

Inhoud | Contents

194	Colofon
195	Redactioneel <i>Ger Koole</i>
196	Agenda
198	Nieuws

Oratie | Inaugural lecture

208	Weg van getallen <i>Frits Beukers</i>
-----	---------------------------------------

Onderzoek | Research

203	Oververhitte vissen in Artis <i>Geertje Hek, David Iron</i>
216	Turbulente menging <i>Bernard Geurts</i>
224	Bubble geometry <i>Sascha Hilgenfeldt</i>
248	Snel oplossen is een experiment waard <i>Henk van der Vorst</i>

Cultuur | Culture

231	Lang Amerikaans? <i>Pieter Moree</i>
-----	--------------------------------------

Onderwijs | Education

233	Wiskundedidactiek in Nederland <i>Fred Goffree</i>
244	De magie van wiskunde <i>Frans Pagen</i>

Opinie | Opinion

253	Geen vergunning vereist <i>Daan Wanrooy</i>
262	Scholarly mathematical communication at a crossroads <i>Greg Kuperberg</i>

Boeken | Books

255	On the verge of new mathematics <i>J. Leo van Hemmen</i>
266	Boekbesprekingen

Problemen | Problem section

275	Universitaire Wiskunde Competitie
279	Problemen

Rubrieken | Departments

207	Instroom <i>Henk van der Vorst</i>
260	TeX <i>Michael van Hartskamp</i>
265	Oud Archief <i>Danny Beckers</i>

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
<http://www.math.leidenuniv.nl/~naw>

Hoofddirectie

Ger Koole (koole@cs.vu.nl)
Chris Zaal (zaal@math.leidenuniv.nl)

Eindredactie

Derk Pik (drpik@math.leidenuniv.nl)

Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@wens.kun.nl)
Hans Melissen (j.b.m.melissen@its.tudelft.nl)
Jaap Molenaar (j.molenaar1@tue.nl)
André Ran (ran@cs.vu.nl)
Bert Zwaneveld (Bert.Zwaneveld@ou.nl)

Bureau redactie

Jos Brakenhoff (naw@math.leidenuniv.nl)
Annelies Hafkenscheid (naw@math.leidenuniv.nl)

Medewerkers

Danny Beckers (dbeckers@sci.kun.nl)
Wieb Bosma (bosma@sci.kun.nl)
J.A.W. van Casteren (vcaster@uia.ua.ac.be)
Jan van de Craats (jcr@euronet.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@its.tudelft.nl)
Michael van Hartkamp

(michael@vanhartkamp.com)

Geertje Hek (ghek@science.uva.nl)
Teun Koetsier (teun@cs.vu.nl)
Joop Kolk (kolk@math.uu.nl)
Pieter Moree (moree@science.uva.nl)
Jan van Neerven (j.vanNeerven@its.tudelft.nl)
Mark Peletier (mark.peletier@cw.nl)
Hans Sterk (sterk@win.tue.nl)
Jaap Top (j.Top@math.rug.nl)

TeX-ondersteuning

Marco Boon (m.a.a.boon@tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@its.tudelft.nl)

Abonnementstarieven/Subscription rates

Nederland € 90 (4 nummers)
Buitenland € 105 (4 issues)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Corrie van Os (wg-admin@math.uu.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
tel. 030-2531430, fax 030-2518394

Exchange subscriptions

Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam

Advertenties

Christiaan van de Woestijne
(cvdwoest@math.leidenuniv.nl)

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

tel. 071-5277121, fax 071-5277101

Vormgeving

Kitty Molenaar, Amsterdam

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEX)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Wiskundig Genootschap

Het Wiskundig Genootschap is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. Het genootschap werd in 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Het is 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap.

Leden van het Wiskundig Genootschap ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het Wiskundig Genootschap bedraagt € 70 per jaar en gepensioneerden betalen € 35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden tegen het gereduceerde tarief van € 25 per jaar.

Leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO kunnen aanspraak maken op een gereduceerd tarief van € 50.

Members of the Société Mathématique de France, and of the American, Australian, Belgian, Indian, London and South-African Mathematical Societies pay € 50 instead of the full membership fee of € 70 a year.

Homepage

<http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Corrie van Os (wg-admin@math.uu.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
tel. 030-2531430, fax 030-2518394

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Eduard Looijenga (UU, *voorzitter*), Mark Peletier (CWI, *secretaris*), Luc Florack (TUE, *penningmeester*), Harm Bakker (RUG), Geertje Hek (UvA), Metha Kamminga (NHL), Annette Kik (CWI), Jaap Molenaar (TUE, UT), Michel Vellekoop (UT), Koos Vrieze (UM).

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient u elektronisch aan te bieden aan de hoofdredactie: koole@cs.vu.nl
Uitgebreidere informatie en auteursinstructies kunt u vinden op de homepage:
<http://www.math.leidenuniv.nl/~naw>

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	uiterste inleverdatum kopij
4	06-12-2002	06-09-2002
1	10-03-2003	06-12-2003
2	09-06-2003	07-03-2003
3	05-09-2003	06-06-2003

Instituutsleden

De publicaties van het Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen.



Centrum voor Wiskunde
en Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit

Op het omslag

Bij het Artis aquarium heeft men in de zomer problemen om het water in de mammoettank op temperatuur te houden. De *Studiegroep Wiskunde met de Industrie* werd gevraagd te zoeken naar een oplossing die de vissen de nodige verkoeling kan bieden. Zie verder pagina 203. Afgebeeld is de wonderbaarlijke Koi, een Japanse siervis.

Wiskunde in het nieuws

De Intermediair van 15 augustus 2002 bevatte een vraaggesprek met Joep Schrijvers, schrijver van *Een rat komt gemakkelijker hogerop*, een 'fout' boek over het dwarszitten van collega's, likken naar boven en trappen naar beneden. Daarin stelt hij dat we terug moeten "naar de tijd waarin vakmensen het voor het zeggen hebben in plaats van al die inhoudsloze mensen met *manager* op hun kaartje". Wat heeft dit met wiskunde te maken? Een nieuwe opleiding tot bedrijfswetenschapper aan mijn universiteit trekt moeiteloos jaarlijks meer dan tweehonderd eerstejaars studenten, terwijl we in ons handen knijpen als we bij wiskunde daar een tiende van binnenhalen. Om jaloers op te worden. En blijkbaar krijgen die 'inhoudsloze mensen' het ook nog voor het zeggen. Onterecht dus, als we Joep Schrijvers moeten geloven.

Vorige week bevond ik mij, letterlijk, op grote hoogte. Gezeten in een Tiroler berghut sprak ik een moeder met een dochter met een wiskundeknobbel. Ze waren al in Eindhoven en Utrecht op de voorlichtingsdagen geweest. "Maar wat moet ze er later mee?" vroeg ze zich hardop af. Schrijvers, en ik ook, weten het wel. Een goede kwantitatieve opleiding, aangevuld met de juiste vaardigheden, is een uitstekend startpunt voor een bedrijfscarrière. Schoolverlaters weten dat niet. Middelbare schoolscholieren zijn, ondanks wiskunde A, hoogst verbaasd als ze erachter komen dat wiskunde echt nuttig is. Dat werd me laatst weer duidelijk toen ik een werkstuk van een 5-vwo scholiere over de Erlang-formule onder ogen kreeg. "Ik zag hoe toepasbaar wiskunde kan zijn: iets dat ik nooit had verwacht!"

Het imago is duidelijk en werkt selectief. We trekken slechts studenten die puur in wiskunde geïnteresseerd zijn. Goede aio's, maar van aio-kandidaten alleen kunnen we niet leven. Op een in 1997 door de KNAW georganiseerde bijeenkomst zei iemand: Beta's worden gezien als 'domme experts', 'partieel intelligent'. Zou je zo iemand als baas willen hebben? Het is dus maar de vraag of wiskundigen het beter zouden kunnen doen dan een inhoudsloze beroepsmanager. Een vicieuze cirkel: een smal en slechts op wiskunde gericht imago trekt een kleine groep, slechts in wiskunde geïnteresseerde studenten die dit imago in stand houden. En waar rook is is vuur, dit imago is niet helemaal uit de lucht gegrepen. Bij een voorlichtingsbijeenkomst op een Hilversumse school vertelde ik over een mooie toepassing van wiskunde.

Aan het eind vroeg een scholiere enigszins aangeslagen of je ook wiskunde zonder toepassingen kan studeren. Is deze houding typerend voor de huidige generatie wiskundestudenten?

Volgens het onlangs uitgekomen rapport van de onderwijsvisiteatie kan het ook anders. Neem Engeland. Daar zijn de opleidingen minder elitair en komen veel studenten op het bredere beroepsperspectief af. We staan dus voor de keuze: blijven we ons richten op de happy few of zijn we bereid overstag te gaan en een bredere opleiding voor een grotere groep studenten aan te bieden? Mijn persoonlijke ervaring is dat het laatste niet per se betekent dat je concessies ten aanzien van de kwaliteit moet doen. Besluiten welke koers te varen moet elk instituut zelf bepalen, ik ben benieuwd hoe de universitaire wiskunde er over tien jaar bijstaat. Minder instituten, maar meer verscheidenheid is mijn verwachting. Waar we het denk ik wel over eens zijn is de toepasbaarheid van de wiskunde. Hoe kunnen we dat aan onze doelgroep duidelijk maken?

Enigszins sceptisch over de formule ging ik naar de Studieweek Wiskunde met de Industrie van februari jongstleden. De scepsis bleek ongegrond en de Studieweek bleek uitstekende promotie voor toegepaste wiskunde op te leveren. Wiskundigen in het aquarium van Artis werden geïnterviewd door het Jeugdjournaal. Het project waar ik aan meewerkte, het modelleren van de menging van euromunten, haalde tientallen kranten en verschillende radiozenders. Ik hoop en verwacht dat dit enig effect heeft. Dat is moeilijk te meten, maar dat één scholiere dankzij mij overtuigd is van het nut van wiskunde weet ik zeker, dankzij een populair-wetenschappelijke publicatie over call centers en de Erlang-formule in de *Nieuwe Wiskrant*.

Onderzoekers en toepassers zouden het tot hun taak moeten rekenen ook niet-wetenschappers van hun werk op de hoogte te brengen. Wiskunde is te mooi om alleen voor onszelf te behouden.

Ger Koole
hoofdredacteur Nieuw Archief voor Wiskunde
Vrije Universiteit, Afdeling Wiskunde
De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam
koole@cs.vu.nl

Agenda

september 2002

t/m 6 oktober 2002

Wiskunstig

Een expositie die een link legt tussen wiskunde en kunst. Met werken van Koos Verhoeff, Rinus Roelofs, Tom Longtin en Peter Raedschelders. Naast wiskunde in de kunst wordt er in de expositie ook aandacht besteed aan wiskunde in de natuur en wiskunde in-en-om het huis. Via diverse actieve 'hands-on' exhibits worden bezoekers uitgedaagd zelf aan de slag te gaan met wiskundige vraagstukken.

plaats Explorion, Heerlen

info <http://www.wiskunstig.nl>

6 september–30 mei 2003

Seminar on noncommutative geometry

Tweewekelijks seminarium

plaats Korteweg-de Vries Instituut, Amsterdam

info <http://staff.science.uva.nl/~npl/BC.htm>

5–6 september

ICT-Kenniscongres

plaats Nederlands Congres Centrum, Den Haag

info <http://www.ict-kenniscongres.nl>

9–20 september

Workshop on higher-dimensional data

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.medstat.medfac.leidenuniv.nl/MS/HD

13 september

Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info <http://olympiads.win.tue.nl/nwo>

20–21 september

The emergence of artificial languages

Conferentie *Asian Contributions to the Formation of Modern Science*, met aandacht voor de taalkundige aspecten van wiskunde in de diverse culturen.

plaats Universiteit Leiden

info www.iias.nl/iias/agenda/modernscience

23–25 september

6th International colloquium on grammatical inference

plaats Amsterdam

info <http://www.illc.uva.nl>

25–27 september

Woudschoten-conferentie 2002

27ste conferentie van de Nederlands-Vlaamse Numerieke Wiskunde Gemeenschappen. Thema: Eindige elementen.

plaats Conferentiecentrum Woudschoten, Zeist

info www.cwi.nl/~jankok/woudschoten.html

27 september

KUN Wiskundetoernooi

Jaarlijks wiskundetoernooi voor middelbare scholieren.

plaats Katholiek Universiteit Nijmegen

info <http://www-math.sci.kun.nl/math/wistoer-nooi>

oktober 2002

6 oktober

22ste Kubus dag

Jaarlijkse bijeenkomst van de leden van de Nederlandse Kubus Club

plaats Leidse Instrumentmakers School

info a.f.van.der.plaat@hccnet.nl

7–11 oktober

Stochastic models from statistical physics

plaats Eurandom, Eindhoven

info <http://www.eurandom.tue.nl>

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

14–18 oktober

☐ **Dutch Research Schoolweek in Logic**

The aim of the event is to bring together the Dutch logic community and to provide an up-to-date overview of the projects carried out within the school.

plaats Amsterdam

info <http://www.ozsl.uva.nl>

18 oktober

☐ **CWI in bedrijf**

plaats CWI, Amsterdam

info <http://www.cwi.nl/events>

18–19 oktober

☐ **Jaarlijkse bijeenkomst van de Belgian Statistical Society**

plaats Congrescentrum Rolduc, Kerkrade

info <http://www.luc.ac.be/censtat/BSS2002>

20 oktober

☐ **Nationale wetenschapsdag**

Universiteiten en onderzoeksinstituten openen hun deuren voor het grote publiek.

plaats heel Nederland

info <http://www.weten.nl>

21–22 oktober

☐ **BNAIC'02**

plaats Faculty Club, Groot Begijnhof, Leuven

info www.cs.kuleuven.ac.be/conference/bnaico2
Belgian-Dutch conference on artificial intelligence

november 2002

november

☐ **Advanced course: Intelligent data analysis**

plaats Mitland hotel, Utrecht

info <http://www.cs.uu.nl/siks/courses.html>

1 november

☐ **EIDMA Seminar coding, crypto & information theory**

plaats TUE, Traversegebouw

info <http://www.win.tue.nl/math/eidma/codseminar.html>

2 november

☐ **Bètavrouw en Carrière**

Derde lustrum van NIMF, het landelijk netwerk voor vrouwen in de informatica, wiskunde, natuurkunde.

plaats Utrecht

info <http://www.science.uva.nl/misc/nimf>

7–9 november

☐ **Analysis and optimization of stochastic networks**

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl/announcements.htm

11–13 november

☐ **Bijeenkomst van stochastici**

plaats Congrescentrum 'De Werelt', Lunteren

info <http://www.cs.vu.nl/lunteren>

15 november

☐ **Viering 10 jaar Stieltjes Instituut**

plaats KIVI, Den Haag

info <http://www.stieltjes.org/>

16 november

☐ **Jaarvergadering/studiedag NVvW**

plaats Calscollege, Nieuwegein

info <http://www.nvww.nl>

18–22 november

☐ **Workshop on branes and cosmology**

plaats Lorentz Center, Leiden

info <http://www.lc.leidenuniv.nl>

23 november

☐ **Ars et Mathesis-dag**

plaats Het Brandpunt, Baarn

info <http://www.arsetmathesis.nl>

25–27 november

☐ **Innovative time integrators for PDEs**

Internationale workshop numerieke analyse

plaats CWI, Amsterdam

info <http://www.cwi.nl/events/2002/IIPDE>

29 november

☐ **Afscheidssymposium Marinus Kaashoek**

plaats Auditorium VU, Amsterdam

info André Ran, ran@cs.vu.nl

december 2002

4 december

☐ **Benelearn 2002**

Twelfth annual Dutch-Belgian conference on machine learning

plaats Utrecht

info <http://www.cs.uu.nl/marco/benelearn>

9–13 december

☐ **Workshop Representations of Lie groups**

plaats Lorentz Center, Leiden

info <http://www.lc.leidenuniv.nl/lorentz.center>

13 december

☐ **EIDMA Cryptography working group**

plaats Vergadercentrum La Vie, Utrecht

info www.win.tue.nl/math/eidma/cwg.html

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijgevoerde activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur dan uw bijdrage ($\pm$ 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar naw@math.leidenuniv.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Lustrumsymposium Bètavrouw en Carrière

Dit jaar viert NIMF haar derde lustrum. NIMF is het landelijk netwerk voor vrouwen in de informatica, wiskunde, natuurkunde en aanverwante richtingen waarin vrouwen een minderheid vormen. Om dit lustrum te vieren wordt op zaterdag 2 november 2002 in Utrecht een symposium gehouden met als thema 'Bètavrouw en Carrière'.

De vragen die op het symposium aan de orde komen zijn: Waarom neemt het aantal vrouwen af na iedere carrière-stap? Maken vrouwen anders carrière dan mannen? Welke maatregelen kunnen worden genomen om de situatie te verbeteren? 's Morgens zijn er vier sprekers uitgenodigd die zullen ingaan op verschillen tussen jongens en meisjes, danwel mannen en vrouwen, in het onderwijs en aan het begin van hun carrière. Ook zal er aandacht worden besteed aan emancipatiebeleid en zal een vrouwelijke hoogleraar vertellen over haar eigen ervaringen. Na de lunch zijn er workshops met onderwerpen als: 'presenteer jezelf', 'loopbaanplanning', 'time-management' en 'emancipatie op de werkvloer'. Hierna wordt er plenair gedebatteerd tussen een deskundig panel en het publiek over de drie vragen die op het symposium centraal staan. De dag wordt afgesloten met een borrel.

Geïnteresseerden zijn welkom om dit symposium bij te wonen. Sommige workshops zullen echter alleen toegankelijk zijn voor vrouwelijke deelnemers. Meer informatie is te vinden op www.science.uva.nl/misc/nimf, waar belangstellenden zich tevens kunnen opgeven voor het symposium of als NIMF lid. *Geertje Hek*

Fields medailles 2002

De Fields Medailles voor 2002 zijn op 20 augustus 2002 uitgereikt tijdens het Internationaal Mathematisch Congres te Peking aan de wiskundigen Laurent Lafforgue (IHES, Frankrijk) en Vladimir Voevodsky (Princeton). Het werk van Lafforgue heeft betrekking op het 'Langlands Programma', dat vermoedens betreft over relaties tussen algebra (representaties van Galois groepen) en analyse (representaties van topologische matrixgroepen). Voevodsky werkt aan cohomologie theorie voor algebraïsche variëteiten. Tevens werd de Nevanlinna Prijs voor wiskundige aspecten van informatica uitgereikt aan Madhu Sudan (MIT) voor zijn werk in complexiteitstheorie en aan error-correcting codes. *Ger Koole*



Van links naar rechts: Laurent Lafforgue, Vladimir Voevodsky en Madhu Sudan

Polynomiale priemgetallentest ontdekt

Professor Manindra Agrawal en zijn twee studenten Neeraj Kayal en Nitin Saxena van het Indiase Institute of Technology (IIT) hebben een algoritme ontwikkeld om in polynomiale tijd te beslissen of een getal priem is of niet.

De huidige technieken om dit te bepalen zijn gebaseerd op toevalsmethoden: de methode geeft altijd een antwoord, maar het antwoord is fout met een kleine kans (Monte Carlo-algoritme) of er is soms geen antwoord, maar als het antwoord er is, is het wel correct (Las Vegas-

algoritme). Het nieuwe algoritme garandeert een juist antwoord dat in principe met een computer binnen redelijke tijd kan worden berekend. Het artikel is beschikbaar op het volgende internetadres:
www.cse.iitk.ac.in.
 bron: *New York Times*, 8 augustus 2002



Van links naar rechts: Nitin Saxena, Neeraj Kayal en professor Manindra Agrawal

Successen op de Internationale Wiskunde-olympiade

De Internationale Wiskunde Olympiade heeft dit jaar plaatsgevonden in Glasgow. Er hebben 479 leerlingen uit 84 landen meegedaan, die individueel zes wiskundeproblemen moesten oplossen. De Nederlandse delegatie is geselecteerd via een aantal rondes uit meer dan 2000 leerlingen.

Nederland behaalde de 54ste plaats. De competitie is gewonnen door China, die 212 punten behaalde. Daarna kwamen Rusland, Verenigde Staten, Bulgarije, Vietnam, Korea, Taiwan, Roemenië, India, Duitsland. Erik van Ommeren heeft een bronzen medaille behaald. Thomas Beuman en Birgit van Dalen misten het brons op 1 punt na. Birgit had een eervolle vermelding voor het geheel foutloos oplossen van één opgave. De andere Nederlandse kandidaten waren Esther Bod, Misha Stassen en Taco Vader.

Op www.imo2002.com staat informatie over de IMO. Ook de uitslag is daar te vinden, evenals een link naar opgaven van IMO's uit vorige jaren.

bron: *Internationale Wiskunde Olympiade*

Lenstra vult gat in Eschers Prentententoonstelling

Zo kopte dinsdag 30 juli de *New York Times*. Hendrik Lenstra, hoogle- raar getallentheorie in Berkeley (Verenigde Staten) en in Leiden kwam bij toeval in aanraking met de prent *Prentententoonstelling* van M.C. Escher. De litho heeft in het midden een oppervlak dat door Escher niet is ingevuld. Hendrik Lenstra heeft een methode bedacht om het ontbrekende midden in te vullen. Om een beter inzicht te verwerven in het creatieve proces van Escher, raadpleegde Lenstra het boek *De toverspiegel van M.C. Escher* van Bruno Ernst, die in de periode dat Escher aan deze litho werkte hem bezocht.

Volgens Ernst was Eschers doel het scheppen van een uitdijng zonder begin of einde (zie pagina 33 van bovengenoemd boek). Escher bereikte zijn doel door het opzetten van een rooster dat met de klok mee gekromd was. Van buiten naar binnen werkend, beginnend met een niet verwrongen kader, gebruikte Escher het rooster vakje voor vakje om tot een draaiing van de afbeelding te komen. Het was Lenstra spoedig duidelijk dat de logische extensie van de prent een herhaling van de voorstelling was: een man in een prentengalerij die naar een prent kijkt waar een galerij op staat afgebeeld, waar voor een raam

weer een man te zien is die naar een prent kijkt. De prentengalerij moest zichzelf herhalen, echter op een gecompliceerde manier.

Volgens Ernst probeerde Escher het rooster zo te maken dat een vierkant bij draaiing een vierkant bleef. Dit was volgens Lenstra een cruciale observatie en het bracht hem op het idee van conforme afbeeldingen. Hij startte een project, samen met onder andere Bart de Smit en Joost Batenburg, dat heeft geleid tot een oneindige voortzetting van de prent en een computerprogramma dat het midden ver kan uitvergroten.

Eén vraag blijft onbeantwoord. Wist Escher, die alleen de hogereburgerschool had gevolgd, wat in het midden hoorde en was het niet opvullen van het midden een bewuste keuze? Of wist hij gewoon niet hoe het in het midden verder moest? Lenstra merkte hierover op dat hij zich onmogelijk in Eschers denkwereld kon verplaatsen: "Ik geef er de voorkeur aan om Escher te zien als de natuur", antwoordde hij "en mezelf als de natuurkundige die de natuur modelleert."

Voor de gecompleteerde afbeelding, diverse vergrotingen en animaties, zie <http://escherdroste.math.leidenuniv.nl>

Bron: *New York Times*, 30 juli 2002



De gecompleteerde versie van Eschers litho

Johann Bernoulli-bolelektriseermachine

Johann Bernoulli (1667–1748), de jongste van de befaamde gebroeders uit Basel, werd in 1695 benoemd op de leerstoel wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen. Zijn leeropdracht omvatte ook de natuurwetenschappen, terwijl hij af en toe zelfs voor medische kwesties werd geraadpleegd. In 1700 stuitte Bernoulli op een merkwaardig verschijnsel: bij de beweging van een kwikbarometer vertoonde zich bovenin een lichtschijnsel als de meniscus naar beneden bewoog. Dat was al eerder geconstateerd, maar nooit systematisch onderzocht.

Bernoulli ontdekte dat het verschijnsel afhing van de zuiverheid van het gebruikte kwik en ontwikkelde manieren om het kwik te 'wassen'. Hij beschreef zijn werkwijze in brieven aan Pierre Varignon, die ervoor zorgde dat deze werden opgenomen in de *Mémoires* van de Académie Royale des Sciences. Bernoulli's onderzoek culmineerde in

een phosphore perpétuel, vrij vertaald een eeuwigwerkende lamp: een vacuüm gezogen bolkolf, een zogenaamde fiool, met wat kwik erin gaat bij het stevig schudden licht geven, telkens opnieuw. Het nieuws van deze mysterieuze lichtbron bereikte ook Londen, waar Francis Hauksbee Sr., als lid van de Royal Society, was belast met de uitvoering van experimenten ten behoeve van zijn mede-fellows.

Hauksbee ging door waar Bernoulli in 1701 was gestopt. Het kwik bleek niet essentieel: ook stukjes barnsteen vertoonden een lichtschijnsel als zij in de vacuüm gezogen bolkolf werden rondbewogen. Die bolkolf zelf werd een draaibaar opgehangen glazen bol, voorzien van een kraan voor de verbinding met de luchtpomp en aangedreven door een drijf wiel annex riem. In het voorjaar van 1706 kon Hauksbee zijn verbaasde collegae laten zien dat kwik (of barnsteen) niet eens nodig is om een lichtschijnsel in de vacuüm bol op te wekken: wanneer men zijn handen vlakbij de draaiende bol houdt, treedt het al op. Zijn onderzoek stond aan het begin van een ontwikkeling die zou leiden tot de moderne plasmabol. Hauksbee's apparaat werd bekend onder de naam bolelektriseermachine.

In het kader van het VPRO-televisieprogramma Flogiston van Wim T. Schippers (onder eindredactie van Rob van Hattum) is aan de Rijksuniversiteit Groningen een replica gebouwd van een vroeg-18de-eeuwse bolelektriseermachine. De replica is Johann Bernoulli-bolelektriseermachine gedoopt, die in de uitzending van 24 juni 2002 is gedemonstreerd.

Henk Kubbinga



De Johann Bernoulli-bolelektriseermachine, een portret van de naamgever (1743; voorgrond), Henk Broer (voorzitter Stichting Johann Bernoulli voor de Wiskunde te Groningen; links, staand), Folkert van der Woude (bestuurslid Stichting Nicolaas Mulerius Fonds; links, zittend) en Henk Kubbinga.

Twee eredocoraten op het Centrum voor Wiskunde en Informatica

Twee onderzoekers van het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) hebben een eredocoraat ontvangen voor hun werk: Lex Schrijver en Jan Willem Klop.

Lex Schrijver ontving 15 juni een eredocoraat aan de University of Waterloo in Canada. De aankondiging vermeldde: "Schrijver's reputation was largely achieved with his book, *Theory of Linear and Integer Programming*, described as 'the most outstanding piece of scholarly work in the field of mathematical programming' ". Lex Schrijver is leider van CWI's onderzoekscloster 'Probability, Networks and Algorithms' en hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam. Hij ontving eerder de Fulkerson Prize van de American Mathematical Society (1982)

en de Lanchester Prize van de Operations Research Society of America (1987). Sinds 1995 is hij lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.

Jan Willem Klop heeft op 11 juli een eredocoraat van de Engelse University of East Anglia ontvangen. Jan Willem Klop is onderzoeker op het CWI en de Katholieke Universiteit Nijmegen, en hoogleraar in de Toegepaste Logica aan de Vrije Universiteit in Amsterdam. Hij werkte samen met Jan Bergstra en Jos Baeten aan de ontwikkeling van procesalgebra. Tegenwoordig werkt Jan Willem Klop op het gebied van termherschrijfsystemen. Over dit onderwerp is een omvangrijk boek voltooid, samen met een team van co-auteurs van UvA, CWI, UU, KUN en de University of East Anglia.

Annette Kik

Universitaire wiskundeopleidingen in cijfers

In juni 2002 is het onderwijsvisitatierapport wiskunde verschenen. Het rapport geeft een gedetailleerde analyse van de staat van het onderwijs aan de wiskundefaculteiten. Het rapport is inclusief bijlagen 153 pagina's lang. (Zie voor een algemene beschouwing op basis van het rapport het artikel *Rendement versus niveau* van Jack van Lint, de voorzitter van de commissie, in het vorige nummer van dit blad.)

De commissie heeft de verschillende kwaliteiten van de faculteiten in allerlei tabellen samengevat. De eerste tabel, hieronder afgedrukt, geeft elke opleiding een cijfer per onderdeel.

Bron: Onderwijsvisitatierapport 2002

	UU	TUE	RUG	VU wis	VU bwi	KUN	TUD	UvA	UL	UT
Missie	7	8	6	8	6	4	7	5	6	8
Programma	8	8	7	8	7	6	7	7	6,5	7,5
Leeromgeving	6	8	4	7	6,5	6	6	7	5	7,5
Aansluiting vwo	6	8	8	7	7	9	7	8	8	8
Studeerbaarheid	7	7	7	8	7,5	6	6,5	7,5	7	8
Rendement	5	7	6	7	6	5	6	6	7	8
Afgestudeerden	8	8	6,5	7	6,5	6	7,5	7	6	7,5
Organisatie	6	7	6	8	8	6	4	7	6	8,5
Staf	9	8	8	7,5	7,5	7	7	8	7,5	8
Faciliteiten	7	8	7	8	8	6,5	7	8	7	8
Inhoud	8	8	7	8	7	6	7	7	6,5	7,5
Internationalisering	6	6	7	7	7	5,5	7,5	7	6	9
Externe contacten	8	8	7	6	6	6	7	7	8	8
Interne kwaliteitszorg	8	8	7	7	7	7	5	8	6	8
Zelfstudie	8	7	6	8	8	6	4	8	7	8

Tabel 1 De rapportcijfers van de Nederlandse wiskundeopleidingen

Eredocoraat Gohberg in Timișoara, Roemenië

Op 28 juni 2002 is aan Israel Gohberg, emeritus hoogleraar aan de Vrije Universiteit te Amsterdam, een eredocoraat toegekend door de wiskundefaculteit van de Universiteit Timișoara, Roemenië.

Israel Gohberg werd in 1928 geboren in Tarutino in de Sovjet-Unie. Zijn wiskunde-opleiding begon na de tweede wereldoorlog in Frunze (Kirgizië) en daarna in Kishinev, waar hij in 1951 afstudeerde. Vanaf 1950 werkte hij twaalf jaar samen met M.G. Krein in Odessa, hetgeen

heeft geresulteerd in vele publicaties. In 1964 werd hem toegestaan zijn tweede doctoraat te behalen aan de universiteit van Moskou. Op dat moment was hij hoofd van de afdeling functionaalanalyse van de Moldavische tak van de Akademie van Wetenschappen in Kishinev. Kishinev is de hoofdstad van Moldavië, dat tot 1940 bij Roemenië heeft behoord. Gohberg was de Roemeense taal niet vergeten: hij sprak zijn dankwoord uit in het Roemeens.

In 1974 emigreerde hij met zijn familie naar Israël en werd hij benoemd tot professor aan de Universiteit van Tel Aviv. Negen jaar later werd hij benoemd tot deeltijd hoogleraar aan de Vrije Universiteit in Amsterdam. Sindsdien maakt hij deel uit van de operatorentheoriegroep aan deze universiteit. In deze periode bekleedde hij ook deeltijdposities in Rehovot, Stony Brook (NY), Athens (GA) en College Park (MD).

Prof.dr. Dumitru Gaspar roemde Gohberg als grote inspirator van vele wiskundigen. Ook sprak hij zijn bewondering uit voor de wijze waarop hij menige wiskundige na de ineenstorting van de Sovjet Unie heeft geholpen elders een nieuw bestaan op te bouwen. Gohberg ontving vele prijzen waaronder een eredoctoraat aan de Universiteit Darmstadt (1997) en een eredoctoraat aan de Technische Universiteit Wenen (2001).

Derk Pik

Informaticus Edsger Dijkstra overleden

Op 6 augustus is de informaticus Edsger W. Dijkstra in Nuenen overleden, op de leeftijd van 72 jaar. Dijkstra leed aan kanker. E.W. Dijkstra is beroemd geworden door zijn bijdragen aan de informatica, met name met zijn ideeën over gestructureerd programmeren. Deze ideeën worden inmiddels in vrijwel alle programmeertalen toegepast.

E.W. Dijkstra werkte van 1952 tot 1962 op het Mathematisch Centrum, het tegenwoordige Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) te Amsterdam. Van 1962 tot 1984 was hij hoogleraar aan de Technische Universiteit Eindhoven. Vanaf 1973 was hij ook verbonden aan de Burroughs Corporation. Van 1984 tot zijn pensioen in 1999 werkte hij aan de University of Texas in Austin.

Hij heeft veel onderscheidingen gekregen, waaronder de Turing Award van ACM (1972), het equivalent van de 'Nobelprijs voor informatica'. Hij ontving ook verschillende eredoctoraten en awards, het meest recent van de C&C Foundation of Japan, gefinancierd door de NEC Corporation.

Dijkstra was de 'founding father' van de mathematische fundamente van de informatica in Nederland, met een grote impact op het onderzoeksprogramma op het CWI in de jaren vijftig en zestig en de universitaire onderzoeksgemeenschap in Nederland.

Annette Kik



Edsger Dijkstra

Carrièreperspectief wiskundigen uitstekend

In een enquête van het weekblad Elsevier, gehouden onder afgestudeerden van het studiejaar 1999–2000, komen zowel de hbo-wiskundeleraar als de universitaire wiskundige positief naar voren. Het onderzoek richt zich naast de beste beloning ook op de tevredenheid van de afgestudeerde met zijn baan. Het onderzoek vergelijkt ongeveer honderd verschillende typen banen.

Op de samengestelde schaal van de beste baan zowel naar beloning als tevredenheid komt de wetenschappelijk onderzoeker op de negende plaats. Hij heeft een aanvangssalaris van 1600 euro. Ter vergelijking: een beginnende tandarts verdient 2775 euro en is de meest-verdienende starter. Desondanks komt hij op dezelfde schaal op de vierde plaats. Bovenaan staan rayon- area- en accountmanagers: banen met een goed salaris, gunstige arbeidsvoorwaarden en vele extra's (sic.). Het meest ongelukkig is de medewerker van de helpdesk.

De leraar wiskunde vindt zeer snel een passende baan (binnen ongeveer tweeënhalve maand). Alleen de fysiotherapeut, de informaticus en de leraar basisonderwijs zijn in de categorie van het hbo nog sneller. De academische wiskundige doet er ongeveer vijfenhalve maand over om een geschikte functie te vinden.

Onder de hbo-ers vindt de wiskundeleraar ook zeer snel een vaste baan: 74 % heeft na anderhalf jaar een vast contract. In deze rangorde staat het beroep van verpleger bovenaan: 93 % heeft na anderhalf jaar al een vaste aanstelling. Onder de academici staat econometrie op de vijfde plaats met 75 % en wiskunde op de tiende plaats met 66 %. Overigens is slechts drie procent van de wiskundigen na anderhalf jaar nog werkloos.

Het is frappant dat de afgestudeerden in de wiskunde vooral afkomstig zijn uit gezinnen met lager tot middelbaar opgeleide ouders en dat afgestudeerden in de natuurkunde juist uit hoogopgeleide gezinnen komen. Zie www.seo.nl voor het volledige onderzoek.

bron: Elsevier, juni 2002

Een nieuwe wetenschap

De wiskundige en oprichter van softwarebedrijf Mathematica Stephan Wolfram heeft tien jaren in afzondering van de academische gemeenschap gewerkt aan het onlangs verschenen boek *A New Kind of Science*. Volgens hem moeten wetenschappers de calculus en andere conventionele wiskundige gereedschappen verlaten en zich richten op simpele 'regels' die toegepast kunnen worden om een enorme variatie van complexe patronen te genereren. Zo zegt hij dat met deze patronen tal van biologische en fysische fenomenen van de vorm van bladeren tot aan de structuur van de ruimte-tijd verklaard kunnen worden.

Wolfram's fascinatie voor het modelleren van fenomenen zoals de groei van sneeuwvlokken, turbulentie en de structuur van blaadjes bracht hem tien jaar terug bij de simpele systemen, bekend als cellulaire automaten. Hij is ervan overtuigd dat deze automaten kunnen worden gebruikt om het gedrag van complexe systemen na te bootsen.

Wolfram laat zien dat een groot aantal berekeningen verborgen ligt in de output van de zogeheten 'rule 110', zoals de berekening van natuurlijke logaritmes en de oplossingen van differentiaalvergelijkingen. 'Rule 110' is een universele computer, het kan dezelfde berekeningen aan als elke echte machine, alleen zijn de oplossingen van de berekeningen veel gemakkelijker te verkrijgen.

Of de cellulaire automaten echter gebruikt kunnen worden om een fundamentele basis voor ruimte en tijd te beschrijven heeft Wolfram niet voldoende kunnen bewijzen. In zijn boek staan regels die de juiste

ruimte kunnen creëren, een driedimensionale ruimte waar Einstein's algemene relativiteitsleer geldt. Wolfram geeft echter toe dat deze nog niet voldoen aan Einstein's vergelijkingen. *MUON (RUG)*

PIONIER-subsidie Klaas Landsman

Klaas Landsman, hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam krijgt van het NWO en de UvA samen één miljoen euro PIONIER-subsidie voor zijn onderzoek naar singulariteiten in de natuurkunde. Dit zijn exotische situaties waarin de geldende natuurkundige wetten geen toereikende verklaring bieden.

Stephen Hawking, die zijn leven wijdt aan het doorgronden van het heelal, ontdekte dat de oerknal en andere singulariteiten zoals zwarte gaten in de klassieke natuurkunde onvermijdelijk zijn. De klassieke beschrijving stuit daar op haar grenzen. Niemand weet of, en zo ja hoe, de quantumtheorie wel over die grenzen heen kan. Dat willen de Amsterdamse wiskundigen nu onderzoeken.

Het PIONIER-onderzoek van Landsman bouwt voort op een revolutionaire methode uit de wiskunde. John von Neumann ontwikkelde een zeer diepe wiskundige aanpak van de quantummechanica. De Franse wiskundige Alain Connes scherpste de aanpak recent aan tot de zogenaamde niet-commutatieve meetkunde. Die ontwikkeling veroorzaakte een revolutie in dit vakgebied.

Drie postdocs en twee promovendi zullen onder leiding van Landsman aan vijf deelprojecten werken. Ze onderzoeken het verband tussen de klassieke beschrijving en de quantummechanische versie.

De op te bouwen groep zal de mathematische fysica aan de UvA, die binnen de bètafaculteit al een speerpunt is, nog verder versterken. Ook het onderzoek van de snaartheoreticus Robbert Dijkgraaf aldaar maakt gebruik van niet-commutatieve meetkunde. Het PIONIER-onderzoek zal zowel vernieuwend voor de wiskunde als voor de theoretische natuurkunde zijn. *bron: NWO-website*

Het bachelorconvenant

Dit voorjaar hebben de Nederlandse universiteiten afspraken gemaakt over de technische en natuurwetenschappelijke opleidingen en deze vastgelegd in het *Bachelorconvenant*. Deze afspraken betreffen voornamelijk de aansluiting van masteropleidingen op bacheloropleidingen, zij garanderen namelijk dat studenten met een bachelordiploma op zak tot de aansluitende masteropleiding bij een andere instelling worden toegelaten. Daartoe zijn gezamenlijke eindtermen voor onder andere de wiskunde-opleiding geformuleerd. Naast deze aansluitingsproblematiek zijn er ook voornemens geformuleerd ten aanzien van de herstructurering van de bacheloropleidingen. Het is dit deel van het convenant dat uitgebreid in het nieuws is geweest. De universiteiten hebben afgesproken "een landelijke herstructurering van de bacheloropleidingen in de natuurwetenschappen te onderzoeken, uitgaande van het idee van een drietal brede bacheloropleidingen", waarbij wiskunde als zelfstandige opleiding zou ophouden te bestaan. Voor volgend jaar september staat het Masterconvenant Natuurwetenschappen op het programma. *Ger Koole*

Bèta-versie van EULER gestart

Behalve de naam van de beroemde wiskundige is EULER ook een acroniem voor een lopend EU project: European Libraries and Electronic Resources in Mathematical Sciences. Het project wordt tot december

2002 door de EU gefinancierd en heeft tot doel het aanbieden van een portal tot wereldwijde wiskundige literatuur.

De gebruiker van EULER krijgt toegang tot alle soorten van informatie op het gebied van de wiskunde die op het web te vinden zijn. Zogenaamde *common resource descriptors* en Dublin Core metadata maken het mogelijk meerdere bronnen tegelijk te doorzoeken. Veel documenten zijn volledig beschikbaar en anderen kunnen besteld worden bij deelnemende bibliotheken en uitgevers.

