebruikt
X4	Gebruik van heuristische methoden (h) bij goed opgeloste P-opgaven	Eindtoets 3 vwo	Aantal keren dat h in goed opgeloste P-opgaven is gebruikt
X4	Gerapporteerde 'Plezier en Motivatie' (PM) t.o.v. wiskunde	Attitude-uitspraken CITO	Totaal aantal punten op de items PM

Kriterium-variabele	Omschrijving	Instrument	Waarde
Y1	Beheersing basiskennis wiskundige begrippen en technieken	Eindtoets 4 vwo	Aantal gescoorde punten op de BT-opgaven
Y2	Vermogen wiskundige kennis te gebruiken bij het oplossen van problemen	Eindtoets 4 vwo	Aantal gescoorde punten op de P-opgaven
...	...	...	...
Y6	Gerapporteerde 'Angst en Moeilijkheid' AM t.o.v. wiskunde	Attitude-uitspraken CITO	Totaal aantal punten op de items AM (weinig angst geeft hoge score op AM)

Situatievariabele	Omschrijving	Instrument	Waarde
Z1	Beoordeling van wiskundeleraar(e)	Vragenlijst Interactioneel Leraarsgedrag	Punten op subschalen.

Tabel 1 Overzicht van de variabelen en meetinstrumenten uit het onderzoek van Anne van Streun

- Hoe is het reguliere onderwijsprogramma uitgevoerd?
- Welk onderwijs is gegeven na afloop van het experimentele programma en voor de retentietoets?

Opmerkelijk is de uitkomst van dit onderzoek, dat kort na afloop van het programma flinke vooruitgang laat zien bij de experimentele groep, een vooruitgang die na verloop van tijd echter weer afneemt. Deze tijdelijkheid wordt geweten aan de korte onderwijsperiode (van vier maanden, drie lessen per week), die te kort kan zijn geweest voor een leerproces waarin leerlingen vakkennis van de wiskunde moeten verweven met strategische kennis van meer algemene aard.

Methodologische onderbouwingen

Twee van de vermelde onderzoeken betreffen niet wiskundendidactiek, maar opleidingsdidactiek. Zowel Fred Korthagen als Jaap Vedder zijn vakdidacticus/lerarenopleider. In die positie evalueren zij, vanuit bepaalde invalshoeken, hun opleiding. Korthagen typeert zijn overall beschrijving van de wiskundeopleiding van de Stichting Opleiding Leraren te Utrecht als case study, Vedder gaat in op een speciaal onderdeel van de opleiding, de introductie van de stage via '1-1-begeleiding'.

De verantwoording van een case study

De studie van F. Korthagen bestaat uit twee onderdelen, die beide met de term 'onderzoek' worden aangeduid. Het eerste deel is een nauwkeurige beschrijving van hetgeen in de SOL-wiskunde-opleiding (met focus op het studiejaar 1981/82) gebeurde. De auteur was zelf wiskundedocent en ervoer het werk op de SOL als een unieke ontwikkeling die 'model' zou kunnen staan voor andere lerarenopleidingen. Kern van dit model is de aandacht voor het leren reflecteren van studenten, aanstaande wiskundeleraren in het voortgezet onderwijs. Als de beschrijving een aanvang neemt heeft Korthagen inmiddels de SOL verlaten en kan als vakdidacticus aan de UvA dan een zekere afstand nemen. Op die afstand ontwikkelt hij eerst een beschrijvingsmodel, een theoretisch raamwerk waarmee de gang van zaken in de praktijk van de lerarenopleiding samenhangend in kaart gebracht kan worden. Dit raamwerk berust op het werk van R. Skemp, een wiskundeleraar-psycholoog, destijds werkzaam aan de Universiteit van Warwick in de U.K. Voor Korthagen heeft het uitbreiden van het beschikbare begrippenapparaat en de bewerking van Skemps raamwerk het karakter van ontwikkelingsonderzoek (p 205). Hij verheelt niet dat het werk



Hendrik Mooij, 'Over de didactiek van de meetkunde benevens benaderingsconstructies van een hoek in gelijke delen', 1948, Universiteit van Amsterdam.

van Skemp in de opleiding onbekend was en dat daar de achterliggende 'philosophy of education' ook nooit was geëxpliciteerd. Hoe kun je aan zo'n praktijknabije beschrijving op basis van eigen ervaringen en reflecties een wetenschappelijke onderbouwing geven? Die vraag was essentieel voor de auteur omdat hij ook het opleidingsmodel van de SOL-wiskundeopleiding wetenschappelijk gelegitimeerd wilde zien. Die verantwoording moet hier wel aan het eind van de studie (hoofdstuk 13/14) gegeven worden, want de naar voren te brengen methodologische overwegingen hebben geen rol gespeeld in de voorgaande twaalf hoofdstukken. Net als Dieke van Hiele-Geldof neemt hij eerst afstand van het klassieke natuurwetenschappelijk onderzoeksparadigma en concludeert vervolgens dat alternatieve onderzoeksmethoden (zoals bijvoorbeeld die van antropologen) op het gebied van onderwijs inmiddels ook bespreekbaar zijn. Hoebe (1981) biedt hem dan een kader waarin de werkwijze in de SOL en die van het beschrijven ervan, passen. In het schema van Hoebe zijn de activiteiten van empirisch-wetenschappelijke processen in kaart (een graaf!) gebracht. Enerzijds het theoriegericht onderzoek, anderzijds het praktijkgerichte onderzoek. Korthagen kiest de kant van de praktijkgerichtheid voor het werk op de SOL. Het schema biedt ook ruimte voor theorievorming vanuit de praktijk zodat het theoretische raamwerk een duidelijke plaats kan worden toegekend.

Er is nog een probleem van methodologische aard dat dient te worden opgelost: het empirische materiaal waarop de beschrijving berust, is niet systematisch, op basis van een onderzoeksplan, bijeengebracht. Of dat



Dieke Geldof, 'De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.', 1957, Universiteit Utrecht.

in een geval als dit wel mogelijk is, betwijfelt deze onderzoeker trouwens. Terugziend op zijn werk voelt hij verwantschap met de werkwijze van naturalistisch onderzoek, onder verwijzing naar een publicatie uit 1978 van E.G. Guba: *Toward a methodology of naturalistic inquiry in educational evaluation*. Hierin vergelijkt Guba op veertien punten conventioneel onderzoek met naturalistisch onderzoek. Omdat deze vergelijking voor didactische onderzoekers interessante gezichtspunten oplevert, is die lijst in tabel 2 samengevat.

Het is een opsomming die ruimte schept voor onderzoekers van het onderwijs, die in alle vrijheid en naar eigen inzichten in schoolklassen op verkenning willen gaan op zoek naar verbetering, en hun werk bovendien wetenschappelijk gelegitimeerd willen zien. De legitimering door de wetenschap wordt, in het geval van Korthagen, gerealiseerd door het 'wetenschappelijk forum', zoals bedoeld door A.D. de Groot en geconcretiseerd in de promotiecommissie. Overigens heeft Guba bij zijn naturalistische onderzoeksplanpak ook een aantal kwaliteitswaarborgen ontwikkeld, die Korthagen stap voor stap met betrekking tot zijn studie behandelt. Ook de tweede lerarenopleider-onderzoeker, J. Vedder, hanteert deze kwaliteitswaarborgen en voelt zich ook verwant met de naturalistische onderzoeksplanpak.

Curriculumevaluatie

De studie van Jaap Vedder is gericht op formatieve evaluatie van het onderdeel '1-1-begeleiding' van het curriculum voor eerste-graads wiskundeleraren aan het Pedagogisch Didactisch Instituut (nu IVLOS) van de Universiteit Utrecht. Formatief, dus beschrijven, ana-



Pierre van Hiele, 'De problematiek van het inzicht', 1957, Universiteit Utrecht.



Willem Brandenburg, 'De modernisering van het wiskundeonderwijs', 1968, Rijksuniversiteit Groningen.



Adri Treffers, 'Wiskobas doelgericht', 1978, Universiteit Utrecht.

lyseren en verbeteren. Bij de 1-1-begeleiding helpt een student van de lerarenopleiding gedurende zeven à acht weken een leerling van het voortgezet onderwijs gedurende één uur

per week met wiskunde. De onderzoeksvragen liggen hier voor de hand:

- Wat leren de studenten ervan?
- Hoe ervaren studenten de 1-1?

- Hoe ervaren de leerlingen deze lessen?
- Hoe evalueren de begeleiders van de studenten deze aanpak?

In de context van deze vraagstelling is voldoende gelegenheid om de 1-1-aanpak op alle interessante aspecten (wat gebeurt er, hoe organiseer je het, met welk doel, hoe past het in het geheel van de opleiding, hoe wordt er geleerd, hoe wordt er begeleid, wat is de achterliggende opleidingsvisie en -theorie?) in kaart te brengen.

Vedder herformuleert de eerstgenoemde vraag aldus: 'Welke leereffecten treden volgens de studenten bij henzelf op, wanneer zij gedurende een bepaalde periode aan één leerling individuele hulp geven bij het vak wiskunde?' Hij noemt dit een vorm van 'goal-free-evaluation', waarbij de opleidingsdoelen tijdens de 1-1 door de studenten zelf worden ervaren en tijdens het onderzoek door hen worden geëxpliciteerd. Als de auteur over de methodologie van zijn onderzoek komt te spreken, rekent hij eerst af met de controverse tussen de kwantitatieve en kwalitatieve methoden. Een geschikte combinatie van beide onderzoeksapproches lijkt hem hier goed mogelijk. En net als Korthagen is hij geneigd zijn onderzoek 'naturalistisch van aard' te noemen, maar de lezer mag ook kiezen voor 'quasi-experimenteel met een One-Group Posttest-Only Design', waarbij de 1-1 als 'treatment' en de antwoorden op de kernvraag als 'effect' worden gezien.

Tot slot willen we kort ingaan op de kwaliteitswaarborgen die ook door Korthagen in navolging van Guba werden gebruikt: kopieerbaarheid, als synoniem van het in onderzoekskringen zwaarwegende criterium betrouwbaarheid, te meten via herhalingen van

Punten van vergelijking	Conventioneel onderzoek	Naturalistisch onderzoek
1 Filosofische basis	Logisch positivisme	Fenomenologie
2 Onderzoeksparadigma	Experimentele natuurkunde	Etnografie
3 Doel	Verificatie (van hypothesen onder gecontroleerde omstandigheden)	Ontdekking (van verschijnselen onder natuurlijke omstandigheden)
4 Uitgangspunt	Reductionistisch (tevoren geformuleerde vragen of hypothesen)	Expansionisme (holistisch)
5 Onderzoeksplan	Vast/vooraf bepaald	Variabel/ontstaat gedeeltelijk tijdens het onderzoek
6 Onderzoeksstijl	Interventie (manipulatie van een situatie)	Selectie (van aspecten die zich onder natuurlijke omstandigheden voordoen)
7 Visie op realiteit	Enkelvoudig (er is één werkelijkheid)	Flexibel (de waarneming van de werkelijkheid is subjectief, de werkelijkheid verandert ook steeds en is meervoudig)
8 Waardensysteem	Enkelvoudig (veelal geen waarden van de onderzoeker die het onderzoek beïnvloeden)	Pluralistisch (meerdere waarden mogelijk; eigen waarden van de onderzoeker maken deel uit van het onderzoek)
9 Onderzoekssetting	Laboratorium	Natuurlijke omgeving
10 Context	Het onderzoek wordt zoveel mogelijk contextvrij gehouden	Context wordt juist bij het onderzoek betrokken
11 Condities	Gecontroleerd	Ook ongecontroleerde condities worden bij het onderzoek betrokken
12 Ingrijpen in de onderzochte situatie	Essentieel. De onderzoeker houdt de wijze van ingrijpen invariant	De onderzochte verschijnselen doen zich in natuurlijke situaties voor en zijn dus niet invariant
13 Blikveld	Toegespitst, inzoomend (op bepaalde variabelen)	Veelomvattend, uitzoomend
14 Methodologische kenmerken	Streven naar objectiviteit (hetgeen volgens Guba betekent: intersubjectiviteit)	Streven naar confirmeerbaarheid (overeenstemming tussen verschillende informatiebronnen)

Tabel 2 Samenvatting van de veertien punten van vergelijking van E.G. Guba



Joop van Dormolen, 'Aandachtspunten', 1982, Universiteit Utrecht.



Fred Korthagen, 'Leren reflecteren als basis van de lerarenopleiding', 1983, Universiteit van Amsterdam.



Hein Krammer, 'Leerboek en leraar', 1984, Universiteit Twente.

het experiment. Vedder stelt, net als Van Hiele-Geldof in 1957 met betrekking tot haar didactiek deed, dat zijn 1-1-begeleiding door ieder ander, maar met andere studenten en leerlingen, opnieuw gedaan kan worden. Maar men kan ook het ruw empirische materiaal van Vedders onderzoek opnieuw analyseren. Intrinsieke deugdelijkheid, als synoniem voor interne validiteit: is de beschrijving van de 1-1 isomorf met de praktijk van de 1-1? En vervolgens, dekken de geanalyseerde gegevens wel de 1-1 als object van onderzoek? Een geijkte manier om intrinsieke deugdelijkheid te bevorderen is de methode van de triangulatie, waarbij het onderzochte object vanuit diverse invalshoeken wordt bekeken. Vedder heeft hiermee rekening gehouden. Generaliseerbaarheid (externe validiteit): kan hetgeen in deze specifieke situatie van de 1-1 is gevonden, ook worden toegepast in andere opleidingen, met andere studenten...? Onpartijdigheid, synoniem voor de in onderwijsonderzoek zeer zwaarwegende eis van objectiviteit. Vedder noteert dat de onpartijdige onderzoeker alert dient te zijn op (onbewuste) vooroordelen, bewuste vooringenomenheid, incompetentie, corruptheid, lichtgelovigheid, en foutieve vooronderstellingen. Als gebruikte instrumenten noemt hij naast de triangulatie hier het 'kruisverhoor van de onderzoeker door anderen' en 'openheid met betrekking tot het verkrijgen van de data'. In verband met dit laatste verwijst hij naar de aangebrachte scheiding tussen begeleiders van de 1-1 en de onderzoekers ervan. Dit betreft een moeilijke beslissing, er moet gekozen worden tussen 'deelname of distantie' van de onderzoeker. Vedder koos dus voor distantie.

Het wordt duidelijk dat Vedder, net als

Korthagen, de methodologie serieus heeft genomen, maar er niet zo zwaar aan tilde. Ook komt naar voren dat zijn methodologische denkwerk voorafgaand aan het onderzoek gebeurde.

Een notitie over ontwikkelingsonderzoek

Het is Korthagen die (omstreeks 1983) zijn werk aan het theoretische raamwerk op basis van Skemps ideeën bestempelde met onderwijsontwikkelingsonderzoek. Deze positiebepaling vond ongeveer 3 jaar na de opheffing van het IOWO plaats (zie *Honderd jaar wiskundeonderwijs*). Het IOWO ging niet stilzwijgend ter ziele, maar de opheffing ging gepaard met enkele publicaties over de specifieke werkwijze gedurende de tien voorgaande jaren. De hoofdzaak in die publicaties was 'onderwijsontwikkeling' met daaraan opgehangen 'ontwikkelingsonderzoek'. Bedoeld wordt dan een cyclische aanpak bij het maken van onderwijsmateriaal: bedenken, bespreken, bespreken met medeontwerpers, uitproberen in de klas, ervaringen optekenen en bespreken in de ontwerpgroep, reviseren, en weer opnieuw beginnen. Het 'bedenken' kan nog een lange, soms diepgaande, didactische voorgeschiedenis hebben. In het voorgaande werd De Lange aangehaald. De inhoudelijke kern van zijn studie betreft de ontwikkeling en implementatie van wiskunde A in de context van het HEWET-project. In feite zou dit een voorbeeld moeten zijn van ontwikkelingsonderzoek, maar door de druk van de overheid en de zware lasten van de (te) snelle implementatie, mét nascholing van leraren, kwam van het onderzoek als ontwikkelingsonderzoek niets terecht. De Lange beschrijft wat ontwikkeld is en vertelt hoe de nascholing

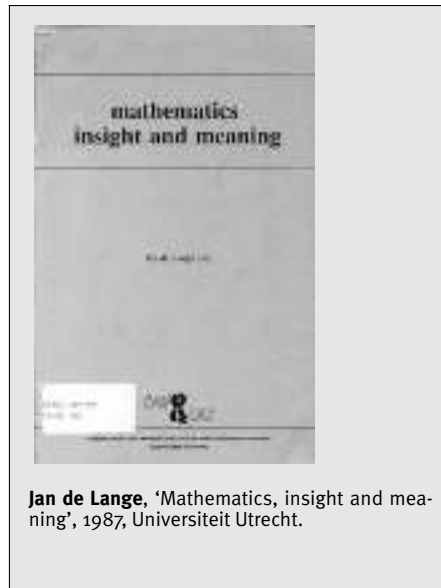
als bron van evaluatie fungeerde. Het begin van een ontwikkelingsonderzoek komt pas in beeld als De Lange op zoek gaat naar nieuwe toetsvormen.

Anne van Streun bestempelt in zijn didactisch onderzoek het eerste deel eveneens met de term ontwikkelingsonderzoek. Hoewel het buiten de kring van het IOWO (dan inmiddels OW&OC geheten) tot stand kwam, voldoet het in hoge mate aan de zojuist genoemde cyclische aanpak. Interessant is het feit dat het uitgangspunt (de didactische voorgeschiedenis) gekozen is bij de blokkades, die een tiental (zwakke) leerlingen uit 4 vwo ondervinden bij het oplossen van wiskundige en toegepaste opgaven in twee bekende schoolboekseries, *Getal en Ruimte* en *Moderne Wiskunde*. Ze werden gedurende twee schooljaren in groepjes begeleid bij het maken van opgaven (als extra hulp). Van dat werk zijn letterlijke protocollen gemaakt, de analyses ervan toonden de aard van de blokkades en ontsporingen bij het maken van opgaven. Globaal worden (wiskundige) houdingsproblemen en ontbrekende kennis en vaardigheden blootgelegd. Bij het ontwerpen van nieuw (geschikter) materiaal (leerboek) kan hiermee rekening worden gehouden. Wat ontworpen wordt is te beschouwen als het experimentele materiaal dat in zeshonderd (!) lessen (aan vier klassen) een cyclus van uitproberen, bespreken en verbeteren enzovoorts ondergaat. Van Streun beschrijft nauwkeurig hoe, deze werkwijze volgend, de nieuwe leergang 'heuristisch wiskundeonderwijs' tot stand komt. Mooi, dat wil zeggen inspirerend en constructief, didactisch onderzoek.

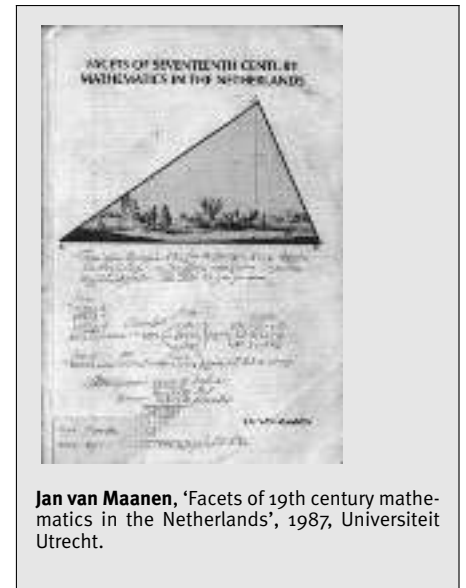
Op 3 juni 1993 wordt in Utrecht door het Freudenthal Instituut (opvolger van OW&OC)



Jaap Vedder, 'Oriëntatie op het beroep van leraar', 1984, Universiteit Utrecht.



Jan de Lange, 'Mathematics, insight and meaning', 1987, Universiteit Utrecht.



Jan van Maanen, 'Facets of 19th century mathematics in the Netherlands', 1987, Universiteit Utrecht.

een studiedag over ontwikkelingsonderzoek georganiseerd. Er komen zestig onderzoekers bijeen die naar aanleiding van enkele lezingen over de voors en tegens van dit soort onderzoek discussiëren. In het verslag (De Jong en Wijers, 1993) leest men dat de acceptatie in kringen van vakdidactici inmiddels tot stand is gebracht, maar dat in onderwijskundige kringen nog wordt getwijfeld aan ondermeer het wetenschappelijk gehalte. Nu, tien jaar later, is er naar mijn weten nog niet zoveel meer veranderd.

Het subjectieve van didactisch onderzoek

De wetenschappelijke onderzoeker is uit op generaliseerbare kennis, dat wil zeggen, kennis die ook geldt buiten het domein waarin ze is verworven. In ons geval van didactische kennis: toepasbaar over de grenzen van het onderzoeksgebied. Om dergelijke kennis te kunnen genereren, dient de onderzoeker zich serieus bezig te houden met de eisen die objectiviteit, validiteit en betrouwbaarheid aan zijn onderzoeksdesign stellen. De vraag om objectiviteit gaat de onderzoeker aan, namelijk de mate waarin zijn persoonlijke inzichten en opvattingen kunnen worden uitgeschakeld bij de inrichting, uitvoering en conclusies van het onderzoek. In het geval van didactisch onderzoek blijkt het niet mogelijk voor de volle honderd procent aan deze eis tegemoet te komen, ook als men 'objectiviteit' vervangt door 'intersubjectiviteit'. Smaling (1990) voegt hier een interessante betekenis, in de context van ontwikkelingsonderzoek, aan toe: er is sprake van objectiviteit als er recht gedaan wordt aan het object van onderzoek. Laat het object spreken en zorg ervoor dat er geen vertekend beeld ontstaat. Hoe dit gedaan kan wor-

den, hangt volgens Smaling niet alleen af van methoden, technieken en presentatiewijzen, maar in het bijzonder ook van de attitude, de mentale activiteit van de onderzoeker.

Het feit dat didactisch onderzoek door de praktijk nabijheid een hoog kwalitatief gehalte heeft en omdat de onderzoeker dikwijls het standpunt van de leraar vertolkt, maakt het onmogelijk om de inbreng van de onderzoeker volledig te negeren. Het is daarom beter om in didactisch onderzoek ook de rol van de onderzoeker in alle openheid te bespreken.

Het gaat dan in eerste instantie om een keuze tussen 'deelname of distantie'. Die keuze kan zich al aandienen voordat een begin wordt gemaakt met maken van een onderzoeksplan. Zoals onder meer het geval was bij de studies van Hendrik Mooij, Joop van Dormolen en Rijkje Dekker, toen de onderzoeksproblematiek in de eigen praktijk (van leraar wiskunde) naar voren kwam. In dergelijke situaties is de persoonlijke betrokkenheid van de onderzoeker zo groot, dat 'deelname' meer voor de hand ligt dan 'distantie'. Brandenburg, anno 1968, wilde in navolging van A.D. de Groot hiertegen nog waarschuwen: het doel van het experiment is verschillend van het doel van de lessen die in het kader van het experiment gegeven worden. En om redenen van zuiverheid moeten de rollen van onderzoeker en leraar onderscheiden worden. In hierboven besproken onderzoek bleek het ook mogelijk beide posities in te nemen: participierend in het onderwijs, reflecterend om enige afstand te nemen, triangulatie om ook 'anderen' te horen. In feite is de keus tussen kwalitatieve of kwantitatieve methode ook van het deelname-distantie karakter, we zagen hoe Jaap Vedder vanuit zijn positie in

het onderzoek van 'de 1-1' probeerde kwalitatief en kwantitatief te combineren. Dat doet Jacob Perrenet eveneens, met grotere nadruk, in zijn onderzoek van het leren van wiskundig probleemoplossen in samenwerkende groepjes. Hij onderzoekt verschillende aspecten van deze problematiek (probleemoplossen, groepswork, invloed van groepswork op het fouten maken (kleinschalig en grootschalig), controles toepassen, invloed van het leerboek op maken van specifieke fouten, kenmerk van goede groepsopgaven en hulp door het geven van hint(en)). Als wiskundeleraar en afgestudeerd psycholoog kan hij zijn onderzoek op de grens van onderwijskunde (quasi-experimenteel design met pre- en posttest en grote aantallen proefpersonen) en vakdidactiek (kwalitatief met casestudy karakter) positioneren. De zes onderzoeken worden in zes artikelen gepubliceerd, elk met een eigen probleemstelling en passend onderzoeksdesign. Perrenet ziet zijn proefschrift, een in samenhang gebrachte bundel van verwante artikelen, als voorbeeld van een wijze waarin de kloof tussen onderwijskundig en vakdidactisch onderzoek overbrugd kan worden. Interessant in dit verband is te constateren dat de keus tussen deelname en distantie, tussen leraar en onderzoeker en tussen kwaliteit en kwantiteit ook invloed heeft op de presentatievorm van de studie: men kiest tussen 'essay' en 'rapport', tussen de overtuigingskracht van narratives (praktijkverhalen) en cijfers (uitkomsten van statistische redeneringen en berekeningen), tussen reflectieve conversaties met het kwalitatieve onderzoeksmateriaal en formeel-logische redeneringen op basis van kwantitatieve uitkomsten. Het zal duidelijk zijn dat de persoon van de



Anne van Streun, 'Heuristisch wiskunde-onderwijs', 1989, Rijksuniversiteit Groningen.



Sieb Kemme, 'Uitleggen van Wiskunde', 1990, Universiteit Utrecht.



Rijkje Dekker, 'Wiskunde leren in kleine heterogene groepen', 1991, Universiteit Utrecht.

onderzoeker, zijn achtergrond in het wiskunde-onderwijs, de vakdidactiek en de algemene onderwijskunde, in didactisch onderzoek niet is te negeren. En ten behoeve van de toekomstige gebruiker van de onderzoeksresultaten, niet genegeerd mag worden.