EULER is een open informatiesysteem waaraan steeds nieuwe partners kunnen deelnemen. Het uitgangspunt is dat de toegang tot de portal voor de eindgebruikers kosteloos zal blijven. Een bèta versie van de portal is te vinden onder: <http://www.emis.de/projects/EULER>

Wouter Mettrop, Ayling Ong

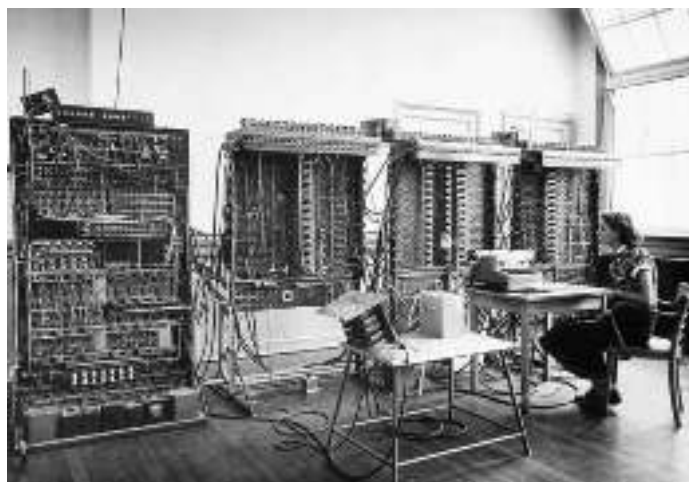
Vijftig jaar computers in Nederland

Op 21 juni 2002 was het 50 jaar geleden dat Nederland het computertijdperk binnentrad. De eerste Nederlandse programmeerbare computer werd op 21 juni 1952 in gebruik genomen: dit was de ARRA, Automatische Relais Rekenmachine Amsterdam. Deze computer werd gebouwd door het Mathematisch Centrum, het huidige Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) in Amsterdam.

De ARRA werd in gebruik genomen door burgemeester D'Ailly en minister Rutten van Economische Zaken. Als blijk van mathematisch kunnen liet men de computer een programma uitvoeren voor het genereren van een willekeurig getal: een mathematisch hoogstandje. Na de feestelijke opening heeft het apparaat niet veel meer gepresteerd. Een tweede ARRA, die anderhalf jaar later gereedkwam, heeft wel met groot succes gedraaid. De ARRA II deed onder andere zogenaamde 'flutterberekeningen' voor Fokker, berekeningen voor het ontwerp van vliegtuigvleugels.

De computerbouw van het CWI is later voortgezet in Electrologica (1956) — het eerste spin-off bedrijf van het CWI. De rekenfunctie is later overgedragen aan SARA Reken- en Netwerkdiensten, dat in 1971 opgericht is door het CWI, de VU en de UvA.

Van de ARRA is niets over. Er zijn slechts enkele foto's, een dia en wat artikelen en beschrijvingen. Er is wel uit die pioniertijd beelden en geluidsmateriaal van andere machines en geklik van relais. Er zijn interviews met de betrokkenen. In het najaar zal het CWI aandacht besteden aan vijftig jaar computers in Nederland. *Annette Kik*



De ingebruikneming van de ARRA I op 21 juni 1952 in het Mathematisch Centrum (het latere CWI) aan de Tweede Boerhaavestraat in Amsterdam. Dineke Botterweg, een van de rekenaarsters van het Mathematisch Centrum, bedient de machine.

Geertje Hek

Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam
ghhek@science.uva.nl

David Iron

Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam
diron@science.uva.nl

Studiegroep wiskunde en de industrie

Oververhitte vissen in Artis

Tijdens de Studiegroep Wiskunde met de Industrie in februari jongstleden was een van de problemen waaraan gewerkt werd afkomstig van Artis. Bij het Artis aquarium heeft men in de zomer problemen om het water in de mammoettank op de juiste temperatuur te houden. De Studiegroep werd gevraagd te zoeken naar een oplossing die de vissen de nodige verkoeling kan bieden.

De mammoettank bevat ruim 400.000 liter zeewater van idealiter 24 graden Celsius. Als het 's zomers buiten warmer dan 25 graden wordt, neemt de temperatuur van het water soms toe tot 27 graden Celsius. De warmte die door het water opgenomen wordt is afkomstig van de lampen en van de zon. Bij het oplossen van het probleem moest rekening gehouden worden met de kosten, het monumentale pand waaraan maar weinig veranderd mag worden en natuurlijk met de gezondheid van de vissen.

Voor de hand liggende koelmethoden waren of al door Artis uitgetoetst (zoals koeling met een kuub ijs — een onhandige en dure methode omdat het ijs van gedestilleerd water moet zijn) of onuitvoerbaar (zoals koeling met een koelelement — een metaal koelelement in het zoute water zou de chemische samenstelling van het water beïnvloeden).

Om het probleem op te lossen dacht de Studiegroep eerst aan een beschrijving van de dynamica in en rond de waterbakken met behulp van warmtevergelijkingen en vloeistofmechanica. Maar uiteindelijk bleek de energiebalans in het hele systeem de sleutel tot de oplossing te zijn.

Feiten over het probleem

Het Artis aquarium bestaat uit diverse zoet- en zoutwateraquaria met verschillende temperaturen en diverse groottes. Voor het modelleren van het probleem is alleen de grootste tank in beschouwing genomen, de zogenaamde mammoettank. Dit is de warmwatertank die verreweg de grootste hoeveelheid water bevat, en dus het moeilijkst is af te koelen tot de juiste temperatuur. Deze tank is $5 \times 2,5 \times 20 \text{ m}^3$ groot en staat in verbinding met een groot

Energiebronnen en -putten	
Q_S	zonne-energie
Q_L	energie van lampen
Q_{ET}	verdamping vanuit tank
Q_{CT}	geleidingswarmteverlies uit tank
Q_{ER}	verdamping vanuit reservoir
Q_{CR}	geleidingswarmteverlies uit reservoir
Constanten en variabelen	
λ_S	fractie van zonne-energie geabsorbeerd door water
λ_L	fractie van lampenergie geabsorbeerd door water
T_1	watertemperatuur in tank
T_2	watertemperatuur in reservoir
ΔT	temperatuursverandering

Tabel 1 De in het model gebruikte variabelen en constanten.

reservoir waarin het water zuurstof kan opnemen uit de lucht. In totaal bevat het mammoetsysteem 440.000 liter water. Het water in het systeem wordt rondgepompt met een circulatietijd van ongeveer 4 uur. Hoewel het water volgens de Artiskundigen in het hele systeem dezelfde temperatuur zou hebben, bleek er bij nameting een cruciaal temperatuurverschil van 0,1 graad Celsius te zijn tussen de tank en het reservoir in de catacomben.

Energiebalans

Voor de beschrijving van de energiebalans is het systeem beschouwd als twee deelsystemen, namelijk de tank en het reservoir. In de tank zijn het zonlicht en de lampen direct boven het water de energiebronnen. De energie wordt opgeslagen in het water, wat een verhoging van de temperatuur oplevert, of via verdamping of warmtegeleiding door het glas en de muren afgestaan aan de omringende lucht. Het water in het reservoir verliest warmte door verdamping en door warmtegeleiding naar de bodem.

De energiebalans in de tank wordt gegeven door

$$\lambda_S Q_S + \lambda_L Q_L = Q_{ET}(T_2) + Q_{CT}(T_2) + \theta \Delta T, \quad (1)$$

waar de term $\theta \Delta T$ de energie is die opgeslagen wordt in het water als de temperatuur in de tank met ΔT graden stijgt. De energiebalans in het reservoir is

$$\theta \Delta T = Q_{CR}(T_1) + Q_{ER}(T_1). \quad (2)$$

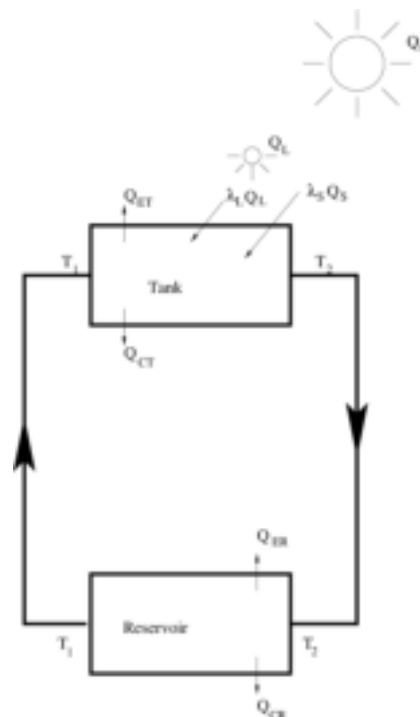
De afname van temperatuur in het water correspondeert met energieverlies door verdamping. Schematisch is de situatie zoals in figuur 2.

Aannames

Uit waarnemingen in het aquarium blijkt er nauwelijks verdamping op te treden in de tank, terwijl er veel verdamping plaatsvindt in de reservoirs. Dit rechtvaardigt de benadering $Q_{ET} = 0$ en $Q_{ER} = Q_{\text{total}}$. Die totale verdampingsenergie kan worden berekend met behulp van de informatie dat er wekelijks 2 m³ water uit het systeem verdampt, en blijkt ongeveer 6 kW te zijn. De waarneming dat $\Delta T = T_1 - T_2 \sim 0.1$ graad Celsius, leidt tot de aanname $T_1 \sim T_2 \sim T$, die we later met behulp van (2) zullen



Figuur 1 Het aquariumgebouw van Artis bij de opening (1886–1887). Het honderdveertig jaar oude gebouw heeft architectonische waarde, maar is sterk verouderd.



Figuur 2 Energie-input en -output in tank en reservoir.

valideren. Met deze aannames kunnen (1) en (2) vereenvoudigd worden tot

$$\lambda_S Q_S + \lambda_L Q_L = Q_{CT}(T) + Q_{CR}(T) + Q_{ER}(T). \quad (3)$$

Hiernaast nemen we ook aan dat de energie hoofdzakelijk aan het systeem wordt toegevoegd door straling, en dat energieverlies buiten de verdamping om voornamelijk door geleiding plaatsvindt. Deze aannames zijn gebaseerd op het feit dat nauwelijks enige convectie is waargenomen.

Details

Om de verschillende termen in (3) te schatten blijkt de oude, vertrouwde Binas van onschatbare waarde. Hierin vindt men warmtegeleidingscoëfficiënten, warmtecapaciteiten en andere kenmerken van stoffen in onze omgeving. De diverse factoren worden daarmee als volgt geschat.

- *Lampen*: het vermogen van de lampen is totaal 10 kW; geschat wordt dat bijna alle energie van de lampen als warmte in het water verdwijnt, dus $\lambda_L \sim 1$.
- *Zon*: Plancks wet voor black body straling en het feit dat de helft van de straling naar beneden (water) gericht is, leveren

$$Q_S \sim \frac{\sigma}{2} (T_{\text{roof}}^4 - T^4) A \sim 10 \text{ kW}. \quad (4)$$

Hierin is $\sigma = 5.6 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ de Stefan-Boltzmann constante, T_{roof} de temperatuur net onder het dak ($T = 323 \text{ K}$ op warme dagen) en $A = 5 \times 20 \text{ m}^2$ het wateroppervlak van de tank. Voor de watertemperatuur is $T = 298 \text{ K}$ genomen. In de berekeningen gaan we uit van $\lambda_S = 0,5$.

Merk op, dat de orde van grootte gelijk is aan die van de lamp-energie (zelfs op extreem warme dagen, wanneer $T_{\text{roof}} = 333 \text{ K}$, is $Q_S \sim 20 \text{ kW}$).

- *Geleiding tank*: de warmtegeleiding van de 10 cm dikke glazen wand is $\mu_T = k \frac{A}{d}$ met k de warmtegeleidingscoëfficiënt, A de oppervlakte van de wand en d de dikte. Dit leidt tot een relatie voor Q_{CT} die afhangt van de omgevingstemperatuur T_{amb} :

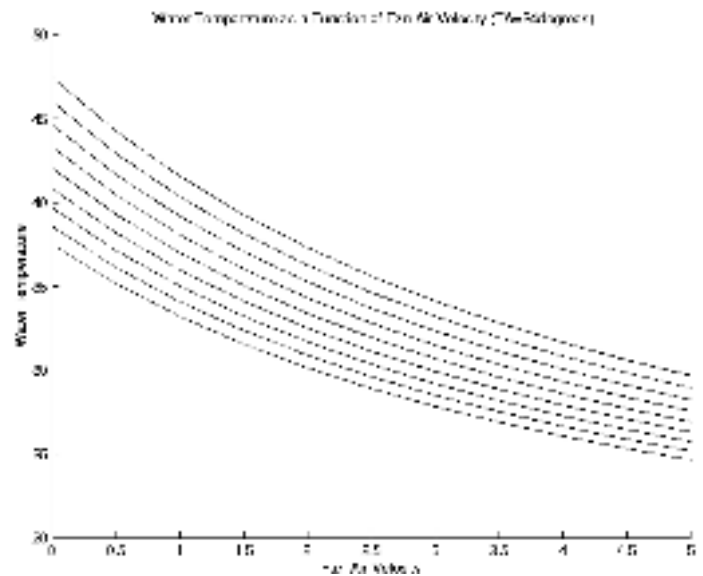
$$Q_{CT} = \mu_T(T - T_{amb}) = 0.93 \times 50/0.1(T - T_{amb}) \sim 0.5(T - T_{amb}). \quad (5)$$

- *Geleiding reservoir*: ter vereenvoudiging stellen we ons het rechthoekige reservoir voor als een halve bol. Dit leidt tot een overschatting van het energieverlies in de grond, dat echter wel van de juiste orde is. Voor een schatting van de warmtegeleiding van de wand en de grond rond het reservoir nemen we aan dat het temperatuurprofiel rond de halve bol gegeven wordt door

$$T_S(r) = \frac{T - T_{soil}}{r} R + T_{soil} \quad \text{voor } r > R.$$

Hier is T de watertemperatuur, T_{soil} de bodemtemperatuur ver van het reservoir, r de afstand tot het middelpunt en R de straal van het reservoir. We nemen $R = 10$ en schatten T_{soil} op 16 graden Celsius. Het verlies door warmtegeleiding in de grond is dan

$$Q_{CR} = -k(2\pi R^2) \left. \frac{\partial T_S}{\partial r} \right|_{r=R} = 2\pi Rk(T - T_{soil}). \quad (6)$$



Figuur 3 Hogere lijnen corresponderen met een hogere temperatuur vlak onder het dak door de zon.

Substitutie van constanten levert een verlies van ongeveer 0.5 kW bij een watertemperatuur van $T = 27$ graden Celsius op.

- *Verdamping*: we nemen aan, dat lucht met een luchtvochtig-



Binnenaanzicht van het aquarium (begane grond)

heidsgraad van 80% bij de reservoirs binnenkomt (typische conditie voor Amsterdam in de zomer) en volledig verzadigd via de ventilator naar buiten gaat. Het energieverlies door verdamping wordt dan gegeven door

$$Q_{ER} = \frac{1}{2} \frac{pp(T)}{p_{atmos}} \rho_{AVL}, \quad (7)$$

waarin $pp(T)$ de deeldruk van waterdamp is bij temperatuur T (bij 30 graden Celsius ~ 4.24 kPa), ρ de dichtheid van verzadigde lucht (~ 1.3 kg/m³), p_{atmos} de luchtdruk van de atmosfeer (~ 100 kPa), L de hoeveelheid energie die de lucht wint als water verdampt ($\sim 22.6 \times 10^5$ J/kg), A het oppervlak van de ventilator (~ 0.04 m²) en V de snelheid van de lucht in de

ventilator (en boven het water). Deze vergelijking geeft dat de verdamping van 2 m³ water per week in de zomer overeenkomt met een luchtsnelheid van 2.4 m/s.

Controle

We vergelijken onze berekeningen tot dusverre met de energiebalans voor het reservoir, om te kijken of de geschatte geleiding en verdamping tot een correcte ΔT leiden. In de vergelijking (2), $\theta \Delta T = Q_{CR} + Q_{ER}$, is $\theta \sim 10^5 \text{WK}^{-1}$ de hoeveelheid energie die nodig is om het water gedurende de cyclus van 4 uur een graad



Binnenaanzicht van het aquarium (eerste verdieping)

te verwarmen. Met $Q_{ER} = 6$ kW en $Q_{CR} = 0.5$ kW vinden we $\Delta T = 0.065$ graden Celsius, de juiste orde van grootte. Dit geeft vertrouwen in onze schattingen en de aanname $T_1 \sim T_2 \sim T$.

Eindresultaat

Substitutie van (4), (5), (6) en (7) in (3) geeft de volgende vergelijking, die de watertemperatuur relateert aan de omgevingstemperatuur T_{amb} , het hitte-effect van de zon (via T_{roof}) en de luchtsnelheid V bij het reservoir.

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma}{2} (T_{roof}^4 - T^4) A + 10 \\ & = \mu_T (T - T_{amb}) + \frac{1}{2} \frac{pp(T)}{p_{atmos}} \rho_{AVL} + \mu_R (T - T_{soil}). \end{aligned}$$

De laatste vereenvoudiging is een linearisatie van $pp(T)$ rond $T = 30$ graden Celsius. Het resultaat is een duidelijke relatie tussen T en de drie parameters T_{amb} , T_{roof} en V . Het blijkt dat V de belangrijkste sleutel is voor koeling, zie figuur 1. De Studiegroep adviseert Artis dus om niet in eerste instantie te proberen hitte tegen te houden door bijvoorbeeld isolatie, maar om het verlies van energie in de catacomben in de zomer te bevorderen met een snellere luchtstroom boven het reservoir, ofwel betere ventilatie. Een oplossing die vergelijkbaar is met de oplossing die veel mensen gebruiken om hun kopje hete koffie of thee sneller te laten afkoelen.



Deelnemers van de studiegroep bestuderen het bovenaanzicht van het tropisch aquarium op de eerste etage (de mammoettank).

Henk van der Vorst

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Postbus 80010, 3508 TA Utrecht

vorst@math.uu.nl

Column Instroom

Vissen in andere vijvers

Voorjaar 2002 is de nota van het Nationaal Overleg Onderzoeksscholen Wiskunde (OOW) gepresenteerd. Henk van der Vorst, hoogleraar numerieke wiskunde aan de Universiteit van Utrecht, was een van de samenstellers. Hier geeft hij zijn visie op het probleem van het verdwijnen van de wiskundestudent.

De studenten stromen jaarlijks de universiteiten binnen, maar de vraag rijst of we bij wiskunde nog steeds van instroom mogen spreken. Het verschijnsel heeft meer weg van lekkage: van elke vwo-instelling gaat slechts incidenteel iemand wiskunde studeren. We doen er van alles aan om het lek groter te maken, maar het is duidelijk dat het studentendistributiesysteem streeft naar een lekvrije toestand. Dat gebeurt op een manier die ons nog niet goed duidelijk is. We kunnen dat verschrikkelijk vinden, of overtrokken, maar onze waarnemingen zijn moeilijk anders te duiden. Moraal: vergeet het vwo als directe bron van instromers voor een wiskundestudie. Het vwo levert ons enkele gemotiveerde indruppelaars, maar dat is niet iets waarmee we grote, op wiskundig onderzoek gerichte instituten in leven kunnen houden. We kunnen nog wat proberen bij te klussen in het service-onderwijs, maar een economisch verantwoorde wiskundeopleiding gericht op 18-jarige vwo-ers is een aflopende zaak. Zeker als elke universiteit de ambitie koestert zo'n opleiding binnen haar poorten te hebben.

Ik blijf optimist: het talent kan niet uit Nederland verdwenen zijn. We moeten alleen in andere vijvers gaan vissen, bijvoorbeeld in een vijver met 21-jarigen: de bachelors. Om veel te kunnen vangen moet je zorgen voor geschikte vijvers en het helpt als je in de goede hoek tijdig bijvoert. Geheel bevangen door deze beeldspraak ben ik een ijveraars aan het worden voor een breed opgezette bachelorstudie (de grote vijver), met een iets meer dan proportionele wiskundecomponent (het bijvoeren). Een brede exacte bacheloropleiding met 30% algemene toepassingsgerichte wiskunde en wat kennismaking met fundamentele wiskunde zou ik al prachtig vinden. De vissen die zich wat regelmatig bij onze visplek vertonen dienen we meteen krachtvoer toe (een pittige fundamentele wiskundeminor). Ik weet niet zeker of deze strategie zal werken, maar als we geen andere visplek zoeken dan zal de huidige vangst steeds kleiner worden en moeten we er maar op blijven hopen dat het huidige vwo systeem enige lekkage in onze richting zal blijven vertonen. Daarmee gooien we dan de handdoek in de ring voor wat betreft de hoop op grote bloeiende wiskundegroepen.

Zo stom zullen we toch niet zijn? Moeten we van koers veranderen? Ach, we modderen al vele jaren voort met dalende studenten-aantallen, daar kan dus veilig nog een jaar bij. Ja toch?

Het is te gemakkelijk om onze instroomproblematiek geheel en al te wijten aan veranderingen binnen het vwo. Zeker, vroeger was

het zo dat er grote groepen wiskunde gingen studeren en daar dan bovendien ook nog goed op waren toegerust. Nu kun je er over twisten of het huidige vwo nog steeds voldoende echte wiskunde aanbiedt. Ik vind echter dat je moeilijk kunt volhouden dat al onze profiel-4 vwo-ers een wiskundevoorbereiding zouden moeten hebben die naadloos voorbereidt op een wiskundestudie. Het gaat om zulke kleine aantallen dat we beter kunnen proberen om een wiskundestudie zodanig in te richten dat zij aansluit op de kennis en studievaardigheden van de instroom. Daar mankeert nog wel eens wat aan. Eerstejaars studenten klagen niet zelden over aansluitproblemen: het van meet af aan hoge tempo (om de natuurkunde te kunnen bedienen), een heel andere visie op de wiskunde (waarvan wij dan denken dat elke noviet dat meteen op waarde schat) en een veronderstelde hoge mate van zelfstandigheid.

Er is nog een ander argument dat pleit voor een herbezinning op tal van wiskundeopleidingen. De statistieken wijzen uit dat slechts de helft van het aantal ingestroomde studenten de doctoraalstudie binnen acht jaar voltooit. Het aantal studenten dat de studie binnen zes jaar met redelijke cijfers (zeg gemiddeld zeven) voltooit is nog veel minder; ik ken de Nederlandse statistieken op dit punt niet, maar zou ik er ver naast zitten als ik het op 15% van het aantal instromers houd? Dat houdt in dat we onze vijfjarige studies merendeels hebben afgestemd op slechts een kleine fractie van de instroom, die toch merendeels bestond uit gemotiveerde studenten.

Bij elke voorgestelde verandering op het curriculum, die gericht is op het beter binnen boord houden van onze studenten, hoor ik benauwde geluiden over een vermeende verwatering van de studie (niet in de laatste plaats van de happy 15%). We laten ons kennelijk sturen door de vrees de betere student te verliezen in plaats van door de verpletterende gedachte dat 85% van de instroom er ofwel de brui aan geeft ofwel er maar zo'n beetje bijhangt.

We moeten het effect van de laatste categorie niet onderschatten. Als je grote delen van de studie met zesjes, na herkansing, besluit dan draagt dat bepaald niet bij tot een groot zelfvertrouwen. Misschien verklaart dat ook waarom zoveel studenten traag afstuderen. Voor een deel zal dat zijn oorzaak vinden in angst om met een slecht geabsorbeerde studie de maatschappij in te moeten. Die 85% zal ook wel niet veel reclame maken voor de leuke wiskundestudie, daarvoor moeten we vertrouwen op de 15% en dat is een zeer magere basis voor de verspreiding van ons evangelie.

Ik ben ervan overtuigd, en dan kom ik weer terug op mijn eerder bereden stokpaardje, dat we met een breed ingericht hoofd deel van de bachelorfase veel meer studenten van goed te verteren wiskunde kunnen voorzien. Het inslaan van deze weg lijkt mij de moeite meer dan waard. Wiskunde is te belangrijk en te mooi om haar voor een te klein deel van de samenleving te reserveren.



Frits Beukers*Universiteit Utrecht**Mathematisch Instituut**Postbus 80010, 3508 TA Utrecht**beukers@math.uu.nl***Inaugurele rede**

Weg van ge

Dit is de tekst van de inaugurele rede die Frits Beukers uitsprak bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar in de algebra aan de Universiteit Utrecht op 22 oktober 2001.

“Wiskunde, dat vond ik vroeger zo’n moeilijk vak, ik was er altijd heel slecht in”. Dat is de meestgehoorde reactie die een beroepswiskundige krijgt als hij vertelt dat wiskunde zijn vak is. Zelf reageer ik meestal in de trant van “ieder z’n vak” of “dat is weer een concurrent minder”, maar ik geef toe dat dit niet de sterkste antwoorden zijn. Goed beschouwd weerspiegelt deze reactie een diepe kloof die bestaat tussen wiskundigen en niet-wiskundigen. Veel mensen hebben niets met wiskunde en anderen zijn er simpelweg bang van. Ervaringen op school, het aura van moeilijkheid, of anders wel van saaiheid, dit alles draagt bij tot een wijdverbreide neiging van mensen om zich verre te houden van alles dat naar wiskunde riekt. Ook in de mededeling “ik was vroeger heel slecht in wiskunde” zit een zekere distantiëring verborgen. Dat mijn gesprekspartner slecht was in wiskunde wil ik best wel geloven. Maar de reactie wordt vaak uitgesproken met een zekere tevredenheid, of anders wel opluchting, die duidelijk moet maken dat hij of zij zich gelukkig prijst tot het normale deel van onze bevolking te horen. Niemand zou het in zijn hoofd halen om met dezelfde blijmoedigheid te verklaren dat hij of zij vroeger heel slecht in spelling was. Worden niet goed kunnen spellen staat dom, maar slecht zijn in wiskunde telt kennelijk als een zekere aanbeveling. Nu wil ik daar verder geen drama van maken. De eerlijkheid gebiedt mij zelfs te zeggen dat ook wiskundigen soortgelijke menselijke trekjes hebben. Een aantal malen heb ik collega’s van mij met een zekere trots horen verkondigen dat de natuurkunde-experimenten die zij in hun studietijd moesten uitvoeren, steevast mislukten. Soms moesten zij zelfs door de practicumstaf van de knoppen worden gehouden om ergere rampen te voorkomen.

Door de grote onbekendheid van veel mensen met wiskunde is het voor hen niet te bevatten dat er medemensen zijn die het wél leuk

vinden. Men is nog verbaasder om te horen dat de wiskunde eigenlijk een springlevend vak is, waarin je ook nog wetenschappelijk onderzoek kunt doen. Soms overwint iemand zijn schroom, en vraagt wat ik zoal de hele dag als wiskundige doe. Dit soort vragen zou men niet zo snel aan een fysicus, chemicus of astronoom stellen. Bij hen is het duidelijk dat er werk aan de winkel is. Er rijzen beelden op van opstellingen, meetapparatuur en sterrenwachten waar mensen met witte jassen druk in de weer zijn.

Eeuwigheid

Maar wat moet je je bij een wiskundig onderzoeker voorstellen? Een wiskundige aan het werk zien is geen gezicht en de aanblik van iemand die al potlood kauwend voor zich uit staart, is weinig verheffend. Wiskundige activiteit is van buiten niet tot nauwelijks waarneembaar. Dat wil echter nog niet zeggen dat het er niet is. In werkelijkheid borrelt en pruttelt het van binnen bij de meeste wiskundigen, net als de retorts van de chemici. De objecten die door wiskundigen onderzocht worden, komen uit de wereld van de getallen, meetkundige figuren en hun abstracties, dingen die slechts bestaan in de geest van een wiskundige. Toch is er onder hen een opmerkelijke overeenstemming over de aard van deze objecten en men spreekt er over alsof het concrete voorwerpen zijn. Het is zelfs mogelijk om er onderzoek naar te doen en de consequenties daarvan kunnen uiterst merkbaar zijn, zelfs voor het dagelijks leven.

De natuurwetenschappen, zoals natuurkunde, scheikunde en sterrenkunde zijn gebaseerd op experimenten en waarnemingen. Elk nieuw experiment kan weer extra licht op bestaande kennis werpen, maar ook totaal omvergoeien. Daardoor is het leven van bijvoorbeeld een natuurkundige uiterst onzeker. Hij moet orde zien te scheppen in de stoffelijke wereld om ons heen, zonder precies alle achterliggende mechanismen te kennen en met de wetenschap dat zijn theorie morgen



Frits Beukers

tallen

weer in duigen kan liggen. Ik heb grote bewondering voor natuurkundigen die in staat zijn om van al die onzekerheden toch iets moois te maken. Een prachtig klassiek voorbeeld daarvan vind ik het atoommodel van Niels Bohr uit 1913–1918, vlak voordat de quantummechanica losbarstte. Of Dirac's voorspelling uit 1930 van het bestaan van het positron op basis van zijn relativistische electrontheorie.

De wiskundige doet meestal niet aan experimenteren. Hij bouwt zijn eigen werkelijkheid op, meestal afgeleid van de bestaande werkelijkheid, en probeert daarin orde te scheppen. Die wiskundige werkelijkheid is een wereld van zekerheden en als iets in de wiskunde waar is, dan is dat voor eeuwig waar. Denkt u maar aan de stelling van Pythagoras. Die bestond 2500 jaar geleden al, en hij is nog steeds waar, ondanks alle ontwikkelingen in de moderne meetkunde. Wiskunde betekent letterlijk: de kunde van het gewisse, het zekere weten. De tijdloosheid van de wiskunde maakt dat lezing van het werk van Gauss of Eisenstein uit het begin van de 19e eeuw even verfrissend kan zijn als goede wiskunde uit deze eeuw. Vaak is het zelfs heel leerzaam om bij de studie van een wiskundig onderwerp terug te gaan naar de oorsprong, ook al is dat tweehonderd jaar geleden. Bij de bron ziet men het omliggende terrein en wellicht zijn daar nog waardevolle zaken te vinden die aanleiding geven tot iets nieuws. Dit heeft onder anderen tot gevolg dat wiskundebibliotheken hun tijdschriften van honderd jaar geleden nog steeds koesteren en niet zo gauw naar de kelder zullen verbannen.

Kille logica en formules

Zo ziet u dat wiskundigen nogal wat uit te leggen hebben. Aan de bibliothecarissen van de centrale bibliotheek, aan hun mede β -wetenschappers en ook aan al die mensen die beweren vroeger heel slecht in wiskunde te zijn geweest en er nooit wat van gesnapt hebben.

Dames en heren, dit is een openbare lezing waarvan ik graag wil

dat met name niet-wiskundigen hem kunnen volgen, zelfs degenen die bang zijn van wiskunde. Daarom geen verhalen over diophantische vergelijkingen, elliptische krommen, p -adische differentiaalvergelijkingen en hypergeometrische functies. Dat zijn onderwerpen van wiskundig onderzoek waaraan ik de afgelopen jaren met plezier en met succes gewerkt heb. Met groot enthousiasme zou ik u daarover kunnen vertellen. Maar helaas zou ik u dan ook spoedig kwijt zijn, zelfs als ik mijn best zou doen om het voor een breed publiek begrijpelijk te houden. Dat zit nu eenmaal in de aard van de wiskunde, het is niet altijd eenvoudig. Ik zal de laatste zijn om dat te ontkennen. Ondanks dat bevat de wiskunde veel meer leuke en begrijpelijke kanten dan menigeneen zich realiseert. In deze lezing wil ik u graag een paar van die leuke kanten laten zien. In het bijzonder zal ik u wat voorbeelden geven uit de getaltheorie, het vakgebied waarin ik tot nu toe het meeste onderzoekswerk heb verricht. Getaltheorie is het onderdeel van de wiskunde waarin men de gehele getallen bestudeert. De getallen 1, 2, 3 enzovoorts dus. Dat is meestal niet moeilijk uit te leggen. Het moeilijkste deel is vervolgens uit te leggen dat men in deze tak van wiskunde zelfs professor kan zijn. Normaal gesproken krijg ik daar weinig kans toe, maar nu u allen hier uit vrije wil bent gekomen, grijp ik deze kans met beide handen aan. Hopelijk zult u na dit verhaal iets beter begrijpen wat iemand ertoe kan drijven om het wiskundevak te beoefenen en waarom iemand zo weg kan zijn van getallen. Het was trouwens bemoedigend om de laatste tijd reacties van mensen te krijgen die vertelden dat ook zij weg waren van getallen.

Om te beginnen wil ik een paar misverstanden omtrent de wiskunde uit de weg ruimen. Eén commentaar dat je als wiskundige wel eens krijgt is, "Wiskunde, dat is toch eigenlijk allemaal logica". Er wordt nog net niet gezegd "kille logica", daarmee de wiskunde reducerend tot een steriele wereld waarin alleen types als professoren Zonnebloem, Barabas en Sickbock kunnen overleven. Staat u mij toe dat ik hier even op in ga.



von Heun sogenannten „Lagrangischen Zentralgleichung“:

$$(4) \quad \sum \psi_i \delta u_i = df - \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i \right), \quad \left(u_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right)$$

während für das n -fache Integral (3) übergeht in:

$$(5) \quad \sum \psi_i \delta u_i = df - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta u_i \right) - \dots - \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta u_i \right).$$

Figuur 1 Boven: een gedeelte uit een pianosonate van Mozart; beneden een gedeelte uit een wiskunde tekst van Emmy Noether.

Het is duidelijk dat als we iets beredeneren, wij de regels van de logica moeten gebruiken. Anders praten we onzin. Dat geldt op veel terreinen in ons leven, en zeker in de wiskunde. Maar daarmee is wiskunde nog geen logica. De regels van de logica zijn slechts spelregels. Het echte spel, dat van de wiskunde, moet nog beginnen. Neemt u ter vergelijking het populaire spel voetbal. De belangrijkste regel van dit spel zegt dat je de bal niet met de hand mag aanraken, tenzij je keeper bent. Daarnaast zijn er natuurlijk ook nog andere regels. Ondanks al die regels heb ik sommige voetballers tijdens een wedstrijd wondermooie dingen met de bal zien doen. Zo mooi, dat ze naar mijn mening werkelijk niet van deze aarde zijn. En dat zonder de bal met de hand aan te raken. Regels geven vorm aan een spel en binnen hun beperkingen is het daarna aan de spelers om er iets moois van te maken. Dat geldt ook voor het spel wiskunde. Er zijn wiskundigen die werk van buitenaardse schoonheid hebben gedaan, ondanks het feit dat ze gebonden waren aan de regels van die kille logica. En hoewel het publiek wat minder groot is dan dat bij voetbal, is het voor de kenners een genoegen om het werk van deze mensen te bewonderen.

Een ander commentaar van vergelijkbaar kaliber is: “Wiskunde, dat is toch allemaal formules”. Dit is een misvatting die berust op het feit dat men vorm met inhoud verwart. Staat u mij toe dat ik ook hier op in ga door een beeld te schetsen dat ooit eens door Henk Barendregt bedacht is. In figuur 1 vindt u onder elkaar een fragment uit een pianosonate van Mozart en een stukje wiskundetekst uit een artikel van Emmy Noether.

Beide fragmenten staan vol symbolen die voor de niet-kenners in beide gevallen even betekenisloos zijn. Muziekkenners zullen waarschijnlijk al snel de klanken achter de partituur herkennen en na enig gepuzzel de muziek in het hoofd kunnen doen herleven. Zelfs de niet-muziekkenners zullen erkennen dat er een groot verschil bestaat tussen de noten op het papier en het muzikale waarvoor zij staan. Het eerste is de vorm, het tweede is de inhoud. U voelt nu waarschijnlijk waar ik naar toe wil. Voor de wiskundetekst zou ik namelijk een soortgelijk verhaal kunnen houden. De formules in een goede wiskundige tekst zijn slechts uitdrukkingen van ideeën, en om die ideeën gaat het nu juist. Er zijn nog meer parallellen te vinden tussen muziek en wiskunde, getuige de vele citaten en geschriften die men in die richting

kan vinden. Maar er zijn natuurlijk ook levensgrote verschillen. Eén zo’n verschil is bijvoorbeeld dat vrijwel iedereen wel eens muziek gehoord heeft, terwijl slechts weinigen de wiskunde ervaren hebben. Daarom heb ik u juist de twee fragmenten laten zien. Opdat u zich aan de hand van de één een voorstelling kunt maken van de ander. De uitspraak dat wiskunde allemaal formules is, heeft dus net zoveel waarde als de uitspraak dat muziek allemaal noten is, of dat schilderkunst alleen maar verf is.

Oneven huisnummers

Maar laat ik ophouden met u steeds te vertellen wat wiskunde *niet* is. Het is veel aardiger om eens te kijken naar wat het *wel* is. Het probleem is echter aan wie deze vraag gericht zou moeten worden. Als u tien wiskundigen vraagt wat wiskunde is, dan krijgt u waarschijnlijk ook tien verschillende antwoorden, ondanks het feit dat we in onze eerste jaars opleiding een vak “Wat is wiskunde?” hebben, en het University College Utrecht een cursus verzorgt met als werktitel ‘Mathematics for poets’. De romanticus onder de wiskundigen zal de schoonheid van de wiskunde aanprijzen, de pragmaticus zal op de vele toepassingen wijzen, terwijl de cynicus u naar het woordenboek verwijst, aangezien iedere poging tot diepzinnigheid zijns inziens futiel zou zijn. Het probleem is namelijk dat vaak alleen collega-wiskundigen iemands visie op wiskunde zullen begrijpen. Daarom zal ik u op dit punt niet vermoeien met mijn visie.

Het is beter om u zelf te laten oordelen, en daarom wil ik gewoon wat wiskunde met u gaan doen. Dat is trouwens óók een riskante bezigheid. Het risico dat ik loop is dat u afhaakt en bevestigd zult worden in de vooroordelen over wiskunde als moeilijk en saai. Aan de andere kant vindt u het misschien wel leuk om te horen, en met die ijle hoop neem ik het risico dan maar.

Ik zal u een tweetal voorbeelden uit getaltheorie laten zien. De één is wiskundig gezien tamelijk eenvoudig, maar hopelijk aardig voor niet-wiskundigen. Het tweede begint op laag niveau maar zal uiteindelijk geavanceerde hulpmiddelen nodig hebben. In mijn presentatie wil ik zo duidelijk mogelijk zijn, dus vergeeft u mij als mijn uitleg soms wat pedant in de oren klinkt.

Hier is het eerste voorbeeld. U loopt op straat en bent op zoek naar huisnummer 85. Helaas, u heeft pech, want u bevindt zich weliswaar aan de zijde van de oneven nummers, maar wel bij nummer 1, aan het begin van de straat. Niets aan te doen, u wandelt gewoon richting nummer 85. Om de tijd wat te doden telt u de huisnummers, die u aan de oneven kant passeert, bij elkaar op. U moet hier nog 32 minuten zitten, dus ik denk dat er weinig anders te doen valt. U ziet hier het resultaat.

$$\begin{array}{rclcl} 1 & = & 1 & = & 1 \times 1 \\ 1 + 3 & = & 4 & = & 2 \times 2 \\ 1 + 3 + 5 & = & 9 & = & 3 \times 3 \\ 1 + 3 + 5 + 7 & = & 16 & = & 4 \times 4 \\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 & = & 25 & = & 5 \times 5 \end{array}$$

We beginnen met 1. Bij 3 aangekomen hebben we $1 + 3 = 4$. Bij 5 aangekomen bedraagt de som al $1 + 3 + 5 = 9$ en als we de 7 passeren zitten we al op 16. De achtereenvolgende sommen zijn nu 1, 4, 9 en 16. Wellicht komen deze getallen bekend voor. Het zijn namelijk allemaal kwadraten, 1×1 , 2×2 , 3×3 en 4×4 . Dat is opmerkelijk en men kan zich afvragen of dit zo doorgaat. We lopen door en bij 9 aangekomen krijgen we als som 25. En jawel, $25 = 5 \times 5$. Het lijkt erop dat we hier het begin zien van een wetmatigheid die zich afspeelt in de wereld van

de getallen. We formuleren dit als een stelling, die we de *Stelling van de huisnummers* zullen noemen. Hij luidt als volgt:

Kies een getal en noem dit n . Dan is de som van de eerste n oneven getallen een kwadraat, namelijk n^2 .

U ziet hieruit dat het met getaltheorie net is als met humor, het ligt gewoon op straat.

Er is echter een probleem. We zijn er namelijk nog lang niet zeker van dat de som ook nog een kwadraat zal zijn als we bij nummer 85 aankomen. Of bij eventueel hogere nummers. Het lijkt er wel op, maar we zijn niet honderd procent zeker. Om er zeker van te zijn dat onze stelling voor alle waarden van n geldt, moeten we een bewijs leveren. Elke stelling behoeft een bewijs. Onder een bewijs in de wiskunde verstaan we een redenatie die, met inachtneming van de regels van de logica, anderen ervan moet overtuigen dat een bepaalde bewering te allen tijde waar is. Het is duidelijk dat een bewijs aan de regels van de logica moet voldoen. Anders krijgen we onzin. Maar bovenal bevat een bewijs ook een creatief element, namelijk het inzicht in het waarom van een bewering.

Zo'n nieuw inzicht of idee is een primaire en cruciale stap, want zonder idee is er ook geen bewijs. Je ziet regelmatig studenten, en ook amateurwiskundigen, eindeloos rondjes draaien binnen de hen bekende formulebrij en hopen dat er plotseling een stelling uitrolt. Maar zo werkt het niet. Om met Kurt Mahler [1] te spreken: Je moet eerst vlees in de molen stoppen voordat er gehakt uit komt. Een wijsheid, die niet alleen op de wiskunde van toepassing is.

Als je een wiskundig probleem wilt oplossen moet je dus eerst bedenken of je nog ergens een substantieel idee hebt, het denkbeeldige vlees dus, om in de molen te stoppen. Anders kun je wel ophouden. Hoe mensen op hun ideeën komen, is een nog onontgonnen terrein van onderzoek en creativiteit is nog steeds een onopgelost raadsel. Wat we wel weten, is dat het proces waarmee wiskundigen op nieuwe ideeën komen, niet alleen onbegrepen is, maar ook onstuurbaar, in tegenstelling tot wat beleidsmakers misschien denken.

Terug naar de stelling van de huisnummers. Het bewijs daarvoor is niet lastig, en een beetje middelbare schoolwiskunde is daartoe al voldoende. Ik zal het u besparen. Wel wil ik u het idee erachter laten zien. Dat bestaat uit een plaatje waarvan ik hoop dat het voldoende overtuigingskracht heeft. Ook dat is een riskante bezigheid. Wat de één overtuigend vindt, roept bij de ander alleen maar vraagtekens op. Maar ik probeer het toch. Links in figuur 2 ziet u een plaatje van het getal 16, dat we hebben voorgesteld als een vierkant dat bestaat uit 4 maal 4 kleinere vierkantjes.

Nu gaan we dit vierkant als een soort ui afpellen, van rechts boven naar links onder. Het resultaat ziet u rechts in het plaatje. U kunt de oneven getallen 1, 3, 5, 7 als aantallen in de achtereenvolgende schillen zien, een picturale voorstelling van $1 + 3 + 5 + 7 = 16$. Elke schil bevat twee vierkantjes extra vergeleken met zijn voorganger en we beginnen linksonder met een schil bestaande uit één vierkantje. Met andere woorden, we doorlopen de oneven getallen in de opeenvolgende schillen. Nu hoop ik natuurlijk dat u zich kunt voorstellen dat het ook zo gaat met andere vierkanten zoals 5 bij 5, 6 bij 6, etcetera. Met andere woorden, ik hoop dat u het gevoel heeft dat u dank zij dit plaatje begrijpt waarom onze huisnummers tot kwadraten optellen.

Zelf vond ik het plaatje erg overtuigend, maar mijn mentale beeld van de dingen hoeft natuurlijk absoluut niet overeen te komen met dat

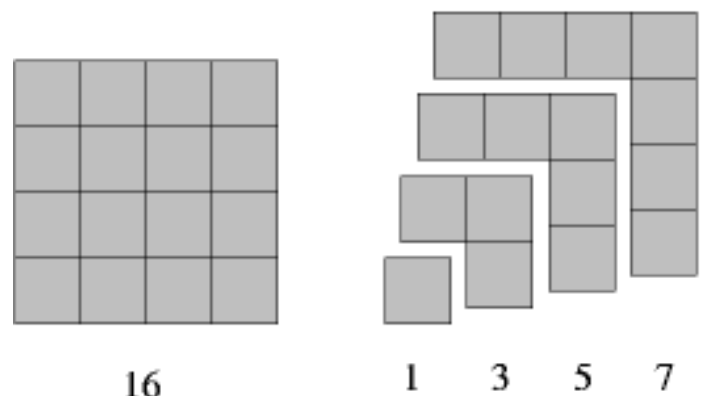
van u. Daarom is het nu mijn taak dit subjectieve inzicht te vertalen naar een echt bewijs, een correcte redenatie die uitgaat van vooraf afgeproken uitgangspunten en die voor iederéén overtuigend moet zijn, ook voor degenen die niet mijn mentale plaatje delen. Dit vertaalwerk moet men niet onderschatten. De weg die afgelegd moet worden van rauwe wiskundige intuïtie naar een logisch correcte redenatie is niet altijd makkelijk, zeker niet voor mensen die daar nog geen ervaring mee hebben. Het vereist flinke training, en dat is precies één van de dingen die we de universitaire wiskundestudenten in hun eerste twee jaar proberen mee te geven. Het vermogen om uit een probleem met een vage oplossing een heldere oplossingsstrategie te destilleren is een waardevolle, en één die ook in de wereld buiten de wiskunde goed bruikbaar is.

Het is misschien aardig om te vermelden dat de stelling van de huisnummers onder anderen wordt beschreven door de Griekse wiskundige Nicomachus uit het begin van onze jaartelling. Naast deze stelling heeft hij nog een aantal andere observaties die hierop voortborduren. Nicomachus gebruikte deze getallengrappen om zijn tijdgenoten te verbazen en in mysterie gedompeld te laten [2]. Hij hield namelijk de bewijzen van zijn observaties voor zichzelf.

Partities

Laat ik verder gaan met het tweede voorbeeld, dat eenvoudig begint. Stelt u zich eens voor. U zit aan tafel met voor u een stapel van tien losse guldens. Bij gebrek aan iets beters pakt u een aantal guldens van deze stapel, en zet deze in een nieuw stapeltje naast de oorspronkelijke, die nu wat kleiner is geworden. U heeft de stapel van tien in twee nieuwe stapeltjes verdeeld. Dat is fijn. Toch wil ik graag dat u nog even verder gaat, en uw guldens in nog meer stapeltjes opdeelt. Bijvoorbeeld in 2 plus 3 plus 5, of 4 plus 4 plus 2, of zelfs tien maal een stapeltje van 1 gulden. De mogelijkheden zijn legio.

Sommigen onder u zullen zich misschien afvragen op hoeveel manieren we onze tien gulden in stapeltjes kunnen verdelen. Dat kan ik u zeggen: op 42 manieren. Als u het niet gelooft kunt u het thuis op uw gemak natellen. We kunnen het ook anders zeggen. Elke opdeling van tien gulden in stapeltjes noemen we een *partitie*. Het aantal partities van tien is dus 42. In plaats van tien kunnen we elk ander getal nemen en vragen hoeveel partities dit getal precies heeft. Om een voorbeeld te noemen, het aantal partities van 100 is iets meer dan 190 miljoen, 190.569.292 om precies te zijn. Dat betekent dat we een stapel van 100 guldens op ruim 190 miljoen verschillende manieren in kleinere stapeltjes kunnen opdelen. Die aantallen partities nemen dus flink hard toe. Bovendien hebben ze de onhebbelijke eigenschap dat



Figuur 2 Een visueel 'bewijs' van de stelling van de huisnummers



foto: Ramanujan, letters and commentary, blz. 137

Figuur 3 Ramanujan ten tijde van zijn promotie in Cambridge, 18 maart 1916. Ramanujan staat in het midden.

ze bijzonder moeilijk uit te rekenen zijn. Zeker als je geen computer tot je beschikking hebt. Leibniz merkte al op, dat de studie van deze aantallen partities zeer de moeite waard zou zijn. Maar ondanks deze belangstelling werden er weinig resultaten geboekt. De eerste die een wezenlijke stap vooruit zette was Euler, rond 1740. Daarna werd het weer wat stiller. Totdat rond 1913 de Indiase wiskundige Srinivasan Ramanujan op het toneel verscheen.

Ramanujan is één van de meest tot de verbeelding sprekende figuren uit de geschiedenis van de wiskunde. In eenvoudige omstandigheden in India opgegroeid, auto-didact, en zijn wiskunde, die van een bizarre schoonheid was, borrelde bijna letterlijk uit hem op. Hij werd ontdekt door de Engelse wiskundige Hardy die hem in de periode 1913–1919 naar Cambridge, Engeland haalde. Helaas ging Ramanujan's gezondheid snel achteruit en hij keerde spoedig naar India terug. Hij overleed in 1920 op 32-jarige leeftijd. In deze lezing kan ik jammer genoeg geen recht doen aan het levensverhaal en het werk van deze opmerkelijke wiskundige. Dat is wel prachtig gedaan in een documentaire van de BBC over Ramanujan en de biografie van Robert Kanigel [3], die ik iedereen kan aanbevelen.

Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en modulaire vormen

Terug naar de partities. Ten tijde van Ramanujan was er een lijstje van de eerste tweehonderd partitie-aantallen, met ijzeren discipline opgesteld door Major MacMahon, een ex-artillerie-officier. U ziet hier een paar waarden uit deze tabel. Met $p(n)$ wordt het aantal partities van n aangegeven.

$p(4)$	=	5
$p(9)$	=	30
$p(14)$	=	135
$p(19)$	=	490
$p(24)$	=	1575
$p(29)$	=	4565

Kijkend naar de gortdroge lijst vol met getallen, merkte Ramanujan iets bijzonders op. Het aantal partities van 4 is 5, en dus ook deelbaar door 5. Op zich niets bijzonders. Maar als we vijf getallen verder kijken, bij 9 dus, zien we dat het aantal partities van 9 gelijk is aan 30. Weer deelbaar door 5. Nog vijf stappen verder, dus bij 14, zien we dat het aantal partities van 14 gelijk is aan 135, ook deelbaar door 5. En dit gaat alsmaar door. Het aantal partities van een 5-voud plus 4

is blijkbaar steeds deelbaar door 5. De overige partitie-aantallen in MacMahon's tabel zijn meestal niet deelbaar door 5. Ramanujan had dus het begin van een nieuwe wetmatigheid in de getallenwereld gevonden, net zoals wij met de huisnummers eerder hebben gedaan. U zult misschien zeggen: En wat dan nog, zo bijzonder is het toch niet dat een paar getalletjes deelbaar zijn door 5? Dat valt inderdaad te bezien. In de praktijk van een getaltheoreticus gebeurt het vaak dat men regelmatige patronen in de getallenwereld tegenkomt. Soms zijn ze gemakkelijk te verklaren, zoals de som van onze oneven huisnummers. Bij sommige anderen gaat het wat moeilijker, of soms lukt het helemaal niet, wat je ook probeert. Onder die laatste categorie bevindt zich een aantal waarvoor zelfs een fundamenteel nieuw concept moet worden aangewend, of uitgevonden, om ze te begrijpen. Met deze categorie hebben we nu te maken. Ramanujan had tot taak om aan te tonen dat het aantal partities van *alle* 5-vouden plus 4 deelbaar is door 5, en niet alleen voor de getallen die in Major MacMahon's tabel voorkomen. Hiervoor had hij zijn volledige arsenaal aan kennis op het gebied van de *modulaire vormen* nodig.

Modulaire vormen waren in Ramanujan's tijd nog nieuw, maar het werd destijds wel duidelijk dat ze een steeds belangrijker rol in getaltheorie zouden gaan spelen. Ik zal hier niet uitleggen wat een modulaire vorm is en ik kan u verzekeren dat u dat niet erg vindt. Het begrip modulaire vorm is één van de vele begrippen waar men in de wiskunde mee werkt. Van buiten zijn ze onzichtbaar, u kunt ze niet in het hoofd van een wiskundige zien zitten. Toch zijn ze voor de wiskundige springlevend. Men werkt ermee alsof het concrete objecten zijn. U kunt zich enigszins een voorstelling hiervan maken als u bedenkt dat getallen, zoals 1,2,3, alleen maar bestaan omdat ze bij u tussen de oren zitten. U zult een getal niet zo gauw op straat tegenkomen. Behalve dan de huisnummers, maar u zult het met mij eens zijn dat dit slechts cijfers zijn waarmee je een getal aangeeft. Het getal zelf kun je niet zien. Toch spelen getallen een belangrijke rol in ons leven. Zo belangrijk, dat het net is alsof ze echt zijn en we er niet bijilstaan dat het alleen maar gedachtenspinsels zijn. Hetzelfde geldt voor wiskundige begrippen. Om u toch iets te laten zien van een modulaire vorm, heb ik het plaatje uitgekozen dat u in figuur 4 ziet [8].

Het is hetzelfde soort resultaat dat men krijgt als iemand gevraagd wordt om gevoelens als verdriet of blijheid in een schilderij uit te beelden. Het plaatje is in werkelijkheid een dodecaeder betegeling van de driedimensionale hyperbolische ruimte en heeft eigenlijk weinig met modulaire vormen te maken, behalve het hyperbolisch zijn van de ruimte waarin ze leven. Toch ademt dit plaatje naar mijn gevoel de sfeer van een modulaire vorm uit. Mysterieus, en oneindig symmetrisch. In de moderne getaltheorie zijn modulaire vormen onmisbaar. Martin Eichler schijnt eens gezegd te hebben dat er in de getaltheorie vijf belangrijke operaties zijn, namelijk optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en modulaire vormen. En terecht. Hoewel modulaire vormen als mysterieuze wolken hoog boven ons dagelijks leven zweven, nauwelijks zichtbaar voor de meesten, geven ze grote delen van de getaltheorie een wondermooie geordende structuur. Af en toe werpen ze een voor iedereen zichtbare schaduw. Het bekendste voorbeeld daarvan was Andrew Wiles' recente bewijs van de Laatste Stelling van Fermat, waarin modulaire vormen een cruciale rol speelden. Of ze laten, zoals Ramanujan ontdekte, kleine sporen na in de vorm van deelbaarheidseigenschappen van partitie-aantallen.

Ramanujan ontdekte, behalve deelbaarheidseigenschappen door 5, ook andere deelbaarheden door de priemgetallen 7 en 11. Daarna bleef het lange tijd stil. Atkin ontdekte in de zestiger jaren soortgelijke fenomenen bij het priemgetal 13, maar verder was er weinig schokkend

nieuws. Totdat twee jaar geleden de modulaire vormen weer toesloegen. De Amerikaanse wiskundige Ken Ono gebruikte eigenschappen van modulaire vormen om aan te tonen dat er deelbaarheidseigenschappen bestaan voor de partitie-aantallen met betrekking tot ieder willekeurig priemgetal, niet alleen voor 5, 7, 11 en 13. Alleen zijn ze zo dun gezaaid dat we heel veel verder moeten gaan dan MacMahon's tabellen om ze te signaleren, en zelfs dan is het nog maar de vraag of we ze ooit experimenteel gevonden zouden hebben. De structuur die geleverd wordt door modulaire vormen was onmisbaar om achter het bestaan van die nieuwe deelbaarheden te komen. Om een voorbeeld te noemen, we weten nu dat het aantal partities van alle 115000-vouden plus 3474 deelbaar zijn door 23. Op het ogenblik wordt er hard gewerkt om de volledige patronen boven water te krijgen. De gereedschappen die daarbij gebruikt worden zijn een combinatie van de theorie van modulaire vormen samen met zoekacties gebruikmakend van de computer [4].

Experimenteren met computers

Het is niet geheel toevallig dat ik daarnet het woord computer heb laten vallen. Hiermee zijn we terecht gekomen op één van mijn lievelingsonderwerpen en ik zou er graag iets over zeggen.

Niet omdat het begrip ICT tegenwoordig in is, maar wel omdat ik computers prachtige apparaten vind en het spannend is om te zien wat hun rol gaat worden in de toekomstige wiskunde. Ik denk hier niet aan een computer als schoolmeester of doorgeefluik voor oefenopgaven, maar wel aan de computer als instrument om wiskunde te bedrijven. Sinds de introductie van wiskundepakketten, zoals Maple en Mathematica, zijn computers geen veredelde rekenmachines meer. Ze kunnen nu wiskundige objecten hanteren en ze op fraaie manier uitbeelden. De fractalplaatjes, waarvan u in figuur 5 een artistieke impressie ziet [9], zijn de bekendste voorbeelden van computerafbeeldingen van wiskunde objecten.

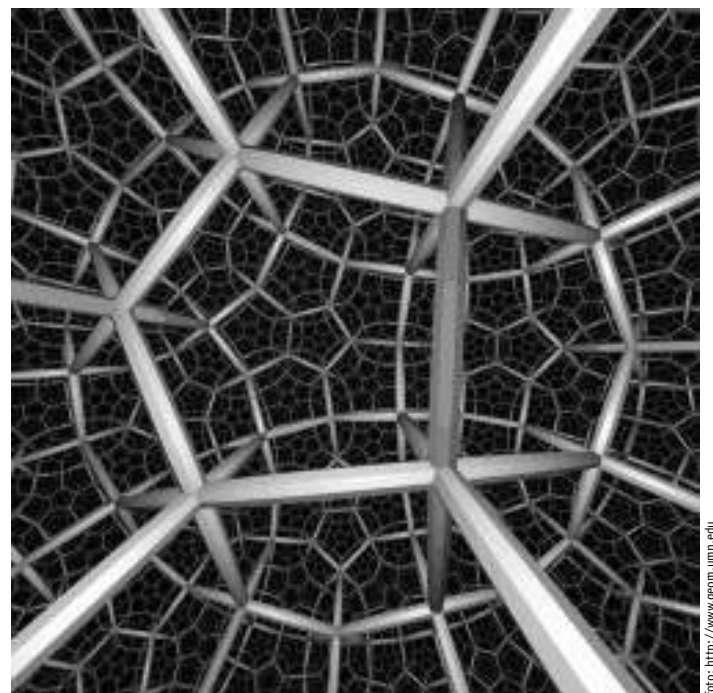
Deze ontwikkeling heeft zich in de laatste vijftien jaar afgespeeld. Dit is slechts een fractie van de afgelopen twee en half duizend jaar dat mensen de wiskunde beoefend hebben. Alleen al daarom is het nog veel te vroeg om te voorspellen wat de computer uiteindelijk voor de wiskunde gaat betekenen. Maar het is natuurlijk erg leuk om daarover te speculeren. Gaan we nog een revolutie meemaken? of blijft alles bij het oude?

Allereerst wil ik een wijdverbreid misverstand uit de wereld helpen, en dat is de gedachte dat computers het wiskundig werk van ons kunnen overnemen. Om een voorbeeld te geven, wil ik even teruggaan naar ons probleem van de oneven huisnummers. Een computer stelt ons in staat om ook voor heel hoge waarden van de huisnummers de juistheid van onze stelling te controleren. Als we bij het miljoenste huisnummer zijn aangekomen, heeft een computer geen enkele moeite om uit te rekenen dat onze som een miljoen in het kwadraat is geworden. Onze stelling geldt echter voor *alle* huisnummers, en dat zijn er oneindig veel. Een computer kan nooit een oneindig aantal gevallen controleren. Hij zou dan immers oneindig lang bezig zijn. Een wiskundig bewijs stelt ons in staat om met een eindig aantal woorden een oneindig aantal gevallen aan te pakken, en dat is één van de fraaie aspecten van de wiskunde. Het is nog lang niet zo ver dat computers in staat zijn zelfstandige bewijzen te leveren, als dat ooit gaat gebeuren. We leven weliswaar in een tijd dat men bijvoorbeeld DNA-soep aan het rekenen probeert te krijgen, maar de vooruitgang daarin lijkt nog zeer bescheiden. Mochten wiskunde-bewijzende computers ooit nog op het toneel verschijnen, dan is het duidelijk dat het hele wiskundelandschap op

een onvoorstelbare manier veranderd gaat worden. Persoonlijk lijkt het mij niet prettig om tussen computers te leven die eensgezind beweren het Riemann-vermoeden opgelost te hebben, terwijl ikzelf kop noch staart kan zien aan hun bewijs, omdat ze niet in menselijke taal geschreven zijn. Maar wie weet heeft de wiskunde tegen die tijd weer andere charmes gekregen.

Ook zonder dat computers aan het bewijzen slaan, kunnen we nog een interessante tijd gaan beleven. Waar computers tegenwoordig met name goed in zijn, is dat ze ons ongekende hoeveelheden experimenteel materiaal kunnen leveren. Pioniers als Felix Klein moesten vroeger dagen rekenen om een voorbeeld van een geschikte modulaire vorm te vinden. Nu is dat in een oogwenk gebeurd. Dat is al heel revolutionair. Op deze manier is de computer een machtig instrument om voorbeelden van wiskundige objecten binnen ons bereik te brengen. We kunnen veel verder kijken dan onze collega-wiskundigen honderd jaar geleden. Graag mag ik de introductie van de computer in de wiskunde vergelijken met de introductie van de telescoop in de sterrenkunde. Die vergelijking gaat natuurlijk niet helemaal op, maar op bepaalde punten vind ik hem wel aardig. Een saillant detail is bijvoorbeeld dat sommige 17e eeuwse astronomen weigerden door Galileï's telescoop te kijken. Vandaag de dag zijn er sommige wiskundigen die op hun beurt niet aan de computer willen. In beide gevallen zal men daar vast wel goede redenen voor hebben gehad. Natuurlijk hoeven ook niet alle wiskundigen aan de computer, want zo'n apparaat is lang niet bij alle wiskunde disciplines inzetbaar. Dat ligt aan de aard van die disciplines en niet aan de aard van hun beoefenaren.

Bij wiskundig werk overkomt het mij regelmatig dat ik voor een keuze sta. Namelijk: zet ik de computer aan het rekenen, of kan ik beter even mijn hersens gebruiken? Het gevaar met computers bestaat er in, dat men zich verliest in rekenwerk, en daarbij vergeet na te denken. Hierin een goed evenwicht bereiken is een vaardigheid die men zich moet aanleren. Het staat buiten kijf dat wiskundestudenten moeten leren de kracht van de computer te benutten bij het bedrijven van wiskunde. Maar het is even belangrijk dat studenten leren op de goede



Figuur 4 Een artistieke impressie van een modulaire vorm



Foto: <http://www.parknet.org/jip>

Figuur 5 Janet Parke won met de fractal *Taupensky* de ontwerpwedstrijd *Fractal Art '99*.

momenten de computer niét te gebruiken. Met deze keuzevrijheid worden de middelbare scholieren ook al geconfronteerd. Ook zij moeten leren wanneer er nagedacht moet worden, of wanneer er naar de rekenmachine, al of niet grafisch, gegrepen moet worden. Dat laatste heeft helaas de overhand. Tegenwoordig kom ik regelmatig studenten tegen die bij de cosinus van 60 graden liever het rekenapparaat pakken dan aan een tekendriehoek denken. Ook bij wiskundetentamens die gemakkelijk zonder rekenmachine gedaan kunnen worden, voelen sommige studenten zich moreel gesteund als ze zo'n apparaat naast zich hebben, al is het alleen maar als digitale fopspeen.

En zo, dames en heren, zijn we langzamerhand op onderwijsgebied aangekomen. In de Utrechtse universitaire onderwijswereld is de afgelopen jaren enorm veel overhoop gehaald, en gaat er de komende tijd nog heel veel overhoop gehaald worden. Mijn collega's weten er alles van, en ik zal mijn overige toehoorders er niet mee vermoeien.

Een punt van blijvende zorg is het te kleine aantal studenten dat jaarlijks de weg naar een universitaire wiskunde opleiding vindt. Een belangrijke factor bij het opwekken van wiskundebelangstelling is de beeldvorming van de wiskunde bij toekomstige studenten. Daarin spelen de ontwikkelingen op het vwo een bijna allesbepalende rol. Ook in het vwo wiskundeonderwijs is recentelijk heel veel veranderd. Het oude wiskunde B programma is nu vervangen door de tweede fase wiskunde B1,2. Een blik op de eindtermen leert dat deze tweede fase wiskunde bestaat uit een ambitieuze lijst van onderwerpen met een enorme variatie. Daar zitten hele leuke onderwerpen bij, ook wat stokpaardjes van deze of gene, en het wiskundige bewijs is weer in ere hersteld en wordt onderwezen aan de hand van de vlakke meetkunde in de tweede fase. Verder is er ook een lijst van verplichte vaardigheden, die een eerste- of tweedejaars wiskundestudent niet zouden misstaan. Dit is de theorie. Nu de praktijk. Die moet leren of deze wenslijst niet al te ambitieus is. Reeds nu al verschijnen er oekazes uit het ministerie dat bepaalde onderwerpen niet meer verplicht zijn. Uit het onderwijsveld komen ook al verontrustende berichten en het is te verwachten dat het laatste woord over de tweede fase nog lang niet gesproken is.

Schoolwiskunde

Om in ieder geval een beetje op de hoogte te blijven van wat onze eerstejaars studenten aan wiskunde hebben gehad, had ik de gewoonte om jaarlijks even naar het vwo examen wiskunde B te kijken. Dat deed ik dit jaar ook. Het heet nu wiskunde B1,2, en met enige verbazing heb ik de effecten van de tweede fase mogen aanschouwen. Als we het recente examen als representatief mogen beschouwen, moeten we concluderen dat de zogenaamde context opgaven en realistische wiskunde ook bij de 'harde' wiskunde B hun intrede hebben gedaan en een belangrijke rol spelen. Bijkbaar had ik iets gemist bij het doorlezen van de eindtermen. Een voorbeeld van een realistische wiskunde opgave [5] is een stuk geschreven tekst waarin een actueel onderwerp van stal wordt gehaald, bijvoorbeeld de werking van een medicijn uit de farmaceutische industrie, met daarbij illustratiemateriaal in de vorm van een tabel of grafiek. Vervolgens is het de bedoeling dat daar wiskunde achter wordt gezocht. Nu ben ik van mening dat men wiskunde weinig in het dagelijks leven tegenkomt. Of beter gezegd, achter alle moderne technische verworvenheden zit wel veel wiskundig denkwerk, denkt u maar aan de chips in uw computer of televisie, maar die wiskunde zit zo diep verborgen dat het niet zichtbaar is. Het gevolg is dat er hard gezocht moet worden naar een wiskundige draai aan het verhaal en dat wil nog wel eens koddige, of geforceerde situaties opleveren. Bij het vraagstuk dat ik net aanhaalde, was de uiteindelijke vraag om een *e-macht* te integreren en ook om de integratie nog eens numeriek over te doen in een achttal stappen. Met andere woorden, het hele verhaal over de farmaceutische industrie was niet meer dan een rijstebrij-berg waar je je eerst doorheen moest eten, voordat je aan de wiskunde toekomt. Dat verhaal had de leerling net zo goed kunnen overslaan.

Graag wil ik een opmerking maken over wiskunde en zogenaamde realistische wiskunde. Op de basisschool is realistisch rekenen een relatief nieuwe vorm van rekenonderwijs die kinderen niet alleen mechanisch leert rekenen, maar die het rekenen ook aan situaties in het dagelijkse leven koppelt. De meeste kinderen krijgen in hun latere leven dagelijks te maken met getallen in de vorm van gewichten, hoeveelheden, prijzen, enzovoort. Het is natuurlijk uiterst nuttig als ze op dergelijk gebruik worden voorbereid.

Op de middelbare school leren kinderen hun eerste wiskunde. Bij het aanleren van sinus, cosinus en logaritme kan men nog gemakkelijk praktijkvoorbeelden aanhalen om dit aanschouwelijk te maken. Maar bij het stijgen van het wiskundeniveau wordt het gaandeweg moeilijker om dit op de manier van het realistisch rekenen te onderwijzen want, zoals ik net zei, zoveel wiskunde zit er niet in het dagelijks leven. Ik krijg echter de indruk dat men probeert de wiskunde voor zoveel mogelijk leerlingen leuk, of in ieder geval nuttig, te maken door toch aan de realistische zienswijze vast te houden. En die zegt: kijkt eens wat je allemaal met die wiskunde kunt doen. Is het geen mooi vak, overal kom je het tegen!

Natuurlijk ben ik niet afkerig van enige context in de wiskunde. Voor al bij het uitleggen van wiskunde is dat wel eens handig. Het voorbeeld van de huisnummers heb ik gebruikt om de stelling van de huisnummers bij u te introduceren. Het zal u allen duidelijk zijn geweest dat het daarbij uiteindelijk ging om de sommen van oneven getallen, en niet om het feit dat u nu zo handig huisnummers kunt optellen. Verder weet ik ook heel goed dat de wiskunde enorm veel toepassingen heeft. Daarvoor hoeft ik alleen maar naar het werk van mijn collega's in de toegepaste wiskunde te kijken. Vaak bestaat dit werk uit het opstellen en uitwerken van wiskundige modellen. Bijvoorbeeld modellen voor de waterhuishouding in Nederland, de weersvoorspelling, oceaanstromen of de verkeersstromen op onze snelwegen. Toegepast wiskundi-

gen hebben veel contacten met industrie en bedrijfsleven en bewijzen daar fraaie diensten. Maar modellering van praktische situaties is een niet te onderschatten kunst en er is een flinke portie wiskundige vaardigheid voor vereist. Die vaardigheid doe je op door gewoon wiskunde te bestuderen. Op de ouderwetse manier, zonder enige poespas.

Ontdaan van alle franje

Het is, denk ik, een illusie te veronderstellen dat leerlingen wiskunde leuker gaan vinden als je het verpakt in zogenaamde realistische sommetjes. Werkelijke motivatie voor wiskunde komt namelijk uit de wiskunde zelf. Laat ik u een voorbeeld geven. De laatste twintig jaar is het zelfs de getaltheoretici overkomen dat hun vak plotseling praktische toepassingen heeft gekregen. Dat was even schrikken, want sinds G.H. Hardy [6] heeft gezegd dat hij in zijn leven niets nuttigs heeft gedaan, dachten we dat getaltheorie de zuiverste van de zuivere wiskunde was. Het bleek echter anders te lopen. De moderne cryptografie, of geheimschriftkunde, berust sinds 1976 op de getaltheorie. Cryptografie is de techniek die ervoor moet zorgen dat de privacy van ons elektronische dataverkeer is verzekerd. Maar niet alleen daarvoor. In het spannende boek van Simon Singh [7] kunnen we lezen dat cryptografie soms van beslissende invloed is geweest bij internationale conflicten en nationale veiligheid. De moderne technieken uit de cryptografie zijn afkomstig uit de getaltheorie. De stellingen die daaraan ten grondslag liggen, zijn lang geleden gevonden door mensen die geen idee hadden dat ze nog eens toegepast zouden worden. Hun motivatie was pure nieuwsgierigheid naar getallen en hun eigenschappen. En dat geldt nog steeds. Een aantal van mijn collega's is geheel of gedeeltelijk werkzaam in de cryptografie. Maar geen van hen vindt getaltheorie zo leuk omdat je er cryptografie mee kunt bedrijven. De motivatie is altijd de pure wiskunde en het plezier om getaltheoretische problemen te kraken. Voor de wiskun-

digen die als toegepast wiskundige door het leven gaan, geldt denk ik hetzelfde. Zij kunnen vele succesverhalen vertellen over zelfbedachte technieken die ergens een mooie toepassing hebben gevonden. Soms ben ik daar zelfs jaloers op. Degenen die ik erover sprak, vertelden mij echter dat het niet leuk is om alleen maar succesvolle toepassingen op te sommen. Ook voor hen geldt dat de smaak van de overwinning op een lastig wiskundig probleem meer waard is dan het vooruitzicht dat hun werk kan worden toegepast. Het is de wiskunde zelf, die het interessant maakt om wiskunde te bedrijven.

Ontdaan van alle franje komt de wiskunde het beste uit de verf en kan men zien hoe helder ze in elkaar zit. Daarin bestaat haar grote aantrekkingskracht. Als de ware aard van de wiskunde verstopt wordt in realisme en contexten, dan loopt men grote kans dat gemotiveerde vwo-leerlingen het niet meer leuk vinden. Die zouden in de veronderstelling kunnen komen dat wiskunde een vak is, waarbij je je door rijstebrijbergen van context moet worstelen alvorens tot zaken te komen, waarin per se alles nuttig moet zijn, vooronderstellingen onduidelijk, en waarin een grafische rekenmachine je steun en toeverlaat is. Zouden die leerlingen het dan nog wel leuk vinden, die wiskunde? En zouden ze, onterecht denkend dat dit hun wiskundige voorland is, nog wel een wiskundestudie willen beginnen? Ik hoop natuurlijk dat ze dat nog steeds willen, maar ik houd mijn hart vast.

In deze lichte mineur eindig ik mijn rondwandeling met u door de wiskunde. Ondanks alle bestuurlijke rompslomp, onderwijsperikelen en conjunctuurverschijnselen is de wiskunde altijd zichzelf gebleven. Klaar om een ieder te fascineren die daar oog voor heeft. Ook in de toekomst zal dit zo blijven en met die gedachte zou ik mijn verhaal willen afronden.

Referenties

- 1 A.J. van de Poorten, *Notes on Fermat's Last Problem*, p41, Wiley 1996.
- 2 M.L. D'Ooge (trs.), *Nicomachus of Gerasa, Introduction to Arithmetic* New York, 1926.
- 3 R. Kanigel, *The man who knew Infinity*, Scribner's/Macmillan 1991.
- 4 S.Ahlgren, K.Ono, Addition and Counting: The arithmetic of Partitions, Notices of the AMS 48(2001), 978-984.
- 5 Eindexamen vwo B1,2 2001. Zie *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/2 nr. 2, 148-155, 2001
- 6 G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press 1940.
- 7 S. Singh, *The Code Book*, Fourth Estate, London 1999.
- 8 Hyperbolic SpaceL: Poster of the NotKnot Video of the Geometry Center. <http://www.geom.umn.edu>.
- 9 Fractal by Janet Parke, *Taupensky*, winner of category Abstract in the Fractal Art 1999 contest. <http://www.fractalus.com/contest99/entries/entry-331.htm> Reproduced with permission by Janet Parke.

Reproduced with permission by the University of Minnesota Geometry Center.

Bernard Geurts*Faculteit der Toegepaste Wiskunde, Universiteit Twente**Postbus 217, 7500 AE Enschede**b.j.geurts@math.utwente.nl***Overzichtsartikel**

Turbulente

Het mengen van onderling niet-oplosbare vloeistoffen geeft aanleiding tot complexe stromingsverschijnselen. Hiervan bestaan tal van voorbeelden uit de chemische, farmaceutische en cosmetische industrie. Maar ook in diverse biologische processen of, dichter bij huis, tijdens voedselbereiding in de keuken is een goede menging vaak essentieel. Menging in een turbulente stroming verloopt aanzienlijk sneller dan zogenaamde 'laminaire' menging en staat mede hierdoor sterk in de belangstelling. Bernard Geurts, hoogleraar Dynamics of Complex Fluids aan de Faculteit der Toegepaste Wiskunde van de Universiteit Twente, beschrijft hoe dergelijke processen gesimuleerd en gemodelleerd kunnen worden. In het bijzonder gaat hij in op de vraag hoe de primaire dynamische verschijnselen kunnen worden behouden bij een meer globale en daarmee minder rekenintensieve aanpak.

Menging en dispersie van viskeuze vloeistoffen zijn het resultaat van een complex samenspel tussen vloeistofstroming aan de ene kant en materiaaleigenschappen aan de andere kant. Beide elementen tesamen bepalen hoe gebiedjes met de te vermengen vloeistoffen door de stroming worden meegevoerd, erdoor worden 'uitgerekt', 'opgevouwen', in kleinere gebiedjes worden opgebroken of zich vanuit kleinere gebiedjes samenvoegen, ook wel *coalesceren* genoemd. Dit lokale opbrek- en coalescentiegedrag is relatief goed begrepen. Echter, het verweven van deze kennis met

macroscopische eigenschappen van de stroming die zich onder meer uiten in chaotische, turbulente verschijnselen, is daarentegen nog verre van compleet, zie [1]. In dit artikel zal een schets van turbulente mengproblemen en hun globale, geregulariseerde large-eddy beschrijving worden gegeven.

Laminaire en turbulente menging

Een eerste indruk van de complexiteit van een alledaagse vloeistofstroming krijgt men door voorzichtig wat koffiemelk in een kopje koffie te gieten en vervolgens behoedzaam met een lepel de koffie te roeren. Aanvankelijk kan men nog duidelijk herkennen op welke plek men de koffiemelk in het kopje heeft gegoten en er is nog een heldere tweedeling zichtbaar tussen de lichtgekleurde koffiemelk en de donkere koffie. De stroming in het kopje, en het mengen van de twee vloeistoffen, worden door vrij grote structuren in de stroming gekenmerkt, typisch in de orde van de diameter van het kopje. Dit is karakteristiek voor zogeheten 'laminaire' stroming. Door langzaam verder te roeren wordt deze structuur almaar complexer en het onderscheid tussen lichte en donkere gebieden in de vloeistof wordt gaandeweg moeilijker vast te stellen. Er kan bijvoorbeeld een gedetailleerde, gelaagde structuur ontstaan zoals in figuur 1. Als het roeren steeds vrij langzaam plaatsvindt dan blijft de stroming gedurende het gehele proces laminair en zal moleculaire warmte-beweging voor

menging

het diffusieve transport op kleine schaal moeten zorgen. Dit zogenaamde diffusieve transport verloopt in de meeste gevallen veel te langzaam om van enig praktisch nut te zijn. (Uw koffie zou inmiddels al koud zijn geworden.) Daarom zullen we ons richten op zogenaamd convectief gedomineerd transport dat voor een veel snellere menging kan zorgen vanwege het ontstaan van turbulentie in de stroming.

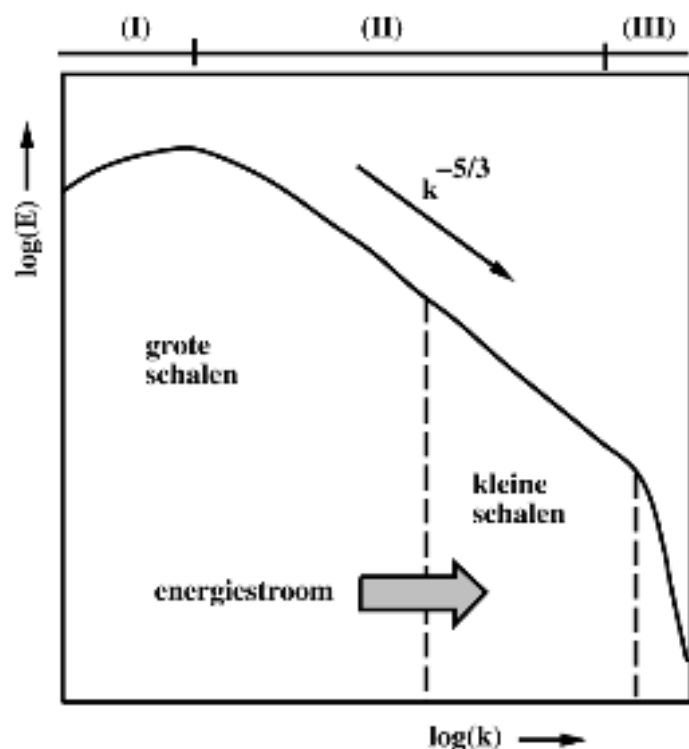
Om het mengproces te versnellen kan men met meer kracht in het kopje roeren of tijdens het roeren op een aantal momenten abrupt de richting van het roeren omdraaien. Hierdoor voert men sneller energie toe aan de stroming en kan men duidelijk waarnemen dat het mengproces bijzonder veel sneller verloopt. In deze gevallen is de stroming aanzienlijk complexer gemaakt door het roeren en vertoont turbulente eigenschappen. Dit is een mooi voorbeeld waarin een turbulente stroming grote pluspunten heeft vergeleken met een laminaire stroming. Hoewel men vaak hinder ondervindt van het turbulent worden van een stroming, bijvoorbeeld uitgedrukt in een verhoogde weerstand van de auto, de boot of het vliegtuig waarmee we ons willen verplaatsen, is turbulentie een welkome ondersteuning om in korte tijd goede menging te krijgen. In tal van toepassingen en processen is het snel en tamelijk volledig homogeen worden van een mengsel van groot belang. Daarbij kan men bijvoorbeeld denken aan de farmaceutische industrie waarin men de samenstelling van medi-

cijnen binnen vrij nauwe grenzen wil kunnen garanderen, of in levensmiddelen-industrie waarin men de smaak, voedingswaarde en consistentie van een produkt zo goed mogelijk uniform wil houden.

In een turbulente stroming zijn de convectieve effecten zoveel sterker dan de viskeuze bijdragen dat de energietoevoer aanleiding geeft tot het ontstaan van een continu spectrum aan



Figuur 1 Illustratie van complexe laminaire menging die na enige tijd ontstaat. De verdeling vertoont verschillende kenmerken van een fractale verzameling [2].