De ontwikkeling van de onderzoeker

Promotieonderzoek heeft twee kanten. Aan de ene kant is het bedoeld om de promovendus in de gelegenheid te stellen onder deskundige leiding academische vaardigheden te verwerven. Aan de andere kant moet de promovendus ook laten zien dat hij in staat is op academisch niveau onderzoek te verrichten. In het geval van didactisch onderzoek kan er nog een leerproces aan toegevoegd worden als de onderzoeker een persoonlijke leervraag (bijvoorbeeld uit de eigen onderwijspraktijk) omzet in een onderzoeksprobleem. In het voorgaande hebben we daar enkele voorbeelden van ontmoet. Zo begon de studie van Joop van Dormolen tijdens didactische discussies met een collega wiskunde over het gebruik van het leerboek en het taalgebruik van de auteur. De discussie verliep moeizaam, de beide collega's begrepen elkaar niet goed bij gebrek aan de goede termen en het ontbreken van heldere doelstellingen. De behoefte daar meer over te weten te komen werd versterkt toen Van Dormolen zelf leerboeken ging schrijven en vervolgens toen hij als lerarenopleider zijn studenten van een bruikbaar instrument wilde voorzien om leer teksten te kunnen analyseren. De studie van deze problematiek vereiste veel tijd en een langlopend, diepgaand leerproces. Een leerproces waarin het analyseren van leerteksten, en niet in de eerste plaats academische vaar-

digheden, steeds beter onder de knie werden gekregen. Van Dormolen is zich dit ook bewust, en hij wil, als goed didacticus, de lezer zijn leerproces laten meebeleven. Volgens de 'heuristisch-biografische' manier, zoals hij dat noemt. Het komt uiteindelijk tot een compromis tussen hetgeen in het algemeen gebruikelijk is voor proefschriften en wat deze auteur graag had gewild. De invloed van het persoonlijk leerproces op het onderzoeksresultaat kan nog verder gaan. Voorbeelden daarvan zijn te vinden in ontwikkelingsonderzoek (Streefland, 1983). Het boven beschreven cyclische proces van ontwerpen, bespreken, uitproberen, bespreken en revisie biedt op twee momenten de gelegenheid om vanuit theoretisch standpunt op de praktijk te reflecteren en in het team te bediscussiëren. Zo kan er een ontwikkelproces bij de ontwerper-onderzoeker op gang worden gebracht, dat theorievorming over het onderzoeksobject tot gevolg heeft.

Motivatie en politieke geladenheid

Marjolijn Witte studeerde sociologie en andragologie aan de UvA en tracht in haar promotiestudie te achterhalen waarom meisjes in het wiskunde-onderwijs op het voortgezet onderwijs eerder afhaken dan jongens. Ze constateert dat de verschillende pogingen om hier verandering in te brengen (verklaringen van het verschijnsel, maatschappelijke aan drang en didactische vernieuwingen) niet tot een positief resultaat hebben geleid. Een analyse van de wiskunde in het huidige onderwijs en van de heersende opvatting over wiskundige begaafdheid geeft, vanuit haar specifieke standpunt op macroniveau, een idee om fundamenteel en veranderingsgericht in te grijp-

pen. Eigenlijk komt het er op neer dat de 'wereld' op z'n kop gezet moet worden. Dit didactisch onderzoek (ik ben bang dat velen deze term hier niet van toepassing vinden) vindt voornamelijk plaats in het hoofd van de onderzoeker, op basis van een omvangrijke literatuurstudie en gesprekken met haar promotoren. Het is begonnen ten gevolge van haar fascinatie voor het verschijnsel van het afhaken van meisjes, en die is naar haar zeggen al betrekkelijk oud. Ze was zelf goed in wiskunde, maar kon niet goed begrijpen waarom aan het vak wiskunde zo'n geweldige status op school en in de samenleving werd toegekend. Eigenlijk ergerde dat haar behoorlijk. Aan het verlangen van haar opa om wiskunde te gaan studeren, kwam ze niet tegemoet: "Puzzelen is wel leuk, dacht ik, maar daarmee is de wereld niet gebaat." In de literatuurstudie omzeilt ze overigens de wiskunde niet, op zoek naar een alternatieve wiskunde komt ze zelfs terecht bij de dissertatie van intuïtionist L.E.J. Brouwer (1907) *Over de Grondslagen van de Wiskunde*. Hoever ze erin is doorgedrongen, kan op grond van haar studie niet gezegd worden, maar zeker is dat didactische onderzoekers 'uit het wereldje van het wiskunde-onderwijs' deze keus niet voor hun rekening hadden genomen. Witte neemt ook kennis van het bekende werk van Lakatos: *Proofs and Refutations. The logic of mathematical discovery*, uit 1977. Zijn uitspraak: "It has not sufficiently realised that present mathematical and scientific education is a hot bed of authoritarianism and the worst enemy of independent and critical thought" kan ze goed gebruiken bij haar kritiek op de zogenoemde expertwiskunde. Ze zegt daar zelf van: "Het zou vermoedelijk makkelijker kunnen wanneer de onderzoeker zelf



Fré Riemersma, 'Leren oplossen van wiskundige problemen in het voortgezet onderwijs', 1991, Universiteit van Amsterdam.



Marjolijn Witte, 'Meisjes meegerekend', 1994, Universiteit van Amsterdam.



Jacob Perrenet, 'Leren probleemoplossen in het wiskundeonderwijs', 1995, Universiteit van Amsterdam.

wiskundige en/of wiskundendidacticus is; dat ben ik echter niet. Ik heb mij, waar nodig, op de literatuur moeten baseren." (Zie p 31). De persoonlijke betrokkenheid bij de problematiek op microniveau, de professionele noodzaak om de oplossing op macroniveau te zoeken en de vrijmoedigheid om zich een eigen weg te banen door een overweldigende hoeveelheid literatuur, geven aan dit didactisch onderzoek een uitzonderlijk karakter.

Microdidactische problematiek

Een onderzoek dat drie jaar eerder haar beslag kreeg, van Rijkje Dekker, vertoont opmerkelijke verschillen en overeenkomsten met dat van Marjolijn Witte. Rijkje Dekker deed onderzoek op microdidactisch niveau, ze zat als het ware naast de brugklassers, als ze bezig waren met het pakketje 'Afzender Marlies', een educatief ontwerp van de onderzoeker zelf. Maar, evenals Marjolijn Witte is ze zeer betrokken op haar probleemstelling over niveauverhogingen en samenwerken in heterogene groepjes. Ook deze problematiek heeft een maatschappelijke achtergrond: ze gelooft in de idealen van de middenschool zoals die door haar idool H. Freudenthal waren geadopteerd. En toen de middenschool al tijdens haar onderzoek in de vergetelheid raakte door de introductie van de basisvorming, volhardde ze in haar onderzoek naar signalen van niveauverhoging om aan te tonen dat de Middenschool bestaansrecht heeft. De signalen zoekt ze in de interactie van de leerlingen. Door zorgvuldige audioregistraties van het werken in de groepen, aangevuld met notities over non-verbale elementen van de interactie, beschikt ze over letterlijke protocollen, die een diepgaande didactische analyse

toelaten. Ze vindt haar inspiratie bij de werkwijze en inzichten van Freudenthal, ze praat dikwijls met hem en leest zijn onderwijskundige werken met grote aandacht. Verder leest ze niet veel (in tegenstelling tot Marjolijn Witte), slechts wat publicaties over coöperatief leren in groepen en over differentiatie. En met grote aandacht neemt ze kennis van de dissertaties van het echtpaar Van Hiele (over niveaus). De signalen: (a) tonen of vertellen van oplossingen, (b) uitleggen van oplossingen en (c) kritiseren en (d) verbeteren van oplossingen, zijn subtiel; waarschijnlijk te subtiel om door leraren te worden nagevolgd. Stonden bij Marjolijn Witte de maatschappelijke opvattingen over wiskunde en wiskundeonderwijs een gladde aanpak van haar jongens/meisjes problematiek in de weg, bij Rijkje Dekker liggen de obstakels in het klaslokaal, waar opvattingen over de wiskundeles de subtiel observatie en begeleiding van leerprocessen buiten bereik houden.

Een nieuw verschijnsel: de aio

We gingen hierboven voorbij aan de mogelijkheid om een dissertatie op basis van (gepubliceerde) artikelen samen te stellen. Het waren Jacob Perrenet (1995) en Dirk Hoek (1998) die van deze gelegenheid gebruik maakten. Vanzelfsprekend is het in dergelijke gevallen van belang om de verschillende artikelen tot hoofdstukken om te vormen (zonder fundamentele ingrepen te plegen) en ze vervolgens samen te voegen tot een eenheid. Wanneer de didactisch onderzoeker zijn lezers ook als potentiële gebruikers ziet (Goffree, PME 2001), dan moet er nog veel gebeuren om het onderzoekswerk en de conclusies toegankelijk te maken voor een gro-

ter publiek dan de promotiecommissie. Als de promovendus van meet af aan zijn studie in het kader van artikelen ziet, kan in veel van die 'achteraf-problemen' voorzien worden. Dit was overduidelijk het geval bij de studie van Dirk Hoek. Maar daar speelde ook nog een nieuw fenomeen: Hoek was namelijk aangesteld als assistent in opleiding. Dat komt erop neer dat voor hem een academische leeromgeving werd geschapen, met veel expertise onder handbereik, een lopend project waaraan een welgedefinieerde bijdrage dient te worden geleverd in de vorm van een proefschrift. De (globale) probleemstelling staat in de meeste gevallen vast en in principe ook onderzoeksdesign en de te volgen methodologie. In vier jaar moet de klus, in verband met de financiering, geklaard zijn. De promotor en de vakgroep bepalen in hoge mate of tijdens de promotiestudie het leerproces van de aio of de bijdrage aan de didactiek het accent krijgen. Tegen deze achtergrond kunnen we rol, positie en persoon van Dirk Hoek als aio in zijn didactisch onderzoek proberen in te schatten. Vermeld moet overigens worden dat deze aio bij aanvang van zijn promotiestudie niet meer zo piepjong was (geboren in 1962). We noemden reeds enkele positieve omstandigheden. Nu gaan we op zoek naar mogelijke verschilpunten met voorgaande didactische onderzoekingen, die zich uit het werkstuk van Dirk Hoek laten afleiden.²

– Het grootschalig onderzoek noodzaakt in zekere zin een afstandelijke aanpak van het onderzoekswerk op de werkvloer. Deelnemende leraren krijgen een (zeer korte) scholing op het onderwijzen van cognitieve en sociale strategieën bij het probleemoplossen, hetgeen betekent dat



Dirk Hoek, 'Social and cognitive strategies in cooperative groups', 1998, Universiteit van Amsterdam.



Lodewijk Schalkwijk, 'Onderzoekend wiskunde leren', 1998, Katholieke Universiteit Nijmegen.



Bert Zwaneveld, 'Kennisgrafen in het wiskunde-onderwijs', 1999, Open Universiteit Nederland.

de onderzoeker zelf de lessen niet verzorgt. Het programma wordt in de dagelijkse klassenpraktijk ingezet en de onderzoeker heeft geen invloed op de uitvoering en resultaten.

- Het grote aantal leerlingen (511 + 444) dat bij het onderzoek betrokken is vraagt om (betrouwbare) instrumenten en adequate statistiek voor bewerking van de kwantitatieve data. De instrumenten zijn voor een groot deel door anderen ontwikkeld en het rekenwerk kan worden uitgevoerd in dialoog met een gespecialiseerd methodoloog en aan de hand van een geavanceerd computerprogramma (multilevel-analyse).
- Voor een kwalitatieve onderzoeksaanpak op wiskundig didactisch terrein wordt de noodzaak niet gevoeld en er is eigenlijk ook geen tijd beschikbaar. Beschrijvingen van het onderzoekswerk in de klas gaan niet in op wat er met leerlingen, de leerstof en de leraar gebeurt. Het feit dat bij de attitudemeting alleen wordt gedacht aan 'attitude towards mathematics' (vind je het leuk? relevant? kun je 't aan? wil je er moeite voor doen?), en niet aan 'wiskundige attitude' (gespitst zijn op regelmaat en patronen, indien nodig een andere invalshoek zoeken, doorzetten als 't even tegenzit), die bij het probleemoplossen van belang wordt geacht.
- De betrokkenheid van de onderzoeker op het onderzoeksprobleem heeft een ander (zakelijk?) karakter dan die van de ex-wiskundeleraar. Dit geldt in zekere zin ook aanleiding en motivatie, die in dit geval (aanvankelijk) extrinsiek is.
- Het flankerend ontwerpwerk is in samenwerking met leraren geschied en er wordt-

geput uit externe bronnen. 'WiskundeleerstoP' wordt, op twee aardige opgaven na, in de dissertatie niet in beschouwing genomen. Inhoudelijk geïnteresseerde lezers kunnen de lessenserie achteraf bij de auteur opvragen.

- Voor de kwaliteit van de gebruikte instrumenten (betrouwbaarheid) wordt verwezen naar ander onderzoek. Op de betekenis van de scores in individuele gevallen kan, bij het ontbreken van kwalitatieve analyses, niet worden ingegaan, evenmin komt zo de interne validiteit van het meetwerk goed uit de verf. Neem de 'Mathematical Reasoning Ability Test': welke lezer wil niet uitgelegd krijgen wat de score .80 precies zegt over het wiskundig redeneren in de klas. Een dergelijke uitleg is weliswaar niet gebruikelijk in onderwijskundige proefschriften, maar in een wiskundig didactische dissertatie zou hij niet mogen ontbreken, vind ik.

De rol van deze aio is die van de onderzoeker-op-afstand (distantie). De persoon van de onderzoeker komt, ook niet als lerende, in het stuk voor. En zijn positie is daardoor niet in de didactische driehoek te bepalen, maar in de omgeving ervan; vanwege het element van interventie aan de zijlijn, waar de leraar zich inspanst de leerlingen iets extra's te leren.

Tenslotte: in het hierboven, op basis van voornamelijk promotiestudies geschetste beeld van wiskundig-didactisch onderzoek in Nederland, komt nauwelijks samenhang en zeker geen ontwikkeling naar voren. Toch kan men zich nu een beeld vormen van de wiskundig-didactische onderzoeker. Deze is met grote waarschijnlijkheid wiskundeleraar geweest, heeft het onderzoeksprobleem

in de (eigen) praktijk ondervonden, is geneigd in de praktijk van het wiskundeonderwijs op onderzoek te gaan, neemt liever geen distantie maar kiest voor deelname, is gemotiveerd door de gedachte aan een microdidactische verbetering, voornamelijk in de praktijk maar ook theoretisch georiënteerd, kent zichzelf een duidelijke positie in de didactische driehoek toe, is geïnteresseerd in het leren en onderwijzen van wiskunde, leest zich met enige terughoudendheid in de literatuur in, wil ook wel kritisch kennis nemen van algemeen onderwijskundige, in het bijzonder psychologische, literatuur, is aanvankelijk kwalitatief ingesteld, staat open voor eigen ontwikkeling maar kan die nog niet bewust bij het onderzoek betrekken, kan wel door anderen methodologisch gestuurd worden en zich vervolgens open stellen voor kwantitatieve methoden en statistische bewerkingen van de data, maar gaat liever onbevvangen de klas in met globale richtlijnen en een open oog (mind) voor onverwachte gebeurtenissen, wekt de indruk dat een wiskundige attitude met een voorkeur voor heuristieken boven algoritmen aan de onderzoeksaanpak kleur geeft. Maar er zijn uitzonderingen, we zagen namelijk ook een 'buitenstaander' zeer gemotiveerd op macroniveau onbevvangen een politiek geladen problematiek betreffende het wiskundeonderwijs, grondig aanvatten. En we kwamen een aio tegen, die het didactisch onderzoek voornamelijk als academisch leerproces diende op te vatten en in relatief korte tijd onder goede begeleiding een gaaf stukje onderwijskundig onderzoek tot stand bracht.³



Literatuur en noten

- 1 Dit idee krijgt een interessante uitwerking in een promotiestudie, die na afronding van dit artikel pas in mijn bezit kwam: B.A. van Amerom: *Reinvention of early algebra*. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra. Freudenthal Institute: Utrecht. Promotoren J. de Lange (wiskunde-didacticus en ontwerper) en K. Gravemeijer (wiskunde-didacticus en ontwerper), co-promotor J. van Maanen (geschiedenis van de wiskunde). Promotiedatum: 16 mei 2002.
 - 2 In zijn studie wil Hoek nagaan of je leerlingen in de eerste klas van het voortgezet onderwijs via het 'aanleren' van bepaalde aanpakstrategieën voor probleemoplossen en het 'aanleren' van manieren om goed samen te werken in kleine groepjes bij het oplossen van problemen, tot betere leerresultaten kunt brengen en of hun houding met betrekking tot het vak wiskunde op school in positieve zin beïnvloed wordt. Dit onderzoek vertoont dus samenhang met die van Van Streun, Riemersma en Perrenet. Voor het werk in de klas wordt ongeveer drie maanden (van de reguliere lestijd) genomen.
 - 3 Ik mag met dit ene voorbeeld geen uitspraken doen over aio-onderzoek in het algemeen, het kwam toevallig op mijn weg tijdens mijn zoektocht naar wiskundig-didactisch onderzoek in Nederland. Op 22 oktober 2001 promoveerde ook een aio op wiskundig-didactisch onderzoek, in dit geval op de basisschool. (Menne, 2001). Haar leeromgeving was gecreëerd op het Freudenthal Instituut, ze werd begeleid door A. Treffers en kwam tot een belangwekkende bijdrage aan de vakdidactiek. In praktische zin met een leergang 'productief oefenen voor zwakke rekenaars in groep 3' en in theoretische zin met de fundering van het concept productief oefenen in het realistisch reken-wiskundeonderwijs.
 - 4 Biehler, R., Scholz, R.W., Strässer, R. and B. Winkelmann (eds) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.
 - 5 Goffree, F. (1985). *Ik was wiskundeleraar*. Timmer, Wansink, Van Hiele, Vredenduin en Van Baalen in gesprek met Fred Goffree. SLO: Enschede.
 - 6 Goffree, F. (2001). A consumer's point of view. In: Marja van den Heuvel-Panhuizen (ed) *Proceedings of the 25th Conference of PME*. Vol 1 (80-86). Freudenthal Institute: Utrecht.
 - 7 Goffree, F., Van Hoorn, M. en B. Zwaneveld (red.), (2001). *Honderd jaar wiskundeonderwijs*. NVvW: Leusden.
 - 8 Goffree, F. en H. Jansen (1989). *Wiskundeonderwijs Wereldwijd*. Terugblikken op de ICME-VI conferentie in Boedapest 1988. VALO wiskunde en informatica: Enschede.
 - 9 Goffree, F. (1996). 'Onderzoek en ontwikkeling: van en vóór het reken-wiskundeonderwijs in Nederland'. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 15(1) 3-18.
 - 10 Groot, A.D. de, (1961). *Methodologie*. Grondslagen van onderzoek en denken in de gedragswetenschappen (1961), Mouton & Co: 's Gravenhage. (1970, vijfde druk).
 - 11 Hoebe, W. Th. J. G. (1981). *Praktijkgericht onderzoek en de groei van kennis*. SVO-reeks nr. 46: 's-Gravenhage.
 - 12 Hoeve, A.H. van der, Kohnstamm, Ph. en G. van Veen, (1937). *Over lees-rekenopgaven en hun didactische en diagnostische waarde*. Mededeling van het Nutseminarium nr. 31, Groningen.
 - 13 Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex Cartesian graphs representing situations- studies and teaching experiments*. Ph.D study Université du Québec a Montréal.
 - 14 Jong, R. de, en M. Wijers (red.) (1993). *Ontwikkelingsonderzoek*. Theorie en Praktijk. NVORWO Freudenthal Instituut: Utrecht.
 - 15 Lampert, M. & D. Loewenberg Ball, (1998). *Teaching, Multimedia, and Mathematics*. Investigations of Real Practice. Teachers College, Columbia University: New York.
 - 16 Poincaré, H., (1908). *Science et méthode*.
 - 17 Smaling, A. (1990). 'Enige aspecten van kwalitatief onderzoek en het klinisch interview'. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 8(3) 4-10.
 - 18 Streefland, L. (1983). 'Theorievorming door ontwikkelingsonderzoek'. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 12(2), 20-24.
 - 19 Wansink, Joh. H. (1966). *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraars*. Wolters-Noordhoff: Groningen.
- Wiskundendidactisch promotieonderzoek in het basisonderwijs onder begeleiding van A. Treffers**
- 20 Brink, J. van den (1989). *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen*. Vakgroep OW&OC: Utrecht (met K.B. Koster).
 - 21 Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Freudenthal Institute: Utrecht.
 - 22 Heuvel-Panhuizen, M. van den (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. CD-bèta Press: Utrecht.
 - 23 Jong, R. de, (1986). *Wiskobas in methoden*. Vernieuwing van reken/wiskundemethoden voor het Nederlandse basisonderwijs (1965-1985). Vakgroep OW&OC: Utrecht (met N.A.J. Lagerweij).
 - 24 Klein, A.S. (1998). *Flexibilization of mental arithmetic strategies on a different knowledge base*. The Empty Numberline in a Realistic versus Gradual Program Design. Freudenthal Instituut: Utrecht. (met M. Boekaerts en M. Beishuizen).
 - 25 Menne, J. (2001). *Met sprongen vooruit*. Een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars in het getallengebied tot 100 — een onderwijsexperiment. Freudenthal Instituut: Utrecht.
 - 26 Moor, E. de (1999). *Van vormleer naar realistische meetkunde*. Een historisch didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Nederland gedurende de negentiende en twintigste eeuw. Freudenthal Instituut: Utrecht.
 - 27 Nelissen, J.M.C. (1987). *Kinderen leren wiskunde*. Een studie over constructie en reflectie in het basisonderwijs. De Ruiter: Gorinchem. (met J.F. Vos, P. Span en W. van Doorn).
 - 28 Streefland, L. (1988). *Realistisch breukenonderwijs*. Onderzoek en ontwikkeling van een nieuwe leergang. Vakgroep OW&OC: Utrecht (met K.B. Koster).
- Ander wiskundendidactisch onderzoek met betrekking tot de basisschool**
- 29 Baltussen, M. (1992) *7 trainingsvarianten voor rekenproblemen*. Een vergelijkend onderzoek uitgevoerd bij moeilijk lerende kinderen en kinderen met leerproblemen. KPC: 's Hertogenbosch.
 - 30 Eerde, H.A.A. van, (1996). *Kwantiwijzer*. Diagnostiek in Reken-Wiskundeonderwijs. Zwijssen: Tilburg.
 - 31 Goffree, F. (1979). *Leren onderwijzen met Wiskobas*. Onderwijsontwikkelingsonderzoek Wiskunde & Didactiek op de Pedagogische Academie. IOWO: Utrecht.
 - 32 Harskamp, E.G. (1988). *Rekenmethoden op de proefgesteld*. RION: Groningen.
 - 33 Heijden, M. K. van der, (1993). *Consistentie van aanpakgedrag: Een procesdiagnostisch onderzoek naar 8 aspecten van hoofdrekenen*. Swets en Zeitlinger: Lisse.
 - 34 Klep, J.H.F.M. (1998). *Arithmeticus. Simulatie van wiskundige bekwamheid*. Computerprogramma's voor het generatief en adaptief plannen van inzichtelijk oefenen in het reken-wiskundeonderwijs. Zwijssen: Tilburg.
 - 35 Kool, Marjolein (1999). *Die conste vanden getale*. Een studie over Nederlandstalige rekenboeken uit de vijftiende en zestiende eeuw, met een glossarium van rekenkundige termen. Uitgeverij Verloren: Hilversum.
 - 36 Koster, K.B. (1975). *De ontwikkeling van het getalbegrip op de kleuterschool*. Empirische studies over onderwijs. Tjeenk Willink: Groningen.
 - 37 Luit, J.H.E. (1987). *Rekenproblemen in het speciaal onderwijs*. Katholieke Universiteit Nijmegen.
 - 38 Mulken, F. van, (1992). *Hoofdrekenen en Strategisch Handelen*. Het gevarieerd gebruik van twee grondvormen van optellen en aftrekken tot honderd. Vakgroep Onderwijsstudies, Rijksuniversiteit Leiden.
 - 39 Vos, W.A. de, (1998). *Het methodegebruik op basisscholen*. Shaker Publishing: Maastricht.
 - 40 Willemsen, Theo (1994). *Remediële rekenprogramma's voor de basisschool*. Een effectstudie. Monografieën onderwijsonderzoek 19. RION: Groningen.
 - 41 Wolters, Mirjam (1978). *Van rekenen naar algebra*. Een ontwikkelingspsychologische analyse. Rijksuniversiteit Utrecht.

Rob Schrauwen

DTD Development & Maintenance, Elsevier Science

Sara Burgerhartstraat 25

1055 KV Amsterdam

r.schrauwen@elsevier.com

Online publishing

XML workflow in de praktijk

Sinds zijn promotie in de wiskunde in 1991 werkt Rob Schrauwen bij Elsevier Science. Begonnen in de bureauredactie van wiskundetijdschriften, is hij nu verantwoordelijk voor de computersystemen en de op XML gebaseerde 'content-standaarden' die voor de productie van tijdschriften en boeken nodig zijn.

Sinds 1995 worden alle tijdschriftartikelen die bij Elsevier Science gepubliceerd worden, opgeslagen in SGML. SGML, wijd verspreid in de uitgeverwereld, staat voor *standard generalized markup language* en is herkenbaar aan *tags* zoals `<author>`, die structuur aan het document verlenen. Welke tags in een document zijn toegestaan of verplicht zijn, in welke volgorde zij mogen voorkomen, hoe zij samenhangen, en ook welke symbolen gebruikt mogen worden, wordt in een DTD, *document type definition*, vastgelegd. Een voorbeeld van zo'n DTD is de definitie van HTML, de taal waarin webpagina's zijn geschreven. Elk SGML document moet tegen de DTD gevalideerd worden, zodat software het document gegarandeerd kan verwerken. Een DTD kan het bijvoorbeeld onmogelijk maken om artikelen zonder titel of zonder auteursnamen te publiceren, wat af en toe consternatie geeft bij auteurs die dat willen.

Elsevier Science, net als de meeste andere wetenschappelijke uitgevers, heeft sinds 1992 zijn eigen, publiek beschikbare DTD ontwikkeld [5] voor wetenschappelijke artikelen. Belangrijk is dat artikelen 'media neutraal' worden opgeslagen, met zoveel mogelijk informatie over de structuur van het artikel, maar zo weinig mogelijk indicaties over de presentatie. Het is bijvoorbeeld niet mogelijk om een paginagrens aan te geven. Dit heeft ook geen zin, want dezelfde bron wordt gebruikt voor de diverse formaten waarop een en hetzelfde artikel gepubliceerd wordt: op papier (of, equivalent, in PDF-formaat), online (geconverteerd naar HTML) of bijvoorbeeld op palmtop computers — populair in de medische wereld. Zo wordt ook de referentielijst volledig presentatie-neutraal gestructureerd op een manier die wel met de structuur van BibTeX valt te vergelijken. Zo'n gedetailleerde structuur

maakt het bijvoorbeeld mogelijk om dynamisch links te creëren naar de artikelen van 152 uitgevers via CrossRef [1].