Figuur 2 Het Kolmogorov beeld van een turbulente stroming. Energie E als functie van de afmeting $k \sim 1/l$ van de wervelstructuren. Het spectrum van een turbulente stroming is onderverdeeld in drie gebieden. In (I) bevinden zich de grotere lengteschalen, (II) is het inertieel gebied en (III) het viskeuze gebied. Gemiddeld gesproken is er een energie-overdracht van grotere naar kleinere structuren in de energie-cascade.

stromingsdetails. Daarbij kan men structuren met zeer diverse lengteschalen herkennen. De structuren met vrij grote lengteschalen corresponderen direct met de concrete bewegingen van het lepelkje en de dimensies van het kopje. Deze structuren zijn derhalve probleem-specifiek. Daarnaast ontstaan meer gelocaliseerde vloeistofbewegingen uit de interacties tussen stromingsdetails met verschillende lengteschalen. Zo kan de interactie tussen een aantal wervels in de stroming aanleiding zijn voor het ontstaan van kleinere wervels en omgekeerd. Dit proces dat de *energie-huishouding* in een turbulente stroming kenschetst, staat beter bekend als de zogenaamde *energie-cascade* waarbij energie die is toegevoerd in de grotere lengteschalen, gemiddeld gesproken, door convectieve effecten verdeeld raakt over een scala aan kleinere stromingsdetails.

Aan de hand van de viskeuze Burgers-vergelijking kunnen de primaire dynamische effecten nader worden geïllustreerd. Voor het gemak kijken we in deze illustratie naar de één-dimensionale situatie die voldoende is om de belangrijkste bijdragen aan te wijzen. De Burgers-vergelijking is een zogenaamde behoudswet die een aantal aspecten van vloeistofstroming modelleert. Deze vergelijking is in dimensieloze variabelen gegeven door

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2 \right) - \frac{1}{Re} \partial_{xx} u \equiv B(u) = 0 \quad (1)$$

waarin u geïnterpreteerd kan worden als de geschaalde vloeistof-snelheid, B de Burgers-operator aangeeft die we later nog zullen gebruiken, Re het zogenaamde Reynolds-getal is en t en x de tijd respectievelijk ruimtelijke coördinaat weergeven met ∂_t en ∂_x de corresponderende partiële afgeleides. De tweede term aan de linkerkant van (1) kan ook geschreven worden als $u \partial_x u$ en levert de

(niet-lineaire) convectieve bijdrage tot de evolutie. Deze term is verantwoordelijk voor het optreden van gecompliceerde, lokaal mogelijk snel variërende oplossingen die vanuit relatief eenvoudige begincondities kunnen ontstaan. De derde term aan de linkerkant van (1) geeft de (lineaire) viskeuze bijdrage tot de totale flux. Deze term geeft aanleiding tot het 'uitsmeren' van kleinere details in een oplossing en zorgt voor dissipatie.

Wanneer we ons richten op een structuur in de oplossing met lengteschaal l dan kan worden aangetoond dat de orde-grootte van de convectieve flux in de dimensieloze formulering $\sim l^{-1}$ terwijl de grootte van de viskeuze flux gegeven is door $\sim Re^{-1} l^{-2}$. Voor voldoende grote structuren en bij voldoende groot Reynolds-getal wordt de evolutie gedomineerd door de convectieve flux en zijn de uitsmerende viskeuze bijdragen verwaarloosbaar. Turbulente stromingen gaan juist gepaard met een hoog Reynolds-getal waarbij een sterk wervelende stroming ontstaat terwijl laminaire stroming met een laag Reynolds-getal correspondeert en veel meer 'stroperig' is. Convectief gedomineerde dynamica zal optreden indien $l^{-1} \gg Re^{-1} l^{-2}$ ofwel $l \gg Re^{-1}$. Pas bij voldoende kleine waarden van l zal er sprake zijn van significante viskeuze bijdragen tot de dynamica. Concreet betekent dit dat in één en dezelfde stroming de grotere structuren in de stroming effectief met viscositeitsloze dynamica kunnen worden geïnterpreteerd terwijl viskeuze dynamica altijd zal domineren voor voldoende kleine structuren.

Het samenspel van convectieve en viskeuze invloeden is ook kenmerkend voor de Navier-Stokes vergelijkingen die de stroming van vloeistoffen in detail beschrijven. Het kan worden gekarakteriseerd in het Kolmogorov beeld van een turbulente stroming zoals in figuur 2 is samengevat. Bij voldoende hoge Reynoldsgetallen ontstaat een zogenaamd inertieel gebied met stromingsstructuren die aan de ene kant veel kleiner zijn dan de stromingsgeometrie (zeg de diameter van het koffiekopje) maar tegelijkertijd veel groter zijn dan de zogenaamde dissipatieve lengteschaal vanaf welke de viskeuze flux domineert. Deze structuren in het inertieel gebied hebben een aantal in het oog springende eigenschappen. Hun evolutie wordt voornamelijk door convectieve dynamica beheerst. Bovendien wordt verondersteld dat deze structuren universeel zijn. In het bijzonder wordt daarmee bedoeld dat hun eigenschappen niet direct samenhangen met probleem-specifieke grotere stromingspatronen. Deze dynamische structuren komen in elke turbulente stroming op min of meer vergelijkbare wijze voor. Ze vervullen de rol van doorgeefluik voor de energie die er via de grotere structuren wordt ingebracht en door viskeuze dissipatie bij de kleinere stromingsdetails via warmtegeneratie verdwijnt. Dit inertieel gebied vormt het terrein waar *large-eddy* modellering zich met name op richt in de verwachting dat de dynamische consequenties van de universele structuren in dit gebied met relatief eenvoudige modellen kunnen worden geparametriseerd.

Volledige en globale beschrijvingen

Een belangrijk probleem uit de (numerieke) mathematische fysica dat ook centraal staat in tal van technologische toepassingen is het kwalitatief begrijpen en voldoende nauwkeurig beschrijven van turbulente stromingen. Om althans in principe zeker te zijn van nauwkeurige voorspellingen kan men teruggrijpen op een referentie-methode die op de volledige, ongemodelleer-

de Navier-Stokes vergelijkingen is gebaseerd. Deze aanpak staat bekend als directe numerieke simulatie (DNS). Hiermee kunnen alle details van de stroming worden beschreven. De volledige rekenkracht van moderne grootschalige rekenapparatuur dient bij DNS te worden ingezet om een betrouwbare oplossing van de stromingsvergelijkingen te verkrijgen zonder verdere benaderingen anders dan van numerieke aard.

De complexiteit van turbulente stromingen impliceert dat alleen relatief eenvoudige stromingen daadwerkelijk nauwkeurig kunnen worden gesimuleerd met de beschikbare computers. Een interessante introductie in deze simulatie-aanpak is recent in dit tijdschrift verschenen, zie [3]. Het aantal vrijheidsgraden van een turbulente stroming kan wat nader worden gespecificeerd. Het spectrum aan lengteschalen varieert van een *integrale* schaal L (de diameter van ons koffiekopje) tot en met een *dissipatieve* lengteschaal l_d . Via Kolmogorov's theorie [4] kan men aangeven dat L/l_d schaalt met $Re^{3/4}$. Hiermee is het aantal roosterpunten N dat in 3D noodzakelijk is in een rekenrooster met voldoende ruimtelijk oplossend vermogen te schrijven als

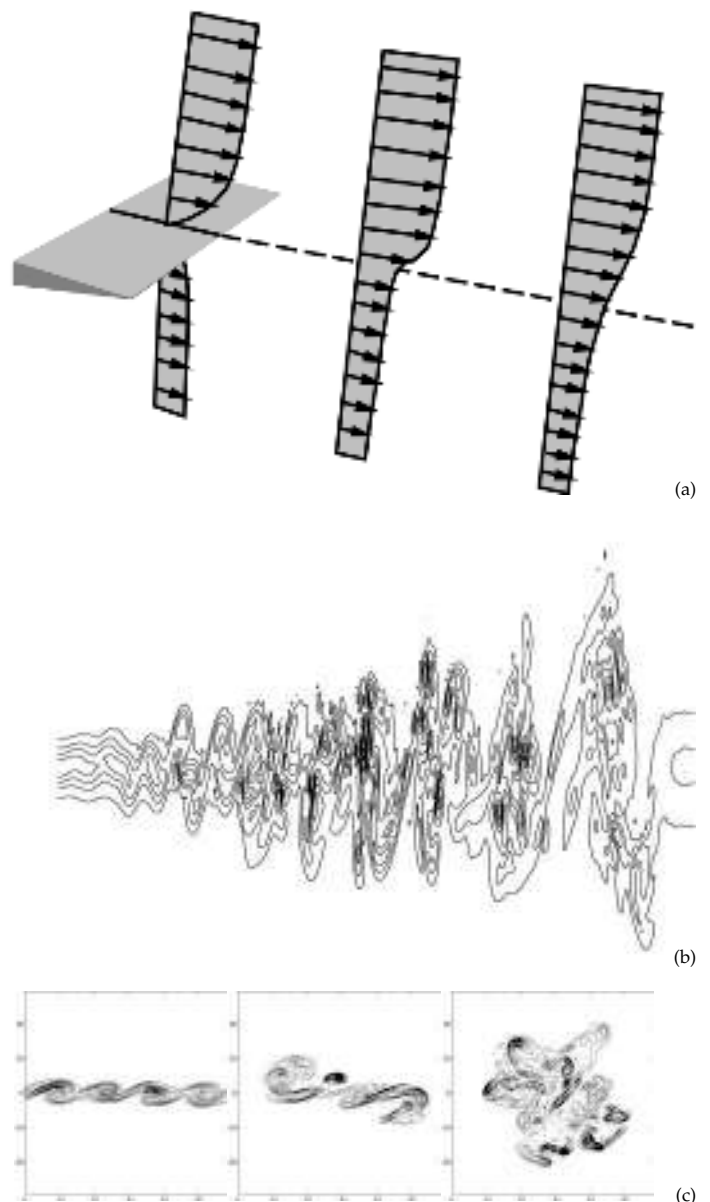
$$N = \left(\frac{L}{l_d/n} \right)^3 \sim n^3 Re^{9/4}, \quad (2)$$

waarbij n het aantal roosterpunten is dat voor de beschrijving van structuren van schaal l_d vereist is (typisch $n \approx 3 - 5$). Het computergeheugen nodig voor een turbulente stroming neemt snel een astronomische omvang aan; met elke factor 10 toename in het Reynoldsgetal moet de resolutie worden opgehoogd met een factor $10^{9/4} \approx 175$. Als we de tijdsintegratie in de overwegingen meenemen dan schaalt de hoeveelheid werk zelfs als $\sim Re^3$. Hoewel computers de afgelopen decennia gemiddeld elke 5-10 jaar een factor 10 sneller zijn geworden illustreert deze schalingswet een groot probleem voor DNS van praktisch relevante problemen. Zelfs een factor $10^3 - 10^4$ toename in verwerkingssnelheid levert niet veel meer dan ongeveer een factor 10 toename in Reynoldsgetal bij gelijkblijvende rekentijd, die overigens al snel kan oplopen tot enkele honderden uren op een moderne supercomputer. Het enige alternatief is de fysische beschrijving te vereenvoudigen en de turbulente effecten te modelleren. Dit maakt het probleem numeriek eenvoudiger en tegelijkertijd veel rijker geschakeerd door verbanden met fenomenologische fysica en mathematische modellering. We gaan hier verderop nader op in.

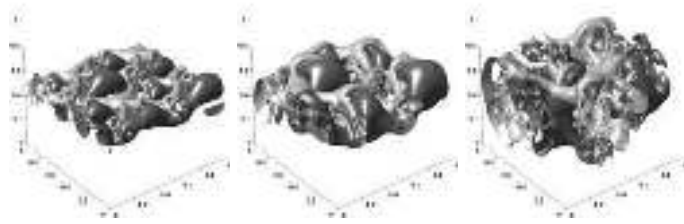
Wanneer we terugkeren naar het mengprobleem dan kunnen we ons afvragen of de directe simulatie aanpak zinvol kan worden toegepast. In het algemeen zullen mengprocessen zich afspeelen in vrij gecompliceerde stromingsdomeinen waarbij tal van parameters de precieze menging zullen beïnvloeden. Als we ons richten op het begrijpen en in kaart brengen van de belangrijkste fenomenen en mechanismen dan kunnen we in eerste instantie een veel eenvoudiger model beschouwen. Bij het bepalen van zo'n meer gestyleerde modellering is het voldoende om een eenvoudige afschuifstroming te bekijken. Een karakteristiek model voor zo'n menglaag kan men experimenteel laten ontstaan door twee parallelle vloeistofstromen, elk met hun eigen stroomsnelheid, samen te brengen. In figuur 3 (a) is dit geschetst. Als gevolg van de snelheidsverschillen die boven en onder de scheidingsplaat heersen ontstaan zogenaamde afschuifspanningen wanneer de vloeistofstromen worden samengebracht. Kleine verstoringen worden in dit snelheidsveld danig versterkt en wanneer we ons met de stroming mee stroomafwaarts bewegen dan zien we uit

deze groeiende verstoringen karakteristieke wervelpatronen ontstaan waarbij vloeistof uit de onderste laag met die uit de bovenste laag wordt vermengd en omgekeerd. We kunnen deze stroming volledig modelleren in een numeriek model met behulp van een geschikte behandeling van de randen van het rekendomein [5]. Een momentopname van de oplossing is in figuur 3 (b) te zien.

Het ruimtelijke menglaagmodel geeft direct toegang tot het bestuderen van menging in een getrouwe weergave van een experimentele situatie. Echter, omdat het volledige probleem in één keer wordt gemodelleerd is de benodigde rekeninspanning van zo'n simulatie zeer hoog en is men in de praktijk beperkt tot relatief lage Reynoldsgetallen. Er is een aanvullende vereenvoudiging mogelijk die ons probleem nog wat verder stileert maar ons deson-



Figuur 3 Schets van de stromingsgeometrie in een ruimtelijke menglaag die zich stroomafwaarts van een scheidingsplaat ontwikkelt (a). Daaronder is een momentopname van de vorticeit opgenomen van een directe simulatie van deze stroming (b). Een aantal corresponderende momentopnames ($t = 20, 40, 80$ van links naar rechts) verkregen met een 'temporal' menglaagmodel zijn opgenomen in (c). Dit illustreert dat de stroming verder stroomafwaarts in het ruimtelijke model voor wat de stromingsverschijnselen betreft ruwweg overeenstemt met de ontwikkelende stroming in het 'temporal' model.



Figuur 4 Momentopnames van de snelheid in de verticale richting op $t = 20$, $t = 40$ en $t = 80$ (van links naar rechts) in een *temporal* menglaag. De lichte (donkere) contouren corresponderen met opwaartse (neerwaartse) stroming.

danks in staat stelt om de belangrijkste verschijnselen te bestuderen. Daartoe stellen we ons voor dat we met de gemiddelde snelheid van de twee vloeistofstromen meebewegen en in dit nieuwe coördinatenstelsel de ontwikkeling van de stroming registreren. Met behulp van periodieke randvoorwaarden in het meebewegende venster dat we op deze manier over de stroming leggen, komen we tot de kanonieke zogenaamde *temporal* menglaag. De ontwikkeling van de oplossing in de tijd in dit laatste model correspondeert goed met de ruimtelijke ontwikkeling in het meer complete ruimtelijke model zoals in figuur 3 (c) is gesuggereerd. Het grote voordeel van het *temporal* model is dat de benodigde rekeninspanning aanzienlijk is teruggebracht en goede referentiesimulaties mogelijk zijn. Een driedimensionale indruk van de oplossing is in figuur 4 opgenomen.

Uit bovenstaande schattingen van het benodigde aantal roosterpunten in (2) komt naar voren dat elke nu bekende numerieke methode zal struikelen over de complexiteit van turbulente stroming bij voldoende hoge Reynoldsgetallen. Het alternatief van een minder gedetailleerde beschrijving van de turbulente stroming dient zich derhalve aan. Hiervoor zijn in principe diverse 'gemiddelde' beschrijvingen ontwikkeld, bijvoorbeeld gebaseerd op een statistische representatie van de turbulentie, zoals in 'Reynolds gemiddelde' formuleringen. Wij zullen ons hier richten op zogenaamde *large-eddy simulaties* (LES) die gebaseerd zijn op een ruimtelijk gefilterde weergave van de stroming. Hierbij probeert men een geregulariseerde, meer globale, beschrijving van de complexe vloeistofdynamica te bepalen. Deze globale beschrijving kan men op een systematische manier ontwikkelen door gebruik te maken van een ruimtelijk convolutie filter. Met een dergelijk filter kan men via middeling over kleine volumes in de vloeistof een indruk van de oplossing krijgen waaruit de kleinere structuren zijn verwijderd. Ter illustratie kijken we naar een zogenaamd *top-hat* filter $u \rightarrow \bar{u}$ waarbij

$$\bar{u}(x, t) = G * u = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi) u(\xi, t) d\xi = \frac{1}{\Delta} \int_{x-\Delta/2}^{x+\Delta/2} u(\xi, t) d\xi.$$

Hierin is Δ de extern gekozen breedte van het filter en G de kern. Andere populaire filters in LES zijn het Gaussische filter en het spectrale filter die elk hun eigen, genormeerde kern hebben. In drie dimensies gebruiken we productfilters waarbij we drie ééndimensionale filters na elkaar toepassen. Signalen die langzaam variëren over afstanden Δ worden nauwelijks door het filter gewijzigd terwijl snel variërende structuren over afstanden Δ na toepassing van het filter vrijwel geheel zijn verwijderd. In figuur 5 is het effect van ruimtelijke filtering geïllustreerd voor de situatie die op $t = 80$ is ontstaan in de *temporal* menglaag. We zien duidelijk een afname van het belang van de kleinere structuren bij

toenemende breedte van het filter.

Het zal duidelijk zijn dat een gefilterde oplossing met minder rekeninspanning kan worden behandeld. In het bijzonder kan men de gefilterde oplossing met aanzienlijk minder roosterpunten toch voldoende nauwkeurig numeriek bepalen. Tegelijkertijd zien we dat de zo verkregen oplossing minder informatie zal bevatten omtrent de stroming en we dus beperkt worden in de voorspellingen die we nog nauwkeurig kunnen doen. Het bepalen van een goede balans tussen deze twee eisen is essentieel bij large-eddy simulatie. Bovendien ontstaan door het filteren van de niet-lineaire termen nieuwe termen in de large-eddy vergelijkingen die niet uitsluitend in de gefilterde oplossing kunnen worden uitgedrukt. Dit is het centrale sluitingsprobleem in LES. Het is dus niet voldoende om alleen maar met minder roosterpunten te simuleren vanuit een gefilterde beginoplossing. Men zal daarnaast een directe modellering voor het sluitingsprobleem moeten introduceren.

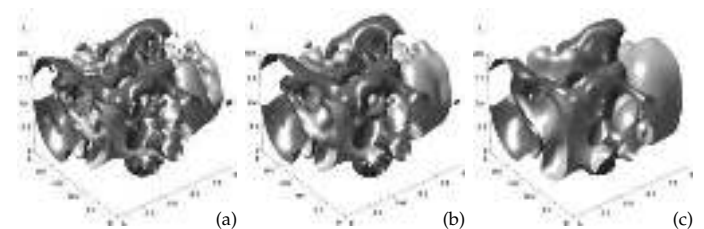
Large-eddy modellering

In de LES-aanpak introduceren we extern een nieuwe lengteschaal met de filter-breedte Δ . Hierdoor krijgt men een externe controle over de kleinere details die in de gladgestreken of geregulariseerde stroming nog worden toegestaan. Daarmee kan men in het bijzonder de numerieke behandeling minder kostbaar maken. Echter, de extern bepaalde lengteschaal Δ zal er ook voor zorgen dat de informatie die in de kleinere stromingsdetails aanwezig is, niet langer beschikbaar is en daarmee kan men verwachten dat de mate van detailering in de beschrijving afneemt. Wanneer Δ te groot zou worden, in ons geval zeg van de orde van de diameter van het koffiekopje, dan ontbreken er wellicht te veel details in de gefilterde voorspelling om nog zinnige kwantitatieve voorspellingen te kunnen doen. Er is dus een zekere limiet aan de hoeveelheid informatie die men straffeloos uit de beschrijving kan weghalen.

Toepassing van een filter $u \rightarrow \bar{u}$ op de Navier-Stokes vergelijkingen levert de basisvergelijkingen voor large-eddy simulatie. Traditioneel worden hiervoor filters gebruikt met de eigenschap dat $\partial_t \bar{u} = \partial_t u$ en $\partial_x \bar{u} = \partial_x u$ terwijl $u^2 \neq \bar{u}^2$. Ter illustratie, filteren van de Burgersvergelijking geeft aanleiding tot

$$\partial_t \bar{u} + \partial_x \left(\frac{1}{2} \bar{u}^2 \right) - \frac{1}{Re} \partial_{xx} \bar{u} = B(\bar{u}) = -\partial_x \left(\frac{1}{2} [\bar{u}^2 - u^2] \right) = -\partial_x \tau.$$

In deze decompositie komt naar voren dat de gefilterde Burgersdynamica wordt omschreven door $B(\bar{u}) = -\partial_x \tau$ waarbij het filteren van de niet-lineaire termen aanleiding heeft gegeven tot de turbulente spanningstensor τ . In het algemene, driedimensionale geval geeft filteren aanleiding tot $\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j$



Figuur 5 Illustratie van het effect van ruimtelijke filtering met een impressie van de snelheid in de verticale richting op $t = 80$. De oplossing verkregen met directe simulatie is gefilterd met verschillende filterbreedtes: $\Delta = L/32$ (a), $\Delta = L/16$ (b) en $\Delta = L/8$ (c). De lichte (donkere) contouren corresponderen met opwaartse (neerwaartse) stroming.

als nieuwe termen in de gefilterde Navier-Stokes vergelijkingen. Deze nieuwe termen hangen zowel van de gefilterde als de ongefiterde oplossing af en kunnen dus niet worden uitgedrukt als functie van $\bar{u}$ alleen. Het is noodzakelijk om een model $M(\bar{u})$ te introduceren voor τ . Hoe een dergelijk model M eruit ziet en op basis van welke overwegingen men tot een bepaalde constructie komt is onderwerp van levendige discussie in de literatuur.

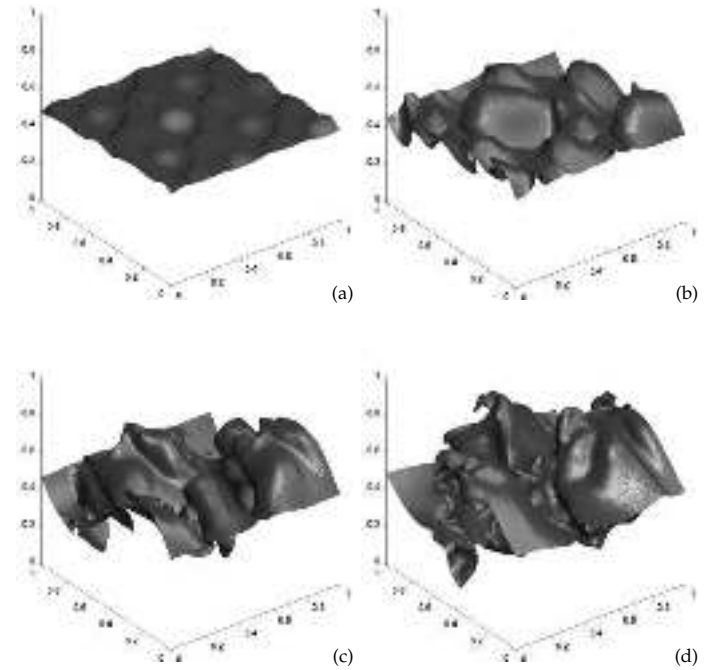
Een model voor de turbulente spanningstensor τ_{ij} wordt een *subgrid-model* genoemd om aan te geven dat het de modellering van vooral de structuren kleiner dan de filterbreedte Δ betreft. In de meeste simulaties is de filterbreedte ook direct gerelateerd aan de roosterafstand h , bijvoorbeeld $\Delta = 2h$. Met subgrid-modellering richt men zich dus op de dynamische consequenties van turbulente bewegingen die zich op schalen kleiner dan de roosterafstand (subgrid) afspelen. Voor het opstellen van een goed subgrid-model is fysisch inzicht in de eigenschappen van de kleine structuren essentieel. Daarnaast kunnen rigoreuze eigenschappen van de turbulente spanningstensor worden aangewend om de subgrid-modellering te sturen. Wanneer men eist dat concrete subgrid-modellen deze rigoreuze eigenschappen ook hebben kan men langs wiskundige weg de familie van mogelijke modellen sterk beperken. Het behoud van bepaalde transformatie-eigenschappen, zoals bijvoorbeeld Galileï-invariantie, maar ook het voldoen aan de zogenaamde realiseerbaarheids-condities en het respecteren van algebraïsche identiteiten van τ springen hierbij als voorbeelden in het oog. Om dit laatste verder toe te lichten schrijven we de turbulente spanningstensor als

$$\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j = L(S(u_i, u_j)) - S(L(u_i), L(u_j)) = [L, S](u_i, u_j)$$

in termen van de filter-operatie L en de product operator $S(u_i, u_j) = u_i u_j$. Dit laat zien dat de turbulente spanningstensor kan worden uitgedrukt als een commutator $[L, S]$ die een aantal belangrijke eigenschappen met de zogenaamde *Poisson-haak* uit de klassieke mechanica deelt. Als voorbeeld, Leibniz' regel voor de Poisson-haak is in de context van LES beter bekend als Germaino's identiteit (zie [6]) die de basis vormt van de succesvolle dynamische subgrid-modellering. Daarnaast kan worden getoond dat $[L, S]$ aan Jacobi's identiteit voldoet.

Wanneer een ruimtelijk filter op een turbulent stromingsveld wordt toegepast dan probeert men de filterbreedte $l_d \ll \Delta \ll L$ te kiezen om LES-modellering tot de universele structuren in het inertiele gebied te kunnen beperken. Hiermee bereikt men aan de ene kant een grote reductie in de rekeninspanning die nodig is voor een nauwkeurige simulatie van de LES oplossing terwijl aan de andere kant de kleinste behouden structuren in de simulatie veel kleiner zijn dan de integrale lengteschaal en gemodelleerd kunnen worden zonder expliciete verwijzing naar stromingsspecifieke details. Met de keuze $\Delta \gg l_d$ correspondeert toepassing van een ruimtelijk filter met de verwijdering van vrijwel alle kleine dissipatieve structuren uit de stroming. De energiestroom in de energie-cascade dient echter gerespecteerd te worden.

Een eerste belangrijke eis aan een goed model voor de turbulente spanningstensor is te zorgen voor een voldoende bijdrage tot de energie-afvoer door stromingsstructuren met een grootte van orde Δ . Dit kan bijvoorbeeld worden gerealiseerd door direct toegevoegde dissipatie via een zogenaamd eddy-viscositeits model. In een dergelijke modellering representeert men de dynamische consequenties van de kleinere structuren door een term van dezelfde vorm als de viskeuze flux. Naast de gebruikelijke



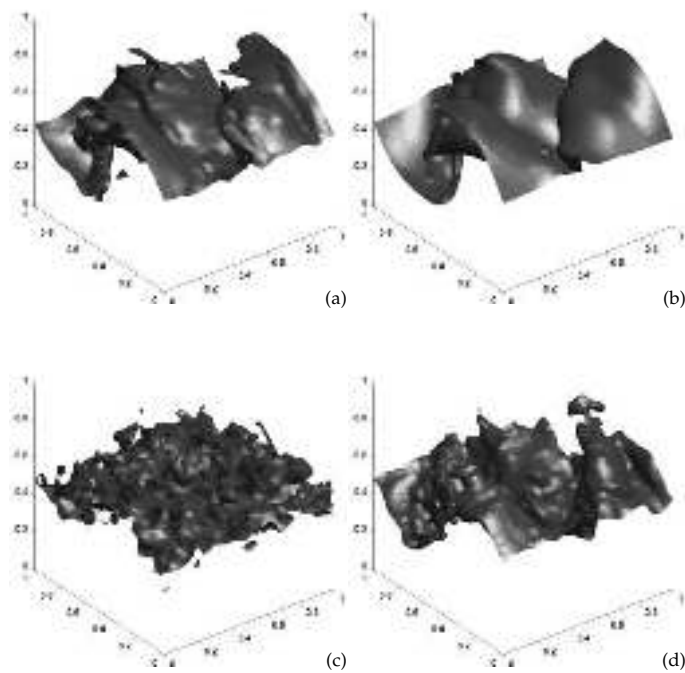
Figuur 6 Evolutie van het scheidsvlak tussen de bovenste en onderste vloeistoflaag in een 'temporal' menglaag op $t = 10$ (a), $t = 30$ (b), $t = 60$ (c) en $t = 100$ (d).

geschaalde moleculaire viscositeit $\nu = (1/Re)$ introduceert men een turbulente viscositeit ν_t die qua dimensies te schrijven is als $\nu_t \sim L_r U_r$ waarbij L_r en U_r karakteristieke lengte- en snelheidsschalen zijn. In de LES context ligt het voor de hand om $L_r \sim \Delta$ te kiezen. Voor de karakteristieke snelheid op deze lengteschaal wordt veelal, naar analogie met het bekende menglengte model van Prandtl, $U_r \sim \Delta |\partial_x \bar{u}|$ gekozen. We zien dat in dit model een lokaal hoge viscositeit resulteert uit grote lokale gradiënten in de oplossing, dat wil zeggen, met kleine, gelocaliseerde structuren in de oplossing. Door gebruik te maken van een dergelijk model worden deze gelocaliseerde structuren uitgesmeerd en wordt de voorspelde oplossing gladder. Een eenvoudig dissipatief model dat deze filosofie representeert wordt verkregen met Smagorinsky's model dat in drie ruimtelijke dimensies gedefinieerd is als:

$$M_{ij}^S = -(C_S \Delta)^2 |\sigma(\bar{\mathbf{u}})| \sigma_{ij}(\bar{\mathbf{u}}) \quad \text{met} \quad |\sigma(\bar{\mathbf{u}})|^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\bar{\mathbf{u}}) \sigma_{ij}(\bar{\mathbf{u}}),$$

waarbij $\sigma_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i$ en de zogenaamde Smagorinsky constante C_S gelijk gesteld wordt aan 0.1.

Een tweede belangrijke eis is dat modellering alleen betrekking heeft op structuren in het inertiele gebied. Structuren in het inertiele gebied zijn voor alle turbulente stromingen duidelijk verwant en men veronderstelt dat een relatief eenvoudig, parametervrij en algemeen bruikbaar model gevonden kan worden. Aangezien er sprake is van een gelijkvormigheidsstructuur in het inertiele gebied van een turbulente stroming is *gelijkvormigheid* (similarity) een tweede eis aan modellen. Hierbij is het model van Bardina een belangrijk voorbeeld. Met de commutatortnotatie kan dit basis gelijkvormigheids model worden geschreven als $M_{ij}^B = [L, S](\bar{u}_i, \bar{u}_j)$, dat wil zeggen, we volgen direct de definitie van de turbulente spanningstensor maar nu toegepast op het beschikbare LES veld. Verdere verfijningen van dit idee zijn nader uitgewerkt in de literatuur en gebruiken bijvoorbeeld inverse



Figuur 7 Momentopnames van het scheidingsvlak tussen de bovenste en onderste laag in een *temporal* menglaag op $t = 80$ verkregen met *large-eddy simulatie*. We vergelijken verschillende subgrid-modellen bij verschillende subgrid-resoluties bij een filterbreedte $\Delta = L/16$. Te zien zijn resultaten verkregen met het Smagorinsky model met een resolutie van 32^3 (a) en 64^3 (b) en resultaten met het Bardina model en een resolutie van 32^3 (c) en 64^3 (d). Het grove rooster (32^3) correspondeert met $\Delta/h = 2$ en het fijnere rooster (64^3) met $\Delta/h = 4$.

modellering waarin geprobeerd wordt om sommige details van de ongefilterde oplossing bij benadering uit de LES oplossing te reconstrueren [8]. Dit staat ook wel bekend als deconvolutie.

Deze twee modellen representeren de basis dissipatieve en dispersieve eigenschappen van subgrid modellen voor de turbulente spanningstensor. Deze basisideeën kunnen verder worden gecombineerd met de zogenaamde dynamische procedure die op algebraïsche eigenschappen van τ is gebaseerd zoals hierboven beschreven. Op die manier ontstaan gemengde modellen waarbij het similarity idee met subgrid dissipatie wordt gecombineerd. Voor steeds meer stromingen worden goede resultaten geboekt met deze zogenaamde dynamisch gemengde modellen waarbij zowel een eddy-viscositeits term als een similarity-term in het model worden opgenomen. De bijdrage van beide termen wordt door de stroming zelf dynamisch bepaald, waarbij gebruik wordt gemaakt van de identiteit van Germano. Daarmee heeft men een modellering van de dynamische consequenties van de kleine turbulente structuren verkregen die eenvoudig combineert met het ontbreken van ad hoc parameters die extern moeten worden aangegeven. Het zou hier te ver voeren om nader in te gaan op meer recente ontwikkelingen in subgrid modellering. We beperken ons tot simulaties gebaseerd op het Smagorinsky en Bardina model en richten ons op een verdere specificatie van het mengproces, waarbij we ons concentreren op de dynamica van passief meebevegende interfaces.

Turbulente dynamica in een menglaag

Om een eerste indruk te krijgen van het voortschrijden van een mengproces kan het voldoende zijn om een aantal opnamen van de oplossing te bestuderen, of om een animatie te creëren. Echter,

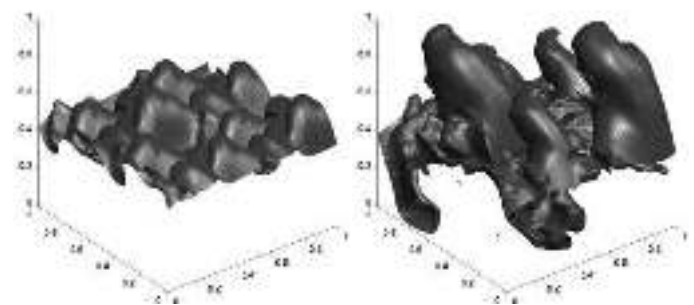
als een meer kwantitatieve en objectieve analyse vereist is of wanneer men een parameter-studie van de meng-efficiëntie wil ondernemen dan zijn meer specifieke en nauwkeurigere maten noodzakelijk. Hier zullen we kijken naar het kwantificeren van het mengproces met behulp van globale eigenschappen van denkbeeldige interfaces die met de stroming mee bewegen. In figuur 6 zijn een aantal momentopnames verzameld van het deformerende scheidingsvlak tussen de bovenste vloeistofstroom en de onderste. We zien duidelijk een toename in de complexiteit van de structuur van dit oppervlak, corresponderend met eerder getoonde opnames van de oplossing. Het oppervlakte van het scheidingsvlak kan worden gezien als een maat voor het voortschrijden van de menging die we verder kunnen uitwerken.

Eigenschappen van dergelijke interfaces zijn van centraal belang bijvoorbeeld in verbrandingsonderzoek en in de chemie maar ook in relatie tot meerfase-stromingen. In het geval van verbrandingsprocessen is het mengen van componenten geassocieerd met chemische reacties. De warmte die vrijkomt bij deze reacties kan de stroming beïnvloeden. Op vergelijkbare wijze kan het scheidende interface eigen fysische eigenschappen bevatten zoals oppervlaktespanning, en daarmee grote locale kromming weerstaan. Al deze effecten zullen hun invloed hebben op het ontwikkelen van de stroming. Wij zullen ons hier richten op het mengen van een onstabiel gestratificeerde afschuiflaag waarbij we veronderstellen dat een laag met zware vloeistof afschuift over een laag met lichte vloeistof. De toename van deze oppervlakte kan gezien worden als een maat voor veranderingen in complexiteit van de oplossing en kan ook dominante verschijnselen in dispersieve processen karakteriseren. Om dit te kwantificeren introduceren we de oppervlaktegroei parameter of *meng-efficiëntie* η als volgt:

$$\eta(t) = \frac{A(t)}{A(0)},$$

waarin $A(t)$ het oppervlakte op tijd t weergeeft. Door vervorming, oprekken en opvouwen van het scheidingsvlak ten gevolge van de interactie met de vloeistofstroming stijgt η en kwantificeert op die manier het complexer worden van de stroming en het voortschrijden van het mengproces.

De voorspelling van η met behulp van DNS kan worden vergeleken met die verkregen met LES en zodoende bijdragen tot de validatie van de LES aanpak. Uit simulaties komt naar voren dat de dynamische effecten van modelleer- en ruimtelijke discretisatiefouten vrij aanzienlijk kunnen zijn. In LES wil men Δ relatief groot

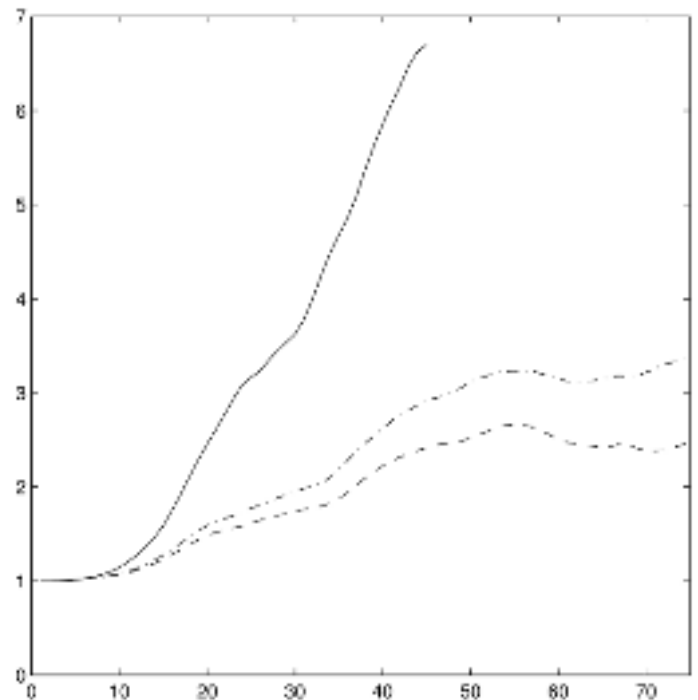


Figuur 8 Momentopname van het scheidingsvlak tussen een zware (boven) en een lichte vloeistof (onder) op $t = 20$ (a) en $t = 40$ (b) met sterke zwaartekrachtseffecten. Een kenmerkende structuur van in elkaar grijpende 'vingers' treedt naar voren.

stellen om effectief te zijn met betrekking tot de vereiste rekeninspanning ten opzichte van DNS. Dit impliceert dat de subgrid termen van belang zullen zijn en daarmee ook modelleerfouten die optreden. Op vergelijkbare wijze kunnen ruimtelijke discretisatiefouten van belang zijn. De resolutie van de kleinere behouden lengteschalen in LES is meestal marginaal en een subgrid-resolutie $\Delta/h = 1$ is gewoon in LES. Deze twee foutbronnen beïnvloeden de nauwkeurigheid van de LES voorspellingen en om deze effecten te kunnen beoordelen en te kunnen onderscheiden, kan men referentie-simulaties die bijvoorbeeld met sterk gereduceerde discretisatiefouten overeenstemmen in de overwegingen betrekken [9].

In figuur 7 hebben we een aantal snapshots van het scheidingsvlak opgenomen zoals verkregen met twee subgrid modellen en bij twee verschillende subgrid resoluties, dat wil zeggen, $\Delta/h = 2$ en $\Delta/h = 4$. We zien dat bij lage Δ/h de oplossing veel kleine structuren bevat, die voor een groot deel verdwijnen wanneer de ruimtelijke resolutie verbetert. Klaarblijkelijk zijn de kleinere structuren volkomen artificieel. Dit effect komt vooral sterk naar voren bij het Bardina model dat te weinig dissipatie lijkt toe te voegen. Hoewel enige informatie omtrent de grote lengteschalen nog herkenbaar is in de Smagorinsky voorspelling, is duidelijk dat de Bardina voorspellingen op een grof rooster compleet verstoord zijn door numerieke invloeden. Wanneer de subgrid resolutie wordt verhoogd zien we dat het inderdaad numerieke invloeden zijn die deze foute resultaten genereren; de oplossingen bij hogere subgrid resolutie lijken sterker op elkaar en stemmen ook aanmerkelijk beter overeen met de voorspellingen van bijvoorbeeld η verkregen met DNS.

In veel situaties heeft de zwaartekracht een duidelijke invloed op het menggedrag van de vloeistoffen. Ter illustratie beschouwen we een simulatie waarin een zware laag vloeistof boven op een lichtere laag is geplaatst. Een tweetal snapshots van deze stroming is te zien in figuur 8. Bij voldoende sterke zwaartekrachtseffecten ontstaat een karakteristiek patroon van in elkaar grijpende 'vingers' met zware vloeistof in een lichtere omgeving, en omgekeerd. Dit effect heeft een sterke invloed op de meng-efficiëntie zoals in figuur 9 te zien is. Deze stroming is als laminaire stroming geïnitieerd en de geringe menging in de laminaire situatie wordt duidelijk uit het nagenoeg constant blijven van η tot dat t tussen 10 en 15 komt. Daarna zorgt een snelle transitie ervoor dat de stroming aanzienlijk complexer en turbulent wordt, wat te zien is aan een sterke stijging van η . Toenemende zwaartekrachtseffecten



Figuur 9 Evolutie van de oppervlakte van het scheidingsvlak bij sterke (getrokken lijn), zwakke (streep-punt) en afwezige (gestippeld) zwaartekrachtseffecten.

invloeden laten een verhoogde menging met wel een factor drie à vier zien.