Inmiddels is XML in zwang geraakt en de nieuwste standaarden voor opslag van documenten zijn op XML gebaseerd. XML, *extensible markup language*, is een variant van SGML waarin onder andere obscure mogelijkheden van SGML niet zijn toegelaten. Wat voor velen in de Internetwereld nieuw was, namelijk de mogelijkheid om presentatie-onafhankelijk documenten te structureren, was in de uitgeverwereld al gemeengoed via SGML. Door het grootschalige gebruik ontwikkelt XML zich snel en komen er vele standaarden tot stand. De recente Elsevier XML DTD 5.0, onderdeel van een familie XML DTDs voor tijdschriften en boeken, maakt gebruik van MathML [4] in plaats van het oude zelf-ontwikkelde model voor formules. Het gebruik van Unicode [7] — dat beoogt een uniek nummer te geven aan ieder bestaand letterteken of symbool — maakt het mogelijk om talloze symbolen standaard te vertonen in webbrowsers terwijl tot nu toe gebruik gemaakt moest worden van kleine plaatjes. Voor Elsevier Science is het belangrijk deel te nemen aan de ontwikkeling van dergelijke standaarden. Samen met grote society publishers zoals de AMS is in het STIX project [6] gezorgd dat een grote verzameling wetenschappelijke symbolen in Unicode beschikbaar is en dat een vrij beschikbare font set gemaakt wordt met deze symbolen.

Het begin van dit artikel zou er in de Elsevier Science Journal Article DTD 5.0 ongeveer uitzien als in figuur 1 is weergegeven.

Workflow

Dagelijks komen 900 artikelen binnen bij de productieafdelingen van Elsevier. Elk artikel is al geaccepteerd door de wetenschappelijke redactie. Gegevens zoals naam en adres van de corresponderende auteur en de titel worden in het workflow-systeem ingevoerd, en het artikel krijgt een unieke identificatie. Daarna gaat het artikel naar een van de toeleveranciers om in SGML of XML te worden omgezet en in de tijd-

schriftstijl te worden gegoten. Dit duurt vijf à tien dagen, waarna een drukproef in PDF naar de auteur wordt ge-emaild. Deze PDF-file is rechtstreeks gegenereerd vanuit de SGML/XML-file, die de bron is van alle producten (het *SGML first* principe). Tegelijk worden de SGML/XML-file met bijbehorende figuren en de PDF-file naar Elsevier teruggestuurd. Afhankelijk van de tijdschrift-policy plaatsen sommige tijdschriften de ongecorrigeerde proef meteen online op de web-platformen waarop die tijdschriften verschijnen. Hiervan is ScienceDirect de belangrijkste, maar er zijn ook grote bibliotheken die de artikelen rechtstreeks in SGML/XML willen ontvangen (zie ook [3]). Indien het preprint-nummer bekend is, kan deze versie al linken aan de preprint zoals verschenen op arXiv (in een later stadium linkt arXiv ook terug) en bovendien worden de bibliografische referenties via CrossRef [1] gekoppeld aan de artikelen of de abstracts waarnaar ze verwijzen. Deze functionaliteit staat en valt met de beschikbaarheid van alle benodigde gegevens in de brondocumenten van de auteurs.

Wanneer de auteurs hun correcties hebben aangebracht en teruggestuurd, wordt hun informatie direct naar de toeleverancier doorgestuurd, waarna binnen een dag of vijf de gecorrigeerde versie wordt aangeleverd aan Elsevier, zodat deze versie online beschikbaar gemaakt kan worden. In feite is dit al de definitieve versie, waarvan alleen het volume-nummer en de paginacijfers nog onbekend zijn. Naar deze versie kan al verwezen worden door middel van de DOI, de digital object identifier [2], al gebeurt dat in de praktijk helaas nog weinig.

Een aantal weken later — in wiskundige tijdschriften soms heel wat later — wordt het artikel opgenomen in een nummer van het tijdschrift. De paginering is nu bekend en de toeleverancier levert opnieuw de PDF-files aan, die nu een exacte representatie zijn van de pagina's zoals ze in het issue zullen verschijnen. Tegelijk stuurt de toeleverancier uit dezelfde bron gegenereerde PDF-files met een behoorlijk hogere resolutie naar de drukker.

Van de artikelen in de ruim 1600 tijdschriften die Elsevier Science produceert, wordt het merendeel volledig in SGML/XML gestructureerd. Van ongeveer vijftig tijdschriften worden echter alleen de 'heads' (titel, auteursnamen, affiliaties) en 'tails' (referenties) gestructureerd — het gehele artikel is natuurlijk wel in PDF-formaat beschikbaar. Een deel van de tijdschriften uit de wiskunde en theoretische informatica valt hieronder vanwege de moeilijkheden om bijvoorbeeld commutatieve diagrammen, natuurlijke-deductiediagrammen of zelfgemaakte symbolen weer te geven. In $\text{\LaTeX}$ is het eenvoudig zelf symbolen te creëren en van deze mogelijkheid wordt veelvuldig gebruik gemaakt, maar om deze op alle mogelijke platformen getrouw weer te geven in diverse groottes gaat met vele problemen gepaard.

```
<head>
  <dochead>Online publishing</dochead>
  <article-title>XML workflow in de praktijk
</article-title>
  <author-group>
    <author>
      <given-name>Rob</given-name>
      <surname>Schrauwen</surname>
      <e-address>r.schrauwen@elsevier.com</e-address>
    </author>
    <affiliation>
      <textfn>DTD Development & Maintenance,
        Elsevier Science, ...
      </textfn>
    </affiliation>
  </author-group>
</head>
<body>
  <sections>
    <section>
      <para>Sinds zijn promotie...
```

Figuur 1 Fragment van een document gestructureerd in XML

$\text{\LaTeX}$ en XML

Het merendeel van de artikelen dat binnenkomt, is geschreven in Microsoft Word. Zulke artikelen worden probleemloos naar XML omgezet. In de wiskunde is $\text{\LaTeX}$ uiteraard veel gebruikelijker. Afgezien van de problemen met speciale symbolen, is het goed mogelijk een $\text{\LaTeX}$ -file automatisch naar XML om te zetten. Aangezien het gaat om de structuur, is het irrelevant voor de auteur om het artikel zo goed mogelijk op het eindproduct te laten lijken; het is des te belangrijker om gestructureerde $\text{\LaTeX}$ -documenten te maken. Ingewikkelde macro's maken de conversie moeilijker.

Vooralsnog zijn SGML en XML typische opslagformaten, ongeschikt om rechtstreeks artikelen in te schrijven. 'XML support', wat sommige tools bieden, zegt weinig: het is onwaarschijnlijk dat er ondersteuning is voor de juiste door de uitgever gebruikte DTD. Voor wiskundige artikelen blijven $\text{\LaTeX}$ en Bib $\text{\TeX}$ de aangewezen formaten, al wordt verwacht dat aangeleverde *MathML*-formules in de toekomst gebruikt kunnen worden in het productieproces. $\leftarrow$

Referenties

- 1 CrossRef, The Central Source for Reference Linking, <http://www.crossref.org>.
- 2 DOI, The Digital Object Identifier System, <http://www.doi.org>.
- 3 E-Journal Archival DTD Feasibility Study, prepared for the Harvard University E-Journal Archiving Project, <http://www.diglib.org/pre-serve/hadtdfs.pdf>.
- 4 MathML, The Mathematical Markup Language, <http://www.w3.org/Math>.
- 5 Simon Pepping and Rob Schrauwen, Tag by Tag, Documentation of the Elsevier Science DTDs 4.1–4.3, <http://www.elsevier.com/locate/sgml>.
- 6 The STIX Project, <http://www.ams.org/STIX>.
- 7 Unicode, <http://www.unicode.org>.

Danny Beckers

Universiteit Nijmegen, Mathematisch Instituut
Postbus 9010, 6500 GL Nijmegen
dbeckers@sci.kun.nl

Oud Archief

Danny Beckers, aio in de geschiedenis van de wiskunde aan de Katholieke Universiteit Nijmegen, beschrijft in deze rubriek voorvallen uit de geschiedenis van de wiskunde.

Een van de manieren waarop je als geleerde carrière kon maken in de middeleeuwse samenleving, was door een gerenommeerde tijdgenoot uit te dagen tot een openbaar dispuut. De winnaar van zo'n dispuut, bevestigde ten overstaan van de (academische) gemeenschap dat hij iets in z'n mars had. Vaak waren universitaire hoogwaardigheidsbekleders bij de disputen aanwezig, en werd er met forse bedragen gegokt op de uitkomst van een dergelijk Godsgericht. Kennis of trucs waarover anderen niet beschikten konden een deelnemer aan zo'n dispuut behoorlijke voordelen opleveren.

Het academische dispuut werd in het 16de-eeuwse West-Europese in ere gehouden. Het gebruik stond enigszins op gespannen voet met de renaissance-mentaliteit die

juist verspreiding — door middel van publicatie — van kennis voorstond. In de loop van de zestiende eeuw werd publicatie de gebruikelijke wijze om aan de academische gemeenschap te tonen wat je waard was. De ontdekking van de (algemene) oplossing voor de derdegraads vergelijking speelde zich tegen deze achtergrond af.

Tartaglia (1499–1557) was van eenvoudige komaf. Zijn naam (letterlijk: 'de stotteraar') herinnerde aan een spraakgebrek dat hij had opgelopen toen hij in zijn jeugd in een oorlogssituatie met een degen bewerkt was. Door zelfstudie bracht hij het tot wiskundeonderwijzer in Venetië. In 1535 kreeg Tartaglia, bij wijze van uitdaging tot een dispuut, dertig opgaven die alle neerkwamen op de oplossing van een derdegraads vergelijking. Zijn uitdager kende een methode om die op te lossen en wilde daarmee zijn voordeel doen. Tartaglia zond hem eveneens een serie opgaven en ging aan het werk. Vlak voor het verstrijken van de gestelde tijd kreeg Tartaglia — naar eigen zeggen — een ingeving, loste alle dertig problemen achter elkaar op en won het dispuut.

Cardano (1501–1576) was een Milanese geleerde van grote faam, die een aantal malen zijn tegenstanders in het openbaar dispuut totaal verbluft achterliet. Hij had zijn roem — behalve aan een scherpe tong — te danken aan zijn connecties in kringen van de Milanese adel en een aantal publicaties van zijn hand op het gebied van de medicijnen en de rekenkunde. Toen hij hoorde van het dispuut dat Tartaglia had gewonnen was hij erg geïnteresseerd in de oplossing. Tijdens een gesprek wist Cardano zijn Venetiaanse collega met een eed tot geheimhouding op de Heilige Schrift zover te krijgen om de oplossingsmethode met hem te delen.

De oplossing die Cardano kreeg kon hem

niet onmiddellijk overtuigen. Hij zocht opheldering op een aantal punten, correspondeerde daarover met Tartaglia, maar die weigerde resoluut. Samen met zijn heetgebakerde leerling Ferrari (1522–1565) trachtte Cardano de oplossing te bevatten. Dat lukte: niet alleen verbeterden zij de methode van Tartaglia, zij vonden ook oplossingen voor vergelijkingen van graad vier. Ferrari vond dat Cardano moest publiceren, maar deze wist zich gebonden door zijn eed. Toen hij echter uit andere bron vernam dat een algemene regel reeds lang voor Tartaglia was gevonden (en zorgvuldig geheim gehouden) liet hij zich overtuigen en publiceerde zijn bevindingen in de *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis* (1545).

Cardano beschreef de hele geschiedenis met Tartaglia in het hoofdstuk dat over de derdegraads vergelijkingen handelde. Desondanks was Tartaglia woedend en hij begon een lastercampagne tegen Cardano. Ferrari pareerde de laster op zijn leermeester in het openbaar, onder andere door te stellen dat het verkrijgen van een reputatie door middel van disputen uiteraard eervol was, maar dat het gebaseerd diende te zijn op de intellectuele vermogens van de uitdager, en niet op het afbreken van de reputatie van de gedaagde.

De ruzie tussen Cardano en Tartaglia kan worden gezien als een strijd tussen de meer ouderwetse opvattingen van Tartaglia en de meer moderne opvattingen van Cardano. Voor Tartaglia was kennis eerder zijn privé-eigendom waarmee hij kon uitblinken op disputen. Cardano probeerde juist met zijn publicaties roem te verwerven. Het (soms letterlijk) kruisen van de degen zou nog lang sport blijven; evenals prioriteitsstrijd. ↵

Literatuur

Oystein Ore, *Cardano: the Gambling Scholar*, Princeton, NJ (1953)



Erwin van den Brink

De Ingenieur, Technologietijdschrift

postbus 256, 1110 AG Diemen

redactie@ingenieur.nl

Column Instroom

Begin bij de kinderen

De instroom van wiskundestudenten aan de universiteit is al jaren dalende. In 1992 was de instroom 326 studenten, in 1997 nog maar 209 en dit jaar hebben zich slechts 158 studenten aangemeld. Op enige verbetering is nog geen zicht. Erwin van den Brink, hoofdredacteur van het technologietijdschrift *De Ingenieur*, zoekt de oorzaak op de basisschool.

Laatst stond ik samen met een andere vader te kijken naar onze voetballende zoontjes. We kwamen in gesprek over ons beroep. Hij is 39 jaar, wiskundeleraar aan de Hogeschool Haarlem binnen de commercieel-economische richting en staat eigenlijk op het punt van afknappen op zijn vak. Het niveau van de instroom vanuit het havo van tegenwoordig ligt op of onder het niveau van het mavo uit de tijd dat hij en ik eindexamen deden, zo'n twintig, vijftien jaar geleden. Naast wiskunde geeft hij ook nog het vak logica, waarin de havo-scholieren en instroom vanuit het mbo (middelbaar beroepsonderwijs) — bestaande uit scholieren die vaak helemaal geen wiskunde hebben gehad — worden geconfronteerd met zuiver abstract denken, ondermeer in causaliteiten. Als ik hem goed begrijp staat hij dan te praten tegen het meubilair. Elke uitdaging zijnerzijds om het intellect te prikkelen wordt stevast gepareerd met de dooddoener: "Waar hebben we dit voor nodig?" Onderwijs is in de beleving van deze generatie niet voor (algemene) vorming maar dient slechts voor het behalen van een diploma dat toegang geeft tot het uitoefenen van een vak.

Die culturele kaalslag heeft met name de bètavakken en in het bijzonder de wiskunde hard getroffen. Inderdaad: wiskunde zou deel moeten uitmaken van onze culturele vorming. Helaas zijn de mensen die het culturele discours domineren dezelfde die op school de wiskunde meden als de pest en die koketteren met hun exacte onbeholpenheid. Deze mensen geven nu ook les in het basis- en voortgezet onderwijs. Ook kan ik verzekeren dat de meeste studenten aan het pabo (pedagogische academie basisonderwijs) weinig of niets van wiskunde meekrijgen.

Ik weet uit eigen ervaring dat exacte vakken moeilijk zijn als je zelf niet echt exact bent aangelegd. Uit een vaag besef dat ik het wel eens nodig kon hebben — want ik wilde de journalistiek in — hield ik toch een aantal exacte vakken aan. Ik heb het geweten: ze hebben me er doorheen gesleept. In de journalistiek — die wordt gedomineerd

door alfa's en gamma's — is dat beetje exacte opvoeding me meermalen van pas gekomen. Voor de meesten van ons is het een beetje als leren spruitjes eten. Eerst is het niet lekker, echt lekker wordt het nooit, maar het is wel gezond en nodig, want het zit vol vitaminen. Wie alleen hoeft te eten wat hij lekker vindt valt ooit in een exotisch gezelschap als een bekrompen stoethaspel door de mand. Daarom: wiskunde! Net als met het leren eten van spruitjes moet je er wel vroeg mee beginnen. Ik herinner me dat wij het rekenonderwijs op de lagere school afsloten met rekenen in decimalen. Daarna kwam in de brugklas opeens: wiskunde! Met een schok trad ik in een wereld van abstracties: een punt heeft geen afmeting. Realiseer je je eens wat dat betekent als je er goed over nadenkt. Je hebt een punt altijd gezien als een potloodstip die, hoe klein ook, zichtbaar is en dus een afmeting heeft. Een dergelijke cesuur, een 'voor het eerst binnentreden', is er niet bij taalonderwijs of bij onderwijs in vakken als geschiedenis, aardrijkskunde en biologie. Sterker nog: alles wat er ooit aan abstractie in het rekenonderwijs heeft gezeten is er door didactici allang zorgvuldig uitgeweid.

Later heb ik vaak gedacht dat als matige wiskundeleerlingen als ik eerder — op de lagere school — op sleeptouw waren genomen naar de wereld van de wiskunde, de keuze van het vak op de middelbare school meer vanzelfsprekend zou zijn geweest. Deze onvanzelfsprekendheid van wiskunde leidt er toe dat veel talent verloren gaat. De meeste briljante mensen gaan nu iets juridisch of economisch doen. Die onvanzelfsprekendheid heeft er zeker toe geleid dat in het onderwijs, in de didactiek en bij de beleidsorgaan het onderwijs in abstract en exact denken een sluitpost is. Die beleidsmakers hebben vroeger immers zelf ook de pretpakketten gedaan.

De crisis gaat dus veel dieper en kan niet worden opgelost met maatregelen die aangrijpen op een moment waarop het eigenlijk al te laat is en we slechts kunnen redden wat er te redden valt. Na jaren soebatten is een aarzelend begin gemaakt met het vak techniek in de basisvorming. Wat moet gebeuren is dat exact onderwijs (wis-, natuur- en scheikunde en techniek) al in het basisonderwijs een proportioneel deel krijgt. Proportioneel in verhouding tot de rol die deze kennis speelt in onze samenleving. Nog nooit is die rol zo groot geweest maar nog nooit ook was het besef ervan en het respect ervoor zo gering. Dat is een vorm van decadentie die vroeg of laat wordt afgestraft.

Friedrich Katscher

Mariahilfer Str. 133, A1150 Wenen, Oostenrijk
dr.katscher.vienna@chello.at

Boekbespreking De rekenmeester

Dichtung und Wahrheit

In het Nieuw Archief van september 2000 geeft Nicky Hekster een bespreking van het boek 'De rekenmeester' van Dieter Jörgensen. Daarbij is hij ingegaan op de literaire kwaliteiten van het boek. Friedrich Katscher, wetenschapshistoricus en in de Nederlandse wiskundige gemeenschap bekend als auteur over het werk van Ludolph van Ceulen, besteedt nu aandacht aan de historische aspecten van de roman.

In the history of mathematics there is no other epochal book like the *Quesiti et Inventioni diverse* (Diverse questions or problems and inventions) written by Nicolo Tartaglia in 1546, and containing the first printed solution of the cubic equations without the quadratic term. Its peculiarity is that the accustomed calculations, numbers, symbols, and geometrical figures as in other mathematical books are here inserted in lively dialogues and correspondences which tell who was the questioner, the good or bad relationship the author had with him, and all the circumstances. Even the bitter youth of Tartaglia is described, and all the details of the famous controversy between Tartaglia and Hieronimo Cardano can be followed although from the one-sided and biased point of view of the author. The eventful book is almost a sketch for a film-script, and, in fact, a German has written a novel about the life of *De Rekenmeester* (German: *Der Rechenmeister*).¹

It is unusual that a journal publishes two reviews of the same book. But the first boekbespreking² of this novel suffers from the great credulity of the reviewer. N.S. Hekster knows the historical details quite well as his timetable (Tijdslijn) proves.³ Therefore, it is regrettable that he believed all the inventions and fancies of Jörgensen. The German engineer who, according to the dust cover, publishes articles about problems of applied mathematics in the trade press writes a few details in his book with great precision — that means, he has read some original passages of Tartaglia and Cardano — but most of the book arose from his imagination.

Truth and imagination

It is not for a mathematical journal to judge the literary quality of a novel but only the correctness of mathematical and historical text passages. The author of fiction has full poetic freedom to contrive a plot but if someone should write, for example, a novel about Albert Einstein he would also be measured by how far he strays from the factual biography of the great scientist.

There are three Italian books where everything can be found about the life and works of Nicolo Tartaglia (1499/1500–1557):

- The proceedings of the conference held in May 1959 on the occasion of the 400th anniversary of Tartaglia's death in his birth town⁴;

- A facsimile edition of the second edition of the *Quesiti* of 1554⁵; and
- A facsimile edition of the 12 mathematical pamphlets, six from each one, exchanged between Tartaglia and Cardano's disciple and collaborator Lodovico Ferrari in 1547 and 1548⁶.

All three books were published by the Ateneo di Scienze, Lettere ed Arti da Brescia, the academy of this North Italian town. They are illustrated with many plates.

Arnaldo Masotti (1902–1989), an outstanding Tartaglia expert, had gathered with meticulous thoroughness and precision all the information that exists in books and documents about the great renaissance mathematician. In his introduction to the two facsimile editions there is a chapter describing the work, an index of persons, an index of dates, and observations about archaic expressions. It seems impossible that any new relevant facts could be found about Tartaglia not mentioned in these three volumes. Therefore, they can be used to see how far Jörgensen wrote facts and fictions.

The novel is based on two assumptions: Firstly, that Tartaglia stuttered and had difficulties in speaking; and secondly, that he was single. The Italian word Tartaglia means stutterer. At the end of the Sixth Book of the *Quesiti* the author describes why he adopted this name. When the French army on 19 and 20 February 1512 assaulted Brescia, and massacred the population, the 12 year old boy received five sword-strokes on his head by a soldier in the cathedral of Brescia. One across his mouth and his teeth split his upper and lower jaws and his teeth. "... there was a time when I was not able to articulate the words well, but always stuttered in speaking because of this injury across the mouth and the (not yet well fixed) teeth, and that's why the boys of my age with whom I talked gave me the nickname Tartaglia. And because this surname remained me a long time it seemed to me to be a good memory of my misfortune to call me Nicolo Tartaglia."

According to this report — "there was a time..."⁷ — it seems that Tartaglia stuttered only for some time (probably until his teeth were fixed), and not for his whole life. In the *Quesiti* (*Quesito* — question — XXII and XXXII) Tartaglia reported that he held lectures in the Venetian church of Santi Giovanni e Paolo (Zanipolo) in 1536 about Euclid's *Elements* and in 1539 about the science of weights (static) and artillery shots (ballistics). He could not have lectured if he had stuttered as described by Jörgensen. By the way, on the dust cover of *De Rekenmeester* it is stated that Tartaglia had to witness how his mother was violated in the cathedral. This is untrue.

In Verona there is a Latin document of 1529 in which a Nicolaus brixienensis magister Abbachi (Nicolo from Brixia = Brescia, Master of

Abacus, that is arithmetics), certainly Tartaglia, aged 30 years, is listed with his much older wife Dominica, 44, his (step)daughter Benevenuta, 18, his daughter Margarita, 2, and Benevenuta's daughter Anna, 6 months. In *La Seconda Parte del General Trattato di Numeri et Misure* (The Second Part of the General Treatise of Numbers and Measures, Venice 1556) by Nicolo Tartaglia on folio 41 verso he mentions his family in 1548. That means in the years depicted in the novel he was married, he had not to go to a prostitute, and there was no sexual relationship with the beautiful Jewess Sara. Tartaglia must have lost his family later because neither his wife nor his daughters are mentioned in his last will of 1557.

Eternal secrecy

Until the downfall of the Republic of Venice in 1797 according to the “mos Venetus” (Venetian use) the year did not begin officially on the 1st of January but, as in the old Roman calendar before Julius Caesar, on the 1st of March. That means January and February belonged to the previous year according to our calculation of years. In the novel Tartaglia arrives in Venice coming from Verona on 12 February 1534 of Venetian numbering, that is, on 12 February 1535 of our years. But in the *Quesiti* the title of *Quesito XIX* says: “Asked by magnifico (Venetian nobleman) mister Zuanbattista Memo in the year when I came to reside in Venice which was 1534.”⁸ Tartaglia always used our chronology.

In *Quesito XXV* of 10 December 1536 Tartaglia writes that challenged by the arithmetician Antoniomaria Fior who set him 30 problems — only cubic equations of the type $x^3 + px = q$ — he discovered the solution of this equation called ‘cosa e cubo equal à numero’ (unknown and cube equal to number) “last year, that is 1535, on the day 12 of February (it is true that in Venice it came to be 1534).”⁹ That means that the day of Tartaglia's arrival in Venice in the novel is the day when in reality Tartaglia found the solution of the cubic equation which Jörgensen puts into a chapter titled “17 January 1535 of Venetian time counting” — that is 17 January 1536 in our numbering, about eleven months too late.

Implored by Cardano (“*Quesito XXXVIII*, asked personally by Mister Hieronimo Cardano in Milan in his house on 25 March 1539”) who vowed eternal secrecy, Tartaglia confided in him the secret of the solution of the cubic equation without the quadratic term in a poem in which he described the method: Take two numbers the difference of which is the “numero”, the number q of the equation (modern) $x^3 + px = q$. That is $u - v = q$. Their product should be equal to the cube of the third of the “pure unknowns” p . That is: $uv = (p/3)^3$. That means, you have two equations to find u and v . Solve them. The solution of the cubic equation is $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$.

Al-Hwarizmi

How did Tartaglia find this solution? He gives no hint. But he knew Euclid's *Elements* well. He lectured about them, and he translated them into Italian in a book published in 1543. Book X of the *Elements* treats binomials of irrational quantities which today would be written



The method of al-Khwarizmi. The gnomon consists of the two rectangles $2ax$ and the square a^2 .



Berthel Beham, *Bildnis eines Mannes*. Compare this picture with the cover of the book (see review NAW september 2000)

as $a + \sqrt{b}$, $\sqrt{a} + b$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $a - \sqrt{b}$, $\sqrt{a} - b$, and $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. The solution of quadratic equations contains square roots. It could be assumed that the solution of cubic equations contains cube roots. Tartaglia probably experimented with the different binomials of cube roots. When he inserted (modern) $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$ into the equation $x^3 + px = q$ he obtained

$$u - v - 3\sqrt[3]{u^2v} + 3\sqrt[3]{uv^2} + p(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) = q.$$

An important step was to write the third and fourth term as $-3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})$ to get

$$u - v - 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) + p(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) = q.$$

It is easy to see that you can equate $u - v$ with q , and $3\sqrt[3]{uv}$ with p which gives $uv = (p/3)^3$. Thus you have two equations to calculate u and v . The solution x is then $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$. It is admirable how Tartaglia found this without the modern symbolism, and mainly geometrically.

Abu Abdallah Muhammad ibn (ben) Musa al-Khwarizmi (his name appears in many different spellings; Jörgensen writes al-Hwarizmi) who worked in the library of caliph al-Mamun who reigned from 813 to 833 in Baghdad solved the quadratic equation (modern) $x^2 + 10x = 39$ with the help of a ‘gnomon’. That is the Greek term used by the pythagoreans for the remaining area that is obtained by cutting out a smaller square in one corner of a bigger square, and consisting of two rectangles and a square at the opposite corner. When the side of the square that is cut out is x , and the side of the whole square is $x + a$ the area of the gnomon is $(x + a)^2 - x^2 = 2ax$ (the two rectangles) + a^2 (the



Nicolo Tartaglia always wore a full beard and a barret to hide the disfiguring scars from the serious wounds he received as a boy on his head and across his mouth and jaws through five sword-strokes of a French soldier. (Portrait at the age of about 45 years on the title page of the *Quesiti*.)

opposite square). Muhammad ben Musa equated the areas $10x$ and $2ax$. That leads to $a = 5$, the side of the opposite square. The Arab mathematician added the area of this square $a^2 = 25$ on both sides of the equation: $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$. That is the area of the whole square. Its side is $\sqrt{64} = 8$. $x = 8 - 5 = 3$.

In the novel Tartaglia studies this method of al-Hwarizmi, and, by using a solid three-dimensional gnomon instead of the plane two-dimensional gnomon of the Arab mathematician, he finds the solution of the cubic equation $x^3 + px = q$. That seems plausible but in fact al-Hwarizmi's method does not work in three dimensions because in this case you would have to equate six solids, six square prisms, $3x^2a + 3xa^2$, with a plane rectangle, px . Cardano knew al-Khwarizmi (although not by this name), and he begins his *Ars magna* (The great art, 1545)¹⁰ with the sentence "This art (the algebra) originated with Mahomet the son of Moses the Arab." He also describes

the method of al-Khwarizmi for obtaining the solution of the quadratic equation without using his name and the term 'gnomon'. But it seems that Tartaglia did not know the existence of al-Hwarizmi. He does not mention him in the *Quesiti* nor in the *Cartelli*.

A beard to disguise his scar

Eight persons Tartaglia meets in the novel, among them Fior, Cardano, Ferrari and the Duke of Urbino, Francesco Maria delle Rovere, are historical. But the many other Venetians mentioned in the book are all fictitious. The refusal of the 'privilegio', the permission to print Tartaglia's book on ballistics *La Nova Scientia* (New Science) of 1537, is an invention of Jörgensen. The page in Luca Pacioli's *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalita* (1494) where he writes that the solution of the cubic equations is impossible is given twice in the novel as folio 216. But in reality it is folio 149 recto. The title of Cardano's book published in 1539 is not *Practica Arithmetica generalis* but *Practica Arithmetice, & Mensurandi Singularis*.

In his review Hekster writes: "In his later life Fontana (Tartaglia) habitually wore a (full) beard in order to disguise his scars." Tartaglia himself wrote that he would appear a monster without the beard.¹¹ But a few lines later Hekster says: "The dust cover of the book shows an approximately thirty year old beardless Tartaglia on a painting by the Nuremberger Barthel Beham from 1529. Clearly there is a scar to see on his right cheek." The painter Barthel Beham (1502–1540) lived in 1529 in Munich. How should he paint an unknown arithmetician in Verona? The painting is in Vienna in the Kunsthistorische Museum (Museum of Fine Arts).¹² It is called 'Portrait of a Man' (Bildnis eines Mannes), not even 'Portrait of a *reckoning* Man'. The face has no scar at all on the right cheek. It is spotless. That means, that the scar has been added by the artist who made the dust cover of the book. But it does not go across the mouth as it should.

Jörgensen has gained merit by making public a formerly largely unknown famous Italian mathematician of the 16th century. For a non-mathematical reader it does not matter whether the details of the novel are correct or not. If he finds the book worth reading he learns at least something about the circumstances of the life of a Venetian mathematician in the Renaissance. But readers interested in the history of mathematics have to be warned: The greatest part of *De rekenmeester*, praised on the dust cover as a fascinating insight into the history of science, is not reliable fact but pure fiction.

De rekenmeester, Dieter Jörgensen, 336 pages, price € 19,50, BZZTÖH, Den Haag, 2001, ISBN 9-05501-722-1. German original: *Der Rechenmeister*, 398 pages, Rütten & Loening, Berlin, 1999, sold out, ISBN 3-352-00555-9, *Der Rechenmeister*, 400 pages, Aufbau Verlag, 1999, € 9.50, ISBN 3-74661-704-9.

Notes

- 1 Rechenmeister, literally reckoning-master, means arithmetician in English.
- 2 N.S. Hekster, "De rekenmeester", *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/1 nr. 3, september 2000.
- 3 There are only three mistakes: Tartaglia was already in Venice in 1534, not 1535, the mathematical contest Tartaglia-Fior was in 1535, not 1536, and the visit of Cardano and Ferrari to Bologna when they saw the solution of the cubic equation by Scipione dal Ferro was in 1542, not 1543.
- 4 *Atti del Convegno* di Storia delle Matematiche 30–31 Maggio 1959 (Editor: Arnaldo Masotti), Brescia 1962.
- 5 Niccolò Tartaglia, *Quesiti et Inventioni diverse*. Introduction by Arnaldo Masotti, Brescia 1959.
- 6 Lodovico Ferrari e Niccolò Tartaglia, *Cartelli di Sfida matematica*. Introduction by Arnaldo Masotti, Brescia 1974.
- 7 The Italian original: "... stetti un tempo, che io non poteva ben proferire parole, ma sempre balbutava nel parlare..."
- 8 The Italian original: "... l'anno ch'io veni ad habitare in Venetia, che fu .1534."
- 9 The Italian original: "... questo fu l'anno passato, cioe del .1535. adi .12. di .Febraro (vero è che in Venetia veneva esser del .1534.)" Numbers were always written within two dots.
- 10 There is an English translation of the *Ars magna*: Girolamo Cardano, *Ars magna or the Rules of Algebra*, translated and edited by T. Richard Witmer. Dover Publications, New York 1993.
- 11 The Italian original: "... se la barba non me le occultasse, io pareria un mostro..."
- 12 Eckzimmer — corner-room — 17; Inventory number 783.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Alle in de vijfde serie van het NAW verschenen boekbesprekingen zijn te vinden op onze webpagina.

Tevens staat daar een lijst met ter recensie aangeboden congresverslagen en eventueel andere boeken.

Indien u er prijs op stelt een van deze verslagen te bespreken, meld dit dan binnen een maand na verschijnen van dit nummer (bij voorkeur per e-mail) op onderstaand adres.

*Eindredactie: Jaap Top
Redactieadres: Boekbesprekingen WG
Instituut voor wiskunde en informatica
Postbus 800, 9700 AV Groningen
Webpagina: <http://www.math.rug.nl/revwg/>
E-mail: revwg@math.rug.nl*



Mathcad 2000 professional

Berlin: Springer-Verlag, 1999

prijs €104,59

ISBN 3-540-14859-0

Mathcad is a Windows (not Linux/Unix) program for applying mathematics to engineering problems. It is able to perform both symbolic and numerical operations on variables, functions and expressions, and provides an interface to work with text and graphics. MathCad is available in two forms, a Student Edition and a Professional Edition. The cheaper Student Edition contains restrictions on the maximum size of arrays and does not have all the programming capabilities. According to its provider (MathSoft Engineering and Education Inc.) MathCad has over 1.5 million users worldwide, and is deployed at 90 universities and colleges. Although these numbers are impressive (for comparison: Maple and Mathematica each have about 1 million users worldwide), MathCad does not seem so familiar to most NAW-readers. The majority will be acquainted with Maple, Mathematica, Matlab et cetera, but MathCad. . .

MathCad comes with hundreds of so-called QuickSheets (templates for common mathematical tasks) that can be dragged into the problem to be solved. In this way, after a little experimentation, a user soon learns how to solve even difficult problems. And when nevertheless an error message occurs, the user may go step-by-step (guided by a built-in tutorial) through the program to trace the error. MathCads strongest point is its friendliness for inexperienced users. For that reason, MathCad is used to support the mathematical education for chemistry students at Groningen University. In general these students need very little time (compared to Mathematica, for example) to get used to the notation for inputting things and to navigate efficiently through the tutorial system. Besides, MathCad can be integrated with a variety of software products, among others AutoCAD and the Microsoft Office suite. This link eases to put results into Word documents, to read and write data from Excel spreadsheets, or AutoCAD files, et cetera.

MathCad uses a subset of Maple for symbolic computations. The subset is reasonably extensive. However, some special functions are not amongst the 250 standard functions of MathCad. They have to be loaded from MathCads webside. For numerical computations MathCad has built-in a fair number of algorithms for root finding, solving differential equations, partial differential equations, optimising functions, and more. There is an automatic selection of algorithm, but the user may opt for an alternative method, or may program his own method. Like any program MathCad has weaknesses (a kind word for errors). The MathCad discussion list on the world wide web gives an overview of known errors. A serious mistake in the numerical evaluation of fractions is that the result is zero if the numerator is zero, regardless of the value of the denominator. By the way, the webbased facilities of MathCad are helpful and well-organized: users can download files created by other MathCad users.

MathCad has a document-publishing feature. The advantage

of this feature is that reports can be created, with graphs, tables, expressions et cetera. containing parameters that the reader of the document may change. Thus, the reader can do a what-if-experiment. The disadvantage is that the writer of the document has to learn yet another document-publishing program. After having learned how to change the page numbering of the first four pages of a document into Roman numbers using Latex or Word, most writers will not be sufficiently motivated to learn how to do this with the help of MathCad. But anyhow, it is feasible.

In summary, MathCad is an interesting software product for applying mathematics, in particularly for beginners.

R.W.C.P. Verstappen



R. J. Wilson

Stamping through mathematics

Berlin: Springer-Verlag, 2001

126 p., prijs €28,95

ISBN 0-387-98949-8

Zevenenvijftig grote rechterpagina's met zowat vierhonderd schitterende (vergrote) kleurenafbeeldingen van postzegels binnen het thema 'wiskunde'. Daarnaast, op de linkerpagina's, een korte uitleg per zegel en een kleine, sterk gecondenseerde en vanuit een enorme vakkennis geschreven inleiding op het thema van de pagina. Zo'n thema kan zijn: een beroemde naam (Copernicus, Newton), of een periode, of een bepaald land, of iets als navigatie, kalenders, spelen, statistiek of computers. Of er wordt gewezen op raakvlakken met niet direct wiskundige zaken, bijvoorbeeld onder de kopjes *The French Revolution* en *Twentieth-Century Painting*. Wie de *Stamp Corner* (door dezelfde auteur, sinds 1984 al ruim 75 bladzijden) in het kwartaalblad *The Mathematical Intelligencer* naast dit boek zou leggen, kan hier en daar wel enige overlap constateren. De stijl van het boek is hetzelfde, maar het boek is zeker geen eenvoudige bundeling van die columns (met alleen afbeeldingen in zwart-wit).

Waarom kan zo'n boek boeiend zijn? Het is nog weer eens een — originele, speelse — entree tot de geschiedenis van de wiskunde. Waarbij het boeiende naar mijn idee in de eerste plaats zit in de kennismaking met de inventiviteit van de zegelontwerpers. De wiskunde lijkt op het eerste gezicht nu niet direct een erg overvloedige bron voor afbeeldingen op zo'n gebruiksding-voor-iedereen als een postzegel. Toch wordt het (meer en meer) geprobeerd. Voor de hand ligt dan een plaatje van de (nogal eens gefantaseerde) kop van een beroemd persoon, maar in dit boek wordt op zo'n tachtig procent van de opgenomen zegels een visuele link naar de wiskunde gelegd met (ook) andere middelen.

Conclusie: een prachtig (cadeau-) boek voor een ieder met enige belangstelling voor exacte wetenschappen (en zeker niet alleen voor de filatelisten onder hen). Met een index, een literatuurlijst en catalogusgegevens (Stanley Gibbons) is dit een prima verzorgd boek. Laat niemand echter denken dat dit nu zo'n beetje alles is wat er aan wiskunde-op-postzegels bestaat, want wat dat betreft had de auteur z'n boek zonder moeite vijf of meer keer zo dik kunnen maken. De Amerikaanse studiegroep Philamath (zie de

literatuurlijst in het boek) heeft lange lijsten die wél de bedoeling hebben zo compleet mogelijk te zijn.

Ben ik dan in alle opzichten volkomen tevreden met dit boek? Niet helemaal, want er is nog een heel gebied waarvan ik het jammer vind dat de auteur er niet aan toegekomen is. Of ik moet eigenlijk zeggen, dat hij het — naar ik van hem heb begrepen — niet tot 'de wiskunde' rekent. Ik bedoel dit: Op vrijwel alle postzegels staan getallen genoteerd. De manier waarop dat precies gebeurt, kan in tal van opzichten erg interessant zijn. En kan volgens mij vaak eerder dan bij de thema's in het boek van Wilson het geval is, de mogelijkheid bieden tot nader eigen onderzoek. Ik noem hier een aantal van die aspecten, waarvan ik allemaal echt meerdere voorbeelden op postzegels gevonden heb: Romeinse cijfers worden vrijwel uitsluitend voor rangtelwoorden (volgnummers) gebruikt. Toch bestaan er enkele tientallen zegels waarop de waarde zelf in romeinse cijfers, en soms ook uitsluitend in romeinse cijfers, is aangeduid. Tot XL en XLVIII aan toe. Waarom? Wanneer? Waar? (Zowat de wereld rond!). Welke varianten komen er voor binnen de romeinse notatie? Worden natuurlijke getallen geschreven met het rijtje 1, 2, 3,... of met het rijtje 0, 1, 2, 3,... Of soms nog anders? Hoe komt het dat op een Duitse zegel 25 als "zwanzigfünf" staat uitgeschreven? Is het correct dat de tweeduizendste sterfdag van Cicero herdacht wordt met een zegel waar op staat: "43 A.C.–1957"? Moet dat niet 1958 zijn? In hoeverre is het Chinese getalnotatie-systeem niet een plaats-waardesysteem? Wanneer en hoe snel is de breuk-notatie voor gebroken zegel-waarden vervangen door de komma-notatie? (De laatste '1/2 cent' lijkt van 1987. Gaat er nog ergens '1/2 euro' geschreven worden?) Welke landen hebben nooit de breuknotatie gebruikt; welke landen waren juist erg laat met hun eerste komma-vorm? Waar, en hoe, is de waarde helemaal zonder cijfers weergegeven? Waarom staat er in de komma-vorm soms een (dubbele) streep onder de, meestal kleinere, centen-cijfers? (En waarom een heel enkele keer erboven?) Waarom wordt 2,50 wel eens vervangen door 2,5? Waarom vereenvoudigbare breuken: 2/8, 4/8, 4/10? Waarom werden in een Finse serie de waarden geschreven als

$$1 \quad 1:20 \quad 1,25 \quad 1\frac{1}{2} \quad 1:75 \quad 2 \quad 2\frac{1}{2} \quad 2:75 \quad 3 \quad ?$$

Problemen bij de invoering van de komma-notatie zijn te zien waar voor 'vijf centavos' staat: 0,05 c voor 'anderhalve riyal' staat: 1/50 voor 'halve cent' staat: 0.00 $\frac{1}{2}$ en ook 0.0 $\frac{1}{2}$ en ook 0.001/2 voor '37 $\frac{1}{2}$ centavos' staat: Bolivares 0,37,5 (tweé komma's). Van mij had Wilson ook wat van deze 'realistische wiskunde' op mogen nemen.

H. Pot

S.G. Simpson

Subsystems of second order arithmetic

(Perspectives in mathematical logic)

Berlijn: Springer-Verlag, 1999

445 p., prijs €50,11

ISBN 3-540-64882-8

De tweede-orde rekenkunde is een 'arm-maar-eerlijk' surrogaat voor de verzamelingsleer. Veel van de dagelijkse wiskunde heeft helemaal geen ZF nodig en een zwakkere basis biedt meer zekerheid inzake consistentie. Nu blijkt, dat in de praktijk de volle tweede-orde rekenkunde, PA^2 , ook nog te sterk is. Bepaalde tamelijk robuuste subsystemen kunnen al veel van de gangbare

analyse behandelen. Noem PA^2_- de tweede-orde rekenkunde zonder comprehensie; $RCA(PA^2_- + \text{recursieve comprehensie})$, $ACA_0(PA^2_- + \text{aritmatische comprehensie})$, $WKL_0(PA^2_- + \text{'weak König's lemma'})$ zijn de meest significante subsystemen PA^2 tot dusver. Harvey Friedman initieerde een onderzoeksprogramma met de naam 'reverse mathematics', gericht op het 'calibreren' van concrete wiskunde stellingen door middel van zwakke subsystemen van PA^2 . Simpson geeft in het besproken boek een gedegen expositie van reverse mathematics.

Verrassend genoeg zijn er veel bekende stellingen die precies even sterk zijn als sommige van de systemen. Het vaststellen van equivalenties is een van de opgaven van reverse mathematics.

Alle bekende equivalenties (tot aan 1999) zijn in het boek te vinden. Voor de 'working mathematician' is het interessant om te zien dat WKL_0 (weak König's lemma), in de vorm 'iedere oneindige deelboom van de volle binaire boom heeft een oneindig pad', met een groot aantal stellingen equivalent is, zoals Heine-Borel, iedere continue functie op $[0, 1]$ is Riemann integreerbaar, iedere aftelbaar lichaam heeft een unieke algebraïsche afsluiting, Brouwers dekpuntstelling voor n -dimensionale kubussen, Gödels volledigheidstelling.

Iedereen weet hoe handig en belangrijk Königs lemma is, maar het is verbazend dat WKL_0 voor zoveel belangrijke stellingen 'precies genoeg' is.

Simpson behandelt de diverse systemen uitvoerig, inclusief een uitgebreide rondleiding door ω en β -modellen. Het boek is goed leesbaar, en bruikbaar voor een cursus of seminarium. Het gebied is aantrekkelijk omdat het 'open-ended' is wat problematiek en onderzoek betreft, er is nog veel te doen. Men kan willekeurig ingewikkelde subsystemen van PA^2 maken, de algemene ervaring is echter (gelukkig?) dat 'de wiskunde' maar een beperkt stuk van de volle PA^2 gebruikt. Terzijde zij opgemerkt dat reverse mathematics vooralsnog een aangelegenheid van de klassieke wiskunde is. Het is nuttig en gewenst om ook voor intuïtionistische systemen een dergelijk project, dat daar overigens een heel andere gedaante zal aannemen, uit te voeren. Aanzetten daartoe zijn hier en daar al zichtbaar, bijvoorbeeld in het werk van Bridges en Ishihara.

Samenvattend: een waardevol encyclopedisch boek, de aanschaf ten volle waard.

D. van Dalen

V.I. Bernik and M.M. Dodson

Metric Diophantine approximation on manifolds

(Tracts in mathematics; 137)

Cambridge: Cambridge university press, 1999

72 p., prijs £27,50

ISBN 0-521-43275-8

Diophantische approximatie is het benaderen van bijvoorbeeld reële getallen met rationale getallen. Het bestaan van zulke benaderingen, met een willekeurige precisie, is natuurlijk een direct gevolg van de definities. Vragen in dit vakgebied gaan dan dieper, en betreffen hoe goed men een x in $\mathbf{R}$ kan benaderen met een p/q (p en q geheel, $q > 0$), in termen van q . Voor diverse klassen van benaderbaarheid wil men dan vervolgens de verzameling van de betreffende x 'meten'. Dit meten gebeurt bijvoorbeeld met de Lebesgue maat, maar kan ook verfijnd worden in termen van Hausdorff dimensie. Analoge vragen en resultaten zijn er in

willekeurige dimensie: $\mathbf{Q}^n$ in $\mathbf{R}^n$.

Laten we een voorbeeld geven. Voor x in $\mathbf{R}$, laat $\|x\|$ de afstand zijn van x tot $\mathbf{Z}$. Laat $\psi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ een dalende functie met positieve waarden zijn. Laat $K(\psi)$ de verzameling van die x in $\mathbf{R}$ zijn met $\|qx\| < \psi(q)$ voor oneindig veel q in $\mathbf{N}$. Dan zegt een stelling van Khintchine dat $K(\psi)$ maat nul heeft als de som van de $\psi(q)$ convergeert, en dat anders het complement van $K(\psi)$ maat nul heeft. Een rechtvaardiging van het gebruik van Hausdorff dimensie is het resultaat van Jarník en Besikovitch dat zegt dat $K(q \mapsto q^{-v})$ dimensie $2/(v+1)$ heeft, voor $v \geq 1$.

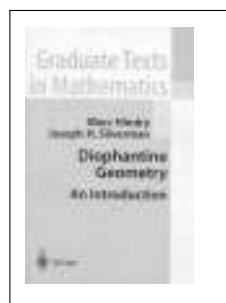
Het doel van het gerecenseerde boek is het inventariseren en ontwikkelen van een vergelijkbare theorie voor deelvariëteiten X van $\mathbf{R}^n$. Men benadert dan nog steeds met elementen van $\mathbf{Q}^n$, maar de vragen naar maat en Hausdorff dimensie van de deelverzamelingen van X die men zo krijgt zijn natuurlijk moeilijker dan die voor $\mathbf{R}^n$ zelf.

Het boek bestaat uit 7 hoofdstukken. Het eerste is de inleiding. Het tweede behandelt het Lebesgue aspect voor deelvariëteiten. Hoofdstukken drie, vier en vijf gaan over het Hausdorff dimensie aspect. Hoofdstuk zes is een excursie naar p -adische getallen. Hoofdstuk zeven gaat over toepassingen: rotatiegetallen van diffeomorfismen van de cirkel naar zichzelf, dynamische systemen (KAM theorie, middelen), linearisatieproblemen van kiemen van complex analytische automorfismen, en over de relatie met Diophantische approximatie in hyperbolische ruimten (denk aan $SL_2(\mathbf{R})$ die op de rand $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ van het hyperbolische vlak werkt).

Het boek is goed leesbaar, en geeft, lijkt me, een overzicht van alles wat er tot voor kort gebeurd is in het betreffende vakgebied. Als zodanig is het zeker aan te raden aan eenieder die in dit gebied geïnteresseerd is.

Aan de andere kant is het gegeven overzicht niet meer dan het beschrijven van de recente resultaten van Margulis en Kleinbock (en ook Bernik). Het gaat daar om methoden (ergodiciteitstheorie voor flows op homogene ruimten) die in dit gebied (nog) niet klassiek zijn. Het lezen van Kleinbock's recensie voor de Mathematical Reviews van de A.M.S. geeft ook sterk de indruk dat er op dit gebied binnenkort nog veel gaat gebeuren. Dit boek zal dus niet lang compleet zijn, en het is jammer dat het nalaat dit te vermelden.

B. Edixhoven



M.Hindry and J.Silverman
Diophantine geometry

Londen: Springer-Verlag, 2000

558 p., prijs \$ 39,95

ISBN 0-387-98981-1

One of the main themes in the theory of diophantine equations from the last century consists of developments around the so-called Mordell Conjecture. This conjecture, formulated in the 1920's, states that any algebraic curve C of genus at least 2 and defined over a number field k contains at most finitely many points with coordinates in k (the k -rational points). Already then it was suspected that an important role would be played by the structure of the k -rational points of the Jacobian variety that is associ-

ated to C. The Jacobian variety is an example of an abelian variety, that is, a complete algebraic variety with an abelian group structure. In the 1920's A. Weil, in his thesis, showed that the k -rational points on an abelian variety form a finitely generated group. Some years earlier this theorem was shown in the one-dimensional case of elliptic curves by Mordell.

Using the Mordell-Weil result and his own work on diophantine approximation, Siegel showed in 1929 that an algebraic curve over k of genus at least 2 contains at most finitely many points whose coordinates are integers in k . Despite this progress it took another 64 years before Mordell's Conjecture was finally proved by Faltings in 1983. The methods he used were a mixture of arithmetic algebraic geometry and Galois representation theory, quite different from the approach used by Siegel.

However, some years later, Vojta brought diophantine approximation again to the foreground by giving a brilliant and completely new proof of Mordell's Conjecture. After its simplification by Bombieri it became apparent that Vojta's approach was basically Siegel's diophantine approximation method carried out on algebraic curves by using an additional idea of Mumford.

The four results mentioned above, the Mordell-Weil theorem, Siegel's result on integral points, Roth's theorem from diophantine approximation (an extension of Siegel's work which brought Roth the Fields medal) and Bombieri's version of Vojta's proof, form the backbone of the present book. We find the proofs of these results neatly presented. The first two sections are preparatory, part A on introductory algebraic geometry with the author's advise "not to read it" and the theory of heights in part B. As far as I know this is the first time that these four results are collected together and presented in such a lucid way in one textbook with exercises and all. Finally, in the last chapter there is a detailed account, mostly without proofs, of further developments. One such result is Faltings's extension of Vojta's method to subvarieties of abelian varieties and its application to the resolution of the Lang conjectures and to the problem of algebraic points on curves. Another result is the Zhang-Ullmo theory of heights of algebraic points on subvarieties of abelian varieties.

The book is recommended highly as an introductory text for anyone wishing to delve into more advanced theory of diophantine equations and as reference source for people working in this field.

F. Beukers

analogie met begrippen uit algebraïsche meetkunde, ter bestudering van de definieerbare verzamelingen. Als belangrijkste vermelden we hier het concept van 'onafhankelijkheid', dat toelaat om de dimensie te definiëren van definieerbare verzamelingen (in het geval men werkt met de eerste-orde theorie der velden komt deze abstracte onafhankelijkheid overeen met de algebraïsche onafhankelijkheid). Algauw bleek echter dat de klasse van theorieën met de stabiliteitseigenschap te nauw was; belangrijke algebraïsche theorieën zijn niet stabiel, maar laten bijvoorbeeld toch toe om een goed gedefinieerde notie van onafhankelijkheid te introduceren. In het begin van de jaren negentig is men er in geslaagd deze vele voorbeelden onder een gemeenschappelijke noemer te brengen: de klasse van 'simple theories'. Dit boek geeft een volledige behandeling van de basistheorie over deze 'simple theories'.