Epiloog

De large-eddy simulatie aanpak van turbulente stromingen kenmerkt zich vooral door de zoektocht naar een geschikte balans tussen complexiteitsreductie aan de éne kant en het behouden van voldoende details van de stroming om betrouwbare voorspellingen te kunnen doen aan de andere kant. Bij gebrek aan een omvattend inzicht in de globale eigenschappen en invloeden van (numerieke) turbulentie blijft dit een exercitie die vooral proefondervindelijk kan worden uitgevoerd. Voor dat laatste is simulatie slechts ondersteunend, op een manier die complementair is aan daadwerkelijke metingen en kan men alleen via een verdere analyse proberen meer wezenlijke inzichten te krijgen in de diversiteit aan niet-lineaire verschijnselen die zo kenmerkend zijn voor turbulente stromingen.

Referenties

- Ottino J.M.: 1989. The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos, and Transport. Cambridge University Press.
- http://pg.chem-eng.nwu.edu/mixing/geom_mix/geom_fl.html
- Veldman, A., Verstappen, R.: 2001. Turbulentie, golfballetjes en discrete afgeleiden. *Nieuw Archief voor Wiskunde*. 5/2 nr. 4, p. 342–347.
- Tennekes H., Lumley J.L.: 1994. A first course in turbulence. MIT-Press.
- Bruin, I.C.C. de: 2001. Direct and large-eddy simulation of the spatial turbulent mixing layer. Ph-D Thesis; University of Twente.
- Germano, M.: 1992. Turbulence: the filtering approach. *J. Fluid Mech.* **238**, p. 325.
- Vreman A.W., Geurts B.J., Kuerten J.G.M.: 1997. Comparison of subgrid-models in large eddy simulation of the temporal mixing layer. *J. Fluid Mech.* **339**, p. 357.
- Geurts B.J.: 1997. Inverse Modelling for Large-Eddy Simulation. *Phys. of Fluids* **9**, p. 3585.
- Geurts, B.J., Fröhlich, J.: 2001. Numerical effects contaminating LES: a mixed story. *Modern simulation strategies for turbulent flow*. Edwards Publishing, Ed. B.J. Geurts. 309.

Sascha Hilgenfeldt

Faculty of Applied Physics, University of Twente
Postbus 217, 7500 AE Enschede
sascha@tn.utwente.nl

Overzichtsartikel

Bubble geometry

Droge schuim in rust evolueert naar een toestand waar de totale oppervlakte van de schuimbellen is geminimaliseerd. Dit proces veroorzaakt groei bij enkele luchtbellen en inkrimping bij andere. Vijftig jaar geleden toonde John von Neumann aan dat in tweedimensionaal schuim de groeiratio enkel afhangt van het aantal zijden van de polygonale schuimbel. Sascha Hilgenfeldt laat zien dat een goede indicator van de groeiratio in drie dimensies het aantal zijvlakken van de polyhedrale schuimbel is. De analytische theorie en de numerieke simulaties komen bovendien goed overeen.

Foams are of interest to a large and very diverse community of scientists, for a variety of different reasons. Engineers use foams in many applications of great economical impact, from firefighting to mineral processing and from oil recovery to the food sciences (Note that many of the processed foods we eat are foams, such as bread, cake, ice cream, chocolate bars, beer and soda foams, etc.). Overviews can be found in books such as Bikerman's [1] and Prud'homme's [2]. In relation to recent gruesome events, it is worth noting that special detergent foams are the means of choice for the decontamination of areas exposed to biological weapons. Foams are also a prime example of soft condensed matter with viscoelastic properties and complex flow behavior (rheology) similar to emulsions [3–4]. The flow through liquid foams has been the subject of extensive studies by physicists (see [2, 5–7]

for more information). As stable foams demand a good surface-active agent (surfactant), surface chemistry is another field that widely uses foams and single surfactant films [8–9]. And finally, mathematicians have been fascinated by the shape and structure of soap films and bubbles for centuries, largely because their tendency to minimize surface area makes them experimental models for minimal surfaces and tilings of space [10–11].

Modern foam research starts with the Belgian mathematician and scientist Joseph Antoine Ferdinand Plateau, who in the 1870s formulated the basic rules of foam geometry that bear his name today and will be discussed later in this article. Incredibly, Plateau did most of this groundbreaking research when he was almost completely blind, with his assistants carrying out the experimental procedures.

The geometrical properties of foam structures in turn have direct bearing on other cellular matter. Instead of delineating the structure of a dry foam, figure 1a could as well be a faithful representation of grains in a polycrystalline metal or cells in the epidermis of a plant. Nor is this relation only superficial: the problem of filling space with minimal expenditure of energy (i.e., surface area) is common to all of these structures, so that their geometrical similarity has functional reasons. How to describe the cellular structure and its potentially universal characteristics is, however, not at all clear today. The recent work described here has elucidated some aspects of the evolution of this structure, and may be instrumental to its eventual detailed description.

By way of introduction, let us take a closer look at the geometry of one bubble forming part of a liquid foam. Figure 1 shows that, for low liquid content, the bubbles are not at all spherical, but they are polyhedra with slightly curved edges and faces. Physically, the faces are two parallel surfactant layers between which a thin film of liquid is enclosed. That amount of liquid is, however, negligible compared to the liquid residing in the channel-like structures that delineate the edges of the polyhedron (figure 1). The resistance to liquid flow is therefore lowest in these channels (also known as Plateau borders), and this is where *foam drainage* occurs. While drainage is an intensely discussed topic in its own right at the moment [7, 13–16], we will disregard it here, assuming that the foam is so dry that the channels degenerate into line edges,

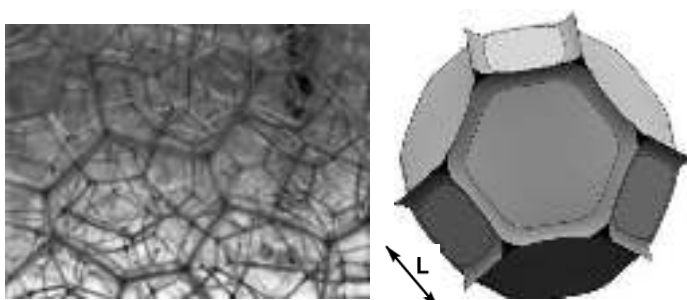


Figure 1 a (left): A view of a dry aqueous foam, from [12]; the bubbles are polyhedral. b (right): Geometry of a single foam polyhedron with typical edge length L . Almost all liquid is concentrated in the channels. This particular bubble is a simulation of a wet Kelvin cell (cf. figure 10 for the ideally dry version).

and we can treat the bubble as an ideal polyhedron with no liquid present, but the complete edge and face structure intact (cf. figure 7 below). In other words: both the films and the edges are now assumed of vanishing thickness, making them two- and one-dimensional structures, respectively. The typical length L of an edge serves as a measure of linear bubble size.

Any polyhedron (whose closed surface is topologically equivalent to that of a sphere) in 3-D space has to obey Euler's theorem,

$$U - E + F = 2,$$

where U , E , and F are, respectively, the number of vertices, edges, and faces of the polyhedron. For dry foam bubbles, the polyhedral geometry is further restricted: *Plateau's rules* are valid, which require faces to meet in threes under tangential angles of $2\pi/3$, and edges to meet in fours under tetrahedral angles (figure 2). Empirically formulated in 1873 by Plateau, it took more than 100 years to prove [17] that these are the only stable conformations of polyhedra in a foam of uniform surface tension. The coordination numbers of Plateau's laws enforce $2E = 3U$, and therefore

$$E = 3F - 6 \quad (1)$$

follows for any foam polyhedron. In other words, for polyhedra in a foam either of the three quantities U , E , F determines the other two. We will make use of this later.

Coarsening

Foam drainage is not the only process of dynamical evolution in a liquid foam. Because the films are thin, gas can readily diffuse through them from one bubble to another. This leads to increased volume of some bubbles that grow at the expense of others. Eventually, some of the bubbles shrink to zero volume (disappear), and — if we assume that the total foam volume is conserved — the average bubble size (or edge length L) increases over time. This process is called *coarsening* and is a direct consequence of the metastability of a foam: as the creation of a surface area element dA costs surface energy $dE_s = \gamma dA$ (with the surface tension γ), a foam with its many interfaces is in an energetically undesirable state. Ideally, all the bubbles would merge into a single gas volume, which is the actual stable state.

Well-separated grains

The same process is at work wherever phase separation has generated grains, droplets, or bubbles of a dispersed phase in a con-

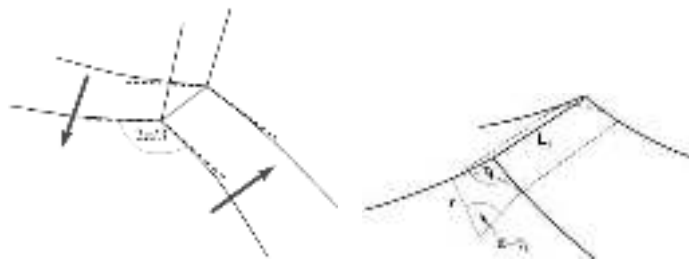


Figure 2 (a) An edge of a foam polyhedron is always a junction of three faces. Even though the faces can be curved in various ways, stability of the configuration demands that the tangential angle at the edge must be $2\pi/3$ (Plateau's rule). The figure also illustrates the direction of coarsening, which depends on the face curvature: gas is lost through convex faces and gained through concave faces (arrows). (b) Mean curvature is concentrated at an edge with tangential angle τ_i . As the radius r goes to zero, the mean curvature integral over the cylindrical section (dashed) reduces to $(\pi - \tau_i)L_i/2$.

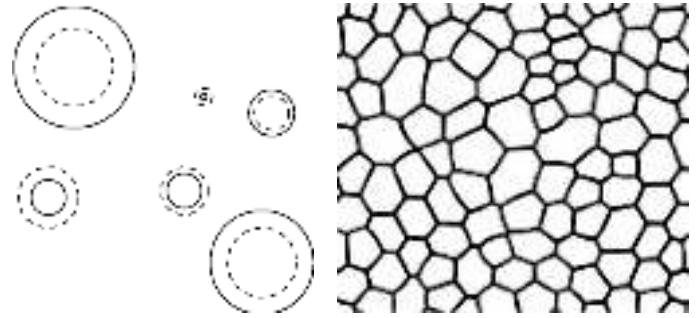


Figure 3 (a) Sketch of Ostwald ripening in 2-D: small grains with higher curvature shrink and dissolve, feeding the growth of larger grains (solid outlines indicate a later time than dashed outlines). (b) A two-dimensional dry foam or other cellular material where the dispersed phase has almost completely invaded the continuous phase. The grains are now polygonal instead of round.

tinuous medium in which the solubility of the dispersed phase is nonzero, so that diffusive exchange of molecules between the 'islands' is possible. For isolated grains of roughly spherical size (figure 3), this process has been known for a long time as *Ostwald ripening*, and it is theoretically well understood (see e.g. [18]). If the limiting time step is diffusion (and not the kinetics of the actual adsorption to a grain), the field of dispersed-phase concentration around a grain decreases as $1/(\text{distance})^2$ [19], and the average radius of grains grows as $\langle R_g \rangle \propto t^{1/3}$. The situation is different for kinetically limited exchange of material: the concentration field can then be assumed constant with distance, and the growth accelerates to $\langle R_g \rangle \propto t^{1/2}$ [18–19]. It should be stressed that the prefactors of these growth laws are also known. Likewise, analytical results were derived for denser systems of still-isolated, spherical grains [20].

The question here arises if such a coarsening material has a universal distribution of grain sizes: if one rescaled figure 3 by the average grain size $\langle R_g \rangle(t)$, would it look — statistically — the same for all times t ? Lifshitz and Slyozov [21] and Wagner [22] first showed that the size distribution in this system indeed tends towards *statistical self-similarity*. The formalism, now known as LSW theory, is very valuable in particular for metallurgy, where grains in polycrystalline metal melts grow due to Ostwald ripening.

Cellular structures

Given a sufficient total amount of dispersed-phase material coming out of solution from the continuous phase, the grains will grow until they touch each other, and must then lose their sphericity. When almost all the dispersed phase has been expelled, what remains is a cellular structure (figure 3) that is equivalent to a dry foam. But for the reasons outlined above, this is not the end point of evolution, as the total interfacial area can be reduced further by the growth of some polyhedral grains at the expense of others. This stage of Ostwald ripening is not well-understood at all, because the complex geometry of the emerging cellular structure begins to play a huge role for the rates of the coarsening. The power law of growth is still easily derived: as the distance between grains is now negligible compared to the grain size, even a diffusion-controlled process now yields a linear-scale growth of $L \propto t^{1/2}$. Then, $L\dot{L}$ must be a constant (where $\dot{L} = dL/dt$). Dimensional analysis shows it to be a diffusion coefficient. However, the prefactor also contains information about the structure of the foam which can not be normalized out as a mere material



Figure 4 From left to right, Schwarz P surface, cluster of five bubbles, shape of a droplet on a spinning rod. Images available under [32].

The Surface Evolver

The Surface Evolver is a software developed by Ken Brakke at University of Minnesota since the early 1990s. It is specifically designed to find minimal energy configurations of interfaces under almost arbitrary constraints, and to find the evolution path towards those optimal states. The Evolver can handle interfaces of arbitrary topology and almost arbitrary dimension. Interactive modifications of the computed surface are also possible. The software has been used to study many problems in mathematics and the physical sciences, such as minimal surfaces, sphere eversion, or lipid vesicle shapes. See figures 1, 4, 7, and 10 in this article for a few examples.

Maybe the best feature of the Surface Evolver is that it is freely available to everyone, for a variety of computer platforms. Downloads, documentation, and more information can be found in [32].

parameter. More precisely, we can write

$$\dot{L}L = D_{\text{eff}}^* F(\text{geometry}), \quad (2)$$

where the effective diffusion coefficient $D_{\text{eff}}^* \equiv D_f \text{He} \gamma v_m / d_f$ incorporates all the material parameters, i.e., film diffusion coefficient D_f , solubility constant from Henry's law He , surface tension γ , molar volume v_m and film width d_f . The dimensionless function F depends only on the bubble geometry, i.e., the angles and edge lengths of the polyhedron, along with the curvature of its faces.

It is possible to be more specific about the function F by revisiting the physical force that drives the gas exchange through the films. The biased diffusion is the consequence of a *pressure difference* between the two bubbles separated by a particular face. By the Young–Laplace law, this pressure difference Δp is directly connected to the mean curvature H of the film,

$$\Delta p = 4\gamma H = 2\gamma (r_1^{-1} + r_2^{-1}),$$

where $r_{1,2}$ are the principle radii of curvature of the polyhedral face and $H = (r_1^{-1} + r_2^{-1})/2$ must be constant over the face (otherwise its shape would change). The additional factor of 2 comes from the existence of *two* parallel faces enclosing the thin film between neighboring bubbles.

We can now conclude that $F \propto \int_{\text{faces}} H dA$, where the integral is evaluated over all interfaces of the bubble. Figure 2 illustrates this dependence of pressure difference, and therefore gas flow, on the curvature of the interface: if curved outward, gas is lost through the face, if curved inward, gas is gained through it. Still, with all the different possible shapes of bubbles this seems an impractical

ansatz to determine the coarsening rates of a foam as a whole, or deduce self-similar size distributions. Indeed, the grain volume distribution of a coarsened three-dimensional cellular material is still unknown. However, great progress was made for the *two-dimensional* analog.

Von Neumann's law (2-D)

A two-dimensional dry foam can be envisaged as a single layer of bubbles confined between parallel glass plates whose distance is smaller than the bubble size. Then, as seen from above, the bubbles are polygons with curved edges. They are still separated by (one-dimensional) films and will still exchange gas and undergo coarsening. In 1952, John von Neumann, while attending a lecture by C. S. Smith on metal grains and coarsening, noticed that for this case the mean curvature of the interface was very easy to determine. For every curved edge i of the polygon, $H = 1/R_i$, with a fixed radius of curvature R_i (see figure 5), the rate of growth of

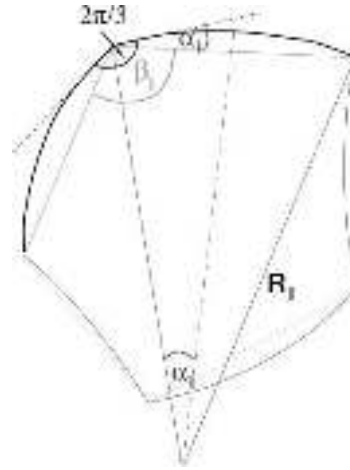


Figure 5 Sketch of a polygonal bubble with curved edges, illustrating the proof of von Neumann's 2-D law of bubble coarsening. Details are given in the text.

the area of a polygon $\dot{a}$ is then proportional to $\int_s H ds$. The integration runs over all n edges indexed with i , whose length is given by $\alpha_i R_i$ (the angles α_i are defined in figure 5). So we obtain

$$\dot{a} \propto \int_s H ds = \sum_i \frac{1}{R_i} \alpha_i R_i = \sum_i \alpha_i.$$

The sum over the angles α_i is easily obtained, as α_i is one-half of the difference between the tangential angle under which the edges meet in a vertex (this tangential angle is $2\pi/3$, by Plateau's law) and the angle β_i under which the edges would meet if they were straight (see figure 5). From elementary geometry, $\sum_i \beta_i = (n-2)\pi$, and therefore $\sum_i \alpha_i = -\frac{\pi}{6}(n-6)$.

Thus, von Neumann arrived at the remarkable result that the growth or shrinkage rate of a 2-D bubble in a dry foam does not depend on its shape or size, but the only geometrical quantity that matters is the number of edges n . Absorbing all other (material) parameters in an effective diffusion coefficient D_2 , von Neumann's law is

$$\dot{a} = D_2(n - n_0), \quad (3)$$

which is an exact formula for every individual bubble, and the edge number of neutral growth is exactly $n_0 = 6$. Bubbles with fewer edges shrink, those with more edges grow. Note that the

population of bubbles with n edges may stay constant nevertheless: For instance, when a small triangular bubble disappears (shrinks to a point), its three neighbors all lose one edge, so that even a bubble that starts out growing may be ‘downgraded’ to a shrinking bubble, replenishing the small- n population.

A conjecture about 3-D coarsening

Von Neumann published this result as a written discussion to C. S. Smith’s talk [23]. Smith was very excited about the result and hoped for a generalization to the case of three-dimensional, polyhedral foams [23], where the edge number n would be replaced by the number of faces F . Unfortunately, this problem is not as benign. Just by constructing counterexamples, it is easy to verify that a direct analog of (3) in three dimensions does not exist: it is possible to have valid foam polyhedra with the same F , but different integral mean curvatures, and therefore different growth rates. While there is no 3-D von Neumann law in the strict sense, another question was asked soon after von Neumann’s discovery: is there an analog to (3) which is valid for the *average* bubble with F faces? Upon averaging over all bubble geometries with the same F using the average $\langle \cdot \rangle_F$, a *statistical* growth law looks like this:

$$V_F^{-1/3} \dot{V}_F = D_{\text{eff}} G(F) \equiv -D_{\text{eff}} V_F^{-1/3} \left\langle \int_{\text{faces}} H dA \right\rangle_F, \quad (4)$$

where $V_F = \langle V \rangle_F$ is the averaged volume of all bubbles with F faces in the foam, and D_{eff} another effective diffusion coefficient. Note that the combination $\dot{V}_F V_F^{-1/3}$ is, up to a constant, just the term $\dot{L}L$ from (2). Lumping all material parameters into D_{eff} , the problem is tantamount to determining the dimensionless growth function $G(F)$.

Many arguments and numerical simulations were introduced [24–27] to suggest that a linear growth law of the form $G \propto (F - F_0)$ should exist, i.e., again a linear dependence of growth rate on F , with a face number F_0 for neutral growth. We will show here that this conjecture turns out to be false.

Experiments and simulations

Attempts at an experimental verification of this conjecture met with great difficulties: While the existence of a neutral growth face number F_0 could be verified [28] (it was found that F_0 was between 13 and 14), the experiments were confined to values $F \approx F_0$, and so could not verify the functional form of the geometry dependence. Also, the statistics of the measurements only

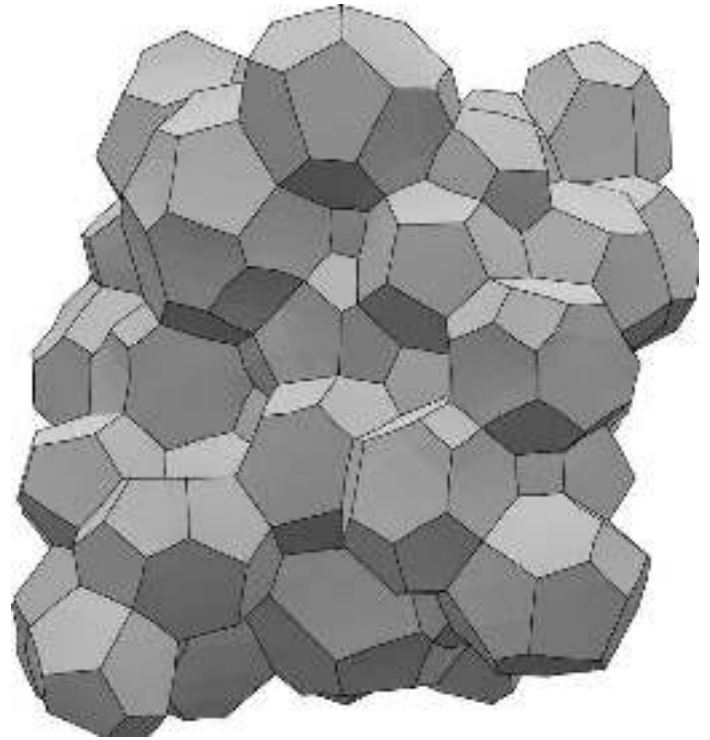


Figure 7 Random polydisperse foam generated with the help of the Surface Evolver program. This example simulation comprises 64 bubbles, while up to 1000 cells per run have been calculated. (Figure courtesy of Andy Kraynik)

comprise a handful of bubbles [29–30].

The main problem in these experiments is the long coarsening time scale that does not allow for long-time data of the coarsening dynamics. Another possibility to derive growth and shrinkage rates is to determine the curvature of interfaces between bubbles directly, which (see above) is proportional to the rate of gas exchange. Even static foams can thus give information about coarsening rates. The curvature of the tenuous films is very hard to visualize in experiment, but numerical simulations can determine it easily using the Surface Evolver, a program specifically designed to minimize surface areas under geometrical constraints [31]. Kraynik [33] has conducted Surface Evolver simulations of random 3-D foams with up to 1000 bubbles, either monodisperse or polydisperse in volume (see figure 7 for a smaller example). While no actual gas diffusion is simulated, the interface curvatures supply the growth data for $G(F)$ shown as circles in figure 6.

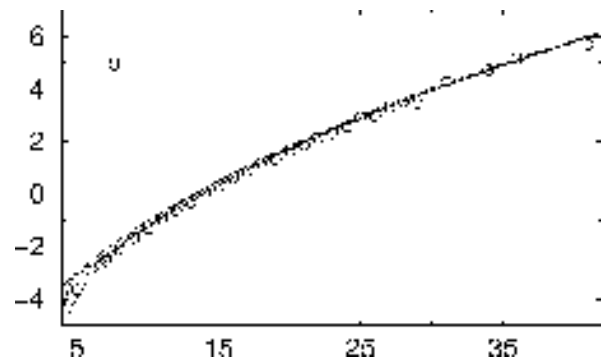
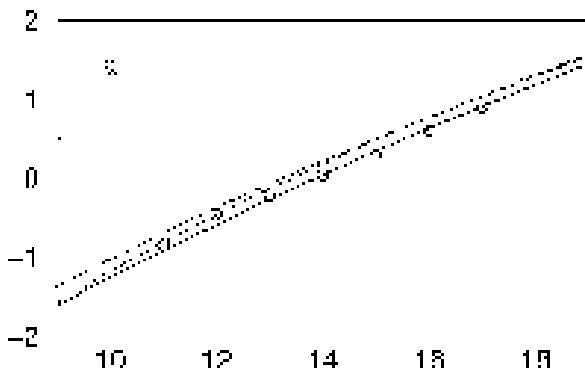


Figure 6 Growth function $G(F)$ of a random foam. Circles show simulations with the Surface Evolver, for (left) 512 monodisperse and (right) 512 strongly polydisperse bubbles. Dashed and dot-dashed lines result from the analytical expressions (11) and (12). The solid line is from a refined theory [34] incorporating the disorder of the simulated foam, characterized by $\sigma_\eta = 0.73$ (see text).

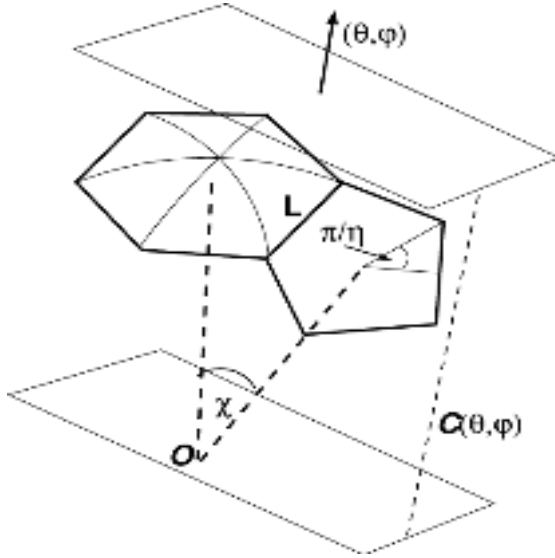


Figure 8 Sketch of two adjacent polygonal faces on a polyhedral foam bubble with centroid O . Indicated are the angle between face normals χ , edge length L , and planar angle π/η for a regular face with η edges. The two planes illustrate the definition of the caliper radius $C(\theta, \phi)$ (see text).

Note the much wider range of F accessible in polydisperse foams. The statistical error of these averages is on the order of the symbol size for most data points, while the spread of growth rates between individual bubbles with the same F is larger (typically ± 0.2). The simulations show that indeed bubbles with large F tend to grow and those with small F tend to shrink, but they also give evidence that $G(F)$ might *not* be linear in F as conjectured. Is it possible to find an analytical approximation to the actual growth function, i.e., can we really find an analog to what von Neumann did 50 years ago?

Von Neumann's law in three dimensions

To determine which bubbles in a 3-D foam grow and which ones shrink, we have to understand how the integral mean curvature over the bubble faces depends on its other geometrical properties. Fortunately, there are classical studies on this subject by Hermann Minkowski. In 1903 [35], he related mean curvature over the surface of a convex body to a quantity we call the *caliper radius* $C(\theta, \phi)$ here, whose definition is illustrated in figure 8. Choosing a coordinate origin O in, e.g., the center of mass of the body, we draw a plane through O perpendicular to the spatial direction (θ, ϕ) . A second, parallel plane is then moved as far away as possible while still touching the body. The distance between the planes (the 'extent' of the body in the direction (θ, ϕ)) is the caliper radius $C(\theta, \phi)$. Minkowski proved that

$$\int_{4\pi} C(\theta, \phi) d\omega = \int_{S_K} HdA \quad (5)$$

for any convex body K , where the integrals are over all solid angles ($d\omega = \sin\theta d\theta d\phi$) and the total surface area S_K of K , respectively. Following the proof of this theorem as outlined e.g. in [36], one can verify that it remains valid for a body that is not convex, but piecewise convex or concave (such as a faceted foam polyhedron), if the definition of $C(\theta, \phi)$ is suitably generalized. Note also that the integral mean curvature over the surface of a faceted body consists of two contributions: the mean curvature of the faces, and the concentrated mean curvature in the edges, which depends on

the tangential angle under which the faces meet in the edge. Figure 2 illustrates that this curvature contribution is simply

$$\int_{\text{edges}} HdA = \sum_{i=1}^E \frac{1}{2} (\pi - \tau_i) L_i, \quad (6)$$

where τ_i is the tangential angle and L_i the length of edge i ($i = 1, \dots, E$).

We will now apply (5) to two different bodies: a foam polyhedron K , whose edges are *curved*, and its *skeleton polyhedron* K_0 , i.e., a polyhedron with the same vertex positions where the faces have been replaced by (piecewise) *flat* faces. In complete analogy to von Neumann's 2-D argument, we can then evaluate the difference between the edge curvatures (6) of K and K_0 : as $\tau_i = 2\pi/3$ by Plateaus law for foam polyhedra, the edge curvature is just $\frac{\pi}{6} \sum_i L_i$ for K , while it is $\sum_i \frac{1}{2} \chi_i L_i$ for K_0 , where $\chi_i = \pi - \tau_i$ are the angles between adjacent face normals (figure 8). Now we can write Minkowski's theorem as

$$\int_{4\pi} C(\theta, \phi) d\omega = \int_{\text{faces}} HdA + \sum_{i=1}^E \frac{\pi}{6} L_i \quad (7)$$

for K , and

$$\int_{4\pi} C_0(\theta, \phi) d\omega = \int_{S_{K_0}} HdA = \sum_{i=1}^E \frac{1}{2} \chi_i L_i \quad (8)$$

for K_0 , as the integral over the flat faces vanishes. The importance of Minkowski's theorem is that the left-hand sides of (7) and (8) can be directly evaluated by expanding C around C_0 in a series over the small parameter $\epsilon = L/R$, where L is a typical edge length and R a typical radius of curvature of the bubble. By inspection of bubbles in real foams, we know that $\epsilon \ll 1$. The result of this computation gives

$$\int_{4\pi} C(\theta, \phi) d\omega - \int_{4\pi} C_0(\theta, \phi) d\omega = L O(\epsilon^3),$$

i.e., the difference between the left hand sides of (7) and (8) is of third order. Consequently, by setting the right-hand sides equal to each other, we find an expression for the integral curvature over the faces, which is precisely the quantity that we need to evaluate the growth rate (cf. (4)). We obtain

$$\int_{\text{faces}} HdA = \sum_{i=1}^E \frac{1}{2} \left(\chi_i - \frac{\pi}{3} \right) L_i, \quad (9)$$

valid to order ϵ^2 . This formula tells us the growth rate for every individual bubble, but it also shows that we need much more information about a 3-D polyhedron than about a 2-D polygon to evaluate it: while the edge number E is directly given by F (see (1)), all the angles and edge lengths have to be known. To obtain a formula such as (4), we have to average over all configurations.

This averaging seems like a daunting task, and so let us try to start with the most simplistic of assumptions, namely, that all bubbles of face number F have the same geometry, and that they are maximally symmetric and isotropic, i.e., all faces have the same number of edges and all edge lengths are the same. Note that for a given F , these conditions do not prescribe an actually existing bubble; it is easy to see that each of the faces must have $\eta_F = 6 - 12/F$ edges, which is a *fractional* number for all F but 4 (tetrahedron), 6 (cube), and 12 (pentagonal dodecahedron). As we are looking for statistically averaged formulas, we will go along

with this, interpreting the idealized polyhedra as reasonable interpolations.

The idealized F -faced bubbles have equal face normal angles χ_F (figure 8), which are found to be

$$\chi_F = 2 \arctan[(4 \sin^2(\pi/\eta_F) - 1)^{1/2}]. \quad (10)$$

Here, we can already determine the value of F_0 . A neutrally growing bubble must, by (9), have $\chi_F = \pi/3$, so that $F_0 \equiv F_0^* = 12/(6 - \pi/\arcsin \sqrt{1/3}) = 13.397\dots$, a well-known value conjectured to be the average face number in a minimal-area foam with equal pressure bubbles [11, 37]. This number also compares well with the available experimental evidence [28, 30] and the numerical simulations of figure 6.

Encouraged, we now go on to compute $G(F)$, inserting χ_F for χ_i in (9) and normalizing the result by $V_F^{-1/3}$. For the latter, the volume V_F is assumed equal to the volume of the skeleton polyhedron (the volume contributions due to the curved interfaces are neglected). Thus, we obtain [34]

$$G(F) = \frac{3 \left[(F-2) \tan \frac{\pi}{\eta_F} \right]^{2/3} \tan^{1/3}(\frac{\chi_F}{2})}{2^{1/3}} \left(\frac{\pi}{3} - \chi_F \right). \quad (11)$$

Together with (10) and the definition of η_F , this is a completely parameter-free, analytical expression for G , which compares extremely well with the numerical simulations for both monodisperse and polydisperse foams (figure 6). The simulations — which themselves are also parameter-free — obtain $F_0 \approx 13.82$ for the monodisperse and $F_0 \approx 14.00$ for the polydisperse case, but more striking is the excellent agreement over the whole range of F , even in the polydisperse case. Note that the theory presented here does not contain any correlation between bubble size and face number, even though there is a strong correlation in real foams (smaller bubbles have smaller F). Therefore, the predictions from (11) are the same for both simulations.

The success of the simplistic picture of equal, maximally symmetric bubbles shows that the average over the shapes of foam-bubbles in a random foam must lie very close to the most compact, least distorted shape possible, so that the characterization by face number alone is a very good indication of the growth or shrinkage rate of the bubbles.

If only evaluated in the vicinity of F_0 , Eq. (11) necessarily re-

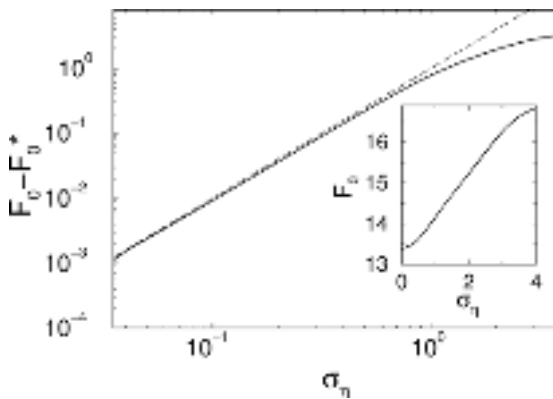


Figure 9 Solid lines: dependence of neutral growth face number F_0 on the foam disorder σ_η (width of the edge number distribution). The inset and main figure show the same curve on linear and log-log scales, respectively. The dashed line indicates a quadratic power law for small $F_0 - F_0^*$.

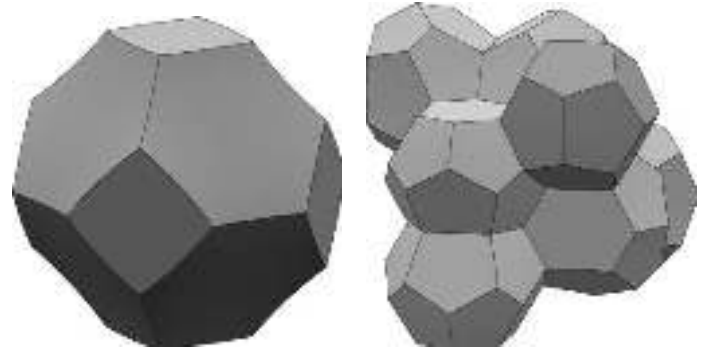


Figure 10 a (left): Kelvin's 1887 conjecture for the unit cell of the optimal tiling of space. This 14-faced cell looks much like the Wigner-Seitz cell of a bcc crystal, but its edges and faces are slightly curved. b (right): Weaire and Phelan's 1994 counterexample unit cell consisting of eight polyhedra (six 14-faced, two 12-faced). It is not known if this cell is indeed optimal.

sembles a linear function, but an expansion for large F shows that its asymptote is

$$G(F \gg 1) = \frac{\pi^{7/6}}{2^{1/6} 3^{5/12}} F^{1/2} - 6^{1/3} 2\pi^{2/3} + O(1/F^{1/2}), \quad (12)$$

a *square-root* function of F . The dot-dashed line in figure 6 shows that approximation, which works very well even for relatively small F .

One can try to improve further on this result by relaxing the condition of uniform bubble shape, introducing variations in edge number, edge length, etc. This is rather cumbersome, and the interested reader is referred to [34] for the details of the actual procedure. As a measure for disorder, we use the width σ_η of the distribution of edge numbers η , which we take to be universal for all face numbers F , centered around the idealized values η_F . The parameter σ_η does change from random foam to random foam: for Kraynik's simulations [34], we find $\sigma_\eta \approx 0.73$. Plugged into this formalism, it leads to the solid $G(F)$ curve in figure 6, which is now extremely close to the numerical result, with $F_0 \approx 13.85$, agreeing with simulation to three significant figures. The static experimental random foams from the remarkable paper by Matzke [38] have $\sigma \approx 0.59$; they would yield a slightly different growth curve, and also a slightly different F_0 . Further analysis shows (figure 9) that with growing disorder parameter σ_η , F_0 departs quadratically from the idealized value F_0^* . However, realistic foams never seem to stray very far from this figure.

Conclusion and outlook

We have derived a three-dimensional analog to von Neumann's law for the coarsening growth rate of bubbles in a foam. While not valid for individual bubbles, the 3-D version does a very good job capturing the behavior of averaged polyhedral bubbles with a given number of faces, and can thus be said to describe the coarsening of the whole ensemble of foam polyhedra. The analytical 3-D von Neumann's law (11) depends on the number of faces alone, and demonstrates that F is the most important parameter determining growth or shrinkage of coarsening bubbles, much like the number of edges in two dimensions. However, the growth rate does not increase linearly with the number of faces, but asymptotically as the square root.

Work is currently underway to put the 3-D von Neumann law to similar good use as the 2-D law. The latter has been instrumental to help predict the size and shape distributions in two-

dimensional cellular matter that is well-coarsened (e.g. [39–40]). As mentioned in the introduction, the properties of these functions are largely unknown for the 3-D case, with the exception of some necessary conditions they must fulfill, cf. [19]. The relatively simple form of (11), and in particular of the approximation (12), gives hope as to the existence of simple analytical predictions for the structure of 3-D foams, polycrystalline metals, living cells, and other similar materials.

It is also tempting to speculate about the impact of this work on the long-standing and still unsolved question of the optimal tiling of space, known as the Kelvin problem [11]. The problem is often posed like this: if you want to tile a 3-D space completely with objects of unit volume, what is the tiling for which the total interfacial area is minimized? Lord Kelvin conjectured a solution, namely a tetrakaidecahedron ($F = 14$, eight hexagonal, four square faces) with slightly curved faces that tiles space (figure 10). The conjecture survived for more than a century, but in 1994 Weaire and Phelan [41] found a counterexample (using the Surface Evolver), a periodic foam with a more complicated unit cell consisting of six tetrakaidecahedra (of another kind, with 12 pentagons and two hexagons) and two pentagonal dodecahedra (figure 10). This structure is also known as A15 in crystallography, where it occurs for various minerals and metal alloys [11]. The

differences in surface/volume efficiency for these two structures is minute (they differ by fractions of a percent), but the Weaire–Phelan structure seems more realistic for a foam, in particular as it contains many pentagonal faces. Pentagons are abundant in real foams [38], while a foam made from Kelvin cells does not contain any of them. Not surprisingly, Kelvin cell configurations are found rarely [33] or not at all [38] in realistic foams.

The space-filling structures described in the previous paragraph are monodisperse foams, for which it can be shown that their average face number $\bar{F}$ should be equal to the neutral growth face number F_0 (cf. [42]). With the correlation between F_0 and foam disorder, this establishes a correlation between surface/volume ratio and disorder, suggesting that less disordered foams could attain lower surface/volume ratios. Maybe mathematicians could profit from this in their attempt to solve the Kelvin problem, applying a formula found because of the desire to explain the physical process of coarsening in foams, something every reader can readily observe in a glass of beer. $\Leftarrow$

Acknowledgments

Many thanks to Andy Kraynik, Stephan Koehler, and Howard Stone for long-standing collaborations, and Klaus Mecke for valuable discussions.

References

- 1 J. J. Bikerman, *Foams* (Springer, New York, 1973).
- 2 *Foams: Theory, Measurements and Applications*, edited by R. K. Prud'homme and S. A. Khan (Marcel Dekker, New York, 1996).
- 3 A. M. Kraynik, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **20**, 325 (1988).
- 4 T. G. Mason, J. Bibette, and D. A. Weitz, *J. Colloid Interface Sci.* **179**, 439 (1996).
- 5 G. Verbist, D. Weaire, and A. Kraynik, *J. Phys. Condens. Matter* **8**, 3715 (1996).
- 6 D. Weaire and S. Hutzler, *The Physics of Foams* (Oxford University Press, Oxford, 2000).
- 7 S. A. Koehler, S. Hilgenfeldt, and H. A. Stone, *Langmuir* **16**, 6327 (2000).
- 8 K. J. Mysels, K. Shinoda, and S. Frankel, *Soap Films, studies of their thinning* (Pergamon Press, London, 1959).
- 9 D. Exerowa and P. M. Kruglyakov, *Foam and foam films* (Elsevier, Amsterdam, 1998).
- 10 J. M. Sullivan, in *Foams and Emulsions*, edited by J. F. Sadoc and N. Rivier (Kluwer, Dordrecht, 1999), pp. 379–402.
- 11 *The Kelvin problem*, edited by D. Weaire (Taylor & Francis, London, 1996).
- 12 M. R. Fetterman et al., *Optics Express* **7**, 186 (2000).
- 13 S. A. Koehler, S. Hilgenfeldt, and H. A. Stone, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4232 (1999).
- 14 M. Durand, G. Martinoty, and D. Langevin, *Phys. Rev. E* **60**, R6307 (1999).
- 15 A. Saint-Jalmes, M. U. Vera, and D. J. Durian, *Europhys. Lett.* **50**, 695 (2000).
- 16 S. Hilgenfeldt, S. A. Koehler, and H. A. Stone, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4704 (2001).
- 17 F. J. Almgren and J. E. Taylor, *Sci. Am.* **235**, 82 (1976).
- 18 J. A. Marquee and J. Ross, *J. Chem. Phys.* **79**, 373 (1983).
- 19 W. W. Mullins, *J. Appl. Phys.* **59**, 1341 (1986).
- 20 S. P. Marsh and M. E. Glicksman, *Acta Mater.* **44**, 3761 (1996).
- 21 I. M. Lifshitz and V. V. Slyozov, *J. Phys. Chem. Solids* **19**, 35 (1961).
- 22 C. Wagner, *Z. Elektrochem.* **65**, 581 (1961).
- 23 J. von Neumann (and following Reply by C. S. Smith), in *Metal Interfaces* (American Society for Metals, Cleveland, 1952), p. 108.
- 24 N. Rivier, *Phil. Mag. B* **47**, 91 (1983).
- 25 J. A. Glazier, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2170 (1993).
- 26 C. Sire, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 420 (1994).
- 27 C. Monnereau, N. Pittet, and D. Weaire, *Europhys. Lett.* **52**, 361 (2000).
- 28 C. Monnereau and M. Vignes-Adler, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5228 (1998).
- 29 C. Monnereau, M. Vignes-Adler, and N. Pittet, *Phil. Mag. B* **79**, 1213 (1999).
- 30 C. Monnereau and M. Vignes-Adler, *J. Colloid Interface Sci.* **202**, 45 (1998).
- 31 K. Brakke, *Exper. Math.* **1**, 141 (1992).
- 32 <http://www.susqu.edu/facstaff/b/brakke>
- 33 A. M. Kraynik, D. A. Reinelt, and F. van Swol, in D. M. Binding et al. (Eds.), *Proceedings of the XIIIth International Congress on Rheology, Cambridge, UK*, pp. 1–43 (2000).
- 34 S. Hilgenfeldt, A. M. Kraynik, S. A. Koehler, and H. A. Stone, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2685 (2001).
- 35 H. Minkowski, *Math. Ann.* **57**, 447 (1903).
- 36 M. G. Kendall and P. A. P. Moran, *Geometrical probability* (Griffin, London, 1963).
- 37 N. Rivier, *J. Phys. (Paris), Colloque C9* **43**, 91 (1982).
- 38 E. Matzke, *Am. J. Bot.* **33**, 58 (1946).
- 39 H. Flyvbjerg, *Phys. Rev. E* **47**, 4037 (1993).
- 40 M. F. Miri and N. Rivier, *Europhys. Lett.* **54**, 112 (2001).
- 41 D. Weaire and R. Phelan, *Nature* **367**, 123 (1994).
- 42 D. Weaire, N. Pittet, S. Hutzler, and D. Pardal, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2670 (1993).

Pieter Moree

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde

Universiteit van Amsterdam

Plantage Muidersgracht 24, 1018 TV Amsterdam

moree@science.uva.nl

Lang Amerikaans?

Het American Institute of Mathematics (AIM) in Palo Alto, Californië, is een particulier gefinancierd wiskunde-instituut. Pieter Moree bracht er in mei 2001 een bezoek. Hij geeft een indruk van het instituut en vertelt over de ontstaansgeschiedenis.

In de jaren tachtig van de vorige eeuw kreeg Fry senior, die een kruidenierszaak had in Palo Alto, het idee om naast snoep ook elektronica te gaan verkopen. Dit bleek een gouden greep; met de opkomst van de pc was het een kleine stap ook die te gaan verkopen. Palo Alto ligt in het hart van Silicon Valley. Vanuit een garage legden Hewlett en Packard er de basis voor de latere gelijknamige multinational. De nabijheid van Stanford University garandeerde een aanwezigheid van een groot aantal hoogopgeleiden met een meer dan gemiddelde interesse in elektronica en computers. Spoedig kon Fry uitbreiden. Tegenwoordig bezitten de drie zonen van Fry samen meer dan twintig elektronica-zaken, voornamelijk in Californië. Het zijn zaken op zijn Amerikaans: winkels met een zeer groot vloeroppervlak met daarnaast een uitgestrekte parkeerplaats, waar mensen met cowboyhoed en cowboylaarzen grote dozen naar hun pick-up-truck zeulen. De oude kruideniersmentaliteit is niet verdwenen, want mocht de aankoop van het nieuwste *Lara Croft adventure* hongert of dorstig maken, in de winkel kan ook gegeten en gedronken worden.

De drie gebroeders Fry zitten inmiddels met een luxeprobleem: hoe de groei van hun geldberg te beheersen. John Fry is de broer met de meest originele oplossing. Na zijn studie wiskunde stond hij voor de keuze te promoveren of in de zaak van zijn vader te gaan. Hij koos voor het laatste. Zijn wiskundige interesse bleef echter. Zo verzamelt hij wiskunde-

boeken en, eenmaal zeer rijk geworden, had hij het idee een wiskundebibliotheek op te richten. Voor advies zocht hij toen contact met zijn oud-studiegenoot Brian Conrey, die inmiddels naam gemaakt had in de analytische getaltheorie — hij bewees onder meer dat meer dan 40,76 procent van alle nulpunten van de Riemann-zetafunctie op de lijn $\text{Re}(s) = 1/2$ liggen. Uiteindelijk kwamen de Fry's tot een nog gewaagder plan, het opzetten van een nieuw wiskunde-instituut. Brian Conrey zou daarvan de eerste directeur worden. John Fry had, als tijdelijk onderkomen, ruimte beschikbaar naast de eerste winkel.

Die allereerste zaak van de Fry's ligt in Palo Alto. Deze bevindt zich, samen met het AIM en een aantal andere zaakjes, in een nogal shabby uitziende lange loods. Vier jaar later zit het AIM daar nog steeds, met Brian Conrey als directeur. Het AIM is gehuisvest in een grote vierkante ruimte met daaraan grenzend een aantal werkkamers. De boekenverzameling is beperkt. Er is een grote (p)reprintverzameling van wijlen Samuel Eilenberg die inmiddels ook verder uitgebreid is. Er is ook, in verband met lezingen en conferenties, een gevarieerde stoelencollectie. Sommige lijken zo van het beroemde vliegtuigkerkhof in Californië te komen (waar de makers van de film over de vlucht van de Apollo 13 rijkelijk setmateriaal uit geput hebben). Je zou niet zeggen dat het instituut al vier jaar bestaat. Wel heeft het instituut, mede dankzij de inspanningen van David Farmer, een prima homepage (zie [1]). Veel van de preprints die je daar kunt vinden komen uiteindelijk in topbladen terecht.

Atle Selberg

Gedurende de tweede week van mijn verblijf werd er een conferentie in het AIM gehouden, de eigenlijke aanleiding van mijn bezoek. Het

ging over het verband tussen de Riemann-hypothese (priemgetaltheorie) en Random Matrix Theorie (RMT). De laatst genoemde theorie werd ontwikkeld door Wigner om spectra van zware atomen te begrijpen. Met behulp van RMT blijken nu allerlei formules in de priemgetaltheorie voorspeld te kunnen worden. Het waarom van deze connectie is nog niet ontdekt, maar wanneer dat gebeurt dan zou het wel eens de sleutel kunnen zijn tot de oplossing van de uit 1859 daterende Riemann Hypothese. Een aantal van de open problemen op dit gebied zijn terug te vinden op AIM's homepage. Een goed leesbare inleiding tot dit onderwerp is geschreven door Brian Conrey [3].

Wegens de beperkte ruimte in het AIM gebouwtje werd de conferentie niet aangekondigd. Zelfs mensen in de wiskundeafdeling van de nabijgelegen Stanford University werden niet op de hoogte gesteld. Ik kon deelnemen aan de conferentie dankzij mijn contacten met Mike Rubinstein die nu als postdoc bij het AIM werkt. Er waren veel beroemdheden uit deze tak van wiskunde aanwezig.

De eregast van de conferentie was de nu inmiddels meer dan tachtig jaar oude Atle Selberg (van origine Noor). Waarschijnlijk



Het huidige AIM Research Conference Center

lijk is hij de invloedrijkste analytische getal-theoreticus van de vorige eeuw. Het verhaal gaat dat, toen Niels Bohr na de Tweede Wereldoorlog terugkeerde naar Denemarken, hij aan een van de wetenschappers die daar gedurende de oorlog gebleven waren vroeg of er tijdens zijn afwezigheid nog ontwikkelingen op wetenschappelijk terrein hadden plaatsgevonden in Scandinavië. De repliek van zijn gesprekspartner was eenvoudigweg: "Selberg!". Selberg publiceerde namelijk gedurende de oorlog een aantal baanbrekende artikelen aangaande het gedrag van de Riemann-zetafunctie. Zo was hij de eerste die bewees dat een positieve fractie van alle niet-triviale nulpunten van de Riemann-zetafunctie op de lijn $\text{Re}(s) = 1/2$ liggen, een resultaat dat door N. Levinson (1974) en weer later door Brian Conrey (1989) is verbeterd. Vervolgens duurde het niet lang voordat Selberg naar het prestigieuze Institute of Advanced Study werd gehaald. Hij heeft daar in 1949, evenals Paul Erdős, de priemgetalstelling op een elementaire manier bewezen, dat wil zeggen: zonder gebruik te maken van complexe analyse. Dat was in de wiskunde een gebeurtenis van de eerste orde, omdat vele experts dit voor onmogelijk hielden of hoge verwachtingen hadden van de nieuwe inzichten die zo iets zou opleveren. Zie hoofdstuk 8 van het populaire en vlot weglezende [7] of, voor meer details, het wiskundigere [4].

Tijdens de lunchpauzes van de conferentie gingen we in een naburig parkje croquet en jeu de boules spelen. Selberg won stevast met jeu de boules. Zoals Sarnak al opmerkte: "You don't beat Selberg at his own game" (Sarnak bedoelde dit evenwel in wiskundig opzicht).

Oberwolfach à l'Américaine

John Fry heeft een aantal jaar geleden een stuk land aangekocht in de Morgan Hills, niet ver van het vliegveld van San Jose, met ook een redelijke aansluiting naar het vliegveld van San Francisco via het locale boemeltrein-tje. Het stuk land ligt in de heuvels en heeft een heel mooi uitzicht over een vallei. Fry



Voorraanzicht van het toekomstige AIM Research Conference Center in de Morgan Hills

heeft allerlei graafwerktuigen laten aanrukken die zijn stuk grond in een golfbaan hebben omgetoverd, en er een paar kleine meertjes in laten aanleggen en wat minder egaal laten maken. Ook heeft hij een achthoekig gebouwtje laten bouwen, dat tijdens de conferentie opgeleverd werd. Daarnaast wordt er nog gewerkt aan een gastenverblijf in de stijl van het Alhambra in Spanje. De bedoeling is in het gastenverblijf ook de wiskundebibliotheek te huisvesten die Fry oorspronkelijk in gedachten had. Fry's plan is om de helft van het jaar golfers op zijn golfterrein te huisvesten die zich dan, tegen betaling, kunnen uitleven op het golfterrein. De rest van het jaar wil hij wiskundige workshops organiseren met een beperkte groep deelnemers die allemaal op dezelfde, vrij afgelegen, locatie gehuisvest zijn.

Bovenstaande beschrijving zal bij sommigen associaties oproepen met het wiskunde-instituut te Oberwolfach, dat afgelegen in het Zwarte Woud ligt. Hier worden iedere week conferenties gehouden. De meeste conferenties kan men slechts op uitnodiging bijwonen, alleen de halfjaarlijkse DMV-seminaria vormen hierop een uitzondering. De faciliteiten zijn uitstekend; voor eten wordt gezorgd, er is een prima bibliotheek en men kan ook musiceren of een biljartje leggen. De omgeving is heel geschikt voor wandeltochten. Als men in alle rust met iemand wil samenwerken kan dat via het zogenaamde RIP-programma (Research In Pairs).

Kort Amerikaans?

Gedurende onze conferentie was er een uitstapje naar de Morgan Hills. Hier werd het

achthoekige gebouw ingewijd met een receptie met wijn en kaas. John Fry en zijn vrouw hadden de vorm van het gebouw en de inrichting ervan uitgekiend.

Pal naast het achthoekige gebouw bevindt zich een ruimte waar het toekomstige kantoor van Brian Conrey komt. Toen wij er waren was het nog vrijwel leeg. Het plan lijkt te zijn dat op termijn de ruimte naast de Palo Alto elektronica-zaak verlaten wordt en dat het AIM overgaat naar de Morgan Hills.

Fry is goed op de hoogte van de voortgang van het onderzoek aan zijn instituut. Regelmatig komt hij langs om zich te laten informeren over de wiskundige stand van zaken. Als instituut is het natuurlijk onverstandig om te veel op één individu te leunen. Daarom probeert Brian Conrey ook gelden te krijgen van de National Science Foundation. Voor meer informatie over het AIM leze men de zakelijkere beschrijving in [5].

Het AIM is niet het enige particulier gefinancierde wiskunde-instituut. Zo is er ook nog het Clay instituut [2], dat aan de oostkust van Amerika ligt. Het Clay instituut probeert de competitie tussen wiskundigen aan te wakkeren door een hoge prijs op het oplossen van beroemde wiskundeproblemen te zetten. Een van de doelstellingen van het AIM is daarentegen juist samenwerking te bevorderen. ←

Dankwoord

Mijn bezoek aan het AIM was financieel mogelijk dankzij John Fry and Eric Opdams PIONIER-subsidie. Brian Conrey toonde zich een goede gastheer. Paul Tegelaar dank ik voor zijn commentaar gegeven bij het opstellen van dit artikel.

Referenties

- 1 American Institute of Mathematics, <http://www.aimath.org/>
- 2 Clay Institute, <http://www.claymath.org/index.htm>
- 3 Brian J. Conrey, *L-functions and random matrices, Mathematics unlimited — 2001 and beyond*, 331–352, Springer, Berlin, 2001.
- 4 Harold Diamond, Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **7** (1982), 553–589.
- 5 Allyn Jackson, The American Institute of Mathematics, *Notices Amer. Math. Soc.* **46** (1999), 560–563.
- 6 Oberwolfach, <http://www.mfo.de/>
- 7 Bruce Schechter, *My brain is open; The mathematical journeys of Paul Erdős*, Simon and Schuster, New York, 1998.

Fred Goffree

Bremlaan 16

3735 KJ Bosch en Duin

f.goffree@fi.uu.nl

Een halve eeuw onderzoek

Wiskundendidactiek in Nederland

De didactiek van de wiskunde kent in Nederland een rijke en lange traditie. Fred Goffree beschrijft in twee delen de ontwikkeling van de wiskundendidactiek na de oorlog aan de hand van de in deze periode verschenen dissertaties. Hij is vanaf 1985 bijzonder hoogleeraar aan de universiteit van Amsterdam met de leeropdracht op het terrein van het educatief ontwerpen. Dit is het eerste deel van zijn overzicht. Het tweede zal in het volgende nummer verschijnen.

Met didactiek van de wiskunde wordt in het algemeen het gedachtegoed bedoeld dat ingezet kan worden om (onderdelen van) de wiskunde aan leerlingen (op school) over te brengen. Dat gedachtegoed is tot stand gekomen in het onderwijs zelf, meestal in de schoolklassen en via reflectie op hetgeen daar ervaren wordt. Didactiek zit dus vol praktijken en kennis. Volgens sommigen is praktijkkennis een narratieve manier van weten.¹⁰ Naar vorm dus een verzameling verhalen, al dan niet met een theoretische lading. Lerarenopleiders zijn geneigd om hier te spreken van praktijktheorie (met subjectieve kanten), in bepaalde gevallen zelfs van 'subjectieve theorieën', die al dan niet stroken met wat wetenschappers aan het publieke domein van de onderwijskundige kennisbasis hebben toegevoegd. Deze wetenschappers zijn in het gebied van de didactiek van de wiskunde niet eenduidig te lokaliseren. Ze vertegenwoordigen verschillende disciplines en vaak is de enige overeenkomst dat ze het wiskundeonderwijs onderzoeken. De doelstellingen, het object van onderzoek,

de gevolgde methodologie, de opvatting over wat 'waar' is en de persoonlijke betrokkenheid op het wiskundeonderwijs kunnen wel verschillen. Toch dragen deze wetenschappers gezamenlijk bij aan de wiskundendidactiek, die ze op basis van hun inspanningen graag tot wetenschappelijke discipline zouden verheffen.

Wiskundendidactiek

In 1994 verscheen de bundel *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. De redactie van deze uitgave merkt op dat de wetenschappelijke belangstelling voor het wiskundeonderwijs niet dateert van de laatste jaren. Sinds de start van de International Commission for Mathematics Instruction (ICMI), aan het begin van de twintigste eeuw, is die belangstelling zichtbaar geworden in ontwikkeling en onderzoek van het wiskundeonderwijs. Het onderzoekswerk werd, aldus de redactie, uitgevoerd door wiskundigen, psychologen, onderwijskundigen, opleiders van wiskundeleraren en wiskundeleraren zelf. Pas in de jaren zestig ontstond er in bredere kring belangstelling voor deze zaken.

De signalen zijn nog duidelijk te traceren. In 1969 werd de eerste conferentie van de International Commission for Mathematics Education (ICME) in Lyon gehouden. (De volgende, in 1972, was in Exeter en sindsdien komt een groeiend aantal wetenschappers om de vier jaar in ICME-verband samen; recentelijk nog in 2000, in Japan.) De doorbraak vindt plaats in de jaren zeventig en tachtig, er ontstaat een soort saamhorigheidsgevoel onder

de onderzoekers en ontwikkelaars van het wiskundeonderwijs, te zien in het uitbrengen van tijdschriften als *Educational Studies in Mathematics* (opgericht door H. Freudenthal in 1969), de inhoud van Ph.D-programma's en onderzoeksprogramma's en niet te vergeten de oprichting van International Group for the Psychology in Mathematics Education (IGPME, meestal afgekort tot PME) in 1976, een onderzoeksgroep die in 2001 haar 25-jarig bestaan vierde in Utrecht, de stad waar Freudenthal de eerste bijeenkomst opende. (Zie: Address to the first conference of I.G.P.M.E.; *Educational Studies in Mathematics* 9 (1978) 1–5.²⁵)

Het genoemde boek *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* bestaat uit acht hoofdstukken die in zekere zin ook de onderzoeksdomeinen van de wiskundendidac-



Figuur 1 Een gravure op het omslag van het themanummer van *Kennis en Methode* (1989,1): het experiment.



Fred van der Blij, 1979

tiel representeren.

- Onderwijsontwikkeling op het gebied van wiskunde
- Lerarenopleiding en onderzoek van het onderwijs
- Interactie in de wiskundeles
- Technologie en wiskundeonderwijs
- Psychologie van het wiskundig denken
- De didactiek van het differentiëren (in verband met verschillen tussen leerlingen)
- Geschiedenis en epistemologie van de wiskunde en het wiskundeonderwijs
- Het culturele referentiekader bij het leren en onderwijzen van wiskunde

Genoemde tijdschriften, het bovengenoemde boek en de ICME- en PME-proceedings zijn in de Engelse taal geschreven. Dat is in zekere zin opmerkelijk, want het woord 'didactiek' (bekend in Frans, Duits en Nederlands) werd nog niet zo lang geleden door Engelssprekende wetenschappers weinig serieus genomen. Daarin is pas sinds kort verandering gekomen.

Onderzoek

Voor dit artikel is die taalkwestie evenwel niet relevant, want we beperken ons tot het Nederlandse onderzoek van het wiskundeonderwijs, om precies te zijn tot het didactisch onderzoek in het Nederlandse voortgezet onderwijs. Daartoe kijken we eerst in de schoolklassen van hoofdzakelijk eerstegraads wiskundeleraars die over hun belevenissen en ervaringen publiceerden in het daartoe geëigende tijdschrift *Euclides*, in oktober 1924 gestart als

Bijvoegsel bij het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* en al in 1927 uitgegroeid tot zelfstandig tijdschrift. Later publiceren leraren ook in de *Wiskrant*, gestart in 1973 en na 1981 *Nieuwe Wiskrant* geheten, maar dan hoofdzakelijk in het kader van de vigerende vernieuwingen. Vervolgens gaan we ons bezighouden met de didactische onderzoeken waarvan de neerslagen verschenen zijn als proefschriften. Systematische aanpak, zorgvuldigheid en methodologie krijgen op dat niveau van promotieonderzoek speciale aandacht, die in didactische verkenningen in de klas natuurlijk ontbreekt.

Het woord onderzoek roept in Nederland het beeld op van een elitair gebeuren, verricht in universitaire vakgroepen, en waarvan de uitkomsten bewijskracht bezitten. "Onderzoek heeft aangetoond dat ..." Naar mijn ervaring gebruikt men in de Engelse taal voor dat soort onderzoek het woord 'research', maar soms ook 'investigation'. Verder heeft men in de Angelsaksische landen de beschikking over 'inquiry', dat in eerste instantie aan 'gerechtelijk onderzoek' doet denken, maar dat je ook kunt tegenkomen in *Dictionary of Qualitative Inquiry*.¹⁹ Ik denk dat 'research' in de context van wetenschapsbeoefening dient te worden gezien. Dus beperk ik de gedachte aan 'research' hier voor het onderzoek dat is verricht in het kader van promotiestudies. Het onderzoek van de leraren in hun eigen klas verbind ik, gevoelsmatig en gesteund door het onderzoek van Lampert & Ball (1998),¹⁶ met 'investigations', en spreek in dat geval hier van didactische verkenningen.

Bij het bestuderen van al die dissertaties bemerkte ik ook dat louter 'literatuuronderzoek' niet in mijn begrip van onderzoek (research) past. Ik houd het dus apart, zet het in de buurt van 'inquiry' en blijf het literatuuronderzoek noemen. Didactisch onderzoek (van het wiskundeonderwijs), didactische verkenningen (in de eigen wiskundeles) en wiskundig-didactisch literatuuronderzoek, daarmee moeten we het hier dus doen.

Didactische oriëntatie voor wiskundeleraars

Hoewel er in de loop van de tijd diverse neerslagen van didactisch onderzoek zijn gepubliceerd, over de aard ervan is naar mijn weten niet veel gezegd. Iemand die daar een begin mee maakte, was Joh. H. Wansink, wiskundeleraar te Arnhem en didacticus aan andere de TH Delft en de COCMA te Utrecht, waar hij cursisten voor de akten wiskunde middelbaar onderwijs A en B oriënteerde op het examen voor de akte pedagogische en didactische voorbereiding. Zijn aantekeningen

voor die lessen didactiek gebruikte Wansink bij het schrijven van zijn (driedelige) *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraars*.²⁶ Deel 1 uit 1966 is te beschouwen als de neerslag van zijn gereflecteerde praktijkervaringen als wiskundeleraar, die door middel van psychologisch literatuuronderzoek in een nieuw licht geplaatst worden. Psychologen uit die tijd, zoals Ph. Kohnstamm (bekend van zijn onderzoek in de hoogste klassen van de basisschool op het gebied van redactiesommen en parate kennis), C. van Parreren (bij leraren vooral bekend van *Leren op school*) en A.D. de Groot (die internationale bekendheid verwierf met zijn dissertatie *Het denken van de schaker*) experimenteerden zelf in laboratoria, soms in schoolklassen, en beriepen zich op onderzoeksresultaten van anderen. Wansink kwam daar blijkbaar van onder de indruk en zag mogelijkheden om zelfs de laboratoriumproeven van Katona (leren leggen van luciferpatronen) en de proeven met chimpansees van Köhler (over leren en het ontstaan van inzicht) aan het wiskundeonderwijs ten goede te laten komen. De wiskundeleraar wilde hij aanmoedigen kennis te nemen van onder meer de opbrengsten van denkpsychologie (Selz), de Würzburgse School, de associatietheorie van Herbart, de psychologie van het leren op school (Van Parreren) en de Gestaltpsychologie, van het werk van Karl Duncker (productief denken) en Piaget. In zekere zin was hij daarmee zijn tijd vooruit, want tien jaar later, in 1976, wordt zoals eerder gezegd, de (IG)PME opgericht. Overigens gaat Wansink er in zijn derde deel (1970) in hoofdstuk 3 nog een keer uitvoerig op in.²⁶

Methode van onderzoek

Pas aan het eind van deel 1 gaat Wansink expliciet in op de eisen, die men aan onderzoek in de praktijk moet stellen. Niet om de wiskundeleraars aan te moedigen zelf op didactische verkenning te gaan in de klas, maar om ze erop te wijzen dat het geven van proefwerken, en het beoordelen ervan, met de grootste zorgvuldigheid dient te geschieden: met de zorgvuldigheid van een psychologisch onderzoeker. A.D. de Groot heeft in die dagen juist bekendheid verworven met zijn Vijven en Zessen (1966), waarin het geven van cijfers op school onder de loep wordt gehouden. A.D. de Groot komt in volgende delen ook aan het woord, onder meer in de verslaggeving van zijn Meetkundeproject II (1958–1962), een echt didactisch onderzoek waarin twee aanpakken van het aanvankelijk meetkundeonderwijs — de klassieke manier volgens de opbouw van Euclides en de transformatiemeet-

kunde, geïnspireerd op Félix Klein (Erlanger Programm) — met elkaar in de praktijk worden vergeleken. Naast de onderzoekers van het Research-instituut voor toegepaste psychologie van de Universiteit van Amsterdam (RITP) waren er natuurlijk leraren bij het project betrokken om het onderwijzen voor hun rekening te nemen. Onder hen was Rudolf Troelstra, die met zijn collega's op basis van de bevindingen en de gebruikte stencils in 1962 een leerboek in drie deeltjes publiceerde.²² De Groot, in die dagen al hoogleraar aan de UvA, was zelf ex-wiskundeleraar.

Om A.D. de Groot kunnen de onderzoekers van het wiskundeonderwijs na 1961 voorlopig niet meer heen. Zijn *Methodologie* zal gedurende vele jaren verplichte stof voor sociale wetenschappers in opleiding en hét handboek voor universitaire onderzoekers blijven.

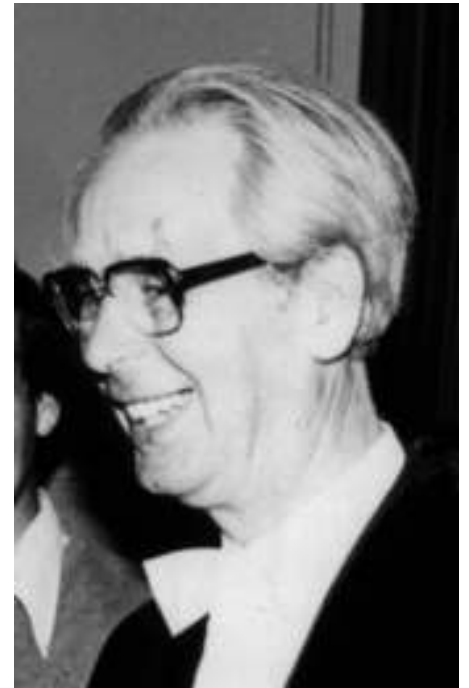
Wansink heeft ook kennis genomen van de methodologische eisen die men aan onderzoek in de menswetenschappen stelde. Dat blijkt onder andere uit zijn positieve reactie op de voornemens van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) om nieuw te ontwerpen leerplannen voor wiskunde vergezeld te doen gaan van didactisch onderzoek. Hij verzucht: "En dan maar hopen op experimenten die de toets der kritiek van de zijde van de onderwijsresearch zullen kunnen doorstaan."

Deel 3 van Wansinks Didactische Oriëntatie bestaat uit bijdragen van diverse auteurs: wiskundigen als F. van der Blij, A.S. van der Sluis, J. Hemelrijk en B. van Rootselaar en de niet onbekende didactici E.J. Dijksterhuis, A.M. Koldijk, W.J. Brandenburg en J. van Dormolen. De voorlaatstgenoemde schrijft in het eerste hoofdstuk over de modernisering van het wiskundeonderwijs, gebaseerd op zijn dissertatie van een jaar eerder. Daarop komen we straks terug, nu beperken we ons tot een citaat uit paragraaf 1.7.2 van Wansinks boek over didactisch onderzoek. Hierin geeft Brandenburg een definitie van didactisch onderzoek naar de geest (je kunt ook zeggen 'geestigheid') van die tijd, verpakt in de moderne wiskundige terminologie van de nieuwe

schoolboeken. Het betreft didactisch onderzoek naar de invloed van een bepaalde didactische werkvorm op de leerprestaties in een gegeven situatie: "de werkvorm behoort tot de bronverzameling, de leerprestaties tot de functiewaardenverzameling. De geanalyseerde beginsituatie leidt tot de existentievoorwaarde van de functie. Leerstofordening en het leertheoretisch aspect van het didactisch proces zijn de parameters van de functie. Ze betekenen de variërende karakteristieken van de situatie. De genoemde parameters zijn onderling afhankelijk." Opmerkelijk is dat Brandenburg, onder verwijzing naar de methodologie van de onderwijsresearch (natuurlijk via A.D. de Groot), meent dat in didactisch onderzoek de rollen van deelnemende leraar en onderzoeker 'scherp gescheiden' dienen te worden. Die opvatting zal in de jaren die volgen snel veranderen als vanaf 1971 op het IOWO het ontwikkelwerk gepaard gaat met ontwikkelingsonderzoek. Daar komen we later op terug.

Ten slotte nog een opmerking over de aard van wiskundig-didactisch onderzoek. We bedoelen nu niet het onderscheid tussen kwalitatief en kwantitatief onderzoek in de sociale wetenschappen. Daarover is inmiddels zeer veel gepubliceerd, de tijd dat men sprak van twee kampen is voorbij en in de promotiestudies, die in in het vervolg ter sprake komen, zullen we daar nog even over spreken. Nee, bedoeld worden hier de essentiële verschillen tussen 'onderzoek door wiskundigen', 'onderzoek door natuurkundigen' en 'onderzoek door wiskundendidactici'. Wie zich een beeld tracht te vormen van de onderzoekers in elk van deze drie categorieën, tracht zich voor te stellen waar een ieder mee bezig is, hoe er gewerkt wordt, wat de onderzoeksruimte is, hoe men tot het onderzoeksprobleem gekomen is, waardoor men zich bij het onderzoeken laat leiden, waarop men zich bij het onderzoeken baseert en dergelijke. De natuurkundige heeft een vermoeden, schept een situatie en doet een experiment. Men kan zich een voorstelling maken van deze onderzoeker met behulp van figuur 1, waar men de Deense fysicus Ørsted aan het werk ziet.

Degene die iets van het onderwerp (magnetische velden en elektriciteit) weet, en zo mogelijk ook van de geschiedenis, kan bij bovenstaande vragen een antwoord bedenken. En deze experimentele aanpak van de natuurkundige vertoont overeenkomsten met hetgeen de didacticus in de schoolpraktijk doet. Of beter, gezien de geschiedenis, hoe de sociale wetenschapper graag de schoolpraktijk zou willen onderzoeken. In plaats



J. Sixma, 1979

van stroomdraad en magneetnaald zie je dan (school)kinderen, geobserveerd en mogelijk bevraagd door een volwassene. Maar hoe zit het nu met die wiskundige?

Een visuele voorstelling van een 'wiskundige op onderzoek' is wel voorhanden. Het is te vinden in de biografie van L.E.J. Brouwer³ (figuur 2). Er is evenwel niet veel te zien, in elk geval niet genoeg om ook maar een begin van een antwoord op een van de bovengestelde vragen te krijgen. Wat er kan omgaan in het hoofd van de wiskundige onderzoeker, en wat niet rechtstreeks in de opbrengst te vinden is, wordt onder meer vanuit eigen ervaring beschreven door H. Poincaré (1908). De geweldige emoties waarmee dergelijk onderzoekswerk gepaard kan gaan, en die studenten in de wiskunde op kleinere schaal ook ervaren kunnen hebben, is prachtig beschreven door János Bolyai.¹³

János (geboren op 15 december 1802) was van jongs af aan ingewijd in de wiskunde door zijn vader, Farkas Bolyai, een goede bekende van Gauss. De jonge János krijgt de gedachte mee dat de Euclidische meetkunde de werkelijkheid beschrijft, zoals die is. Vader is ook geïnteresseerd in de grondslagen van de wiskunde. De gedachte aan de al ruim 2000 jaar oude behoefte om het vijfde (parallel)axioma van Euclides uit de andere axioma's te bewijzen, deed ook bij János, vóór zijn 18de jaar al, een vonk overslaan. Sinds zijn vijftiende is hij uit huis en voelt zich zeer ongelukkig als student aan de militaire academie te Wenen. Desondanks, misschien



Figuur 2 Brouwer aan de wiskunde in de tuin. uit L.E.J. Brouwer. Een biografie, pagina 139.

dankzij, gaat hij op onderzoek. "... Finally, one winter night of 1823 he established the relation connecting the so-called angle of parallelism with the distance of parallelism. This was the second decisive step in his investigations. Rejoicing over the discovery, a fairly common experience in research work, the complete contour of the structure of non-Euclidean geometry occurred to him. This sudden occurrence of the final form directed his pen when writing the famous letter to his father on 3rd November 1823: "... I have created another world, a new world from nothing." (Zie pagina 33 van genoemd boek.) Waarom dit uitstapje naar de andere wereld van wiskundige onderzoekers? Omdat in het wiskundig didactisch onderzoek ook wiskundigen betrokken zijn. Meestal als wiskundeleraars, die tijdens de doctoraalstudie min of meer in die wereld vertoefd hebben. Maar ook als promotor, ten tijde van de begeleiding van het didactisch onderzoek, ook zelf nog in die 'andere' wereld actief. Te noemen zijn prof. dr. J.G. van de Corput (Hendrik Mooij, 1948), prof. dr. H. Freudenthal (Pierre van Hiele, 1957), prof. dr. J.C.H. Gerretsen (Willem Brandenburg, 1968), prof. dr. F. van der Blij (Joop van Dormolen, 1982; Jan de Lange, 1987; Jan van Maanen, 1987; Sieb Kemme, 1990; Rijkje Dekker, 1991) en prof. dr. J. van de Craats (Bert Zwaneveld, 1999). De vraag, die nu gesteld kan worden, ligt voor de hand: is de opvatting over onderzoek in de sociaal wetenschappelijke traditie beïnvloed door de aanwezigheid van wiskundige onderzoekers? En zo ja, hoe? Het enige wat daar nu al over te zeggen valt, is, na kennisname van de dissertaties en in reflectie op eigen ervaringen in die wereld, dat wiskundigen neigen tot kwalitatief onderzoek, en dat zij zich door statistische methoden

voor het verkrijgen en analyseren van onderzoeksdata, niet graag laten beperken. Kort gezegd: men gaat graag met open mind, open vragen en een open design creatief op onderzoek naar fundamentele zaken.

Didactische verkenningen van leraren

Het nadenken over wiskundeonderwijs, de didactiek dus, nam in het begin van de negentiende eeuw een aanvang toen het onderwijs als een serieus element van de samenleving kon worden opgevat.¹⁷ Zo verscheen in 1874 het eerste wiskunde-didactiekboek van Jan Versluys. Een witte raaf, aan de wortel van een veelbelovende aanplant. Er begint enige groei in te komen als Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa, sinds 1912 uit St. Petersburg naar Leiden gekomen, een groepje wiskundeleraars (en een enkele andere belangstellenden), bij haar thuis ontvangt om over wiskundeonderwijs te praten. Evert J. Dijksterhuis is zo'n wiskundeleraar. Hij heeft omstreeks 1924 met mevrouw Ehrenfest een penstrijd gevoerd over haar brochure *Wat kan en moet het wiskundeonderwijs aan een niet-wiskundige geven?* Die discussie is destijds aanleiding geweest tot het oprichten van *Euclides*, het maandblad voor de didactiek van de wiskunde.

Uit de kring rond mevrouw Ehrenfest ontstaat in 1936 de Wiskunde Werkgroep, onderdeel van de New Educational Fellowship, een internationaal platform voor de discussie over nieuwe onderwijsvormen. Binnen de Wiskunde Werkgroep komt het didactisch denken op gang en worden ongemerkt bouwstenen aangedragen voor komend didactisch onderzoek. Leden van het eerste uur, Evert W. Beth en Philip Kohnstamm, gaan zelf op onderzoek. Beth in het kader van (1938) ingestelde Meet-



Hendrik Mooij

Promotor

J.G. van der Corput
Ph. Kohnstamm

Proefschrift (1948) 'Over de didactiek van de meetkunde benevens benaderingsconstructies van een hoek in gelijke delen.'

Problematiek Verbeteren de leerresultaten van eersteklarsers bij meetkunde als de leer methode in een klassengesprek wordt besproken?

Context Het meetkundeonderwijs in de eerste klas van het vmo omstreeks 1946

kunde Studiegroepen, Kohnstamm op het gebied van lees-rekenopgaven en parate kennis. Beth probeert na te gaan of de uitkomsten van denkpsychologisch onderzoek aangewend kunnen worden voor het verbeteren van het meetkundeonderwijs aan twaalfjarigen. Kohnstamm wil nagaan of de gealgoritmiseerde redactiesommen van het toelatingsexamen voor het middelbare onderwijs een meer heuristisch karakter kunnen krijgen. Beth (wiskundige) onderzoekt middels didactisch denkwerk, Kohnstamm (pedagoog) ontwerpt materiaal (lees-rekenopgaven, 1937) en gaat de klas in.

Dan komt er oorlog. De periode 1940-1945 legt veel activiteiten stil, zo ook die van de Wiskunde Werkgroep. Toch laten nog twee wiskundeleraars van zich horen, P.G.J. Vredenduin en L.H.N. Bunt. Piet Vredenduin was zo'n wiskundige, op jonge leeftijd (22 jaar) in no time (18 dagen) gepromoveerd op een puur wiskundig onderwerp.⁴ Zijn didactisch onderzoek bestaat uit puur denkwerk over meetkunde en meetkundeonderwijs. In 1942 vertelt hij erover aan collega leraren, bijeen op de jaarvergadering van hun vereniging WIMCOS. De kernvraag luidt: zijn de opvattingen over aanschouwelijkheid bij meetkunde, en het feit dat bewijzen nimmer mogen berusten op wat figuren laten zien, niet strijdig? En vervolgens: is een oplossing te vinden in de introductie van verplaatsingen? Tien jaar later, in 1952, is Vredenduin nog steeds zoekende, maar dan benoemt hij de problematiek met 'strengheid en inzicht'.

Bunt wijdt zich ook aan didactisch onderzoek aan het bureau. Hij probeert zich in te leven in het denken van een (virtuele) leerling, met de bedoeling zich een voorstelling te



Farkas Bolyai, Hongaars wiskundige (1775-1856)



János Bolyai, zoon van Farkas, wiskundige (1802-1860)

**Dieke Geldof**

Promotor
M.J. Langeveld

Proefschrift (1957) 'De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.'

Problematiek Kun je een didactiek van het aanvankelijk meetkundeonderwijs bedenken waarbij leerlingen van aanschouwelijk tot abstract denken geraken?

Context Het meetkundeonderwijs in de eerste klas van het vmo en de didactische discussie in de Wiskunde Werkgroep

**Pierre van Hiele**

Promotor
H. Freudenthal
M.J. Langeveld

Proefschrift (1957) 'De problematiek van het inzicht. Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof.'

Problematiek Een bijdrage aan de theorievorming over inzicht in wiskunde en denkniveaus.

Context Het aanvankelijk meetkundeonderwijs zoals gerealiseerd in Dieke van Hieles onderwijsexperiment en beschreven in haar protocollen.

Willem Brandenburg

Promotor
J.C.H. Gerretsen
L. van Gelder

Proefschrift (1968) 'De modernisering van het wiskundeonderwijs.'