In het eerste hoofdstuk wordt een summier overzicht gegeven van de vereiste voorkennis voor het boek. In het tweede hoofdstuk wordt een begin gemaakt met de studie van 'simple theories'. De klasse van de 'simple theories' wordt gedefinieerd en enkele eenvoudige eigenschappen worden aangetoond. Ook wordt het volgende belangrijke en verrassende resultaat bewezen: elke eerste-orde theorie die toelaat om een onafhankelijkheidsrelatie te definiëren die voldoet aan een aantal milde voorwaarden, behoort tot de klasse van de 'simple theories'. Verder wordt de klasse van de 'stable theories' bestudeerd als deelklasse van de 'simple theories'.

In het derde hoofdstuk wordt de modeltheorie van de hyperimaginaire elementen uit de doeken gedaan. Dit hoofdstuk bevat het materiaal dat kan worden beschouwd als het technisch hart van de theorie van 'simple theories'. In hoofdstuk vier wordt de klasse van groepen behandeld die definieerbaar zijn in modellen van 'simple theories'. Ietwat verwarrend wordt deze klasse aangeduid met de naam 'simple groups' (echter, deze 'simple groups' zijn niet noodzakelijk enkelvoudig). In dit hoofdstuk vindt men tevens een aantal resultaten van algebraïsch-meetkundige aard. Zo bijvoorbeeld wordt een stelling van A. Weil over de reconstructie van een algebraïsche groep uit generisch gegeven data veralgemeend tot de klasse van 'simple groups'. Hoofdstuk vijf behandelt de theorie van de 'supersimple theories', een belangrijke deelklasse van de 'simple theories'. Ook in dit hoofdstuk vindt men een aantal algebraïsche resultaten.

Het laatste hoofdstuk behandelt enkele meer geavanceerde topics waarin nog vele problemen open zijn. Ondermeer wordt nagegaan hoe de klasse van 'simple theories' zich gedraagt onder klassieke modeltheoretische constructies zoals amalgamatie.

Het is een grote verdienste van het boek dat het de vele informatie over 'simple theories' samenbrengt en op een coherente manier presenteert. Verder beschikt het boek over een uitgebreide referentielijst en is elk hoofdstuk voorzien van bibliografisch en historisch commentaar. Als dusdanig is het boek uitstekend geschikt als referentiewerk voor researchers. Voor mensen die willen kennis maken met de fascinerende wereld van dit deel van de modeltheorie, maar weinig vertrouwd zijn met het recentere werk in de modeltheorie kan het boek een zware dobber betekenen; standaard argumenten worden gewoon vernoemd en van de lezer wordt verwacht dat hij de details invult. De lezer moet dus een vrij goede kennis bezitten van de modeltheorie en ook enige vertrouwdheid met de stabiliteitstheorie strekt tot aanbeveling.

K. Zahidi



F. Wagner
Simple theories
(Mathematics and its applications)
Dordrecht: Kluwer, 2000
260 p., prijs €86,-
ISBN 0-7923-6221-7

Dit boek behandelt een onderdeel van de modeltheorie dat nauw verband houdt met classificatietheorie. In de jaren zeventig introduceerde Shelah de notie van 'stable theory', als een belangrijk middel om eerste-orde theorieën te classificeren. Het belang van dit concept ligt in het feit dat voor eerste-orde theorieën die de stabiliteitseigenschap bezitten, men noties kan ontwikkelen naar

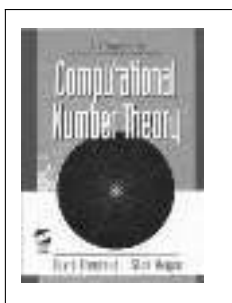


J.-P. Bourguignon, et al.
The New Shepherd's Lamp
 Londen: Springer-Verlag, 2000
 prijs €29,65
 ISBN 3-540-92637-2

De ontwikkeling van de hemelmechanica wordt in deze video becommentarieerd middels gesprekken tussen de wiskundigen J.-P. Bourguignon, J. Brette en de astronoom B. Morando. De video werd eerder gepresenteerd op het videofestival van het I.C.M. congres in 1998 in Berlijn en lijkt bedoeld voor de geïnteresseerde leek. De rol van de wiskunde staat centraal. Vanaf het model van de Griek Ptolemeus, waarin alleen cirkelvormige banen voorkwamen en de aarde in het centrum stond, wordt tot en met de recurrentiestelling van Poincaré deze ontwikkeling aan de hand van het werk van een aantal onderzoekers gepresenteerd.

Aan bod komt het heliocentrische model van het zonnestelsel van Copernicus, waarin de planeten langs cirkelvormige banen rond de zon bewegen en waarmee eindelijk het model van Ptolemeus verlaten werd. Vervolgens worden de waarnemingen van Tycho Brahe behandeld en de daarna geformuleerde wetten van Kepler, die ellipsvormige banen van de planeten voorschreef. De band gaat verder met de observaties van Galilei, die liet zien dat de planeet Venus om de zon draait en Jupiter manen heeft, en de differentiaalrekening en de daarop gebaseerde bewegingswetten van Newton. Lagrange gebruikte niet meer uitsluitend de Euclidische ruimte om de planetenbewegingen te beschrijven. Zijn werk liet de voorspelling van het bestaan en de ontdekking van de planeet Neptunus toe. De Hamiltonsche mechanica wordt genoemd en met pen en papier wordt een argument geschetst dat de recurrentiestelling van Poincaré duidelijk maakt.

Het maakt een geforceerde indruk om Bourguignon, Brette en Morando elkaar kegelsneden en Poincaré's recurrentiestelling te zien uitleggen, zittend en wandelend in de ivooren torens en de tuin van het I.H.E.S. Ik had ook liever ondertiteling gezien in plaats van de gehanteerde Engelse commentaarstem. Maar over het geheel genomen geeft de video een onderhoudend relaas van de geschiedenis van de hemelmechanica. *A.J. Homburg*



D. Bressoud en S. Wagon
A course in computational number theory
 Berlijn: Springer-Verlag, 2000
 367 p., prijs \$ 64,95
 ISBN 1-930190-10-7

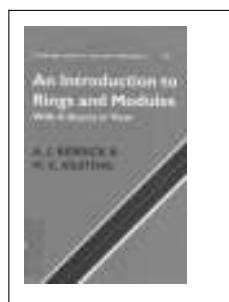
Colleges met de naam 'elementaire getaltheorie' komen in vrijwel alle wiskundeopleidingen voor. De behandelde stof bestaat in de regel uit een deelcollectie van de onderwerpen rekenen modulo N , priemgetallen, pseudopriemen, Carmichaelgetallen, kettingbreuken, de Pell (-Fermat) vergelijking, kwadratische recipro-

citeit en representaties van getallen als som van 2 of van 4 kwadraten.

De opkomst van toepassingen van getaltheorie op met name beveiliging van communicatie en tegelijkertijd de enorme toename van diezelfde communicatie hebben mede geleid tot steeds meer onderzoek naar zulke getaltheoretische toepassingen. Geavanceerde algoritmen voor bijvoorbeeld rekenen in een ring van algebraïsche getallen of in een coördinatenring van een affiene kromme over een eindig lichaam worden bedacht en geïmplementeerd in de researchafdelingen van Westerse en Japanse technologieconcerns, meer nog dan in een afdeling zuivere wiskunde aan de universiteit. Congressen over computationele getaltheorie en state-of-the-art artikelen en boeken over dit vakgebied volgen elkaar dan ook in snel tempo op, en het is opmerkelijk hoeveel deelnemers aan een bijeenkomst als het tweejaarlijkse Algorithmic Number Theory Symposium werkzaam zijn bij overheidsdiensten of in de technologie.

Het hier besproken boek laat zich inspireren door deze computationele sfeer. Dat gebeurt heel rustig. Het boek is dan ook bedoeld als een eerste kennismaking met getaltheorie, en daarbij wordt gekozen voor een computationeel perspectief. Hand in hand leert de gebruiker zowel een concept als een bijbehorend algoritme. Regelmatig komt daarbij het algoritme eerst, zodat proefondervindelijk een eigenschap wordt ontdekt. Bij het boek zit een cd-rom vol mathematica-routines die in de tekst aan de orde komen.

Of zo'n computationele aanpak leidt tot een beter begrip van de theorie, betwijfel ik. De vele regels mathematica-code en de lange stukken uitleg van algoritmen maken de stof soms onoverzichtelijk. Niettemin heeft deze experimentele aanpak wel wat. Studenten zelf een hogere reciprociteitswet of allerlei regelmatigheden in periodieke kettingbreukontwikkelingen laten ontdekken werkt motiverend, al is het tijdrovender dan simpelweg een hoorcollege volgen. Het boek is zeker geschikt om delen ervan zelfstandig door te werken. Het is plezierig geschreven, en opgaven zijn in ruime mate voorhanden. *J. Top*



A. J. Berrick and M. E. Keating
Introduction to rings and modules. With K-theory in view

(Cambridge studies in advanced mathematics; 65 en 67)
 Cambridge: Cambridge university press, 2000
 265 en 361 p., prijs £35,-
 ISBN 0-006-1355-4 en 0-006-1855-5

Deze boeken werden opgezet als prologoumena voor een werk over K-theorie dat nog niet geschreven is. Dit brengt met zich mee dat heel uiteenlopende zaken aan de orde komen. Zo wordt in II een aantal soorten categorieën en hun eigenschappen behandeld, die Quillen nodig had om zijn hogere K-groepen te definiëren en er flexibel mee om te gaan. Maar ook lokaal-globaal principes voor orden, omdat in die context K-theorie goed kan worden gebruikt. Dit laatste sluit dan weer aan bij de hoofdstukken uit I waarin Dedekindringen en hun modulen worden uitgelegd. Maar waarom dan niet wat simpliciaal materiaal om de +-constructie van Kervaire en Quillen toe te lichten, of fundamenteën van algebraïsche

meetkunde, omdat ook hier K-theorie veelvuldig wordt toegepast?

Keuze van onderwerpen, volgorde van behandeling en verdeling over de twee banden blijven enigszins raadselachtig. Ook, waarom deze zijn opgenomen in de Cambridge studies: hierin schilderen doorgaans kloekke werken de stand van zaken in gevorderde onderwerpen. Terwijl veel uit deze boeken geselecteerd zou kunnen worden om een onderhoudend en leerzaam derdejaarscollege te vullen. Probeer dus niet van kافت tot kافت te lezen; je hebt geen idee waar het heen gaat. Laat de delen op de plank staan als steun voor het geval je werkelijk K-theorie gaat bestuderen. Beter nog, haal ze er af en lees over onderwerpen waar op dat moment je belangstelling naar uitgaat. En dan valt er te genieten. De auteurs, zelf in K-theorie en daarbuiten actief, doen moeite om hun aanpak te motiveren. In terzijdes en veel, heel veel opgaven nemen zij de lezer bij de hand en brengen inzicht en vaardigheid bij. Op hun boeiendst zijn ze wanneer zij eigen hobbies en belangstellingen volgen, er niet om malend dat de K-theorie goed zonder kan. Niet standaard behandeling van platheid en directe en inverse limieten; wanneer kan een vrij moduul bases van verschillende kardinaliteit hebben?; localisatie direct met Ore stelsels en torsiemodulen (pas tegen het eind van II!); bij localisatie van ordes direct ook completering betrekken.

Hier en daar toch een vraagteken. Zou hun uitleg van chiraliteit een beginnend categorist werkelijk verder helpen? En waar zij naar gebieden wijzen in welke Morita theorie recent is toegepast, waarom dan niet de belangrijke bijdragen van hun landgenoot Rickard genoemd, in de voorstellingstheorie van eindige groepen? Tot slot titels van hoofdstukken. I: Basiskennis; Directe sommen en korte exacte rijen; Noetherse en veeltermringen; Artinse ringen en modulen; Dedekind integriteitsgebieden; Modulen over dezulken. II: Categorieën; Categorieën en exacte rijen; Verandering van ring; Morita theorie; Limieten in categorieën; Localisatie; Locaal-globaal methoden.

J.R. Strooker



A.M. Cohen, H. Cuyper and H. Sterk (eds.)

Some tapas of computer algebra

(Algorithms and computation in mathematics; 4)

Berlijn: Springer-Verlag, 1999

352 p., prijs €45,96

ISBN 3-540-63480-0

'Tapas' zijn voor de gourmet ongeveer wat 'hapklare brokken' voor de hond zijn. Waarbij vooral ook het 'dat-smaakt-naar-meer' gevoel van belang is. De brokken die hier opgediend worden zijn 11 hoofdstukken van ongeveer 25 pagina's elk en 7 projecten van circa 10 pagina's. Die projecten zijn bedoeld als toepassing in de vorm van samenhangende opgaven met uitgebreide toelichting op één of twee van de hoofdstukken.

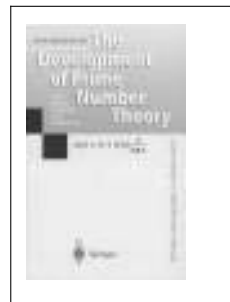
De hoofdstukken bieden een breed scala aan onderwerpen uit de computeralgebra: Gröbner bases en de toepassing ervan op integer programming en foutenverbeterende codes, reële algebraïsche meetkunde, rooster-reductie en het ontbinden van polynomen, rekenen in permutatiegroepen en groepen gegeven door voortbrengers en relaties, en het vinden van 'symbolische' oplos-

singen voor lineaire differentiaalvergelijkingen. Het verbindende element is natuurlijk steeds dat symbolische karakter: de algoritmen in computeralgebra onderscheiden zich door hun exacte en algebraïsch-discrete karakter tot de benaderende en analytisch-continue oplossingen in de numerieke wiskunde.

De teksten die hier gepresenteerd worden zijn gegroeid uit aantekeningen voor 'minicourses' uit 1994 en 1995, voor de EID-MA onderzoeksschool gegeven in Eindhoven, en er is dan ook een sterke Nederlandse inbreng. De 'hapklare' aard van de brokken was bedoeld om deelnemende, gevorderde, studenten de mogelijkheid te bieden in kort bestek op de hoogte te geraken van wat computeralgebra vermag op diverse gebieden. Voor de uiteindelijke boekversie hebben de auteurs zich er in het algemeen niet vanaf gemaakt met het opsommen van bekende resultaten, maar er is in de meeste bijdragen geprobeerd een originele invalshoek te kiezen. De nadruk ligt ook op de wiskunde achter algoritmen, en bewijzen worden niet geschuwd. Een ander aantrekkelijk punt is dat de tekst niet is opgehangen aan één specifiek computer algebra systeem.

Zo kan het boek inderdaad bijdragen aan de opvoeding van de in algoritmische algebra geïnteresseerde jonge hond tot gourmet!

W. Bosma



W. Narkiewicz

The development of prime number theory — From Euclid to Hardy and Littlewood

(Springer monographs in mathematics)

Berlin: Springer-Verlag, 2000

448 p., prijs €106,94

ISBN 3-540-66289-8

Euclid's proof of the infinitude of prime numbers is an example of a proof that deserves a place in *THE BOOK*, often quoted by the late Paul Erdős, where the ultimate forms of mathematical arguments are (to be) preserved. In the opinion of the author of the book under review, most other proofs in prime number theory are still far away from their optimal form. Therefore, he extensively describes the developments of methods with which such problems were attacked in the course of time, starting in antiquity and concluding at the end of the first decade of the 20th century. In addition, many later results are mentioned, albeit mostly in short comments.

The first chapter of this book starts with twelve proofs of the infinitude of primes, followed by three proofs of the divergence of the sum of the reciprocals of primes (which implies the infinitude of primes), Euler's discovery of primitive roots, and a survey of various formulas for prime numbers. The second chapter treats Dirichlet's theorem on the infinitude of primes in arithmetical progressions. The third chapter is devoted to Chebyshev's work concerning lower and upper bounds for the number $\pi(x)$ of primes not exceeding x , including some of the applications of these bounds. Chapter four treats Riemann's work on the zeta function $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ and its intimate connection with the behaviour of the function $\pi(x)$. This chapter also considers the analytical properties of Dirichlet's L -functions, describes the pioneering work of Cahen on the theory of Dirichlet series, and treats

Stieltjes' study of the expansion of $\zeta(s)$ into a power series.

The fifth chapter is devoted to the first proofs of the Prime Number Theorem due to Hadamard and de la Vallée-Poussin which both use the non-vanishing of the zeta function on the line $\text{Re } s = 1$. For this fact, several later proofs are included. In the sixth, and last, chapter the developments in the first twenty years of the 20-th century are treated, where the main role was played by Landau, who essentially simplified the theory of prime numbers, and published, in 1909, the first book devoted exclusively to that theory. Proofs of Theorems of von Mangoldt as well as the Prime Number Theorem are presented, the study of the roots of the zeta function is surveyed, and Littlewood's result about the sign of the difference $\pi(x) - \text{li}(x)$ is introduced. This chapter concludes with a list of conjectures in additive number theory, posed by Hardy and Littlewood in 1923. This includes a conjecture on the number of representations of a large even integer as a sum of two primes, which would extend the well-known Goldbach conjecture.

Each chapter concludes with a series of 'exercises', most of them taken from research papers, and accompanied by the reference where the solution may be found.

The book closes with 79(!) pages of references, with ≈ 25 references per page. This illustrates its encyclopedic character and its usefulness for anybody wishing to study the literature on the subjects of the book. However, there still is left a gap of eighty years of many new ideas to be bridged, like the applications of trigonometric sums and the advent of various sieve methods: a good reason for a follow-up to this excellent book! *H. te Riele*



L. Badescu
Algebraic surfaces
(Universitext)
Berlijn: Springer-Verlag, 2001
258 p., prijs €40,39
ISBN 0-387-98668-5

Algebraic varieties are modelled upon affine varieties, which are subsets of affine space given as the zeroes of finitely many polynomials. These local models then should be glued together in an appropriate fashion. Standard examples include projective varieties, the zeroes of sets of homogeneous polynomials, but defined as there exist other ones as well.

The first and most obvious way to classify varieties is by means of their dimension. Varieties of dimension 1 are also called *curves* and can be further classified according to their genus g , the number of independent regular 1-forms. Varieties of dimension 2 are called *surfaces* and their classification is much more elaborate. The 'classical' results are due to Enriques (1932, 1934) and are valid in characteristic zero. Enriques' proofs have been greatly simplified and extended to positive characteristic in a series of works by Mumford (1969) and Bombieri-Mumford (1976, 1977). The upshot of their work is that as long as the characteristic is different from 2 or 3 classification is as for characteristic 0; but there are some really new phenomena in the exceptional characteristics. Below, we shall have more to say about this.

There are some monographs available in which surfaces are treated systematically, the oldest being Enriques' work mentioned above. Then came Zariski's book (1935) which is of a more fundamental nature in that he puts 'Italian geometry' on more solid footing, preparing the way for classification in positive characteristic. Shafarevich' book (1967) which like Enriques treats classification in characteristic zero but using the then modern cohomological methods. In 1978, Beauville's beautiful monograph appeared, still only treating surfaces in characteristic zero. Next, Kurke's book (1982) and Bădescu's books (1981) appeared, incorporating also positive characteristic, based on the treatment by Bombieri and Bombieri-Mumford cited above. Finally the treatise by Barth, Peters and Van de Ven (1984) appeared which extended the view to not necessarily algebraic compact complex surfaces.

The present book is a translation of an earlier Rumanian text, now 20 years old and one might ask: why publish it anew? Certainly it is a translation and it also contains two new appendices (one called 'Further reading', which is far from complete, but contains the most important references. I missed for instance the references to recent work of Ekedahl (1988) and Shepherd-Barron (1991)). This in itself is not enough to merit publication. One could argue however that first of all it is the only existing monograph treating classification of algebraic surfaces in all characteristics in a reasonably self-contained manner. Secondly, it is very carefully written and gives all the necessary references.

As mentioned in the preface, the book is certainly not meant for beginners in algebraic geometry. An ample arsenal of basic techniques from algebraic geometry is required going well beyond a standard text like Hartshorne's book, such as some notions from étale topology (étale Betti numbers and Chern classes). Also the theory of the Picard scheme and the Hilbert scheme of subschemes of surfaces such as treated in Mumford's *Lectures on curves on an algebraic surface* (1966) are necessary tools. But anyone who has this background will find the treatise readily accessible. Moreover, for the translation many exercises have been included. It is a pity the author does not take the opportunity to say more about the beautiful geometry in characteristic 2 and 3 where you really see strange things happen. Examples of non-classical Enriques surfaces or surfaces of general type with 'too many' rational curves, violation of Kodaira vanishing and related subjects are entirely missing.

My conclusion is that the monograph is a good introductory text for self-study or for a graduate course for anyone with the required background, but should be supplemented by further reading. *C.A.M. Peters*



S. Billey en V. Lakshmibai
Singular loci of Schubert varieties
(Progress in mathematics)
Berlijn: Birkhäuser Verlag, 2000
251 p., prijs €60,39
ISBN 0-8176-4092-4

As the authors explain in the introduction, this is a survey article that got out of hand. The reader is assumed to have some

familiarity with root systems, representations of Lie algebras, algebraic groups and even Schubert varieties. For an explanation why Schubert and others became interested in these varieties one has to turn elsewhere. A nice introduction can be found in the paper 'Schubert calculus' by Kleiman and Laksov, *Amer. Math. Monthly* 79 (1972), 1061–1082. Schubert was studying enumerative geometry. A simple example, taken from loc. cit.: How many lines in 3-space, in general, intersect four given lines? (Answer: two.) Checking the math archive <http://arXiv.org/> one sees that the subject of Schubert varieties is still very much alive. In the book one finds a surprising number of ways to approach Schubert varieties and their singularities. (This is why their survey got out of hand.)

The book illustrates the principles on the main example of Schubert varieties in the flag variety SL_n/B . Recall that a (complete) flag in n -space is an increasing sequence of linear subspaces, one of each dimension. A Schubert variety in the variety of flags arises by imposing conditions on the dimensions of the intersections of elements of the flag with those in a fixed standard flag. The author's own bent is rather computational, with lots of combinatorics, explicit bases of representations et cetera. Along the way one meets étale cohomology and intersection cohomology, the famous Kazhdan Lusztig polynomials, the Nil-Hecke ring, small resolutions, multicones, Gröbner bases and more. And then there are some related varieties, like determinantal varieties, ladder varieties, varieties of complexes (of vector spaces). There is an addendum of over twenty pages listing singularities. This kind of data one would expect on the WEB, not in a book, nowadays. If this book is for you, you already know that now. *W. van der Kallen*

C. Voisin proves the generic Torelli for the quintic threefold. We see a masterly combination of known methods (Donagi, Carlson-Griffiths, Green) with an "extraordinary computational tour-de-force" proof (as the editors rightfully characterize this paper).

C. Faber computes the Chow class of the Torelli locus in the tautological ring of a toroidal compactification of the moduli space of polarized abelian varieties, together with algorithms for computing intersection numbers on moduli spaces of curves. These are just three examples of the rich contents of this volume.

These almost 500 pages contain a wealth of information. Editing and refereeing has been done in an excellent way. It all reflects the quality of the "star-studded cast of speakers" of this interesting conference. An example of a valuable initiative, the Euro Conference on Algebraic Geometry, and the result of high quality speakers, organizers and referees.

From the introduction: "The book will be of interest to a wide range of students and nonexperts in different areas of mathematics, geometry and physics, and is required reading for all specialists in algebraic geometry." I completely agree. *F. Oort*



K. Hulek et al. (eds.)
New trends in algebraic geometry
(LMS Lecture notes series; 264)
Cambridge: Cambridge university press, 1999
494 p., prijs £29.95
ISBN 0-521-64659-6

In 1996 a European algebraic geometry conference was held at the University of Warwick. This volume contains seventeen survey and research articles presented at that conference. The editors are K. Hulek, F. Catanese, C. Peters and M. Reid. The volume contains excellent expository papers on the one hand and research papers with beautiful new results on the other hand.

Part of the volume is devoted to Gromov-Witten invariants, to Calabi-Yau 3-folds and to mirror symmetry. These papers reflect some of the new breakthroughs in geometry and in theoretical physics in the 1990s.

As it is not possible to describe the contents of 17 excellent papers in a short review, let me choose 3 (with apologies to the authors of the other 14 equally interesting and very good papers). K. H. Paranjape writes a 12 pages expository account, in which the Bogomolov-Pantev result, giving the weak Hironaka resolution of singularities, triggered by Johan de Jong's notion of 'alterations', is described. This paper is an example of the way important results are discussed and surveyed in a new and concise way.



M. de Gee
**Wiskunde in werking deel 3.
Functies van meer variabelen
toegepast**
Utrecht: Epsilon uitgaven, 2001
357 p., prijs €22,50
ISBN 90-5041-069-3

In "Wiskunde in Werking" laat de schrijver aan de hand van zeer veel voorbeelden uit uiteenlopende toepassingsgebieden zien waar en hoe analyse van functies van reële veranderlijken in de praktijk gebruikt wordt. Naast voorbeelden uit klassieke toepassingsgebieden zoals natuurkunde en elektrotechniek, komen er ook een aantal uit de biologie, de hydrologie (bijvoorbeeld de ontziltiging van de IJsselmeerbodem), de logistiek, de milieukunde, de proceskunde en de voedingstechnologie (bijvoorbeeld het pekelken van kaas), op het toneel.

Het boek is verdeeld in vijf hoofdstukken. Elk hoofdstuk begint met een inleiding waarin wordt uitgelegd wat er aan de orde zal komen, en wat de voorkennis van de lezer moet zijn. De hoofdstukken zelf bestaan uit drie delen: een overzicht van het te gebruiken wiskundig gereedschap, de toepassingen, en een groot aantal opgaven. De hoofdstukken worden afgesloten met een samenvatting en met enkele historische kanttekeningen.

De schrijver is er in geslaagd een zeer uitgebreide collectie voorbeelden bijeen te brengen om daarmee onderwerpen als (gewone en partiële) differentiaalvergelijkingen en Fourierreeksen te illustreren. De voorbeelden worden duidelijk besproken en ze hebben niet alleen maar een figurantenrol.

Bij het schrijven van zo'n boek moeten er keuzen worden gemaakt; het is ondoenlijk in kort bestek zowel de wiskunde als de toepassingen te presenteren. De schrijver heeft gekozen voor de toepassingen; voor de wiskunde beperkt hij zich tot het vermelden van de resultaten die nodig zijn. Op enkele plaatsen staat een schets van een bewijs van gebruikte stellingen. Om deze reden lijkt mij het boek voornamelijk van belang voor studenten

die in hun opleiding geconfronteerd worden met het gebruiken van wiskunde. Studenten in de wiskunde moeten zich veel meer verdiepen in de mathematische achtergrond. Desondanks acht ik het zeer waardevol dat ook zij naast hun standaard vakkenpakket kennis maken met de inhoud van dit boek. Ik hoop dat in een volgende druk/editie van dit boek een veel uitgebreidere literatuurlijst wordt opgenomen. In de huidige editie heb ik (aan het eind van het eerste hoofdstuk) een lijstje met drie titels aangetroffen; voor een boek waarin vaak een beroep op voorkennis wordt gedaan is dat beslist niet genoeg. Het op de achterkant vermelde ingangsniveau: Tweede jaar universiteit en hogeschool lijkt mij (voor studenten wiskunde) te optimistisch. Bij de huidige studieprogramma's wordt veel van de benodigde voorkennis pas gedurende het tweede jaar aangeboden.