Problematiek Een studie ter beschrijving van de problematiek, ontstaan door de modernisering van de schoolwiskunde, vernieuwing van onderwijsmethoden en wijzigingen in het onderwijsstelsel door de Wet op het Voortgezet Onderwijs

Context De New Math-beweging sinds 1957, de CMLW sinds 1961 en de experimentele heroriëntatiecursussen in Groningen.

kunnen maken van hoe intuïtie en wiskundige vaardigheden bij het maken van opgaven samengaan. Zijn onderzoeksdomein is (natuurlijk!) ook de meetkunde, en wel het gebied van de 'regressieve bewijzen'. Dat zijn bewijzen waarbij je achteraan begint, bij het 'te bewijzen' (Euclides, 1946).

Opmerkelijk is het feit dat jarenlang de meetkundige leerstof hetzelfde is gebleven, naar onderwerpen, naar opbouw en zelfs naar opgaven. In principe was dit onderwijs dus op het lijf van wiskundigen (die leraar waren geworden) geschreven. Bij didactische verkenningen in de meetkundeles kon men dus uitgaan van een constante, de leerstof. En de didactiek was in de geest van de wiskunde: zorgvuldig omgaan met begrippen en procedures (definities!), formeel werken en streng redeneren. In de jaren na de oorlog leidden de didactische verkenningen van wiskundeleraars in toenemende mate tot twijfel aan de haalbaarheid van deze werkwijze en zelfs tot pogingen om er iets anders voor in de plaats te stellen. Zo analyseert Bronkhorst (Euclides, 1951) de inbreng van leerlingen op meetkundeproefwerken en komt tot de conclusie dat het beter is geen creativiteit van de leerlingen, bij het oplossen van vraagstukken, te eisen. Geursen (Euclides, 1953) volgt in gedachten een leerling die zich in zekere tijd door het meetkundeprogramma heen moet werken. Hij identificeert knelpunten waarvan hij nu een verklaring kan geven zonder in eerste instantie de leerling de schuld te geven. De uitkomst van deze verkenning bestaat uit het voorstel voor een nieuw meetkundeprogramma. G. Krooshof experimenteert omstreeks 1950 in zijn klas met een nieuwe, zelfbedachte introductie van de alge-

bra via telproblemen in figurale getallen, en gaat ook na hoe informatie uit de geschiedenis op dit terrein bij de leerlingen valt. En als hij in 1954 op werkweek is, experimenteert hij met het maken van kartonnen modellen voor stereometrie en beschrijvende meetkunde en probeert hij na te gaan of dit bijdraagt aan het verwerven van inzicht.

W.J. Bos (1954) (bekend van de methode 'Bos en Lepoeter') analyseert het leren van meetkunde en ziet kans om verbanden te zien met de Gestalt Psychologie, waar aandacht is voor 'flexibele structuren' met mogelijkheden voor 'omstructureren'. Dit is precies wat het werken met figuren (structuren) in de meetkunde, en het veranderen van de invalshoek (omstructureren) behelst. Misschien hebben de beschouwingen van Karl Duncker (Zur Psychologie des Produktiven Denkens, 1935), bijvoorbeeld over 'fixedness of thought-material' en Max Wertheimer (Productive Thinking, 1943), bijvoorbeeld over het omstructureren van parallellogrammen, hem op het spoor gebracht. Beide auteurs zijn experimentele psychologen, en ze voorzien hun experimenten veelvuldig van didactische consequenties.

W. Burgers laat in 1956 zien hoe hij een manier heeft uitgevonden om zijn leerlingen de goniometrische formules te laten memoriseren. Het referentiekader bestaat uit globale kennis van de formules, de finishing touch moet nog aangebracht worden. Daartoe maken ze gebruik van hun kennis van de functies $\sin x$ en $\cos x$. De praktijk in de eigen klas heeft laten zien dat de didactische vondst 'werkt', ieder ander kan dat uitproberen met zijn eigen leerlingen. Hetgeen dan ook tot een didactische verkenning leidt. J. de Miran-

da experimenteert in zijn klassen met grafieken. Hij is van oorsprong natuur- en scheikundeleraar en ziet in grafieken beschrijvingen van een stukje werkelijkheid. Om dat bij de leerlingen over te brengen, bekijken ze een grafiek eerst globaal, de vraag is dan: welk verhaal vertelt de grafiek ons? De Miranda is hier bezig met een didactiek die ongeveer een kwart eeuw later centrale aandacht krijgt van didactische onderzoekers als Claude Janvier (1978)¹⁴ en leerplanontwikkelaars van de sectie wiskunde van de Stichting leerplanontwikkeling (SLO).

In 1959 vindt een conferentie van de Organisatie voor Europese Economische Samenwerking (OECD) plaats in Royaumont: *New thinking of school mathematics*. In 1961 wordt in Nederland de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) ingesteld en vanaf dan krijgen de didactische verkenningen in de wiskundelessen van het voortgezet onderwijs een ander karakter. Het kleine werk van individuele wiskundeleraars in hun klassen, zoals hiervoor genoemd, komt niet vaak meer in *Euclides* terecht. Alle aandacht lijkt te gaan naar de nieuwe leerstof, die met veel aplomb naar voren wordt gebracht in heroriënteringcursussen voor eerstegraads leraren en in de nieuwe leerplanvoorstellen. Die laatste worden, in opdracht van het Ministerie vergezeld van experimenten. Wat in de vorige periode decennia lang constant was gebleven, de leerstof, wordt in de periode van de CMLW volkomen op zijn kop gezet. De kernvraag luidt steeds: is deze nieuwe leerstof haalbaar, kunnen de leerlingen dit aan, zijn leraren in staat om die stof uit te leggen? Men sprak in CMLW-kring eerst van 'proeven', later van experimenten. Voorlopers zijn onder

**Adri Treffers***Promotor*

J. Sixma

H. Freudenthal

Proefschrift (1978) 'Wiskobas doelgericht. Een methode van doelbeschrijving van het wiskundeonderwijs volgens Wiskobas', vertaald in 1987: 'Three Dimensions'

Problematiek Hoe moeten, in een innovatieve context, de doelen van (wiskunde-)onderwijs beschreven worden? En welke zijn die doelen in het geval van het wiskobasproject?

Context Het wiskobasproject sinds 1971 en wat eraan voorafging sinds 1969.

**Joop van Dormolen***Promotor*

R.S. Mossel

F. van der Blij

Proefschrift (1982) 'Aandachtspunten. De a priori analyse van leerteksten voor wiskunde bij het voortgezet onderwijs'

Problematiek Hoe kun je van te voren leerteksten in het wiskundeboek analyseren in het perspectief van een te geven les?

Context Wiskundeonderwijs in het vmbo.

**Fred Korthagen***Promotor*

W.J. Brandenburg

D.W. Bresters

J.J. Elshout

Proefschrift (1983) 'Leren reflecteren als basis van de lerarenopleiding. Een model voor de opleiding van leraren, in het bijzonder wiskundeleraren.'

Problematiek Hoe kijken studenten van de SOL (Stichting Leraren Opleiding) tegen hun opleiding aan?

Context De opleiding van tweedegraads leraren op N.L.O.'s (Nieuwe Lerarenopleidingen)

meer A.D. de Groot met het tweede meetkundeproject, J. van Lint en J. van Dormolen met het algebra-analyseproject en W. Burgers met twee didactische experimenten: 'Groepen van eindige orde' en 'Lineaire transformaties'.

In *Euclides* van 1968 maakt L. van den Brom bezwaar tegen de term 'experiment', en wel op methodologische gronden. Van objectiviteit zou geen sprake zijn, en van een evenwicht tussen participatie en distantie, evenmin. Leraren zijn geen betrouwbare onderzoekers in hun eigen klas, ze zijn betrokken bij hun leerlingen en hebben andere doelstellingen dan onderzoekers. Toch zal men voorlopig op deze weg voortgaan. Tot in 1971 het Instituut Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (IOWO, hoogleraar-directeur is Hans Freudenthal) wordt ingesteld en men in teamverband didactisch onderzoek in de vorm van ontwikkelingsonderzoek gaat doen. In de schoolklassen, samen met de leraren en leerlingen. Daar komen we later nog op terug. Nu bekijken we eerst twee didactische onderzoeken op het niveau van promotiestudies, de allereerste van 7 juli 1948 en de tot op de dag van vandaag de allerlaatste (4 juni 1999).¹

Om mee te beginnen

Op 7 juli 1948 promoveert Hendrik Mooij aan de Universiteit van Amsterdam bij prof. dr. J.G. van der Corput op het proefschrift *Over de didactiek van de meetkunde benevens benaderingsconstructies ter verdeling van een hoek in gelijke delen*. Een proefschrift, net zoals de spreekwoordelijke medaille, met twee kanten. Enerzijds de kant van wiskundig onderzoek, anderzijds die van didactisch onderzoek. Enerzijds om te laten zien dat de

promovendus wiskundig zijn mannetje stond, anderzijds om aan te tonen dat didactisch onderzoek mogelijk, wenselijk en misschien zelfs noodzakelijk is.

Hendrik Mooij is in die tijd wiskundeleraar. Hij vertelt onder meer in zijn eerste hoofdstuk, De psychologische gesteldheid van de leerlingen ten opzichte van het aanvangsonderwijs in de wiskunde, dat hij in 1944 de gelegenheid kreeg om een didactisch experiment(je) te doen in drie parallelklassen van het eerste leerjaar van zijn school voor voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs (vhmo). Het betrof meetkundeonderwijs. In twee klassen volgde hij de traditionele methode waarin stellingen door de leraar voor het bord werden afgeleid en bewezen. In één klas liet hij de leerlingen constructies maken en eigenschappen ontdekken; voorlopig geen bewijzen. Hij houdt er een goed gevoel aan over, de leerlingen van die experimentele klas behielden de belangstelling en motivatie. Maar met enige spijt moet Mooij ook bekennen dat hij er geen statistiek van heeft bijgehouden en dat rapportcijfers alleen onvoldoende aanwijzingen gaven. Hij neemt zich dan voor zijn nieuwe aanpak systematisch uit te bouwen. Wellicht is hier, tijdens zijn didactische verkenning, de gedachte aan een didactisch onderzoek op het niveau van een promotie geboren. Mooij is omstreeks 1944 ook al psychologisch geïnteresseerd. Het is bovendien zeer waarschijnlijk dat hij bekend was met het werk van de Wiskunde Werkgroep, waarvan ook de Amsterdamse hoogleraar-pedagoog Ph. Kohnstamm deel uitmaakte.²³ De stand van zaken in de psychologie levert hem evenwel nog niet veel bruikbare tips voor de praktijk van het wiskundeonderwijs op, maar hij

ziet wat dat betreft de toekomst, waarin psychologie en wiskundeonderwijs samenwerken, optimistisch tegemoet.

Wiskundeleraren in de tijd voor en kort na de tweede wereldoorlog werden, als ze er oog voor hadden, voortdurend heen en weer geslingerd tussen de deductieve inrichting van de schoolboeken en de 'psychologische gesteldheid' van de leerlingen.²³ Zo ook Mooij, die daarover onder meer opmerkt dat de opbouw van de meetkunde volgens de Elementen van Euclides in de geschiedenis voorafgegaan was door zo'n 2000 jaar van experimentele meetkundige activiteiten. Hij schrijft een hoofdstuk De geschiedenis van de wiskunde en de didactiek. En hoewel hij toen al weet moet hebben gehad van het werk van mevrouw Ehrenfest, blijft in het didactisch onderzoek dat hij onder leiding van de wiskundige J.G. van der Corput en met hulp van pedagoog Ph. Kohnstamm opzet, de meetkundeleerstof onaangetaast. Wat Hendrik Mooij wil onderzoeken is of een andere didactische aanpak bij de bestaande meetkundeboeken van de eerste klas, betere leerresultaten oplevert.

In feite is dat precies wat Bert Zwaneveld, ruim vijftig jaar later, ook heeft beoogd met zijn promotiestudie *Kennisgrafen in het wiskundeonderwijs*, onder leiding van de wiskundige J. van de Craats en met hulp van de wiskunde-didacticus A. van Streun. In zijn geval betreft de andere didactische aanpak niet het gebruik van klassengesprekken om de wijze waarop je meetkunde uit het boek kunt leren bewust te maken (zoals bij Mooij), maar het maken van kennisgrafen van gegeven leerstof, om die gestructureerde leerstof beter te verwerken en toe te passen. Zwaneveld is ook wiskundeleraar, vele jaren in

Hein Krammer*Promotor*

E. Warries

W.J. Brandenburg

Proefschrift (1984) 'Leerboek en leraar. Een proces-product-onderzoek in 50 klassen op havo en vwo naar verbanden tussen leerboekkenmerken, onderwijsactiviteiten en leerresultaten voor wiskunde'

Problematiek Heeft het leerboek voor wiskunde invloed op de onderwijsactiviteiten van leraren en op de leerresultaten van leerlingen?

Context Het IEA-project (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) in 2de klassen havo en vwo.

Jaap Vedder*Promotor*

M. Geensen

Jac. Schouten

Proefschrift (1984) 'Oriëntatie op het beroep van leraar. Praktische vorming en reflecteren aan het begin van de lerarenopleiding'

Problematiek De evaluatie van een bepaalde opleidingsdidactische aanpak (1-1- begeleiding), ook ter beantwoording van essentiële vragen van de lerarenopleiding.

Context Het 1-1 project van het Pedagogisch-didactisch Instituut van de Universiteit Utrecht.

**Jan de Lange***Promotor*

F. van der Blij

A. Treffers

Proefschrift (1987) 'Mathematics, insight and meaning. Teaching, Learning and Testing of Mathematics for the Life and Social Sciences.'

Problematiek Ontwikkeling en onderzoek van een bepaalde didactische aanpak (Wiskunde A) en het ontwerp van daarbij passende toetsen.

Context Innovatie van het wiskundeonderwijs in bovenbouw vwo, HEWET, wiskunde A.

het voortgezet onderwijs, de laatste jaren aan de Open Universiteit. Ook zijn extra belangstelling voor de didactiek van de wiskunde springt in het oog. In zijn tijd is inmiddels de Wiskunde Werkgroep aan haar eind gekomen, maar daarvoor kwam in zekere zin de Didactiek Commissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) in de plaats. In dat verband werkt hij mee aan publicaties als *Vaardigheden: 1001 redenen waarom leerlingen geen routine hebben* (1975), *Handelen om te begrijpen: Een werkwijze om leerlingen naar goede vaardigheden te wijzen* (1977) en *Instappen en toepassen: Over het benutten van probleemsituaties als middel om wiskunde te leren en te leren gebruiken*. Net als Mooij vijftig jaar eerder, ziet hij in het vigerende wiskundeonderwijs een didactische onvolkomenheid: door het probleemgeoriënteerde wiskundeonderwijs, met een accent op toepassen, zijn de leerlingen in de bovenbouw meer bezig met het maken van opgaven dan met de theorie die er achter zit. Je zou kunnen zeggen dat het reflectieve moment in dat onderwijs ontbreekt. Een omissie die sterker opbreekt naarmate de leerlingen meer zelfstandig en minder interactief bezig zijn, zoals het geval is in het voortgezet onderwijs ten gevolge van het 'studiehuis' en in de Open Universiteit door het afstandsonderwijs. Ook Zwaneveld kan zich beroepen op eigen ervaringen in de klas, bijvoorbeeld op het Ignatiuscollege in Amsterdam, toen geëxperimenteerd werd (de didactische mogelijkheden verkennend) met zogenoemde 'kennen-en-kunnenlijstjes', die als voorbode van de kennisgrafien kunnen worden beschouwd. Om zijn didactisch onderzoek historisch te kunnen plaatsen heeft

hij niet, zoals Mooij, 2000 jaar terug te gaan. Dertig jaar is blijkbaar omstreeks de millenniumwisseling voldoende. In die dertig jaar zijn fundamentele veranderingen in het wiskundeonderwijs aangebracht, het is de tijd van CMLW en IOWO, echte bolwerken van innovatie en onderwijsontwikkeling voor wiskunde. Ook moeilijk te bestrijden of zelfs maar te bekritisieren, want H. Freudenthal en zijn medewerkers dwongen respect af in binnen- en buitenland. Anne van Streun, Zwanevelts didactische 'helpdesk', heeft die kritische opstelling diverse malen wel aangedurfd. Bijvoorbeeld, zonder blad voor de mond te nemen, in zijn promotiestudie *Heuristisch wiskundeonderwijs* van 1989, die in samenhang met de ontwikkeling van de methode *Wiskundelij*n tot stand kwam. De bredere onderwijskundige inbedding van het kennisgrafienonderzoek, en de mooie combinatie van een kwalitatieve en kwantitatieve onderzoeksmethodologie, zijn wellicht mede door de inbreng van Van Streun tot stand gekomen. Misschien is het interessant om hier vast op te merken dat Van Streun is gepromoveerd onder leiding van A.D. de Groot (met W. Schaafsma en M. van der Kamp als medepromotoren).

Waarom toch deze poging om overeenkomsten te vinden in twee didactische onderzoekingen, die een halve eeuw uit elkaar liggen? Het antwoord op die vraag is eenvoudig: bij de bestudering van beide dissertaties vielen de overeenkomsten op: wiskundeleraar, didactische verkenning in de eigen praktijk als voorafje, op zoek naar verbetering van vigerend wiskundeonderwijs, begeleid door wiskundige en hulp uit onderwijskundige hoek, bredere inbedding in de onderwijspsychologie, aandachtspunten zijn leer-

processen en leerresultaten, een essentieel element is de reflectie van leerlingen op het verwerven van kennis, de leerstof staat vast en er wordt niet aan getornd, er wordt een stand van zaken over het wiskundeonderwijs opgemaakt, de studie krijgt een plaats in de geschiedenis, over de methodologie wordt serieus en met wiskundige deskundigheid nagedacht. Bert Zwaneveld maakte lange tijd deel uit van de redactie van *Euclides*, Hendrik Mooij ook.

Mogen we deze overeenkomsten hier opmerkelijk noemen, natuurlijk zijn in het kader van dit artikel de verschillen van meer belang. In verschillen kunnen we misschien ontwikkelingen zien, die in de tussenliggende dissertaties wellicht tot stand zijn gekomen en op punten zijn ingevuld. Of, minder ambitieus, wordt slechts een voortschrijdend inzichtesignaleerd. De kans op het laatste is vrij groot, omdat de dissertaties niet onder één bepaalde regie tot stand zijn geko-



Hans Freudenthal

**Jan van Maanen***Promotor*F. van der Blij
H.J.M. Bos*Proefschrift* (1987) 'Facets of 19th century mathematics in the Netherlands'*Problematiek* Eigenlijk is dit geen didactisch onderzoek. Maar er komt een belangwekkend didactisch voorstel in naar voren: verrijk de didactiek van de wiskunde met elementen uit de geschiedenis van de wiskunde.**Anne van Streun***Promotor*A.D. de Groot
W. Schaafsma
M. van der Kamp*Proefschrift* (1989) 'Heuristisch wiskundeonderwijs. Verslag van een onderwijsexperiment'*Problematiek* Is het waar dat expliciete aandacht voor probleem-, oplossingsmethoden en -aanpakken en het geven van hints, tot betere leerresultaten leiden?*Context* Invoering van Wiskunde A in de bovenbouw vwo en het werken aan een nieuwe methode (Wiskundelijn)**Sieb Kemme***Promotor*F. van der Blij
E.G.F. Thomas*Proefschrift* (1990) 'Uitleggen van Wiskunde'*Problematiek* Op zoek naar een theorie van het uitleggen in de wiskundeles.*Context* Wiskundeonderwijs in het algemeen en het wiskunde-didactiekonderwijs op een eerstegraads lerarenopleiding.

men. De betreffende wiskundig-didactische onderzoekers behoorden voor een groot deel wel tot het netwerk van wiskundeleraren (lid van de NVvW of abonnee op *Euclides*), maar van een wiskundig-didactische onderzoeksgemeenschap was en is in Nederland geen sprake, laat staan dat er een onderzoeksagenda bestond. Men kan voor zichzelf, na lezing van dit artikel, uitmaken of dit als een voordeel of als een nadeel dient te worden beschouwd. We gaan op zoek naar punten waarin de promotiestudies van Mooij en Zwaneveld verschillen, en wel met de bedoeling om de tussenliggende dissertaties vooral op die punten nader te bestuderen.

Onderwijskundige ontwikkelingen

Mooij komt tot de conclusie dat er nog weinig te halen is bij de (onderwijs)psychologie. Zwaneveld heeft heel wat onderwijskundig werk aan den lijve mee kunnen maken. Hij noemt zelf Blooms taxonomie van doelstellingen en het daaruit volgende Mastery Learning, de leerpsychologie van Van Pareren, het model BHV (basisstof, herhalingsstof en verrijkingstof) ten behoeve van differentiatie, het model OSaEV (van Van Doremolen) ten behoeve van lesvoorbereiding in het geval van begripvorming: Oriënteren, Sorteren, Abstractie, Expliciteren, Verwerken. Gal'perins leerstappen voor het leren van algoritmen, Skemps psychologische analyses van wiskunde leren, de psychologie van leren en instructie van Boekaerts en Simon, het onderwijskundige werk van Freudenthal, de theorie van Van Hiele en het constructivisme vanaf Von Glaserfeld. En nog veel meer.

Onder dit kopje is het ook interessant om na te gaan welke van de eerder verschenen

dissertaties in de literatuur zijn genoemd. Mooij hoeft niet eens te zoeken, Zwaneveld vermeldt: Krammer (1984): *Leerboek en leeraar*, De Lange (1987): *Mathematics, Insight and meaning*, Perrenet (1995): *Leren probleemoplossen in het wiskundeonderwijs: samen of alleen*, Riemersma (1991): *Leren oplossen van wiskundige problemen in het voortgezet onderwijs*, Van Streun (1989): *Heuristisch wiskundeonderwijs: Verslag van een onderwijsexperiment* en Treffers (1978): *Wiskobas doelgericht*.

Methodologische overwegingen

Mooij beschrijft zijn didactisch onderzoek in hoofdstuk VI: "Een experimenteel onderzoek in verband met de didactiek van de meetkunde." De term 'experimenteel' kan in 1948 nog simpel worden opgevat als 'het onderzoek gebeurt in de klas'. De onderzoeksvraag is helder: "Kan er verbetering aangebracht worden in het reproduceren en toepassen van geleerde meetkundewerk door de methode, hoe een opgegeven les geleerd wordt, met de klas te bespreken?" Er zijn 4 eerste klassen beschikbaar (A, B, C en D), over de samenstelling wordt niets gezegd. Er zijn drie onderdelen van de leerstof (driehoeksstellingen, congruentiegevallen en vierhoeksstellingen). Het gehele onderzoek speelt zich af in drie gedeelten, deel 1 in begin november 1947, deel 2 in eind november 1947 en deel 3 in januari 1948. Het design is weldoordacht, maar methodisch eenvoudig, zie tabel 1.

Er is een kleine oneffenheid, die Mooij zelf aangeeft: eigenlijk kun je de c (congruentiegevallen) pas goed leren, als je eerst d (driehoeksstellingen) hebt gehad. Een herkenbare bijzonderheid: het bespreken met de klas

komt er in grote trekken op neer dat de kinderen met potlood en papier ook moeten doen wat in het boek staat: goed doorlezen en figuur zelf tekenen met gegevens erin, en dan het gelezene begrijpen aan de hand van de figuur. Volgende stap: zonder boek het bewijs geven met de zelfgetekende figuur. Dan helemaal zelf, figuur tekenen en bewijs geven. Sommige leerlingen begrijpen de bedoeling daarvan niet, en schrijven gewoon wat in het boek staat letterlijk over. De verzamelde data bestaan uit het percentage goed opgeloste opgaven in de klassen A, B, C en D, over de gebieden d, c en v, in de drie perioden. Mooij concludeert dat het klassengesprek een gunstige invloed heeft op de leermethode en leerresultaten van het leren van de meetkundeles. Voor het geval van 'toepassen' van het geleerde kan geen overtuigend bewijs worden gevonden. Men kan dus zeggen dat de methodologie bij Mooij weinig aandacht krijgt, je kunt niet zien dat er van buiten af (Kohnstamm?) hoge eisen zijn gesteld en of er sprake is van een kwantitatief of kwalitatief onderzoek, is nauwelijks te zeggen.

klassen/periode	A	B	C	D
1	d	d	c	c
	*	-	*	-
2	c	c	d	d
	- !	*	- !	*
3	v!!	v!!	v!!	v!!

Tabel 1 Het onderzoek van Mooij. Verklaring van de symbolen:

* de leermethode wordt in/met de klas besproken

! is er verbetering opgetreden in A en C, en niet in B en D?

!! is er verbetering opgetreden in alle vier klassen?

**Rijkje Dekker***Promotor*F. van der Blij
F. Goffree
P. Span*Proefschrift* (1991) 'Wiskunde leren in kleine heterogene groepen'*Problematiek* Leidt het samenwerken van leerlingen in kleine heterogene groepen aan wiskundige problemen tot niveauverhoging van alle leerlingen?*Context* Het slo-project 'Interne Differentiatie' onder leiding van J. Terwel, de ideeën van H. Freudenthal over realiseren Middenschool.**Fré Riemersma***Promotor*

J.J. Elshout

Proefschrift (1991) 'Leren oplossen van wiskundige problemen in het voortgezet onderwijs'*Problematiek* Is het mogelijk programma's te maken voor wiskunde, om het oplossen van problemen te leren?*Context* Probleemgeoriënteerd wiskundeonderwijs in de onderbouw van het v.o.**Marjolijn Witte***Promotor*G.de Zeeuw
F. Goffree*Proefschrift* (1994) 'Meisjes meegerekend. De constructie van wiskundige begaafdheid.'*Problematiek* Wat is de oorzaak van het feit dat meisjes bij wiskunde nog steeds afhaken? Wat kan een oplossing bieden? Biedt 'gebruikers-wiskunde' een oplossing?*Context* Kies exact, Wiskunde voor allen, Realistisch wiskundeonderwijs, Vrouwen en wiskunde, de politica Ginjaar-Maas.

Zwaneveld, vijftig jaar later, besteedt meer aandacht aan de methodologie. Evenals Van Streun tien jaar, en Perrenet vier jaar eerder deden, wisselt hij kwalitatief en kwantitatief af. De uitwerking van zijn globale probleemstelling (in het kort: helpt het construeren van een kennisgraaf studenten hoger onderwijs en leerlingen voortgezet onderwijs bij het verwerven van wiskundige competentie?) in zeven onderzoeksvragen, maakt die afwisseling goed mogelijk. Het promotieonderzoek begint met een historisch-didactische literatuurstudie van de laatste dertig jaar wiskundeonderwijs. Deze wordt gevolgd door een literatuurstudie en vingeroefening betreffende het begrip wiskundige competentie. Via structureren van wiskundige competentie dient zich het idee van een kennisgraaf aan als didactisch hulpmiddel.

Vervolgens gaat de onderzoeker de praktijk van het onderwijs in om een exploratief onderzoek ('niet kwantitatief' wordt vermeld) met vier informaticastudenten van de Open Universiteit, in het leerstofdomein lineaire algebra, te verrichten. Het resultaat stemt tot optimisme en dus tot vervolgonderzoek.

Nu worden zeven experts op dit terrein aangesproken met de vraag een kennisgraaf bij de leerstof van lineaire algebra te maken. Hiertoe heeft de onderzoeker eerst zelf een 'voorbeeldgraaf' ontworpen. Het onderzoek bestaat uit een procesonderzoek (de experts doen hun werk in aanwezigheid van de onderzoeker, drie individueel en twee tweetallen; het computerprogramma KennisGraaf staat hen ter beschikking) en een productevaluatie: kunnen experts dit wel en stemmen de resulterende kennisgrafen overeen? Kwalitatief onderzoek dus met de conclusie dat

deze experts niet allemaal dezelfde (de unieke) kennisgraaf over dezelfde stof maken.

Interviews met de experts geven wel aan dat men het structureren van kennis met behulp van kennisgrafen positief waardeert. Maar ook dringt men aan op het stellen van criteria waaraan een kennisgraaf moet voldoen. Dit gebeurt in de volgende stap, en op basis van de verzamelde data uit de literatuur (waarin de *Gestaltpsychologie* een interessante plaats krijgt toebedeeld) en eigen ontwerpwerk komt een wiskundig kennisgraafmodel tot stand. Nu is het moment aangebroken om voor de tweede maal de praktijk van de Open Universiteit, cursus Lineaire Algebra te betreden.

Er worden vijf studenten bereid gevonden in een zitting van circa drie uur een kennisgraaf te produceren, met behulp van de voorbeeldgraaf en KennisGraaf. De onderzoeker geeft een introductie op de taak en registreert vervolgens met videocamera wat de student doet en denkt. Dat laatste wordt mogelijk, omdat de student gevraagd is hardop te denken. De vraag is weer of ze het kunnen en van welke kwaliteit de gemaakte kennisgrafen zijn. Vervolgens vullen ze een vragenlijst in in verband met hun oordeel over de structureringsactiviteit en inschatting van het effect voor het leren van de wiskunde. Het is een voorbeeld van kwalitatief onderzoek naar de haalbaarheid en het nut van deze werkwijze, in het bijzonder voor leerlingen van 5 en 6 vwo. Hoewel slechts drie studenten aan de norm voldoen, wordt besloten toch weer verder te gaan.

De onderzoeksgroep bestaat dan uit de 38 leerlingen van twee klassen 5 vwo wiskunde B. Er wordt geen gebruik gemaakt van de computer met KennisGraaf. Het domein is 'limie-

ten en continuïteit', een onderwerp dat in de onderzoeksperiode juist op het programma stond. Dezelfde onderzoeksvraag als hierboven, een aangepaste voorbeeldgraaf, 40 minuten om individueel de kennisgraaf te maken, de (aangepaste) vragenlijst aan het eind van dit lesuur. Geen individuele observaties, maar een proefwerk na twee weken met twee vragen over de theorie in het hoofdstuk, hetgeen niet gebruikelijk was.

De dataverzameling en -analyse heeft een kwantitatief tintje: de frequentie van in de kennisgrafen voorkomende begrippen, overeenstemming tussen de gemaakte grafen en de scores op de beoordelvingsvragen worden bepaald. Ook de gemaakte proefwerken krijgen een nette (beschrijvend) statistische behandeling en worden in verband gebracht met het voorgaande. Het proefwerk blijkt niet best te zijn gemaakt en de kennisgrafen zijn van geringe kwaliteit. Het is duidelijk dat deze vwo-leerlingen niet gewend zijn leerstof te structureren en evenmin zijn ze gewend theoretische (wiskundige) kennis te memoriseren. Ook blijkt dat klas 5V-1 over de hele linie beter scoort dan klas 5V-2.

In het laatste onderzoek van deze studie gaat men met dezelfde leerlingen, nu in de klassen 6V-1 en 6V-2, aan de slag. Het wordt een vergelijkend onderzoek, met een controle- (6V-2) en een experimentele klas (6V-1). In de experimentele groep wordt dit keer in kleine groepjes geoefend met het maken van kennisgrafen, in 6V-2 worden gewoon opgaven gemaakt, de gebruikelijke voorbereiding op het schoolonderzoek voor wiskunde B. Beide groepen worden statistisch, met *t*-toets, op wiskundige competentie vergeleken. Het resultaat van dit kwantitatieve

**Jacob Perrenet***Promotor*J. Terwel
A. van Streun

Proefschrift (1995) 'Leren probleemoplossen in het wiskundeonderwijs. Samen of alleen. Onderzoek van wiskunde leren bij 12-16jarigen. (Op basis van artikelen.)'

Problematiek Moet het leren oplossen van wiskundige problemen individueel gebeuren, of in samenwerkende groepen?

Context Project Adaptief Groepsonderwijs 12-16, Onderwijskunde, Rijksuniversiteit Utrecht; Project Transfertest voor wiskunde Psychonomie en Didactiek Wiskunde, Vrije Universiteit Amsterdam; Ontwikkelingspsychologisch onderzoek, Kinderstudies, Universiteit Utrecht.

Dirk Hoek*Promotor*J. Terwel
B.H.A.M. van Hout-Wolters
P.J.W.M. van den Eeden

Proefschrift (1998) 'Social and cognitive strategies in co-operative groups. Effects of strategy instruction in secondary mathematics.'

Problematiek Wat zijn de algemene en differentieële effecten van het onderwijzen van cognitieve en sociale strategieën op prestaties en attitudes van leerlingen in het v.o., die in groepen samenwerken aan wiskunde?

Context Het onderzoeksprogramma 'Learning and Instruction of Cognitive Strategies' aan het Instituut voor de Lerarenopleiding (ILO) aan de Universiteit van Amsterdam.

**Bert Zwaneveld***Promotor*J. van de Craats
A. van Streun

Proefschrift (1999) 'Kennisgrafen in het wiskundeonderwijs'

Problematiek Is gestructureerde wiskundige kennis beter toepasbaar? Helpt het maken van een kennisgraaf om de leerstof te structureren, bij het verwerven van die kennis?

Context Zelfstandig werken om wiskundige competentie te verwerven in Studiehuis en op Open Universiteit.

onderzoek (op kleine schaal) is verrassend: de groep zonder structurering (6V-2) maakt de opgaven (centraal schriftelijk eindexamen, baankrommen) beter dan de experimentele groep klas 6V-1.

Tussen Mooij en Zwaneveld is methodologisch het een en ander gebeurd, hetgeen blijkt uit de rijke methodologische omgeving die het promotieonderzoek van de laatste siert. De zorgvuldigheid waarmee de onderzoeksvragen betreffende het gebruik van de kennisgraaf zijn behandeld, is evenwel ook zichtbaar bij de bescheiden onderzoeksvraag van Mooij. Het verschil zit in de beschikbare kennis van methodologische zaken.

De context van het onderzoek

Voor het onderzoek van Mooij wordt de context gevormd door het meetkundeonderwijs in de eerste klas van het vmo. Veel verder gaat het niet, in zekere zin verschilt het niet zoveel van een didactische verkenning in de klas van de leraar zelf. Doen we daarmee het werk van Mooij tekort? Misschien wel, want hij

maakt twee opmerkingen die de context van het meetkundeonderwijs in klas 1 ver overstijgen. De eerste op bladzijde 70: "Er wordt algemeen aangenomen dat er een verschil in wiskundige begaafdheid bij jongens en meisjes bestaat. Een onderzoek, of dit werkelijk zo is, zou zeer belangrijk zijn. 't Zou best kunnen zijn, dat het feit, dat minder meisjes dan jongens zich tot de wiskunde aangetrokken voelen, geen psychologische of intellectuele oorzaak heeft, maar een maatschappelijke. In de vrouwelijke beroepen wordt over het algemeen weinig wiskunde geëist."

In het verlengde van deze opmerking omstreeks 1948, is de studie van Marjolijn Witte (*Meisjes meegerekend*, 1994) te plaatsen. Zij tilt dit onderwerp op het niveau van een promotie-onderzoek. Ook aardig om te weten is in dit verband, dat in 1999 het resultaat van een onderzoek naar 'verschillen tussen meisjes en jongens bij het vak rekenen-wiskunde in de basisschool' wordt gepubliceerd. Deze publicatie is bekend geworden als het Mooij-rapport.

De tweede opmerking staat op bladzijde 1: "In tegenstelling tot de mening, die in sommige kringen steeds weer tot uiting komt, zijn we ervan overtuigd, dat het wiskundeonderwijs in de toekomst voor een groter aantal leerlingen noodzakelijk zal zijn, dan tegenwoordig..." Deze opmerking heeft een verlengde, want vijftien jaar later zal de staatssecretaris van onderwijs bij de instelling van de CMLW erop aandringen dat in de toekomst meer leerlingen aan het wiskundeonderwijs kunnen deelnemen en nog eens vijftien jaar later kan men in kringen van ontwikkelaars van wiskundeonderwijs veel de slogan 'Wiskunde voor allen' horen klinken.

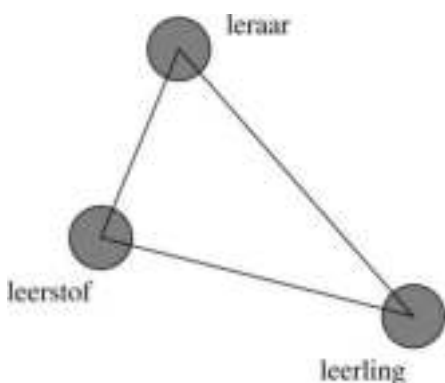
Het onderzoek van Zwaneveld kan begrepen worden in de context van 'studiehuis' en 'afstandsonderwijs', maatschappelijke ontwikkelingen die duizenden leerlingen, docenten en politici in de greep houden. Het is opmerkelijk te noemen dat dit onderzoek, dat beoogde een didactische bijdrage aan het zelfstandig leren werken te leveren, een omissie in het leren blootlegde: theoretische kennis van wiskunde is uit de mode.

Positie in de didactische driehoek

Onderwijs in het algemeen, en dus ook wiskundeonderwijs, laat zich beschrijven in termen van leraar, leerling en leerstof, en de relaties tussen die drie: leraar → leerling, het pedagogisch-didactisch handelen van de leraar; leerling → leerstof, leerprocessen van de leerling; leerstof → leraar, hoe de leraar door zijn leerboek of programma dagelijks wordt geleid om onderwijs te geven (maken).

Je kunt het rondje langs de hoekpunten en zijden van de didactische driehoek ook andersom maken: leraar → leerstof, ontwerpen en didactiseren; leerstof → leerling, toetswerk, knelpunten en eisen; leerling → leraar, cognitieve respons en gedrag van leerlingen in de wiskundeles. Om maar eens wat te noemen.

In elke onderwijsbeschrijving worden accenten geplaatst op een of meer van de elementen van de driehoek. Ook in de onderzoeken van Mooij en Zwaneveld zijn dergelijke accenten op te merken. In beide gevallen werd aan de leerstof, in principe, niet getornd, leerstof krijgt dus geen accent. Door Mooij wordt wel een accent geplaatst bij het didactisch handelen van de leraar (maak in een klassengesprek de leermethode bewust).



De didactische driehoek.

In het onderzoek van Zwaneveld wordt een instrument ontworpen om het leren van de leerlingen te verbeteren (de kennisgraaf). In

zijn hoofdonderzoek krijgen leerlingen, leren en leerstof een accent. In het voorbereidend werk, om tot een goed didactisch instrument

te komen, krijgen eigenlijk alle elementen van de didactische driehoek, elk op hun beurt, een accent.