Aan de serie *Wiskunde in Werking* is zeer veel zorg besteed. Historische notities aan het eind van ieder hoofdstuk, veel mooie figuren, een overzichtelijke inhoudsopgave, een uitgebreide index, antwoorden van de vraagstukken, en tabellen met formules. Dit boek is een aanwinst voor de Nederlandse wiskunde.

R.A. Kortram



L.C. Kinsey and T.E. Moore
Symmetry, shape and space.
An introduction to mathematics through geometry

Berlijn: Springer-Verlag, 2002

494 p., prijs €61,05

ISBN 1-930190-09-3

Een bundeling van een stuk of tien Zebra-boekjes op het gebied van de meetkunde, zo zou je dit boek in termen van de Nederlandse onderwijssituatie kunnen omschrijven. Het behandelt verschillende elementaire meetkundige onderwerpen die grotendeels onafhankelijk van elkaar bestudeerd kunnen worden. De benodigde voorkennis reikt niet dieper dan de onderbouw van havo of vwo. De overeenkomst met onze Zebra-boekjes wordt nog versterkt doordat ieder hoofdstuk een keur aan welgekozen opdrachten en oefeningen bevat. Bovendien draagt elk onderwerp genoeg materiaal in zich voor praktische opdrachten en profielwerkstukken op verschillende niveaus.

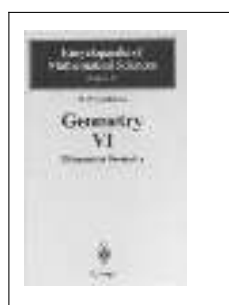
Een keuze uit de inhoud: regelmatige en halfregelmatige vlakvullingen, Penrose-betegelingen, rozetsymmetriën, friespatronen, behangpatronen, platland en de vierde dimensie, regelmatige en halfregelmatige veelvlakken, twee- en driedimensionale kaleidoscopen, spiralen, Fibonacci-rijen en phyllotaxis, perspectieftekenen en optische illusies, niet-euclidische meetkunde, kaartprojecties, de kromming van vlakke krommen en ruimtelijke oppervlakken, zeepvliezen, grafen, bomen en doolhoven, de topologie van oppervlakken, het kleuren van landkaarten.

De presentatie is inspirerend, de illustraties zijn prachtig, de oefeningen weloverwogen en goed gedoseerd en op de wiskundige inhoud is niets aan te merken. De hoge kwaliteit valt ook af te leiden uit de literatuursuggesties die aan het einde van iedere sectie gegeven worden. Allemaal verwijzen ze naar artikelen en boeken die als belangrijke bronnen op het desbetreffende gebied beschouwd kunnen worden. De auteurs zijn geen napraters, maar

kenners die weten waar ze het over hebben, zowel op wiskundig als op didactisch gebied. Er zijn ook tal van verwijzingen naar al dan niet via het internet verkrijgbare meetkundige software.

Van harte aanbevolen dus, te meer daar het beeld van de wiskunde dat uit dit boek oprijst, zo modern en verfrissend is. Totaal anders dan het stereotiepe dorre en saaie imago dat reguliere wiskundelessen helaas soms nog uitstralen. Alles draait hier om patronen en structuren. Leerlingen (en leraren!) zullen verbaasd zijn dat er bijna geen formules in het boek voorkomen. Wel veel concrete opdrachten die de wiskundige manier van denken (systematiseren, logisch redeneren, structureren) stimuleren, ook bij degenen die denken dat ze geen wiskundeknobbel hebben. Jammer dat dit boek er nog niet was toen de nieuwe Tweede-Faseprofielen werden ingevuld.

J. van de Craats



M.M. Postnikov

Geometry VI: Riemannian geometry

(Encyclopaedia of mathematical sciences; 91)

Berlijn: Springer-Verlag, 2001

503 p., prijs €102,20

ISBN 3-540-41108-9

As the name of the series suggests, most volumes in the *Encyclopaedia of mathematical sciences* series present encyclopaedic surveys of more or less narrowly defined areas of mathematics. This book on Riemannian geometry, by contrast, rather has the character of a textbook. In fact, it originates from the author's lectures and is a translation of the fifth in his series of 'Lectures on Geometry'. This should not deter the reader who does not have the other four instalments on his bookshelf: Seven chapters on the basic theory of manifolds, vector bundles and connections have been added from the earlier lectures to make this a self-contained treatment of Riemannian geometry. The style of a series of lectures has been very much preserved in this text. The material is arranged in chunks that correspond to individual lectures, and what is lost in depth and generality by this restriction is gained in clarity of exposition and abundance of examples.

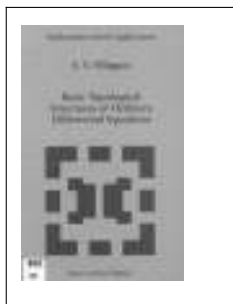
My personal test for any text on Riemannian geometry is to see how it introduces the curvature tensor. All but very few books simply throw the definition at the reader and proceed to work out its properties, leaving the reader wondering who on earth cooked up this miraculous object in the first place; the select few (more often than not Russian) motivate the definition by a discussion of parallel transport along small loops. Postnikov's approach — more extensive than any I have seen — is very much in this Russian tradition, and his chapter on the curvature tensor alone justifies for me the price of admission.

The main body of the text centres around classical topics in Riemannian geometry, but only after a more general treatment of manifolds with linear connection. This has the drawback that certain central topics like Jacobi fields, variation formulae, and the Bonnet-Myers theorem, say, are met rather late. But again, the lecturing style makes the later chapters sufficiently self-contained to allow relatively direct access. Many of the chapters go beyond the average text on Riemannian geometry; two I find particular-

ly valuable are those on space forms and 4-dimensional manifolds (in particular in view of the fact that Besse's *Einstein manifolds* continues to be out of print).

The book is thus comprehensive and original enough to be of interest to any professional geometer, but I particularly recommend it to the advanced student, who will find a host of instructive examples, exercises and vistas that few comparable texts offer, though the lack of a more extensive bibliography is to be regretted. One minor quibble: The names of several famous geometers have suffered from transliteration into Cyrillic and back, a slip that should have been noticed by the publisher (and that may raise doubts about the quality of the translation elsewhere) — Bianchi is rendered as Bianci (though not consistently so), Myers as Mayers, and Thorpe as Thorp.

H. Geiges



V.V. Filippov
**Basic topological structures of
ordinary differential equations**

Dordrecht: Kluwer, 1998
516 p., prijs €179,24
ISBN 0-7923-4951-2

De meeste boeken over gewone differentiaalvergelijkingen besteden als eerste enkele hoofdstukken aan existentie en eenduidigheid van oplossingen en continue afhankelijkheid van beginvoorwaarden en parameters. Vervolgens gaat men over tot de orde van de dag, dat wil zeggen er wordt gekeken naar zaken als oplossingsmethoden, speciale oplossingen, gedrag van oplossingen of naar faseportretten en bifurcaties et cetera. Zo niet het onderhavige boek, dat geheel aan het eerste is gewijd.

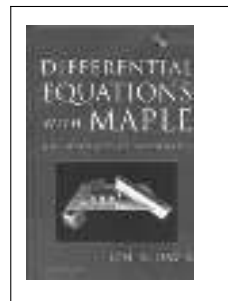
Het boek is gebaseerd op twee eerder in het Russisch verschenen boeken van dezelfde auteur en behandelt, zoals deze in zijn voorwoord schrijft, de 'continuïteit van de afhankelijkheid van oplossingen van beginvoorwaarden en parameters'. Dit gebeurt echter niet alleen voor differentiaalvergelijkingen van het type $y' = f(t, y)$, maar ook voor differentiaalinclusies van de vorm $y' \in F(t, y)$ waarin F een meerwaardige afbeelding is. Om hiervoor theorie op te zetten is een flinke hoeveelheid topologie en analyse nodig die in de loop van de hoofdstukken geïntroduceerd wordt. In het voorwoord zegt de auteur dat het boek geschikt is voor tweedejaars wiskundestudenten.

De eerste vijf hoofdstukken geven een overzicht van de benodigdheden voor het vervolg, zoals topologie, metrische ruimten, maat en integratie theorie en functionaalanalyse. De hoofdstukken 6, 7 en 8 lijken het hart van het boek te vormen. Daarin worden ruimten van functies gemaakt die in aanmerking komen om oplossingen van differentiaalvergelijkingen te zijn. Dit is gebaseerd op existentie en eenduidigheid voor het bekende beginwaarde probleem $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ onder milde voorwaarden voor f . In deze ruimten worden dan rijen van functies geconstrueerd die aan een differentiaal inclusie voldoen. Deze rijen hebben natuurlijke (equi)continuïteitseigenschappen met betrekking tot parameters en beginvoorwaarden. Convergentie van zulke rijen levert dan existentie van oplossingen. Uiteraard is continuïteit steeds afhankelijk van de aanwezige topologie. In de ove-

rige hoofdstukken wordt de ontwikkelde theorie gebruikt voor differentiaal ongelijkheden, differentiaalvergelijkingen met singulariteiten en discontinuïteiten zowel in tijd als ruimte, scalaire differentiaalvergelijkingen en hun periodieke oplossingen.

Globaal gezien heeft het boek een heldere opbouw. Aangezien er flink wat topologie en analyse van stal gehaald wordt lijkt het gerechtvaardigd te vragen: waartoe was dit nodig en waartoe heeft het geleid? Deze vragen worden mijns inziens niet echt beantwoord. De presentatie in het boek is daar ook niet op gericht. De hoofdstukken bestaan voornamelijk uit een lineaire opsomming van lemma's, stellingen en bewijzen met minimale verbindende tekst. Er is geen onderscheid gemaakt tussen hulpresultaten, hoofdresultaten, gevolgen en verfijningen en bovendien is alles omringd met veel technische details. Niet aanbevolen voor tweedejaars studenten, specialisten zullen er echter het nodige in kunnen vinden. Gezien de prijs had de vertaling wel wat zorgvuldiger gekund.

I. Hoveijn



J.H. Davis
Differential equations with Maple

Basel: Birkhäuser-Verlag
409 p., prijs €75,67
ISBN 0-8176-4181-5

De titel *Differential equations with Maple, an interactive approach* doet vermoeden dat je een boek in handen krijgt waarin je tegelijk iets leert over Maple en over differentiaalvergelijkingen. Wie echter denkt met dit boek een goede gelegenheid te hebben Maple te ontdekken, komt bedrogen uit.

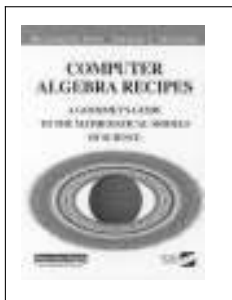
Het bleek erg gemakkelijk te worden om een vernietigende recensie te schrijven. Om te voorkomen dat het helemaal een negatief verhaal wordt, eerst wat positieve punten: de elementaire theorie van (voornamelijk lineaire) differentiaalvergelijkingen wordt helder behandeld. Vooral leuk is hoofdstuk twee, dat motiverende voorbeelden bevat zoals de vergelijkingen voor een doorbuigende staaf, met vrij veel aandacht voor de fysische afleiding. De bijgeleverde CD-rom bevat de Maple-code van de programma's die in het boek aan de orde komen. Ook staat er een voorbeeld op hoe je een goede website creëert om een collegeserie te ondersteunen. Dat past goed in de huidige aandacht voor interactief onderwijs.

De interactie in het boek valt echter tegen. Het boek valt duidelijk uiteen in delen; eerst een hoofdstuk over Maple, vervolgens tien hoofdstukken elementaire theorie van differentiaalvergelijkingen en tenslotte vijf hoofdstukken voornamelijk Maple. De interactie uit zich in af en toe een verwijzing en het gebruik van omvangrijke in plaats van eenvoudige voorbeelden om de theorie mee te illustreren. De auteur produceert hele pagina's Maple code en uitvoer. Het doel, verheldering van de stof, wordt daarmee geen goed gedaan. De hoofdstukken over Maple zijn erg informeel van stijl, als een dictaat ter begeleiding van een werkcollega. Je moet Maple leren door voorbeelden en de online-help van het programma. Het is dan vervelend dat er verschillende fouten in de voorbeelden staan; een werkcollege-begeleider is eigenlijk

noodzakelijk. Typerend is ook het feit dat de auteur waarschuwt voor een 'classic blunder', die vervolgens in zijn Maple-code meermalen gemaakt wordt! Eindredactie lijkt niet goed plaats te hebben gehad; hele pagina's kom je (bijna) letterlijk op verschillende plaatsen in het boek tegen. Soms worden dingen uitgebreid uitgelegd, waarvan een paar bladzijden daarvoor nog duidelijk werd uitgegaan dat het de lezer al bekend was. Alsof de auteur besloot de volgorde van de stof te veranderen, maar na de copy-paste heeft verzuimd de noodzakelijke aanpassingen te verrichten. In de (letterlijk afgedrukte) programma-code kom je als commentaar tegen 'left over from earlier code'. Er is een enorme discrepantie in het niveau van vereiste voorkennis tussen de laatste hoofdstukken en de rest van het boek. Waar de elementaire theorie tot en met de basis van lineaire algebra wordt uitgelegd, komen in het hoofdstuk over control theory de root locus, Nyquist en Bode plots aan de orde met nauwelijks enige uitleg over het nut daarvan en verder komt ene 'Riccati'-vergelijking uit de lucht vallen om opgelost te worden.

De vraag die ik mij tenslotte stel is: voor wie zou dit boek interessant zijn? Over de elementaire theorie van differentiaalvergelijkingen zijn wel betere leerboeken geschreven, voor het leren van Maple kun je net zo goed de online-help waar hij naar verwijst bestuderen en als begeleiding bij een werkcollege lijkt zo'n boek me wat overdone. Misschien kan een aanstaande docent er inspiratie uit halen bij de voorbereiding van zijn collegeserie; is dat het waard?

G. Terra



R. H. Enns en G. C. McGuire
Computer algebra recipes. A gourmet's guide to the mathematical models of science

Berlijn: Springer-Verlag, 2001
778 p., prijs \$ 89.95
ISBN 0-387-95148-2

Dit boek is een omvangrijke verzameling secties, gegroepeerd in drie delen. In elke sectie wordt met behulp van het computeralgebrapakket Maple een mathematisch model bekeken. In het eerste deel (genaamd *The Appetizers*) zijn dit tamelijk eenvoudige en op zichzelf staande modellen. Enkele hiervan lijken voornamelijk bedoeld om de lezer met Maple vertrouwd te maken. In het tweede deel (*The Entrees*) zijn de modellen ingewikkelder, en worden ze meestal gegeven door gewone differentiaalvergelijkingen. Het laatste deel (*The Desserts*) bevat modellen gegeven door partiële differentiaalvergelijkingen (zoals bijvoorbeeld de Korteweg-de Vries vergelijking).

Elke sectie is op dezelfde manier opgebouwd. Eerst is er een citaat van een min of meer beroemd persoon (overigens ontgaat mij in de meeste gevallen de relevantie van deze citaten voor de rest van de tekst). Dan volgt de uiteenzetting van een probleem, dat door een fictieve persoon (meestal een student) opgelost moet worden. Hierna volgt de oplossing, waarbij dankbaar van de diensten van Maple gebruik gemaakt wordt.

Het is de bedoeling van de auteurs aan te tonen dat een computeralgebrapakket als Maple uitstekend geschikt is om bij het onderwijs van mechanica en analyse gebruikt te worden. De voorde-

len van het gebruik van de computer worden duidelijk gemaakt: het is mogelijk met veel ingewikkeldere mathematische modellen te werken, en studenten kunnen experimenteren, door bijvoorbeeld de beginwaarden te veranderen.

Door de omvang van het boek (778 bladzijden) en de variëteit aan onderwerpen, zal niemand dit boek van koft tot koft willen lezen. Het is eerder de bedoeling er hier en daar wat uit te halen, en bijvoorbeeld te gebruiken voor het opstellen van opgaven voor studenten.

Ten slotte merk ik op dat veel secties wat moeilijk te lezen zijn door de Maple code die erin verwerkt is. De vele details die met de juiste Maple invoer te maken hebben, maken het enigszins moeilijk de grote lijn van het wiskundige verhaal te volgen. Volgens mij hadden de auteurs er beter aan gedaan de uitleg van de wiskunde en de uitwerking in Maple te scheiden.

W. de Graaf

A. Scott

Nonlinear Science; emergence and dynamics of coherent structures

(Oxford applied and engineering mathematics)

Oxford: Oxford University Press, 1999

474 p., prijs £39.95

ISBN 0-19-850107

Bepaalde niet-lineaire golfvergelijkingen hebben als oplossingen gelokaliseerde lopende golven, solitonen geheten. Solitonen treden op als de dispersieterm en de niet-lineaire term van de differentiaalvergelijking elkaar in evenwicht houden. Sommige niet-lineaire diffusievergelijkingen hebben ook oplossingen die lopende golven zijn. Deze oplossingen treden op als de diffusie-term gecompenseerd wordt door de niet-lineaire term waardoor energie op sommige plaatsen wordt gegenereerd en op andere verdwijnt.

In dit boek worden zowel niet-lineaire golfvergelijkingen als ook niet-lineaire diffusievergelijkingen beschouwd. Een deel van de hoofdstukken is door Scott samen met M.P. Sørensen en P.L. Christiansen geschreven. Scott noemt in zijn voorwoord als eerste motivatie voor het publiceren van dit werk dat de meeste andere boeken over niet-lineaire golfvergelijkingen slechts in beperkte mate fysische achtergronden en realistische toepassingen behandelen. Verder zegt hij dat de meeste boeken op dit gebied voor experts geschreven zijn en niet voor nieuwkomers. Tenslotte wordt in boeken over solitonen het fenomeen van niet-lineaire diffusie meestal niet behandeld.

Dit werk is inderdaad geschikt voor nieuwkomers. Het begint met elementaire lineaire golfproblemen en diffusieproblemen. Daarna wordt de klassieke solitontheorie gebaseerd op inverse verstrooiingstheorie behandeld voor zowel de KdV, de sine-Gordon als de niet-lineaire Schrödinger vergelijking. Verder is er een hoofdstuk over niet-lineaire diffusieproblemen, over niet-lineaire roosters, over perturbatietheorie en over zogenaamde quantumroosters. Het laatste onderwerp betreft niet-lineaire lopende golven in moleculaire kristallen.

Als toepassingen van solitonen worden watervolven (KdV-vergelijking), Josephson supergeleidende transmissielijnen (sine-Gordon) en niet-lineaire optische fibers (niet-lineaire Schrödinger vergelijking) behandeld. Voor wat betreft de niet-lineaire diffusie wordt de modellering van de propagatie en diffusie van elektrische spanninggolven in zenuwcellen vrij uitvoerig bestudeerd.

Ook andere biologische toepassingen krijgen op verschillende plaatsen aandacht.

De auteur is er naar mijn mening inderdaad in geslaagd een boek te schrijven dat voor een relatief breed publiek toegankelijk is. De vaak uitvoerige uitleg maakt het boek geschikt om bij een college te gebruiken. Het bevat veel opgaven. Er is relatief veel aandacht voor toepassingen en fysische achtergronden, maar door het brede scala aan toepassingen zal het voor niet-experts moeilijk zijn de fysische modellen werkelijk te doorgronden. Daar staat tegenover dat er een uitgebreide literatuurlijst is met veel verwijzingen naar ook recente publicaties. Wat betreft de wiskundige aanpak is dit boek niet opvallend origineel of bijzonder te noemen. De theorie en toepassingen betreffen bijna uitsluitend differentiaalvergelijkingen voor één ruimtevariabele. De gevolgde methode is analytisch: meestal worden expliciete oplossingen geconstrueerd en anders worden perturbatiemethoden toegepast. Numerieke methoden worden niet behandeld. Hier en daar komt men in vooral de introducties en de samenvattingen van hoofdstukken overdreven uitspraken tegen over stille revoluties die zich in het recente verleden in de wetenschap zouden hebben voorgedaan of die in de huidige eeuw volgens de auteur te verwachten zouden zijn. Maar in de (gelukkig overheersende) mathematische gedeelten van het boek toont de schrijver aan dat hij een goed didacticus is. Naar mijn mening zal het boek daarom vooral voor studenten van nut kunnen zijn.

H.P. Urbach

various other problems, such as fixed point problems, variational inequalities, minimization problems and problems of solving a functional equation. Chapter 5 deals with several aspects of solvability of CP's and general classical existence theorems are presented. Then applications of the topological degree to the study of CP's are presented in chapter 6. In fact, the study of many CP's can be reduced to a study of the solution set of a certain nonlinear equation. In the next chapter the concept of a zero (respectively $(0, k)$ -epi mapping f is introduced. Roughly speaking, such mappings allow perturbations with certain continuous compact (respectively k -set contraction) mappings without affecting the solvability of the equation $f(x) = 0$ within a given bounded open set (in a Banach space). Several existence results for CP's are given within this context. In chapter 8 the notion of an exceptional family of elements is introduced. This notion seems to be a kind of a quite general form of coercivity. A typical theorem is of alternative type: either a certain CP has a solution or there exists an exceptional family of elements. It reminds of the classical Leray-Schauder alternative. In the next chapter two typical conditions are introduced which form an interesting substitute for lack of compactness (in the infinite dimensional setting); some existence results based on the latter properties are given. In chapter 10 the relation between complementarity theory and fixed point (or coincidence point) theory is considered in more detail. Finally, in the last chapter the author presents some recent topological results in complementarity theory based on a special topological index on cones and on the mountain pass theorem.

Each chapter is followed by its specific references and at the end of the book an additional bibliography on complementarity problems is given.

H. Th. Jongen

K. Groecheinig

Foundations of time-frequency analysis

(Applied and numerical harmonic analysis)

Boston: Birkhäuser-Verlag, 2001

359 p., prijs €75,67

ISBN 0-8176-4022-3

Wiskundige tijd-frequentie analyse houdt zich bezig met de analyse, beschrijving en representatie van functies en operatoren in termen van tijd-frequentie verschuivingsoperatoren (Weyl-Heisenberg groep). Sinds het ontstaan van dit vakgebied, eind jaren zeventig, is het zwaartepunt van het onderzoek verschoven van signaalanalyse met behulp van tijd-frequentie verdelingsfuncties (zoals de Wigner distributie) naar het bestuderen van signaalrepresentaties door middel van reeksen met termen die over een rooster van tijd-frequentiepunten verschoven copieën van een prototypesignaal bevatten (Gabor representaties). De grote motor achter deze ontwikkeling was de toenemende behoefte uit de hoek van de digitale signaalbewerking aan een arsenaal aan efficiënte signaalrepresentatiemethodes. Min of meer in het kielzog van de op wavelets gebaseerde methodes, is in de jaren negentig de Gabor analyse tot volle bloei gekomen. Er zijn nu naar schatting over de wereld enige honderden beoefenaren die (voor wat de wiskunde betreft) komen uit disciplines als Fourier-analyse, complexe en klassieke analyse, abstracte harmonische analyse, functionaalanalyse, numerieke wiskunde, lineaire algebra.

In dit boek wordt relatief veel aandacht besteed (ongeveer



G. Isac

Topological methods in complementarity theory

(Nonconvex optimization and its applications; 41)

Dordrecht: Kluwer, 2000

683 p., prijs €267,73

ISBN 0-7923-6274-8

The complementarity problem (shortly: CP) in its simplest form can be described as follows. Given a vector field f on the Euclidean n -space, find a nonnegative vector x with nonnegative $f(x)$ such that the standard scalarproduct of x and $f(x)$ vanishes. In fact, any solution vector x and the corresponding $f(x)$ are complementary: if a component of x (respectively $f(x)$) is positive, then the corresponding component of $f(x)$ (respectively x) vanishes. Such a complementarity condition is well known from the necessary optimality conditions of first order in finite dimensional optimization under constraints of inequality type (Karush-Kuhn-Tucker theorem). Here, the (Lagrange) multipliers corresponding to inequality constraints are sign-restricted and they may not vanish only if the corresponding constraint is active (binding). Generalizations of the above complementarity problem can be obtained by considering more general spaces than the Euclidean one and by replacing the nonnegative orthant by more general cones (and their duals).

After two introductory chapters the author gives an extensive list of mathematical models based on complementarity problems. Here, the concept of equilibrium both in physical and economical sense plays a central role. The next chapter is devoted to equivalences. The author shows that the general CP is equivalent to

de helft van het aantal pagina's) aan de diverse aspecten van de moderne Gabor analyse. Niettemin komen de wat klassieker thema's — zoals onzekerheidsprincipes, kwadratische tijd-frequentie verdelingsfuncties en pseudo-differentiaaloperatoren — ruimschoots aan bod; er is ook een kort hoofdstuk gewijd aan wavelets. Doordat het boek zo uitvoerig de moderne Gabor theorie behandelt en op dit punt geheel up-to-date is, lijkt het mij een standaardreferentie te worden voor de beoefenaren van het vak. De auteur mikt bewust wat lager dan de doelgroep van Follands standaardwerk *Harmonic Analysis in Phase Space* dat verscheen voordat de nieuwe ontwikkelingen in Gabor theorie plaatsvonden. Dit blijkt onder meer uit de gedetailleerde betoogtrant, waarin de "it is easy to see" frases zorgvuldig zijn gemeden. Voordeel hiervan is dat het boek ook te gebruiken is voor tweede-fase studenten met een goede achtergrond in (Fourier) analyse en Hilbertruimtetheorie (er zijn evenwel geen opgaves). Een nadeel is dat hierdoor het boek nogal 'technisch' oogt. Dit geldt met name voor de hoofdstukken waarin modulatuurruimtes behandeld worden (hierbij moet men in verband met de vele indices, accenten en sub- en superscripten over goede ogen beschikken).

Het vakgebied Gabor analyse is nog volop in beweging. Terwijl de structuur van de Gabor frame-operatoren, waaraan een fraai hoofdstuk wordt gewijd, nu wel grotendeels begrepen is, zijn er nog heel wat fundamentele vragen die ook in dit boek onbeantwoord blijven. Dit geldt met name wat betreft het aangeven van niet-triviale klassen van prototype signalen, met bijbehorende roosterparameters, die aanleiding geven tot Gabor frames. Een ander openstaand probleem — over het bestaan van algemene resultaten van het Wiener $1/f$ type voor de inverses van Gabor frame operatoren — is door de auteur zelf (met M. Leinert) ongeveer ten tijde van het verschijnen van het boek opgelost. Hierbij worden methodes uit de abstracte harmonische analyse gebruikt die wellicht een nieuwe wending geven aan het onderzoek aan Gabor systemen. Voor deze en andere nieuwe ontwikkelingen in het vakgebied is dit boek een ideaal uitgangspunt. Een minpuntje: het belangrijke artikel van N. G. de Bruijn uit 1973 in Nieuw Archief voor Wiskunde (over Wigner distributies en Weyl correspondentie) dat voor een aantal werkers een grote inspiratiebron is geweest, wordt niet vermeld.

G. Janssen

ve made the text more clearly for readers without an engineering background. Major shortcoming of the book is the lacking of exercises, which is a necessity for a good textbook for undergraduates. This is partially compensated by the large amount of examples.

The book starts at an undergraduate level, with classical theory on ANOVA (analysis of variances) and regression analysis, and gradually gets more advanced. Throughout the book, the mathematics involved is well explained and not too advanced readers should be able to follow it. At the end of each of the ten chapters, extensive bibliographies are given; with special attention for the reader who seeks some extra mathematical depth. The authors give a clear insight in Taguchi's approach, based on response surface methodology. Taguchi's ideas received criticism due to the way statistical procedures were incorporated into the approach. Response surface methodology, with models for both mean performance and variance, provides methods to use Taguchi's approach in a statistically valid way. The main goal is to develop procedures that minimize the variance when the mean is kept at a fixed target. The book is a combination of DoE (Design of Experiments), optimization methods, and model building techniques and could be interesting for most people working with quality improvement.

C.J. Albers



D. Bouche and F. Molinet et al.

Asymptotic methods in electromagnetics

Berlin: Springer-Verlag, 1997

525 p., prijs €75,67

ISBN 3-540-61574-1

This book is concerned with asymptotic methods for diffraction of high-frequency electromagnetic (EM) waves by conducting bodies, or by scatterers coated with dielectric material. The classical asymptotic method is geometrical optics (GO) with the EM field propagating along rays determined by Fermat's principle. Around 1960 GO was extended by J.B. Keller to the geometrical theory of diffraction (GTD) in which diffraction is accounted for by the introduction of diffracted rays determined by a generalization of Fermat's principle.

Chapter 1 provides a comprehensive overview of these methods. Several types of diffracted rays are distinguished, and the associated diffraction and attenuation coefficients are derived from the solutions of suitable canonical problems. In Chapter 2 it is shown that the GO and GTD solutions can be identified with the leading term of a Luneberg-Kline expansion for the EM field. Insertion of the full expansion into the Helmholtz equation leads to the well-known eikonal equation for the phase and to transport equations for the amplitude coefficients. The GO and GTD fields are discontinuous or become singular at shadow boundaries and caustics. The neighborhood of each of these loci forms a boundary layer. Chapter 3 entails the construction of an inner expansion for the field in the boundary layer, which is subsequently matched to an outer expansion valid outside the boundary layer. The main topic treated is the inner expansion in the boundary layer of creeping waves near the surface of the scattering object.



I.N. Vuchkov and L. N. Boyadjieva

Quality improvement with design of experiments: a response surface approach

Dordrecht: Kluwer, 2001

505 p., prijs €214,14

ISBN 0-7923-6827-4

This book surveys quality improvement methods in design of experiments. It focuses mainly at Taguchi's approach and other quality improvements methods, from a response surface viewpoint. The book is suitable for (under)graduate students in engineering and statistics, as well as for more advanced readers. The major proofs are given in the appendices and the text is well filled with examples and figures, mainly from engineering and industrial statistics. However, some examples from other topics would ha-

Matching of this inner expansion to the GTD field in the shadow zone reproduces the diffraction and attenuation coefficients in a deductive manner. Chapter 4 deals with the spectral theory of diffraction (STD) developed by Mittra and co-workers.

Chapter 5 (of 140 pages) is concerned with uniform solutions, that is, asymptotic solutions which are uniformly valid throughout an entire domain including boundary layers. The topics discussed are the uniform solutions for diffraction by a wedge, by a discontinuity in curvature, and by a convex object, where the solutions are uniform through shadow boundaries; and the uniform solution at a caustic.

Chapter 6 deals with integral methods, notably, the Maslov method and the method of integration over a wavefront. Yet another integral method is the physical theory of diffraction (PTD) originally due to Ufimtsev, and described in Chapter 7. Chapter 8 deals with impedance boundary conditions to be imposed on the outer surface, as a model for imperfectly conducting and dielectric-coated objects. The book closes with appendices on canonical problems, differential geometry, complex rays, asymptotic expansion of integrals, and Fock functions.

The book covers a lot of material up to the point that the reader may get lost. A closer look reveals that the book contains many (printing) errors and the presentation is unclear at various places. One example is the ad hoc presentation of special functions scattered over the text, where a survey of definitions and relevant properties presented in an appendix would do much better. In the reviewer's opinion the book is not suitable as a textbook; it could serve as a reference work if used with caution. The book is a translation from the French original (1994). The translation is far from accurate, and for a good understanding of the English text the reader may have to go back to the French original. Annoying is the frequent translation of the French 'onde' by 'ray' (instead of 'wave'), so that rays can propagate, attenuate, have a phase and an amplitude et cetera. The publisher is to be blamed for the poor printing of formulas. Many rules of decent mathematical printing are violated in this book. It should be clear that the reviewer is not satisfied with the book. Neither does he understand how previous reviews in *Mathematical Reviews* (1998), *Zentralblatt* (1998) and *IEEE Ant. Prop Mag.* (1998) could be so favorable. J. Boersma

schrijving van $K(A)$ voor willekeurige C^* -algebra's A , voor een groot deel gebaseerd op werk van de auteurs zelf. We vinden een aantrekkelijk mengsel van convexiteitstheorie en operator-algebra's, waarbij het de bedoeling is om eigenschappen van A te vertalen in die van $K(A)$, en vice versa. Zo is er bijvoorbeeld een fraaie dualiteit, ontdekt door Effros en Prosser, tussen de idealen van A en de 'facetten' van $K(A)$.

Het uiteindelijke doel van de auteurs is het beantwoorden van de vraag wanneer een compacte convexe verzameling K van de vorm $K \cong K(A)$ voor een zekere C^* -algebra A is. Deze vraag werd oorspronkelijk gezien als poging de quantum-mechanica te axiomatiseren, waarin de observabelen van een fysisch systeem tenslotte door een C^* -algebra worden gegeven. Van de vijf desbetreffende axioma's op K , die Alfsen en Shultz na 30 jaar onderzoek formuleerden, zijn de belangrijkste twee dat K in een bepaalde zin oriënteerbaar is, en dat het facet dat door twee zuivere toestanden wordt gegenereerd ofwel een lijnsegment ofwel een drie-bal is. Geen van de vijf axioma's heeft een duidelijke fysische betekenis, maar in de zuiver wiskundige convexiteitstheorie is dit resultaat een indrukwekkende prestatie. (De voorkeur van de bespreker gaat overigens uit naar het axiomatiseren van de ruimte van zuivere toestanden op A , waarbij men dichter bij de fysica kan blijven.)

Het boek is mede bedoeld als inleiding tot dit werk, waarbij nog een tweede deel wordt beloofd. Het nadeel hiervan is dat het hier besproken deel 1 op een tamelijk willekeurig moment ophoudt, te weten na de bespreking van het begrip oriëntatie. Gezien de meer dan tien jaar die het schrijven van deel 1 heeft gekost, is het niet duidelijk wanneer het vervolg verschijnt. Niettemin is dit boek prachtig. Het is met grote zorg en zelfs een zekere passie geschreven, en laat werkelijk niets aan de lezer over. Het boek biedt een complete inleiding tot de theorie van operator-algebra's vanuit het gezichtspunt van de toestandsruimte als compacte convexe verzameling, en is in die zin ook een unieke bijdrage tot de literatuur over zowel het eerste als het tweede. Van harte aanbevolen voor functionaalanalytici!

K. Landsman



E.M. Alfsen and F.W. Shultz
**State spaces of operator algebras:
 basic theory, orientations and
 C^* -products**
(Mathematics: theory and applications)
 Boston: Birkhäuser-Verlag, 2001
 362 p., prijs €86,91
 ISBN 0-8176-3890-3

Een C^* -algebra A is een norm-gesloten $*$ -onderalgebra van de algebra van alle begrensde operatoren op een Hilbert-ruimte. We nemen hier aan dat A de eenheid I bevat. Een toestand op A is een lineaire functionaal ω waarvoor geldt $\omega(I) = 1$ en $\omega(x^*x) \geq 0$ voor alle $x \in A$. Een toestand is automatisch begrensd, en de ruimte $K(A)$ van alle toestanden op A is een compacte convexe verzameling in de zwak*-topologie die $K(A)$ erft van de Banach duale A^* . Het onderhavige boek geeft een zeer gedetailleerde be-



D. Alpay, A. Dijksma et al.
**Schur functions — operator
 colligations and reproducing kernel
 Pontryagin spaces**
*(Operator theory advances and applica-
 tions; 96)*
 Basel: Birkhäuser Verlag, 1997
 248 p., prijs €75,67
 ISBN 3-7643-5763-0

In this book the authors consider linear *operator colligations* as certain linear mappings from one Cartesian product of inner product spaces to another. Such colligations are closely related to input-output systems. An *inner product* does not necessarily give rise to a Hilbert space; the quantity $\langle f, f \rangle$ does not have to be ≥ 0 . However, it is symmetric in the sense that $\overline{\langle f, g \rangle} = \langle g, f \rangle$ and linear in the first variable. If $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ is an inner product space, then $(F, -\langle \cdot, \cdot \rangle)$ is its *antispace*. A *Krein space* F is an inner product space, which can be written as a direct sum $F = F_+ \oplus F_-$, where F_+ is a Hilbert space and where F_- is an antispace of a Hilbert space. Such a representation of F comes with an oper-

ator $J_F : F \rightarrow F$ defined by $J_F(f_+ + f_-) = f_+ - f_-$, where $f_{\pm} \in F_{\pm}$. The numbers $\text{ind}_{\pm} F = \dim F_{\pm}$, which do not depend on the fundamental decomposition, are non-negative integers or $+\infty$. A Pontryagin space F is a Krein space with finite negative index $\text{ind}_- F$. An operator colligation $V = \begin{pmatrix} T & FG & H \end{pmatrix}$ is a linear mapping from (HF) to (HG) . The space F is the *inner* or *incoming* space, G is the *outer* or *outgoing* space, V is the *connecting operator*, and $T : H \rightarrow H$ is the *main operator*.

From an operator theoretic point of view the present book is very interesting, but it is not fully self-contained. It generalizes Hilbert space results to the Pontryagin setting, and as indicated it makes a link with system theory. It contains valuable bibliographical notes, and an adequate subject and author index. A good companion is the book *Lectures on operator theory and its applications*, by A. Böttcher, A. Dijksma et al., 1996. J.A. van Casteren

hand, I was impressed by the elegant and efficient construction of an abstract theory and, on the other hand, I was wondering whether the theory was like quicksand, with no way back to the original motivation (indeed, historically there were models first, then equations, then abstraction and, finally, there is theory; but does it come full circle?). So I expect that the book will appeal more to functional analysts in search for 'applications' than to applied analysts in search for theoretical foundations. Despite my doubts, however, my overall opinion is positive: this is a carefully prepared book presenting several original ideas and methods that cannot be found elsewhere, so it deserves a place in any mathematics library that strives to cover a broad range of subjects.

O. Diekmann

M.I. Zelikin

Control theory and optimization I

(Encyclopaedia of mathematical sciences; 86)

Berlin: Springer-Verlag, 2000

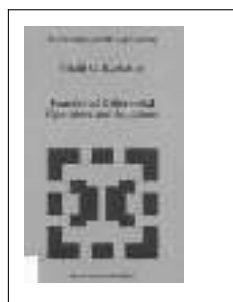
284 p., prijs €91,52

ISBN 3-540-66741-5

In 1724, toen de calculus nog een vrij recente vinding was, publiceerde graaf Jacopo Francesco Riccati in de *Acta Eruditorum* een artikel over een differentiaalvergelijking waarin het kwadraat van de onbekende functie voorkomt. Riccati is al ruim tweeënhalve eeuw dood, maar de naar hem genoemde vergelijking is — althans in matrix-vorm — nog springlevend, getuige onder meer het hier besproken boek van Michael Zelikin. In de regeltheorie is de Riccati-vergelijking in de eerste plaats bekend door zijn verschijning in de oplossing van optimale-besturingsproblemen met lineaire dynamica en kwadratische kostenfunctionalen. De vergelijking komt echter ook naar voren in de tweede-orde-theorie voor algemene problemen in de variatierekening (voldoende voorwaarden voor optimaliteit), en deze invalshoek wordt in Zelikin's boek vooral benadrukt. De blijvende populariteit van de Riccati-vergelijking wordt voor een deel verklaard uit de fraaie projectieve eigenschappen van de vergelijking, die bij Zelikin uitvoerig aan bod komen.

Het boek bestaat uit acht hoofdstukken waarvan de eerste vier fundamenteel materiaal bieden en de laatste vier meer gespecialiseerd van aard zijn. Het eerste hoofdstuk geeft in iets meer dan 50 pagina's een helder overzicht van de klassieke variatierekening. Het tweede hoofdstuk laat verschillende motiveringen zien voor de bestudering van de Riccati-vergelijking. Hoofdstuk drie is meetkundig van aard en werkt toe naar de introductie van homogene ruimtes. In hoofdstuk vier komen meer in het bijzonder Grassmann-variëteiten aan de orde en wordt ingegaan op de flow die de Riccati-vergelijking definieert op de Grassmann-variëteit van n -dimensional deelruimtes van een $2n$ -dimensional reële vectorruimte. Van de meer gespecialiseerde hoofdstukken is hoofdstuk vijf gewijd aan een matrix-generalisatie van de aloude dubbelverhouding, hoofdstuk zes aan complexe Riccati-vergelijkingen, hoofdstuk zeven aan de meerdimensionale variatierekening (onder meer minimale oppervlakken), en hoofdstuk acht aan de partiële differentiaalvergelijking die in het meerdimensionale geval de rol van de Riccati-vergelijking overneemt.

Het thema van het boek zou kunnen worden samengevat als: laten zien wat meetkundig denken vermag in de context van de



V.G. Kurbatov

Functional differential operators and equations

Dordrecht: Kluwer, 1999

432 p., prijs €161,09

ISBN 0-7923-5624-1

As a rule, the differential equations arising in mathematical physics and other fields of science are LOCAL: they tell us that the value of the unknown function and the values of some of its derivatives should satisfy some relationship in any point of the domain of definition. Functional differential equations, on the other hand, involve some non-local relationship (a simple example arises in age-structured population dynamics: mothers of various ages produce offspring of age zero). The theory of such equations was developed both in the former Soviet Union (in particular by A.D. Myshkis) and in the West (notably by J.K. Hale, who emphasized the dynamical systems point of view; reaction-diffusion equations and functional differential equations are the prime examples of generators of dynamical systems on infinite dimensional spaces). Nowadays a considerable literature is available.

The present book is a solid work, presenting in a systematic and clear way a wealth of material, ranging from a crash course in functional analysis (introducing several not-so-well-known notions, so definitely going beyond the standard material) to a detailed analysis of almost periodic functional differential equations. It is an 'all-or-nothing' book, by which I mean that it offers, most likely, a lot to the serious reader who is prepared to invest lots of time while, for sure, offering very little to the casual reader who tries, in just five minutes, to find a theorem or idea that can be 'transported' to another or more specific context. In the generality-accessibility dilemma the author has made a clear choice. Indeed, on page xviii we read: "We prove general technical results on an arbitrary locally compact abelian group G . Of course this generality slightly complicates the book for those who are interested only in equations on the real line".

Admittedly this reviewer suffered a bit. While trying to evaluate the book, I had to deal with conflicting feelings. On the one

variatierekening. Dit mooie doel is door Zelikin met verve gerealiseerd; zie ook de zeer lovende bespreking door Clyde Martin in *SIAM Review* 43(1). Valt er dan niets te mopperen? Een uitgever die regelmatig uit het Russisch vertaalde boeken op de markt brengt zou toch wel iemand mogen aanstellen die zo'n tekst even nakijkt op onnauwkeurigheden. Nu verschijnt onze Zeeman (die van het effect) als Seeman, krijgt de vorst der wiskundigen de voorletter K toebedeeld, en wordt Hamilton voor een Engels wiskundige gehouden. De bekende passage waarin Hamilton vertelt hoe de langgezochte vermenigvuldigregels voor quaternionen uit zijn onderbewuste komen opborrelen tijdens een wandeling met zijn vrouw wordt merkwaardigerwijs gegeven in een versie die een Engelse vertaling is van de Russische vertaling van het Engelse origineel. De oorspronkelijke woorden van Hamilton, "and although she talked with me now and then, yet an *under-current* of thought was going on in my mind, which gave at last a *result*, whereof it is not too much to say that I felt *at once* the importance", verschijnen na heen-en-weer-vertaling als "in spite of her discussion with me, my subconscious ideas were so clear that there finally arose a result whose importance I immediately felt", waarbij toch wel wat van de zwier van het origineel verloren is gegaan.

Zelikin's boek is het eerste in de deelreeks "Control Theory and Optimization" van de Springer-reeks *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Er zijn nog geen verdere delen verschenen.

H. Schumacher



J.M. Borwein and A.S. Lewis
Convex analysis and nonlinear optimization. Theory and examples

(CMS books in mathematics)
Londen: Springer-Verlag, 2000
273 p., prijs \$ 69,95
ISBN 0-387-98940-4

This is a short (273 pages) book on convex analysis and related methods of nonsmooth optimization. Elements of duality theory, classical convex analysis, semidefinite programming, nonsmooth convex programming are described and equipped with a variety of well-chosen examples and exercises for the reader to work out. The book is clearly written and the proofs are mostly either very short or outlined as exercises, which makes the book useful also for students to study as a textbook on convex optimization. Especially as the reading does not require a very deep knowledge of mathematics.

Chapter 1 presents the mathematical background and contains some basic facts and definitions from the geometry of Euclidean spaces, symmetric matrices and elementary topology. Chapter 2 introduces several problems of convex optimization and presents basic tools of convex analysis such as the first and second order conditions for minimizer, convex differentiation, the finite-dimensional separation principle and theorems of alternative (Gordan's theorem and Farkas lemma). Chapter 3 works with duality of convex functions, Lagrange principle and subdifferential calculus. Chapter 4 focuses on continuity properties of convex functions and basic facts on polars, planes of support and extreme points, including the Moreau-Rockafellar theorem and the finite-

dimensional version of the Krein-Rutman theorem. These tools are applied to introduce Lagrange duality and clarify its relation to other types of duality. Chapter 5 works out some well-known cases such as duality in linear and semidefinite programming as well as more specific ones: spectral conjugacy and differentiability, open mapping and inverse boundedness theorems, normal cones et cetera. Chapters 6 and 7 discuss methods of convex nonsmooth optimization and related theoretical aspects. Chapter 8 focuses on fixed point theorems and their applications in the minimax theory, the selection principle and variational inequalities.

Each chapter is equipped with interesting examples from convex geometry, functional analysis and optimization and also ends with a brief historical review and references. It is an advantage of this book, in our opinion, that there are many exercises of various levels of difficulty, chosen with a good mathematical taste. Most of the proofs are also outlined in exercises, where they can be realized by the interested reader step by step.

There are a few things that in our opinion can be considered as shortcomings. Several important and beautiful facts of convex analysis are missed in the book. For example, Minkowski's symmetrization principle, the Bruhn-Minkowski inequality for volumes, cutting-plane schemes, the ellipsoid method and related polynomial algorithms, polynomial solvability of linear programming are not mentioned at all. Linear programming is considered only with respect to the duality theory, and the algorithmic part of this theme is not presented. However this is just a comment, and we understand that a short monograph cannot contain everything.

Another minor remark is that some known theorems are formulated only in their simpler versions, and this aspect was not stressed in the book. For instance, the Urysohn lemma is formulated only for finite-dimensional Euclidean spaces, where it is trivial and actually does not require special tricks suggested in the corresponding exercise. The same applies to Krein's theorem on normal cones. The Stone-Weierstrass theorem is also presented in its special case, and so on. Of course, for a specialist this is not a problem, but for a student it may cause some confusion.

Despite these minor remarks the book should be useful and interesting for both specialists and beginners. The reviewer is happy to have it on his table along with some other monographs and textbooks in convex analysis and optimization.

V. Protasov

A. Mallios

Geometry of vector sheaves, an axiomatic approach to differential geometry I and II

Dordrecht: Kluwer, 1998
441/439 p., prijs € 295,-
ISBN 0-7923-5006-5

This two-volume monograph deals with a sheaf theoretic approach to differential geometry. In particular the author aims to introduce and study differential manifolds and differential geometry without any use of calculus, tangent vectors or differential forms. The basic tool here is sheaf theory. The ultimate goal is to do differential geometry on spaces which are more general than differential manifolds. The first volume focusses on differential manifolds, the second one more on the geometrical concepts. The

first volume starts with an introduction to sheaf theory, presheaves and sheaves with an algebraic structure. In particular, the concept of a vector sheaf and sheaf cohomology are introduced. Several detailed topics on vector sheaves are discussed, including Riemannian and Hermitian structures on vector sheaves, line sheaves, Chern classes, flat vector sheaves. A short appendix on category theory finishes the first volume.

In the second volume the author develops some basic concepts of differential geometry, in particular connections and curvature, obviously in the sheaf theoretic setting. The book is split into two parts. In the first part the geometry is introduced, in the second part the examples and applications. In the first two chapters connections are introduced, first globally, then locally. Also complex manifolds and holomorphic connections are being discussed, next Riemannian and Hermitian structures are considered. In the third chapter the author introduces a notion of curvature of a connection. Flat connections are being considered and a Bianchi identity is proved. Finally a basic theory of characteristic classes is developed. This finishes the first part of the second volume. The first chapter of the last part is devoted to the classical examples. Unfortunately all examples which are being described (manifolds, generalized manifolds, supermanifolds, ...) are treated rather briefly. Whereas the first two parts of the book are quite self-contained and very detailed, this chapter is not, which is unfortunate. In the last chapter the author shows that certain types of topological algebras furnish non-trivial examples of the general theory.

As already stated, the monograph is quite detailed, besides the chapter on the classical examples. There are a lot of cross-references, which makes the book a little bit difficult to read, but a detailed list of notations tries to help. It is a little bit unfortunate that the classical examples are not discussed in full detail, and that the advantage of the axiomatic approach over the classical one is not illustrated very well. The geometry as mentioned is restricted to connections and curvature, and on the thin line between differential geometry and differential topology, I would situate this monograph rather on the topological side. Nevertheless, the book is carefully written and provides a new approach to an important domain in mathematics.

F. Dillen

G. D. Knott

Interpolating Cubic Splines

(*Progress in computer science and applied logic*; 18)

Berlin: Birkhäuser-Verlag, 2000

244 p., prijs €60,33

ISBN 0-8176-4100-9

Dit is een overzichtsboek over cubische splines, dat wil zeggen splines van de graad 3. De inleiding omvat een uitgebreide samenvatting van Euclidische meetkunde en differentiaalmeetkunde, lineaire algebra en vectoranalyse. Daarna behandelt het interpolatie van data met splinefuncties in één en twee variabelen, maar ook interpolatie van data met parametrische curves en oppervlakken.

Ook is er een selectie gemaakt van gespecialiseerde onderwerpen (monotone interpolatie, smoothing technieken inclusief het construeren van curves met minimale energie. Het boek is bedoeld als een tekstboek voor colleges in de laatste jaren van de studie. Het heeft een losse manier van schrijven (maar deson-

danks heb ik de schrijver niet op echte onnauwkeurigheden kunnen betrappen). Het boek bevat veel nuttige opgaven, alsook C-codes van enkele methodes. Zonder meer een aardig, hoewel beperkt in de opzet: waarom alleen cubische splines? R. van Damme



S.R. Alpern and V.S. Prasad

Typical dynamics of volume preserving homeomorphisms

(*Cambridge tracts in mathematics*; 139)

Cambridge: Cambridge university press, 2000

216 p., prijs £30,-

ISBN 0-521-58287-3

Transitieve homeomorfismen (dat zijn homeomorfismen met de eigenschap dat er een punt is waarvan de baan dicht ligt) vormen een telkens terugkerend onderwerp in de topologische dynamica. In 1941 hebben Oxtoby en Ulam in een artikel in de *Annals of Mathematics* laten zien hoe het bestaan van die afbeeldingen kan worden aangetoond met de Stelling van Baire. Zij bewijzen onder andere dat in de ruimte van alle maatbewarende homeomorfismen van de n -cel de transitieve homeomorfismen een dichte G_δ -deelverzameling vormen. Het bewijs is een samenspel van maattheoretische en topologische argumenten.

Het hier besproken boek borduurt voort op het genoemde artikel en de daarin gehanteerde methoden. Het behandelt generieke eigenschappen van maatbewarende homeomorfismen. Aan de orde komen onder andere transitiviteit, chaos en ergodiciteit. Ook worden in dit kader enkele dekpuntstellingen bewezen. De eerste twee delen van het boek bevatten het werk van de eerstgenoemde auteur betreffende compacte variëteiten. Het derde en laatste deel van het boek gaat over gezamenlijk werk van de auteurs betreffende niet-compacte variëteiten. In dit deel wordt met goed gekozen voorbeelden aangegeven welke resultaten uit de eerste twee delen niet kunnen worden gegeneraliseerd voor niet-compacte variëteiten en wordt ook verteld hoe eerder genoemde stellingen moeten worden aangepast in het niet-compacte geval.

Het boek is met veel zorg en toewijding geschreven. De auteurs hebben een boek willen schrijven over hun werk van de afgelopen twintig jaar en wel op zodanige wijze dat delen van het boek met vrucht gebruikt kunnen worden bij een cursus over topologische dynamica. Ze zijn daarin volledig geslaagd.

J.M. Aarts

S.I. Resnick

A probability path

Boston: Birkhäuser-Verlag, 1999

453 p., prijs €65,44

ISBN 0-8176-4055-X

The book is intended to provide "a deep understanding of measure theoretic probability theory" to applicants of the theory, not, in the first place, to mathematicians. The author has written two other books, more or less in the same style: informal, enthusiastic, mathematically rigorous, and with flair. The chapters of the present book discuss Sets and Events, Probability Spaces, Random Variables, Elements and Measurable Maps, Independence,

Integration and Expectation, Convergence Concepts, Laws of Large Numbers and Sums of Independent Random Variables, Convergence in Distribution, Characteristic functions and the Central Limit Theorem, Martingales. This list of key words suggests a standard first course in probability, and in a way that is what the book is. But, apart from the style and the emphasis on applications the book has the following special features. The necessary measure theory is not given in a separate section of the book but mixed in with the probability concepts; the final chapter contains an extensive section on popular subject of financial mathematics; every chapter ends with a large number of (good) exercises, about three hundred in all. There is no room for an introduction to stochastic processes. A few curiosities: in section 8.3.1, the 'Delta Method' is introduced, but it is quite unclear why it is called so; the preface ends with the mystical message "Harry is on vacation"; on page 330 in Problem 37 it says "... the hypothesis that boys and girls are equally likely to be born" — probability one?

All in all a solid and entertaining book, covering maybe too much ground for a one-semester-plus course, and a welcome addition to set of 'good current probability books'. *F.W. Steutel*

cente referenties en theorie (met theorema's en al) 'weggestopt' in de bibliografie en discussie aan het eind van elk hoofdstuk. Daarnaast is nog op enkele plekken de tekst in het boek wat aangepast en uitgebreid.

Al met al is het boek nog altijd een prima naslagwerk en zeker het bezitten waard. Maar bent u al in het bezit van de eerste editie dan is er geen enkele reden om de tweede editie ook aan te schaffen. *E. Tiesinga*

G.K. Batchelor et al.

Perspectives in fluid dynamics, a collective introduction to current research

Cambridge: Cambridge university press, 2000

631 p., prijs €161,66

ISBN 0-521-78061-6

Since fluid dynamics plays a pivotal role in an ever-expanding range of interdisciplinary fields, it is very useful to have one book that covers a wide range of current interest. This nicely illustrated book has been written by eleven authors who each write an introduction to their own speciality within fluid dynamics.

The first chapter, written by S.H. Davis, introduces the fundamental ideas of interfacial fluid dynamics, on length scales at which van der Waals forces and surface tension are still dominant. Y. Couder, in chapter 2, introduces a fundamental instability of a moving fluid-fluid interface, the so-called Saffman-Taylor instability, and considers its nonlinear development. T.J. Pedley, in chapter 3, describes the interactions between blood flow and the elastic properties of the blood vessels. In chapter 4, P. Huerre gives an introduction to the mathematical analysis governing different types of instabilities that can occur within open shear flows. The essential ideas of how to characterize, measure and model turbulence are covered by J. Jiménez in Chapter 5. Very complex interactions can take place when the quantity being transported itself can influence the flow. This is the case in buoyancy-driven convection, described in Chapter 6 by P.F. Linden. H.K. Moffat, in chapter 7, discusses Magneto-hydrodynamics (MHD). Also, a self-sustaining dynamo is discussed, resulting from the fact that the flow itself can generate the magnetic field. The theory of MHD has an interesting similarity with the theory of turbulence, and therefore, similar dimensionless parameters, like the magnetic Reynolds number, are introduced. In chapter 8, M.G. Worster describes some of the fundamentals of solidification, for example, the physical processes that determine the speed of growth of a layer of ice on the surface of water. In chapter 9, written by H.E. Huppert, many flows within the earth are described. It concentrates on the eruptions of lava and volcanic ash, and on the processes that lead to volcanic eruptions. C. Garrett introduces the dynamics of the ocean in chapter 10. This chapter concentrates on the physical mechanisms, rather than on detailed mathematical descriptions of model problems. In the last chapter, M.E. McIntyre describes primary mechanisms giving rise to global circulations of the atmosphere that influence to a large extent our climate.

Of course, the coverage of current fluid-dynamical research is not exhaustive. In most chapters, first a brief description of a physical phenomenon is given, using an example from daily life, before a more detailed mathematical model is described. A study of 'over-idealised' models often helps to gain some intuition and



R.S. Varga

Matrix iterative analysis

(Springer series in computational mathematics; 27)

Berlijn: Springer-Verlag, 2000

358 p., prijs €102,34

ISBN 3-540-66321-5

De eerste editie van dit boek is in 1962 verschenen bij uitgeverij Prentice-Hall. Al na enkele jaren werd het boek niet meer herdrukt. Nu is de tweede editie van het boek uitgekomen in de Springer series in computational mathematics.

In de tussenliggende periode heeft de numerieke wiskunde zich enorm ontwikkeld. De auteur heeft er echter voor gekozen om aan de tweede editie van zijn boek geen nieuwe ontwikkelingen binnen de numerieke wiskunde, zoals bijvoorbeeld multigrid methoden, Krylov subspace methoden en preconditioning, toe te voegen. Hij heeft zich daarentegen beperkt tot het in beperkte mate uitbreiden van de reeds in de eerste editie aanwezige onderwerpen.

Het boek behandelt naast de lineaire algebra aspecten van de iteratieve methoden als de Jacobi, Gauss-Seidel en SOR methoden tevens toepassingen op het gebied van de partiële differentiaalvergelijkingen. De hoofdstukken over niet-negatieve matrices, standaard iteratieve methoden en de daarbij horende vergelijkingstheorema's zijn nog steeds up-to-date. Het hoofdstuk over de ADI methoden daarentegen is door nieuwe ontwikkelingen wat gedateerd geraakt.

De veranderingen ten opzichte van de vorige editie zijn gering. Zo zijn er slechts vier nieuwe paragrafen toegevoegd, waaronder een paragraaf over ovals van Cassini, gegeneraliseerde ordeningen, een semi-iteratieve methode voor de SOR methode en Chebyshev rationale benaderingen van $\exp(-z)$. Verder zijn de paragrafen over M-matrices en reguliere splitsingen uitgebreid met H-matrices en zwak reguliere splitsingen. Regelmatig zijn de re-

understanding of physical processes. Also, some results of numerical methods are discussed. The reader who wants to have more information, can use the long list of references at the end of each separate chapter. The book can be very useful for practitioners and researchers who are working in fluid dynamics and want to broaden their view on the subject. In this respect, students can also use it although it takes quite some effort to follow and understand all mathematical models described in the book. I found it very interesting to get a glimpse of many fascinating subjects of current research. The inspiring text of most chapters helps to arise and keep the readers attention, and numerous figures, sometimes with beautiful colours, help to understand the matter.

A. van der Ploeg

Z. Haba

Feynman integral and random dynamics in quantum physics

(*Mathematics and its applications*; 480)

Dordrecht: Kluwer, 1999

364 p., prijs €135

ISBN 0-7923-5735-3

Useful as the Feynman or path integral may be, it seldom is a real integral to begin with, formally expressing a particle's propagator as a sum of amplitudes $e^{iS/\hbar}$ (with S the classical action) over all continuous paths from initial to endpoint. Thus, the 'integrand' has unit modulus everywhere in the infinite-dimensional path space, and physically irrelevant trajectories have their contributions suppressed only by destructive interference, which means by rapid oscillations of the amplitude. This is unsatisfactory not only for the mathematician: it is also an obstacle to (numerical) approximation of the path integral, and thus the reason why many problems in quantum physics in fact still are too hard for us. The best-known attempt at a resolution formulates the Schrödinger equation in imaginary time, where it becomes a diffusion equation amenable to Wiener integration. This route is particularly attractive, since the quantum-statistical operator $e^{-H/T}$ (with H the Hamiltonian and T the temperature in energy units) is — incidentally or profoundly — an imaginary-time evolution operator. Many static problems can thus be analyzed, but a continuation back to real time is usually only possible for exact or perturbative analytic results.

Positive amplitudes, and hence a probabilistic interpretation, can also be obtained by keeping the time real, but rotating the space variables over $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$. This is the approach chosen in Haba's book. Preliminary chapters deal with quantum and classical mechanics, probability theory and stochastic calculus, and the conventional approach to path integration through the Trotter product formula. Subsequently, the stochastic formulation in complex space is established, and applied to semi-classical expansions, nonlinear oscillations, quantum dynamics on analytic manifolds, dissipative systems (those which are open in that they interact with an environment), tunneling, field theory, and computer simulations. Thus, the covered field is vast, justifying the author's intention to formulate exactly the mathematical problem but only outline the proofs. However, in practice the level of precision falls well short of that. From the first page it is already conspicuous that literature citations have been executed sloppily. A

discrete-time stochastic process is also called a Markov chain, as if the Markov property (which never is clearly defined) would be trivial in discrete time. The normalization of a Master equation's transition rate is given just the wrong way round. Strikingly, 'classical mechanics' is formulated in terms of a flow on a manifold — in fact defining a generic classical dynamical system, where mechanics proper should have involved canonical coordinates p_i, q_i or more abstractly a symplectic structure. As a result, the introduction of Hamilton-Jacobi theory, a cornerstone for the author's semi-classical formalism, becomes unmotivated and *ad hoc*. A decent canonical set-up is finally given some 100 pages later.

A look at the bibliography shows that the author has published the bulk of the material underlying this book in the form of single-author papers. Especially in such a situation, a fresh editorial look at the manuscript would have been invaluable. A text of improved clarity and consistency would make it much easier to gauge the true power of the author's methods. In any case, the nature of the subject does not merit a hasty publication. In conclusion, the way in which this book has been produced does not justify its high price. Because of its wide scope, it may be of interest to those interested in stochastic formulations of quantum physics, and having sufficient background or determination not to be wrong-footed by the presentation. The book's stated goal of introducing a wider audience to these stochastic methods is only partially met.

A. Maassen van den Brink

UWC

Universitaire Wiskunde Competitie

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina <http://academics.its.tudelft.nl/uwc>

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Er worden drie editieprijzen toegekend, van 100, 50, en 25 Euro. De puntentotalen van winnaars tellen voor 0, 50, en 75 procent mee in de laddercompetitie. De aanvoerder van de ladder ontvangt een prijs van 100 Euro en begint daarna weer onderaan. Daarnaast wordt twee maal per jaar een ster-opgave aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend.

Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in $\text{\LaTeX}$ wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 februari 2003. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

Eindredactie: Jan van Neerven

Redactieadres: Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
J.vanNeerven@its.tudelft.nl

De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.

Optiver
DERIVATIVES TRADING

Opgave A

In het bos staat een aantrekkelijke paddestoel die echter zo giftig is dat een eekhoortje er van dood gaat als het er meer dan de helft van opeet. Eekhoortje 1 snoept toch van de paddestoel en even later doet eekhoortje 2 hetzelfde. We hebben niet gezien hoeveel ze aten, maar de volgende dag zien we ze vrolijk door het bos huppelen. Hoeveel van de paddestoel verwachten we nog aan te treffen?

Opgave B

Bepaal $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \cos k$ en $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \cos k$.

Opgave C

Een *harmonische graaf* is een samenhangende, eindige graaf zonder lussen en met enkelvoudige takken, waarbij aan iedere knoop v een natuurlijk getal $n(v)$ is toegewezen zodat

$$2n(v) = \sum_w n(w)$$

voor alle knopen v , waarbij de som genomen wordt over alle knopen w die verbonden zijn met v . Geef alle harmonische grafen die $1 - 2 - 3$ als deelgraaf bevatten.

Editie 2002/2

Op de ronde 2002/2 van de Universitaire Wiskunde Competitie ontvingen we 10 inzendingen.

Opgave 2002/2-A

Zij p een oneven priemgetal en zij $a \geq 2$ en $m \geq 1$ geheel. Toon aan: als $a^m \equiv 1 \pmod{p}$ en $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$, dan is $a^m \equiv 1 \pmod{p^2}$.

Oplossing Deze opgave werd door alle tien inzenders correct opgelost en door velen als volgt gegeneraliseerd: als $a^m \equiv 1 \pmod{p}$ en $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^n}$ voor een zekere $n \geq 2$, dan is $a^m \equiv 1 \pmod{p^n}$. De tweede conditie kan voorts worden afgezwakt tot $a^b \equiv 1 \pmod{p^n}$, mits p geen deler is van b . Dit werd bewezen door Mark Veraar (met een iets sterkere aanname op b) en het team Hendrik Hubrechts-Steven Delvaux. Laatstgenoemden toonden zelfs aan dat

$$\text{ord}_p(a^b - 1) = \text{ord}_p(a^{p-1} - 1) + \text{ord}_p(b),$$

waarbij $\text{ord}_p(k)$ het aantal factoren p in een getal k aangeeft. Het volgende snelle bewijs van de oorspronkelijke opgave is ook van hen.

Omdat $a^m \equiv 1 \pmod{p}$, geldt

$$\alpha := 1 - a^m \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{en} \quad \beta := \sum_{k=0}^{p-1} a^{km} \equiv \sum_{k=0}^{p-1} 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Deze congruenties leiden tot $1 - a^{pm} = \alpha \cdot \beta \equiv 0 \pmod{p^2}$, en dus $a^{pm} \equiv 1 \pmod{p^2}$. Samen met $a^m \equiv a^{pm} \pmod{p^2}$, wat volgt uit $1 \equiv a^{p-1} \equiv a^{(p-1)m} \pmod{p^2}$, geeft dit $a^m \equiv 1 \pmod{p^2}$.

UWC

oplossingen

Opgave 2002/2-B

Zij $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Voor alle paren natuurlijke getallen (i, j) met $1 \leq i < j \leq n$ kiezen we een rationaal getal $q_{i,j} \in \mathbf{Q}$. Veronderstel dat er reële n -tallen $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ bestaan die voldoen aan het stelsel vergelijkingen

$$x_i y_j - x_j y_i = q_{i,j} \quad (1 \leq i < j \leq n). \quad (1)$$

Toon aan dat er dan eveneens twee rationale n -tallen bestaan die voldoen aan het stelsel veeltermvergelijkingen (1).

Oplossing De teams Frobenius en Hendrik Hubrechts-Steven Delvaux vonden een generalisatie waarbij oplossingen in een deellichaam worden gevonden als gegeven is dat oplossingen in het lichaam bestaan. Van de laatstgenoemden is de volgende korte oplossing van het oorspronkelijke vraagstuk.

Het ligt voor de hand dat het makkelijker werken is met de vectoren v_i , waarbij $v_i := \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$. We mogen veronderstellen dat niet alle $q_{i,j}$ nul zijn. We stellen dat $q_{1,2} \neq 0$; in de andere gevallen loopt het bewijs analoog.

We zien dat v_1 en v_2 lineair onafhankelijk zijn, aangezien $q_{1,2}$ precies hun determinant is. We kunnen dan de (unieke) lineaire afbeelding $B : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ nemen zodat $Bv_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $Bv_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ q_{1,2} \end{pmatrix}$, of ook $B(v_1 v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q_{1,2} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$. Hieruit volgt onmiddellijk dat $\det(B) = 1$.

Definieer nu ook $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} := B \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ voor $i \geq 3$. Voor elke $i < j$ krijgen we:

$$q_{i,j} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} = |B^{-1}| \cdot \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}.$$

Bijgevolg vormen ook de (reële) n -tallen $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ en $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ een oplossing van het gegeven stelsel vergelijkingen. Dit geeft volgende 'oplossingsmatrix':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ 0 & q_{1,2} & b_3 & b_4 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

Aangezien de determinant van elk tweetal kolommen rationaal moet zijn, zien we nu eenvoudig dat a_i voor $i \geq 3$ rationaal is door de vergelijking met $q_{2,i}$ te bekijken, en analoog die met $q_{1,i}$ voor b_i .

Merk op dat bovenstaand bewijs bovendien toelaat de rationale oplossing te berekenen, immers

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Opgave 2002/2-C

Voor gehele $m \geq 1$ en reële $x \in (-1, 1)$ definiëren we

$$G_m(x) := \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{mn}).$$

Ga na dat de $G_m(x)$ goed gedefinieerd is, toon aan dat de limiet $\lim_{x \uparrow 1} (1-x) \ln G_m(x)$ bestaat en bepaal zijn waarde.

Oplossing We geven de oplossing van het team Frobenius.

Eerst gaan we na dat $G_m(x)$ goed gedefinieerd is. Zij $m \geq 1$ geheel en $x \in (-1, 1)$ reëel. Een voldoende voorwaarde voor de convergentie van $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{mn})$ is dat $\sum_{n=1}^{\infty} |x^n + x^{2n} + \dots + x^{mn}|$ convergeert. Dit laatste is gemakkelijk te controleren:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^m x^{nk} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m |x|^{nk} = \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} |x|^{nk},$$

en reeks $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^{nk}$ convergeert omdat $|x| < 1$.

UWC

oplossingen

We laten nu zien dat, voor alle $m \geq 1$,

$$\lim_{x \uparrow 1} (1-x) \log G_m(x) = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{m}{m+1}.$$

Met behulp van de meetkundige reeks en de Taylorreeks van $y \mapsto \log(1-y)$ zien we gemakkelijk dat

$$\log G_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (x^{nk} - x^{(m+1)nk}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{x^k}{1-x^k} - \frac{x^{(m+1)k}}{1-x^{(m+1)k}} \right).$$

Vermenigvuldigen met $1-x$ geeft

$$(1-x) \log G_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{x^k}{1+x+x^2+\dots+x^{k-1}} - \frac{x^{(m+1)k}}{1+x+x^2+\dots+x^{(m+1)k-1}} \right),$$

zodat

$$\lim_{x \uparrow 1} (1-x) \log G_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(m+1)k} \right) = \frac{m}{m+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{m}{m+1}.$$

De verwisseling van sommatie en limiet is toegestaan: het is gemakkelijk na te gaan dat de reeks voor $(1-x) \log G_m(x)$ uniform convergeert op het interval $[0, 1]$.

Uitslag Editie 2002/2

De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

Naam	A	B	C	Totaal
1. Team Frobenius (Utrecht)	10	10	12	130
2. Team Hendrik Hubrechts (Leuven)	11	10	10	123
3. Team Gerben Stavenga (Utrecht)	10	8	9	107

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie

We vermelden alleen de top 5. Voor de complete ladderstand verwijzen we naar de UWC-website.

Naam	Punten
1. Filip de Smet	350
2. Roelof Oosterhuis	292
3. Team Hendrik Hubrechts	238
4. Mark Veraar	208
5. Jan Maas	200

Samenvoeging van de Universitaire Wiskunde Competitie en de Problemenrubriek

Met ingang van het volgende jaar worden de Universitaire Wiskunde Competitie en de Problemenrubriek samengevoegd. De rubriek zal steeds drie problemen bevatten waar studenten op de gebruikelijke manier punten mee kunnen verdienen. De ladderstand wordt gewoon naar het nieuwe jaar getransporteerd. Niet-studenten worden uitgedaagd om *hors-concours* hun oplossingen in te zenden. De rubriek komt onder redactie van Jan van Neerven en Robbert Fokink.

Problemen

| Problem Section

Problem 38

Let $S = 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, \dots$ be the set of positive integers that are proper powers. Evaluate the sum $\sum_{s \in S} \frac{1}{s-1}$.

Problem 39 (M. Bencze)

Let $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ be a differentiable function for which $f(x^2) + f(y^2) \leq 2f(\sqrt{xy})$. Prove that $f(1) - f(\frac{1}{e}) \leq \int_0^1 \sqrt{x} f'(x) dx$.

Problem 40 (Matthé van der Lee)

For $t, m \in \mathbf{N}$, let $b_m(t) = \binom{tm-1}{t-1}$, let $a(t)$ be a sequence of natural numbers and let $n \in \mathbf{N}$ be fixed. Verify the equivalence of the following statements:

- for all $t|n$ we have that $\sum_{d|t} a(d) = 0 \pmod{t}$,
- for all $t|n$ there is an $m \in \mathbf{N}$ such that $\sum_{d|t} a(d)b_m(t/d) = 0 \pmod{t}$,
- for all $t|n$ and $m \in \mathbf{N}$ we have that $\sum_{d|t} a(d)b_m(t/d) = 0 \pmod{t}$.

The previous issue of Nieuw Archief presented a solution to Problem 29, but Lute Kamstra has pointed out an error. So his problem remains open.

Problem 29 (Lute Kamstra)

Let $n \in \mathbf{N}$, $h \in \mathbf{N}_0$ and let A be a subset of $\{1, 2, \dots, n+h\}$ of size n . Count the number of bijective maps $\pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A$ such that $i \leq \pi(i) \leq i+h$ for all $1 \leq i \leq n$.

Solutions to volume 3, number 2 (March/June 2002)

Problem 30 (H.J.A. Duparc †)

In general, if you interchange the hands of a clock you don't get a valid time. How many times a day can you interchange the hands of a clock and still get a valid time?

Solution by F.J.M. Barning, Marc Bremer, Ruud Jeurissen, Ton Kool, Karel Post, Ed Schaefer. Karel Post remarks that this is an old problem. If the position of the big hand is at an angle θ , then the position of the small hand is at 12θ . You can change the hands if and only if $144\theta = \theta \pmod{2\pi}$ or $143\theta = 0 \pmod{2\pi}$, which has 143 solutions. Since a day has 24 hours, the answer is 286 times a day. One could also consider clocks with three hands.

Problem 31 (Sander Dahmen)

Define for each positive integer n the regular $(n+1)$ -dimensional solid $R_n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1}: \sum_{i=1}^{n+1} |x_i| \leq 2\}$ and the n -dimensional hyperplane $V_n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1}: \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0\}$. Compute the n -dimensional volume of $R_n \cap V_n$.

Solution Sander Dahmen shows that $\text{Vol}_n(R_n \cap V_n) = \sqrt{n+1} \frac{(2n)!}{n!^2}$. Let $P_n \subset \mathbf{R}^n$ be the projection of $R_n \cap V_n$ onto the first n coordinates. It is easily checked that the volume of $R_n \cap V_n$ is equal to $\sqrt{n+1}$ times the volume of P_n . Now let $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. A simple calculation shows that $x \in P_n$ iff

$$\sum_{\substack{i=1 \\ x_i > 0}}^n x_i \leq 1 \text{ and } \sum_{\substack{i=1 \\ x_i < 0}}^n x_i \leq 1. \quad (1)$$

Let $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ and define $K_I = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n: x_i \geq 0 \text{ for } i \in I \text{ and } x_i \leq 0 \text{ for } i \notin I\}$. Adding up the volumes of P_n contained in K_I for all 2^n possible sets I gives

Solutions to the problems in this section can be sent to the editor — preferably by e-mail. The most elegant solutions will be published in a later issue. Readers are invited to submit general mathematical problems. Unless the problem is still open, a valid solution should be included.

Editor:

R.J. Fokkink

Technische Universiteit Delft

Faculteit Wiskunde

P.O. Box 5031

2600 GA Delft

The Netherlands

r.j.fokkink@its.tudelft.nl

the volume of P_n . By symmetry the volume of P_n contained in K_I only depends on the number of elements in I . For p elements, there are $\binom{n}{p}$ possible sets I . We compute $\text{Vol}_n(P_n \cap K_I)$ for $I = \{1, 2, \dots, p\}$. Define the ' m -dimensional hyperpyramid'

$$Y_m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m : x_1, \dots, x_m \geq 0 \text{ and } \sum_{i=1}^m x_i \leq 1\},$$

which has volume $\frac{1}{m!}$. Identify $\mathbf{R}^n$ with $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{n-p}$. Then (1) implies that $K_I \cap P_n = Y_p \times (-Y_{n-p})$. So $\text{Vol}_n(K_I \cap P_n) = \text{Vol}_p(Y_p) \cdot \text{Vol}_{n-p}(Y_{n-p}) = \frac{1}{p!(n-p)!}$. Summing over all possible sets I gives:

$$\text{Vol}_n(P_n) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \frac{1}{p!(n-p)!} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p}^2. \quad (2)$$

Using the identity $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ and multiplying by $\sqrt{n+1}$ we conclude from (2):

$$\text{Vol}_n(R_n \cap V_n) = \sqrt{n+1} \frac{1}{n!} \binom{2n}{n} = \sqrt{n+1} \frac{(2n)!}{n!^3}.$$

Problem 32

Show that you can cover a square by three smaller squares, but not by two smaller squares.

Solution by Ruud Jeurissen, Kee Wai Lau and Lin Wensong. You can cover a square, using two smaller squares to cover two adjacent edges. The remainder can be covered by a smaller square. Now we prove that two squares are not enough. Let $ABCD$ be a unit square and suppose that is covered by two smaller squares V and W . Enlarging the smallest one we suppose that both have sides $1 - \epsilon$ for some $\epsilon > 0$. Since V nor W can cover both A and C , or both B and D , each must cover two adjacent vertices. Say V covers A and B . Then W covers C and D . There is a $\delta > 0$ such that W does not cover points at distance $< \delta$ from A or from B . So V covers a part AP of AD and a part BQ of BC . Let $p = |AP|$ and $q = |BQ|$. Since V and W cover the square $p + q \geq 1$. This implies that a square $EFGH$ with sides $1 - \epsilon$ can contain a trapezoid $KLMN$ with $|KL| = 1$ and ML of lengths p and NK of length q perpendicular to KL . By a translation of the trapezoid and a relabelling of $EFGH$ we may suppose that K is on EF and L is on FG . But then the (possibly) larger trapezoid fits that we get by supposing that M is on GH and that N is on EH . Then let $\angle ENK = \angle FKL = \angle GLM = \alpha$. We have

$$q \sin \alpha = |EK| = 1 - \epsilon - |FK| = 1 - \epsilon - \cos \alpha,$$

$$p \cos \alpha = |GL| = 1 - \epsilon - |FL| = 1 - \epsilon - \sin \alpha.$$

Multiplying the first equality by $\cos \alpha$ and the second one by $\sin \alpha$ and adding we get

$$(p + q) \sin \alpha \cos \alpha = (1 - \epsilon)(\cos \alpha + \sin \alpha) - 1.$$

But since $p + q \geq 1$ and $\sin \alpha \cos \alpha + 1 \geq \cos \alpha + \sin \alpha$ (square both sides) we have a contradiction.

Problem 33

Show that you can cover an n -dimensional cube by $n + 1$ smaller cubes.

Solution By Lin Wensong. His proof is quite intricate and will be published on Mathematics Web (<http://www.mathematicsweb.org>).

Problem 34

Can you cover an n -dimensional cube by n smaller cubes?

Solution This problem remains open.