Literatuur en noten

- 1 In de tussentijd is verschenen: Amerom, B.A. van, (2002). *Reinvention of early algebra*. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra. Freudenthal Institute: Utrecht.
 - 2 Biehler, R., Scholz, R.W., Strässer, R. and B. Winkelmann (eds) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.
 - 3 Daalen, D. van, (2001). *L.E.J. Brouwer. Een biografie*. Bert Bakker: Amsterdam.
 - 4 Goffree, F. (1985). *Ik was wiskundeleraar*. Timmer, Wansink, Van Hiele, Vredenduin en Van Baalen in gesprek met Fred Goffree. SLO: Enschede.
 - 5 Goffree, F. (2001). A consumer's point of view. In: Marja van den Heuvel-Panhuizen (ed) *Proceedings of the 25th Conference of PME*. Vol 1 (80–86). Freudenthal Institute: Utrecht.
 - 6 Goffree, F., Van Hoorn, M. en B. Zwaneveld (red.), (2001). *Honderd jaar wiskundeonderwijs*. NVvW: Leusden.
 - 7 Goffree, F. en H. Jansen (1989). *Wiskundeonderwijs Wereldwijd*. Terugblikken op de ICME-VI conferentie in Boedapest 1988. VALO wiskunde en informatica: Enschede.
 - 8 Goffree, F. (1996). *Onderzoek en ontwikkeling: vān en vōór het reken-wiskundeonderwijs in Nederland*. Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 15(1) 3–18.
 - 9 Groot, A.D. de, (1961). *Methodologie*. Grondslagen van onderzoek en denken in de gedragswetenschappen (1961), Mouton & Co: 's Gravenhage. (1970, vijfde druk).
 - 10 Gudmundsdottir, S. (1995). *The narrative nature of pedagogical content knowledge*. In: H. McEwan & K. Egan, (Eds.), *Narrative in teaching, learning and research*. (24–38). Teachers College, Columbia University: New York.
 - 11 Hoebe, W. Th. J. G. (1981). *Praktijkgericht onderzoek en de groei van kennis*. SVO-reeks nr. 46: 's-Gravenhage.
 - 12 Hoeve, A.H. van der, Kohnstamm, Ph. en G. van Veen, (1937). *Over lees-rekenopgaven en hun didactische en diagnostische waarde*. Mededeling van het Nutseminarium nr. 31, Groningen.
 - 13 János Bolyai, (1987). *Appendix The theory of space*. With introduction, comments and addenda. Ed. Prof. Frenc Kárteszi, doctor of the mathematical sciences. Akadémiai Kiadó: Budapest.
 - 14 Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex Cartesian graphs representing situations studies and teaching experiments*. Ph.D study Université du Québec a Montréal.
 - 15 Jong, R. de, en M. Wijers (red.) (1993). *Ontwikkelingsonderzoek*. Theorie en Praktijk. NVORWO Freudenthal Instituut: Utrecht.
 - 16 Lampert, M. & D. Loewenberg Ball, (1998). *Teaching, Multimedia, and Mathematics*. Investigations of Real Practice. Teachers College, Columbia University: New York.
 - 17 Moor, E. de, (2000). *Didactische pioniers*. De Wiskunde Werkgroep 1936–1974. In Goffree, F., Van Hoorn, M. en B. Zwaneveld (red.) (2001). *Honderd jaar wiskundeonderwijs*. NVvW: Leusden.
 - 18 Poincaré, H., (1908). *Science et méthode*.
 - 19 Schwandt, T. (2000). *Dictionary of Qualitative Inquiry*. SAGE Publications, Thousand Oaks: London, New Delhi.
 - 20 Smaling, A. (1990). *Enige aspecten van kwalitatief onderzoek en het klinisch interview*. Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 8(3) 4–10.
 - 21 Streefland, L. (1983). *Theorievorming door ontwikkelingsonderzoek*. Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 12(2), 20–24.
 - 22 Troelstra, Habermann, De Groot en Bulens, (1962). *Transformatiemeetkunde*, Wolters: Groningen.
 - 23 Goffree, Van Hoorn en Zwaneveld (red.) (2001). *Honderd jaar wiskundeonderwijs*. NVvW: Leusden. Op blz. 201 is een foto opgenomen van de deelnemers aan een tweedaagse conferentie van de Wiskunde Werkgroep in Doorn. Op die foto staat, temidden van vele didactische corifeeën uit die tijd, Hendrik Mooij.
 - 24 Van Hiele, P.M. (2001). *De illusie van het streng redeneren*. In Goffree, F., Van Hoorn, M. en B. Zwaneveld (red.) (2001). *Honderd jaar wiskundeonderwijs*. NVvW: Leusden.
 - 25 Freudenthal was ten tijde van deze opening inmiddels al 6 jaar hoogleraar-directeur van het Instituut Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (IOWO). Hij beschouwde zichzelf als medewerker, en hij werkte ook met grote inzet en open mind mee aan het ontwikkelwerk voor basisonderwijs en voortgezet onderwijs. Het was vanuit die ervaring dat hij een opmerking over onderzoek kon maken: "When it (IOWO) was founded, we considered ourselves as engineers rather than researchers; but as early as at that time I foresaw and predicted a future where the clouds of our engineering work would produce fall-out that could rightly be called research. Indeed, I believe this is still the way for educational research: from educational practice to theory."
 - 26 Wansink, Joh. H. (1966). *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraars*. Wolters-Noordhoff: Groningen.
- Wiskundendidactisch promotieonderzoek in het basisonderwijs onder begeleiding van A. Treffers**
- 27 Brink, J. van den (1989). *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen*. Vakgroep OW&OC: Utrecht (met K.B. Koster).
 - 28 Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Freudenthal Institute: Utrecht.
 - 29 Heuvel-Panhuizen, M. van de (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. CD-bêta Press: Utrecht.
 - 30 Jong, R. de, (1986). *Wiskobas in methoden*. Vernieuwing van reken/wiskundemethoden voor het Nederlandse basisonderwijs (1965–1985). Vakgroep OW&OC: Utrecht (met N.A.J. Lagerweij).
 - 31 Klein, A.S. (1998). *Flexibilization of mental arithmetic strategies on a different knowledge base*. The Empty Numberline in a Realistic versus Gradual Program Design. Freudenthal Instituut: Utrecht. (met M. Boekaerts en M. Beishuizen).
 - 32 Menne, J. (2001). *Met sprongen vooruit*. Een productief oefenprogramma voor zwakke rekeners in het getallen gebied tot 100 — een onderwijsexperiment. Freud. Instituut: Utrecht.
 - 33 Moor, E. de (1999). *Van vormleer naar realistische meetkunde*. Een historisch didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Nederland gedurende de negentiende en twintigste eeuw. Freudenthal Instituut: Utrecht.
 - 34 Nelissen, J.M.C. (1987). *Kinderen leren wiskunde*. Een studie over constructie en reflectie in het basisonderwijs. De Ruiter: Gorinchem. (met J.F. Vos, P. Span en W. van Doorn).
 - 35 Streefland, L. (1988). *Realistisch breukenonderwijs*. Onderzoek en ontwikkeling van een nieuwe leergang. Vakgroep OW&OC: Utrecht (met K.B. Koster).
- Ander wiskundendidactisch onderzoek met betrekking tot de basisschool**
- 36 Baltussen, M. (1992) *7 trainingsvarianten voor rekenproblemen*. Een vergelijkend onderzoek uitgevoerd bij moeilijk lerende kinderen en kinderen met leerproblemen. KPC: 's Hertogenbosch.
 - 37 Eerde, H.A.A. van, (1996). *Kwantiwijzer*. Diagnostiek in Reken-Wiskundeonderwijs. Zwijssen: Tilburg.
 - 38 Goffree, F. (1979). *Leren onderwijzen met Wiskobas*. Onderwijsontwikkelingsonderzoek Wiskunde & Didactiek op de Pedagogische Academie. IOWO: Utrecht.
 - 39 Harskamp, E.G. (1988). *Rekenmethoden op de proef gesteld*. RION: Groningen.
 - 40 Heijden, M. K. van der, (1993). *Consistentie van aanpakgedrag: Een procesdiagnostisch onderzoek naar 8 aspecten van hoofdrekenen*. Swets en Zeitlinger: Lisse.
 - 41 Klep, J.H.F.M. (1998). *Arithmeticus. Simulatie van wiskundige bekwaamheid*. Computerprogramma's voor het generatief en adaptief plannen van inzichtelijk oefenen in het reken-wiskundeonderwijs. Zwijssen: Tilburg.
 - 42 Kool, Marjolein (1999). *Die conste vanden getale*. Een studie over Nederlandstalige rekenboeken uit de vijftiende en zestiende eeuw, met een glossarium van rekenkundige termen. Uitgeverij Verloren: Hilversum.
 - 43 Koster, K.B. (1975). *De ontwikkeling van het getalbegrip op de kleuterschool*. Empirische studies over onderwijs. Tjeenk Willink: Groningen.
 - 44 Luit, J.H.E. (1987). *Rekenproblemen in het speciaal onderwijs*. Katholieke Universiteit Nijmegen.
 - 45 Mulken, F. van, (1992). *Hoofdrekenen en Strategisch Handelen*. Het gevarieerd gebruik van twee grondvormen van optellen en aftrekken tot honderd. Vakgroep Onderwijsstudies, Rijksuniversiteit Leiden.
 - 46 Vos, W.A. de, (1998). *Het methodegebruik op basisscholen*. Shaker Publishing: Maastricht.
 - 47 Willemsen, Theo (1994). *Remediële rekenprogramma's voor de basisschool*. Een effectstudie. Monografieën onderwijsonderzoek 19. RION: Groningen.
 - 48 Wolters, Mirjam (1978). *Van rekenen naar algebra*. Een ontwikkelingspsychologische analyse. Rijksuniversiteit Utrecht.

Frans Pagen

Van Heukelomlaan 107

3555 EC Utrecht

franspagen@cs.com

Opinie

De magie van wiskunde

In de tachtiger jaren behaalden de meeste wiskundestudenten, zoals ook Frans Pagen, naast hun doctoraal examen een onderwijsbevoegdheid. Frans Pagen studeerde wiskunde in Utrecht. Aanvankelijk trad hij in dienst als netwerkdeskundige bij PTT Telecom. Hij ervoer deze arbeid echter als onbevredigend. Sinds 1992 was hij betrokken bij allerlei vrijwilligerswerk, zoals bij 'Taalhulp NT2' (Nederlands als tweede taal). Ook gaf hij computerles bij welzijnsinstellingen. Aan het eind van de jaren negentig ontstond er een enorm tekort aan wiskundeleraren. In december 1998 werd hij vervangend docent wiskunde in een zogenaamde Internationale Schakelklas (ISK) aan het Prisma College te Utrecht. Hij was reeds lang eerstegraads bevoegd, maar volgde desondanks een opfriscursus voor docent wiskunde. Hier geeft hij een persoonlijk verslag hoe hij zijn eigen studie heeft ervaren en hoe hij tegenwoordig tegen het wiskundeonderwijs aankijkt.

De wiskunde werd tijdens mijn middelbare schooltijd (1970–1976) op het gymnasium abstract gedoceerd. Weinig, zoniet geen, context en achtergronden. Nog met verzamelingen en congruentie van driehoeken (gegeven, te bewijzen, bewijs). Schoolboeken zonder kleurrijke plaatjes en toepassingsopgaven.

Na een kleine adaptatie-periode, waarin ik intuïtief de werking van variabelen en andere formalismen doorzag, heb ik geleerd om

díe antwoorden te geven die de leraar tevreden stelden (ik was toen nog heel gezagsgetrouw). Mijn punten schoten omhoog, maar ik begreep er weinig van.

Dat ik echt geen talent voor wiskunde had, werd pijnlijk duidelijk toen ik bij de voorronde voor de Wiskunde Olympiade slechts 3 van de 20 punten scoorde. Vreselijke opgaven: het belang en de draagwijdte ervan ontgingen mij volkomen waardoor mij de motivatie werd ontnomen (als ik al de kennis en/of intelligentie gehad zou hebben om ze op te lossen). Blijkbaar hielden wiskundigen van doelloze puzzels.

De universiteit

Toch vond ik wiskunde een intrigerend vak. Het klopte allemaal zo mystiek mooi, het gaf aanzien als je 'er goed in was' en het was blijkbaar erg nuttig, want verplicht. Mijn nieuwsgierigheid overwon mijn angst voor onbegrijpelijke formules en onoplosbare problemen en ik ging wiskunde studeren; nu zou alles duidelijk worden.

Helaas, de werkelijkheid was anders. Na weer een korte adaptatie-periode begreep ik welke eisen er nu aan mijn antwoorden gesteld werden: bewijzen! Toen ik doorkreeg wat wel en niet als bewijs acceptabel werd gevonden (ik wacht nog steeds op het bewijs van de bewijskracht van bewijzen), schoten mijn cijfers weer omhoog. Daarna leek de universiteit veel op de middelbare school en heb ik

wel veel formele wiskunde geleerd (en weer vergeten) maar weinig over de betekenis van die wiskunde.

Ik leerde dat het mogelijk is om begrippen vergaand te abstraheren en te generaliseren. Op zich heel mooi, als je weet waar je het voor doet. Jammer genoeg was daar minder aandacht voor. Wel werd je aangemoedigd om gebruik te maken van de bibliotheek, maar de meeste wiskundeboeken zijn beter geschikt voor symboolverwerkende automaten dan voor gewone mensen: definitie, stelling, bewijs, definitie, stelling, bewijs, ... Blijkbaar kon je wiskunde alleen maar leren door het te doen, door sommen te maken en er vooral niet dieper over na te denken of erover te discussiëren, het inzicht zou vanzelf wel groeien.

Ik leerde ook dat de wiskunde blijkbaar verworpen is tot een wildgroei van allerlei specialisaties. Zo zeer, dat het blijkbaar niet meer mogelijk is om een inhoudelijk geïntegreerd overzicht ervan te geven. Ik moest het doen met de classificatie uit de bibliotheek.

En, eerlijk is eerlijk, ergens tijdens mij studie was er ook een college over de grondslagen van de wiskunde. Maar dat ging alleen over de traditionele verzamelingenleer en logica. En op het eind van mijn studie waren er ook een aantal keuzecolleges over de geschiedenis van de wiskunde, over wiskunde en maatschappij en schoolwiskunde. Helaas, voor mij was het 'too little, too late'.

Wat is er mis?

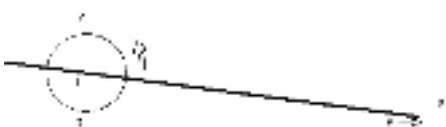
De grootste gemene deler van mijn ervaringen is de formele benadering van de wiskunde. Natuurlijk besef ik dat de wiskunde haar succes voor een groot deel te danken heeft aan deze benadering; goede formalismen helpen het denken en stellen ons soms zelfs in staat om automatisch te rekenen. Maar de weg naar deze formalismen is vaak lang geweest en soms zelfs niet helemaal af. Voor een goed begrip van een formalisme is een juiste interpretatie ervan van essentieel belang. Ter illustratie hiervan werp ik een korte blik op de manier waarop er binnen het wiskundeonderwijs en de wiskundige praktijk wordt omgegaan met formalismen en hun betekenis.

Wat leren wij onze kinderen op school? Ik zal hier een paar simpele voorbeelden geven met betrekking tot getallen, als het ware gezien door de ogen van het kind.

Bedenk wel, kinderen hebben nog een levendige fantasie. Voor kinderen is het dus moeilijk om wiskunde zuiver formeel te beschouwen. Van de andere kant, onderschat kinderen ook niet. Ik heb tijdens mijn wiskundestudie meegewerkt aan een experimentele leergang rekenen voor kinderen van zes en zeven jaar, waarbij ze leerden werken met de eigenschappen van allerlei relaties. Dat bleek goed mogelijk, als je het begrip maar van concreet naar abstract opbouwt (dat wil zeggen het begrijpen vormgeeft als het concreet manipuleren van voorwerpen en later van kaartjes met abstracte symbolen).

Laat ik beginnen met het woord 'getallen'. Wat zijn eigenlijk getallen? Voor kinderen wordt deze vraag impliciet aan de orde gesteld wanneer ze kennismaken met de negatieve getallen. Dan verschijnt er opeens een min-teken en de getallen die ze al kenden zijn opeens positieve getallen, maar daar zet je dan vreemd genoeg geen plus-teken voor. Het min-teken kenden ze al van het aftrekken. Krijgt dat teken nu een andere betekenis?

Wat is de juiste interpretatie van $2 + 3$? Moet je het lezen van links naar rechts? Of maakt dat niet uit, maar waarom zou je dan moeten aantonen dat $2 + 3 = 3 + 2$? Is het een samenvoeging van een groepje van 2 met een groepje van 3? Maar wat is dan op de getallenlijn de samenvoeging van de posities 2



Figuur 1 Het punt P schuift naar rechts. Omdat P het oneindige niet kan bereiken, zal de rechte ook niet helemaal parallel aan de X -as komen te staan.

en 3? Merk op: er worden soms meerdere interpretatie-modellen gebruikt om formele concepten te introduceren, maar die vertonen vaak subtiele verschillen, waardoor ook het begrijpen van het formalisme (onbewust) onduidelijk kan worden.

Wat is de juiste interpretatie van 2×3 , $2 + 2 + 2$ of $3 + 3$? Of betreft het een scalaire vermenigvuldiging? Wanneer moet je het interpreteren als de lengte 6 en wanneer als de oppervlakte 6? Merk op: in de wiskunde worden de eenheden weg geabstraheerd. Mag dat altijd? Mag je, zeker als je getallen in een meetkundige of visuele context (grafieken) gebruikt, je interpretaties willekeurig kiezen?

Breuken worden traditioneel als moeilijk ervaren en de optelling en vermenigvuldiging ervan zijn natuurlijk ook complexer. Maar begripmatig is de situatie nog veel ingewikkelder. Je hebt delingen, fracties, breuken, gebroken getallen, verhoudingen, rationale getallen, die aangeduid worden met de Q van quotiënten. Je hebt de schuine en horizontale deelstreep, de dubbele punt en dat gekke teken op je rekenmachientje. Is $\frac{6}{4}$ een deling, een verhouding of een breuk? Vergelijk dit eens met $4 - 6$: is dit een aftrekking, een verschil of een negatief getal? Wat bedoel je met $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ en wat met $4 - 6 = -2$? Moet je niet onderscheid maken tussen grootheden (verhoudingen, verschillen) en de getallen (rationale getallen resp. gehele getallen)? Zouden getallen niet uniek moeten zijn? Is het vereenvoudigen van breuken in feite niet het bepalen van de equivalentieklasse van verhoudingen?

Zeno

We schakelen nu over naar de hogere wiskunde. U kent vast wel de beroemde paradoxen van Zeno. Voor mijn doel is de volgende versie het meest duidelijk: geen mens kan een afstand van 2 meter overbruggen, want steeds als je de helft van de overgebleven afstand afgelegd hebt, blijft de andere helft nog af te leggen en dit gaat tot in het oneindige door. Dit correspondeert wiskundig met de oneindige reeks $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ als model voor de afgelegde afstand. De standaard wiskundige verklaring van de paradox is dan ook meestal dat Zeno blijkbaar niet op de hoogte was van de theorie van de oneindige reeksen, anders had hij wel geweten dat deze reeks als limiet 2 heeft, immers als je de getallen van de reeks stuk voor stuk optelt kom je willekeurig dicht bij 2. Maar dat was nou net het probleem: je komt willekeurig dichtbij, maar kom je er ook?

Zeno zegt eigenlijk dat het oneindig lang duurt voordat je de afstand overbrugd hebt.



Figuur 2 De limiet van $1 + r + r^2 + \dots$ voor r tussen 0 en 1.

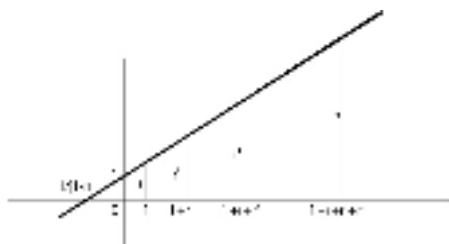
Daarmee suggereert hij dat iedere 'stap' in de reeks even lang duurt (of in ieder geval dat de tijdstappen opgeteld oneindig groot zijn). We moeten dus een aanname maken omtrent het tijdsverloop, oftewel omtrent de snelheid, zeg dat deze constant gelijk is aan 1 meter per seconde. Onze reeks wordt nu een functie, de afstand als functie van de tijd. Voor het tijdsverloop kunnen we dezelfde reeks opstellen. We zien dat de verlopen tijd op dezelfde wijze tot 2 seconden nadert, als de afgelegde afstand tot 2 meter nadert (of andersom). De paradox blijft dus. Uiteindelijk zullen we ons toch moeten beroepen op onze ervaring, die leert dat beweging een continu proces is.

De moraal van dit verhaal: Zeno zegt met zijn paradoxen iets over de verhouding van de wiskunde tot de natuurkunde. Specifiek vestigt deze paradox de aandacht op het feit dat een oneindige reeks een heel abstract formeel ding is. In dit geval omdat het tijdsverloop en de continuïteit van het natuurkundige proces niet mee gemodelleerd worden. In het algemeen kun je je afvragen in hoeverre je uitspraken omtrent de convergentie van zo'n reeks kunt doen zonder aannamen te doen omtrent een of andere context.

Bekijk eens de volgende variant van de paradox (zie figuur 1). In het platte vlak denk ik een rechte lijn door het punt $(0,1)$ die de X -as snijdt in het punt P . Wanneer ik de rechte tegen de klok in laat draaien, met $(0,1)$ als centrum, schuift P naar rechts. Omdat P nooit het oneindige kan bereiken, zal de rechte nooit helemaal parallel aan de X -as kunnen worden.

Wat klopt hier niet? Onze ervaring (interpreteer de rechte bijvoorbeeld als de kijkrichting van iemand die in $(0,1)$ om zijn as draait) leert ons dat, als we de rechte met constante snelheid ronddraaien, hij alle richtingen zal doorlopen en vanwege de continuïteit van de beweging op zeker moment ook parallel aan de X -as loopt. Vervolgens 'springt' dan het snijpunt P van $+\infty$ naar $-\infty$. Wiskundig gaan we hier dus 'door oneindig'. Natuurkundig ligt de zaak anders: niets kan oneindig snel het eind van de rechte bereiken.

Traditioneel wordt gesteld dat de reeks $1 + r + r^2 + \dots$ convergeert voor reële getal-



Figuur 3 De limiet van $1 + r + r^2 + \dots$ voor r groter dan 1.

len r tussen -1 en $+1$. Dit op grond van het feit dat r^n naar 0 convergeert als n oneindig groot wordt en daarmee de partiële sommen $\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ van de reeks naar $\frac{1}{1-r}$. Impliciet interpreteer je daarbij de reële getallen als een 1-dimensionale getallenlijn en zie je de verhoudingen uit de vorige zin als verhoudingen tussen 'lijnstukken' op deze getallenlijn.

Je kunt de limiet ook op een andere manier berekenen. Stel dat de limiet bestaat, noem hem s , en dat hij daadwerkelijk aangenomen wordt, dus niet alleen benaderd, dan moet gelden $s = 1 + r + r^2 + \dots = 1 + r(1 + r + r^2 + \dots)$ dus $s = 1 + rs$ oftewel $s = \frac{1}{1-r}$. Je maakt dan gebruik van de zelfgelijkvormigheid van de reeks. Bij deze berekening moet je verder alleen eisen dat $r \neq 1$ of afspreken dat $s = \infty$ voor $r = 1$ en $s = 0$ voor $r = \pm\infty$, alle andere waarden van r zijn toegestaan. Maar hoe kan dat? Hoe moet je bijvoorbeeld $1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$ interpreteren of $1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1$?

Kijk nog eens naar de vergelijking $s = 1 + rs$ en schrijf hem als $0 = 1 + (r - 1)s$. Hier staat een vergelijking voor het snijpunt van de lijn $y = 0$ met de lijn $y = 1 + (r - 1)s$. Kijk dan nog eens naar figuur 1 van de paradox en naar figuur 2.

Ik interpreteer de reeks $1 + r + r^2 + \dots$ nu als een 'proces', dat de rechte door $(0,1)$ tegen de klok in draait, zó dat het snijpunt met de X-as achtereenvolgens de punten $1, 1+r, 1+r+r^2, \dots$ enzovoort doorloopt en tenslotte eindigt in het punt $\frac{1}{1-r}$.

Laat ik het snijpunt 'sneller' lopen dan $1 + 1 + 1 + \dots$, dan schiet de rechte voorbij de parallelstand en krijg ik bijvoorbeeld figuur 3. Is r negatief, dan 'schommelt' het proces heen en weer en krijg ik bijvoorbeeld figuur 4.

Zoals ik mijn interpretatie tot dusver heb verwoord, is hij nogal vaag. Er valt meer over te zeggen, maar dat zou in het kader van dit artikel te ver voeren. Ik eindig met figuur 5 die een interpretatie geeft van de verhouding $\frac{1}{1-r}$ en laat daarmee zien dat dit onderwerp verrassend aansluit bij de al gangbare praktijk.

Uit de gegeven voorbeelden blijkt hoe makkelijk er verwarring kan optreden bij de interpretatie en als gevolg daarvan bij de hantering van formalismen. Soms zijn er meerdere

interpretaties mogelijk, waardoor het begrip van het formalisme onduidelijk kan worden. Soms is onduidelijk welke interpretaties toegestaan zijn en soms kan een nieuwe interpretatie leiden tot een ander begrip van het al bestaande formalisme.

Kan het beter?

Tegenwoordig doen we het in het middelbaar onderwijs 'realistischer': leuke plaatjes en soms knap gevonden metaforen om concepten duidelijk te maken, zeer contextrijke opgaven met een stapsgewijze opbouw, waardoor je moeilijk opgaven over kunt slaan, verdiepsstof die ik verplicht moest behandelen — is dat de individuele benadering van leerlingen? Gebruik van rekenmachientjes vanaf de brugklas, waardoor er vanaf de derde klas grote problemen ontstaan wanneer er uitsluitend met letters gerekend moet worden.

Zonder alle vernieuwingen te willen bagatelliseren, vaak zijn het op zichzelf wel verbeteringen, ben ik van mening dat er per saldo te weinig verbeterd is.

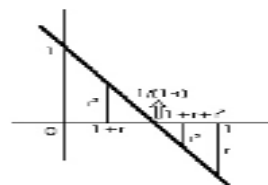
Ten eerste heeft de vernieuwing vooral betrekking op het anders aanleren van wiskunde: van concreet naar abstract. Ging je vroeger meteen aan de gang binnen een formalisme waarvan de achtergrond niet duidelijk was, nu begin je vanuit concrete situaties en voer je zo beetje bij beetje een (door de verschillende contexten) vaak onduidelijk formalisme in. Zo vervang je de ene eenzijdigheid door de andere. Volgens mij gaat het om een goede kennis van het formalisme zelf én een goed inzicht in de juiste interpretatie en toepassing van dat formalisme. Wil je dat alle leerlingen gevoel voor deze aspecten ontwikkelen, dan zou je deze aspecten expliciet aan de orde moeten stellen. Anders blijft wiskunde, zelfs voor de leerlingen met aanleg, op bewust niveau een onbegrepen vak, dat sterk leunt op indoctrinatie.

Ten tweede zit er weinig ontwikkeling in een wiskundig verantwoorde opbouw van de leerstof zelf. Dan doel ik bijvoorbeeld op de gebrekkige opbouw van het begrip van (vooral) de rationale en reële getallen, die nog verergerd wordt door het gebruik van rekenmachientjes, het verwaarlozen van het verschil tussen vectoren (eigenlijk een dynamisch concept) en posities oftewel statisch gedachte toestanden, het omgaan met het oneindigheidsbegrip enzovoorts. Aangezien andere concepten op deze basisbegrippen voortbouwen, zal iedere onduidelijkheid zich later wreken. Volgens mij zou hier meer onderzoek naar gedaan moeten worden.

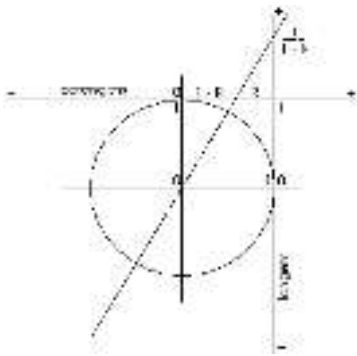
Ten derde blijft de doelmatige benadering van de leerstof erg opportunistisch. Sommige onderwerpen verdwijnen, nieuwe komen daar weer voor in de plaats. Onder de vormende werking van wiskundeonderwijs kan blijkbaar steeds iets anders worden verstaan; wat ontbreekt is een goede uitwerking van deze werking, gebaseerd op een cultuurhistorisch en neuropsychologisch onderbouwde visie op de wiskunde. Dat moet mogelijk zijn, nu het onderzoek van de geschiedenis van de wiskunde zoveel vruchten afwerpt en er steeds meer bekend wordt over de werking van onze hersenen.

Ook zonder zo'n visie zijn er thema's te bedenken waarbij het belang en de rol van wiskunde op een interessante manier aan de orde gesteld zou kunnen worden. De meetkunde met zijn te bewijzen stellingen biedt een goed kader voor het bespreken van de waarheid van wis- en natuurkundige uitspraken ten aanzien van een of andere buitenwereld, met name ten aanzien van de rol die tellen en meten, de visuele waarneming en het logisch redeneren hierin spelen. Minstens zo interessant is het bepreken van de relatie tussen wiskunde en ons denken. Concepten als verzamelingen, (cor)relaties, equivalentieklassen, inter- en extrapolatie, logica enzovoorts bieden daar aanknopingspunten voor. Wiskunde speelt een belangrijke rol in onze huidige economische en technologische cultuur; dat blijkt wel uit de opgaven. Maar je zou die rol ook expliciet aan de orde kunnen stellen. De ontwikkeling van de wiskunde verdient het om in een cultuurhistorisch kader te worden geplaatst, al was het maar door het vertellen van interessante anekdotes.

Nu zou je de huidige onderwerpkeuzes ook (platvloerser) kunnen verklaren uit de wensen vanuit andere vakken, het bedrijfsleven of de maatschappij in het algemeen. Dit is een ingewikkeld afstemmingsprobleem, dat samenhangt met de visies op wiskunde, op andere vakken (zou natuurkunde bijvoorbeeld niet wat praktischer, empiristischer en minder formalistisch benaderd kunnen worden?), op het bedrijfsleven (dat vaak hele specifieke kennis gebruikt en misschien zelf meer daarin zou



Figuur 4 De limiet van $1 + r + r^2 + \dots$ voor r tussen -1 en 0 .



Figuur 5 Een interpretatie van de verhouding van 1 tot $1-r$.

moeten investeren?) en op het onderwijs in het algemeen (zou gesubsidieerd onderwijs niet vooral algemeen vormend moeten zijn?). Het is de vraag in hoeverre je bepaalde wiskunde zou kunnen 'doorschuiven' naar een bepaald vak of naar bedrijfsopleidingen (om zodoende de motivatie door noodzaak te verhogen) en naar hogere opleidingen (wanneer leerlingen geestelijk wat rijper zijn).

Ten vierde, en dat sluit aan bij het vorige punt, er wordt volgens mij onvoldoende rekening gehouden met het feit dat je wiskunde kunt beoefenen vanuit verschillende persoonlijke geaardheden en motivaties. Mensen voelen zich om verschillende redenen tot de wiskunde aangetrokken. Voor sommigen is het misschien de kick van het oplossen van problemen (de 'puzzelaars') of de esthetische bevrediging van het creëren van modellen (de 'modelbouwers'), voor anderen het feit dat je met behulp van wiskunde een hoop nuttige dingen kunt doen (de 'ingenieurs', traditioneel sterk vertegenwoordigd in Nederland), weer anderen menen dat ze zo een groter inzicht in 'de (materiële) buitenwereld' of zelfs 'de (immateriële) bovenwereld' krijgen (de (meta)fysici en mystici) en voor de meesten zal het een mix zijn van dit soort redenen. Wanneer docenten meer ruimte krijgen om hun eigen voorkeuren aan bod te laten komen, zal er voor de leerlingen ook een realistischer beeld omtrent de wiskunde ontstaan.

Hoe wetenschappelijk is de wiskundestudie?

Veel van de hiervoor uitgezette denklijnen kun je moeiteloos doortrekken naar het hoger onderwijs. Ik richt mijn pijlen weer op de universiteit, met de kanttekening dat ik minder op de hoogte ben van de huidige situatie daar. Ik geloof dat ik de formele theorieën die mij op de universiteit kant-en-klaar voorgeschoteld werden inmiddels enigszins kan plaatsen, qua achtergrond en toepasbaarheid, maar dat is meer de verdienste van schrijvers met een geschiedkundige, filosofie-

sche of populair-wetenschappelijke benadering. Waar ik nog steeds moeite mee heb is de onderbouwing van deze theorieën.

Dat wil zeggen, volgens mij worden er bij de ontwikkeling van theorieën allerlei gemotiveerde keuzes gemaakt die consequenties hebben voor de visie op bepaalde wiskundige concepten, maar die motivaties, keuzes en visies worden (in mijn beleving) vaak niet als zodanig gepresenteerd of openlijk bediscussieerd. Ze zitten verstopt in de, vaak naast elkaar staande en vanuit verschillende gezichtspunten redenerende, kant-en-klaar theorieën. Verstopt in kant-en-klaar axioma's, definities, existentiële aannames en bewijsmethoden. Verstopt in de binnen het onderwijs gehanteerde metaforen en interpretatiemodellen.

Ik had mij van een academische opleiding meer voorgesteld. Een wetenschappelijke opleiding zou toch moeten gaan over de kernideeën en -methoden, hoe ze ontstaan zijn, onder welke aannames ze geldig zijn, wat men ermee probeerde te bereiken, in hoeverre dat gelukt is (kritische zelfbeschuwing), hoe je zelf ideeën kunt ontdekken en ontwikkelen, hoe je onderzoek doet?

Een sociale kijk

Misschien vindt u dat ik met mijn betoog de magie van de wiskunde ondergraaf. Het tegendeel is mijn bedoeling. Juist als je je afvraagt wat wiskunde is, hoe het wordt ontwikkeld, onderwezen en toegepast, en dat blijft een alsmaar voortgaande intellectuele ontdekkingstocht, ga je volgens mij openstaan voor het wonder van onze creatieve geest. Wel pleit ik ter wille van de duidelijkheid voor meer onderzoek naar deze zaken.

Wiskunde is een cultureel én biologisch fenomeen, met raakvlakken aan vele wetenschappen, en verdient het dus om in het juiste cultuurhistorische én neuropsychologische kader geplaatst te worden. Het is niet voldoende dat wij het belang van wiskunde weten, we moeten dat ook aan anderen duidelijk kunnen maken. Of koesteren wij liever ons imago van wereldvreemde cijferiaars?

Er zou meer aandacht moeten komen voor een juiste interpretatie en presentatie van wiskundige formalismen. Mijn voorbeelden ten aanzien van de rationale getallen en oneindige reeksen laten zien dat we ons voortdurend moeten realiseren dat we bezig zijn met formele objecten, die een duidelijke interpretatie behoeven om begrijpelijk te zijn. Of zijn we er tevreden mee dat mensen zich van de wiskunde afkeren omdat ze er niets van begrijpen?

De manier waarop iemand de wiskunde benadert, heeft alles te maken met zijn of haar persoonlijkheid en interesse. Je kunt met wiskunde veel kanten op, wat je kunt gebruiken om beter bij de individuele ontwikkeling van leerlingen en studenten aan te sluiten, maar ook bij de individuele interesses en vaardigheden van docenten. Dat past niet bij uniforme leerstof voor iedereen. En ook niet bij uniforme docenten.

Natuurlijk zal een deel van de leerstof vanuit maatschappelijk oogpunt voor iedere leerling verplicht moeten zijn en stellen bepaalde vakken hun eisen. Maar hoeveel middelbare wiskunde wordt er buiten de schooltijd echt gebruikt? Proberen we alle leerlingen tot ingenieurs op te leiden, of laten we geïnteresseerde leerlingen breder kennismaken met de verschillende aspecten van een intellectueel uitdagende discipline?

Tenslotte pleit ik voor een grotere rol van de filosofie en het wetenschappelijke debat in (en niet buiten) de wiskundige praktijk en het wiskundeonderwijs. Niet om nutteloos te navelstaren, maar als praktisch hulpmiddel voor het ontwikkelen van een kritisch bewustzijn en meer begrip en als creatieve inspiratiebron.

Ik krijg vaak het gevoel dat de individuele (vaak onbewust gemotiveerde) creatie van wiskunde binnen de wiskundige gemeenschap hoger aangeschreven staat dan een sociale (bewust gemotiveerde) kritische beschouwing ervan. Dat geeft de wiskunde een soort bovennatuurlijke en intimiderende ongenaakbaarheid, alsof het evidente absolute waarheden betreft waaraan niet getwijfeld kan worden. En het versterkt het imago van de wiskundige als superintelligente maar niet erg communicatieve eenling.

Juist voor het verfijnen van de basisbegrippen lijkt mij een nuchtere en sociale kijk op wiskunde bevorderlijk. En ook bij het onderwijs en de presentatie van wiskunde zou meer aandacht aan deze aspecten besteed kunnen worden, zodat wiskunde wat minder het witte konijn is dat uit de hoge hoed van de wiskundige goochelaar getoverd wordt.

Henk van der Vorst

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
vorst@math.uu.nl

Vakantiecursus 2001

Snel oplossen is een experiment waard

Jaarlijks organiseert het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) onder auspiciën van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars een vakantiecursus voor wiskundeleraars en andere belangstellenden. Bij die gelegenheid verschijnt steeds een syllabus met teksten bij de voordrachten. Die syllabi zijn ook afzonderlijk bij het CWI verkrijgbaar. Het NAW start een nieuwe serie waarin geselecteerde teksten uit recente syllabi worden geplaatst. Het eerste artikel is afkomstig uit de syllabus bij de Vakantiecursus 2001, die als thema had: 'Experimentele wiskunde'. Het onderwerp is het oplossen van grote stelsels lineaire vergelijkingen. Henk van der Vorst is hoogleraar numerieke wiskunde aan de Universiteit Utrecht. Het internationaal meest geciteerde artikel van de jaren negentig is door hem geschreven; het had hetzelfde onderwerp.

Bij wetenschappelijk rekenwerk wordt de meeste rekentijd verstoekt aan het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen. Die stelsels kunnen behoorlijk groot van omvang zijn, zoals bijvoorbeeld bij stromingsproblemen waarbij elke vergelijking weergeeft hoe de waarde van een lokale (onbekende) grootheid (zoals de stroomsnelheid) afhangt van de waarden in de directe omgeving. Men beperkt zich daarbij tot waarden over een van te voren vastgelegd rooster en het aantal roosterpunten bepaalt de omvang van het lineaire stelsel. In figuur 1 zien we zo'n rooster schematisch aangegeven voor het doorrekenen van oceaanstromingen. Bij elk knooppunt hoort een onbekende en een vergelijking waarin deze onbekende gekoppeld wordt aan onbekenden uit de naaste omgeving in het rooster. Omdat we meestal veel roosterpunten nodig hebben om een redelijke nauwkeurigheid te halen, hebben we dus ook veel vergelijkingen. Een prettige bijkomstigheid is wel dat er in elke vergelijking maar een paar onbekenden voorkomen. De matrix van het stelsel staat dus grotendeels vol met nullen. We zullen daar later in dit verhaal nog dankbaar gebruik van maken.

We zien dat het rooster in de figuur uit een viertal verschillende aangegeven deelroosters bestaat. Dat komt omdat dit model in onze Utrechtse groep daadwerkelijk gebruikt is om oceaanstromingen door te rekenen, om te zien hoe onze oplosschema's zich

zouden gedragen. Het probleem was voor een enkele computer echter te groot en daarom werd het rekenprobleem over vier samenwerkende computers verdeeld. De rekenschema's die we zullen introduceren lenen zich redelijk voor een dergelijke parallelle verwerking.

Eliminatie volgens Gauss

Zoals aanstonds duidelijk zal worden leidt het bepalen van de onbekenden uit grote stelsels vergelijkingen tot zeer omvangrijk rekenwerk. De aanpak via directe (Gauss-)eliminatie van onbekenden is vaak onaantrekkelijk, dat zag Gauss in 1823 ook al in, zij het om andere redenen dan de pure rekensnelheid [3]. Hij stelde in dat jaar een iteratieve methode voor om stelsels van vier vergelijkingen met vier onbekenden, die voortkwamen uit driehoeksmetingen, nauwkeurig op te lossen.

Laten we eerst maar eens kijken hoe dat elimineren ook al weer in zijn werk gaat. We bekijken als voorbeeld het stelsel

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Het veegproces verloopt als volgt. Men trekt $\frac{1}{20}$ keer de eerste rij van de tweede rij af en daarna nog eens $\frac{1}{10}$ keer de eerste rij van de derde. Daardoor zijn er in de eerste kolom nullen gekomen en ziet het stelsel er als volgt uit

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 - \frac{1}{20} \\ 0 & 0 & 6 - \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 9 - \frac{21}{20} \\ 8 - \frac{21}{10} \end{bmatrix}.$$

Toevallig staat er nu ook in de tweede kolom een 0 onder het diagonaal element en kan het nieuwe stelsel zonder veel moeite opgelost worden. Dat leidt tot de oplossing $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, en $x_1 = 2$. Merk op dat we exact gerekend hebben. Dat is in dit geval niet zo lastig omdat er 'mooie' getallen uitkomen. Echter wanneer er, zoals in meer realistische situaties, getallen met een paar decimalen achter de punt optreden, dan kan het exact rekenen tot zeer gecompliceerde uitdrukkingen aanleiding geven. De

kans op rekenfoutjes is niet denkbeeldig en het is na controle door invullen in de gegeven vergelijkingen lastig om op te sporen waar de rekenfout zit. Gauss had daar ook veelvuldig last van.

Gauss had een behoorlijk fysisch inzicht en wist dat de gewenste oplossingen voor zijn stelsels (voortvloeiend uit driehoeksmeting) componenten van dezelfde grootte-orde hadden. Omdat in zijn stelsels ook de diagonaalelementen sterk overheersten, komt de grootste bijdrage van de oplossing in het rechterlid van de componenten die met een diagonaal element vermenigvuldigd zijn; in ons voorbeeld dus $10x_1$, $7x_2$, en $6x_3$. Dat betekent dat als we in het stelsel de buitendiagonaal coëfficiënten verwaarlozen, dus

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix},$$

we van het verstoorde stelsel een redelijke benadering voor de oplossing van het ongestoorde stelsel mogen verwachten, in ons geval: $x_1 = 2.1$, $x_2 = \frac{9}{7}$, en $x_3 = \frac{8}{6}$. Dat is inderdaad een, zij het wat grove, benadering voor de gewenste oplossing. Deze vorm van benadering staat tegenwoordig ook wel bekend als de Gauss-Jacobi benadering, omdat de wiskundige-astronoom Jacobi er ook gebruik van maakte bij het berekenen van baanafwijkingen voor de planeten in ons zonnestelsel.

Gauss pakte het nog wat slimmer aan. We kunnen het oorspronkelijke stelsel wat meer intact laten door alleen de coëfficiënten in de rechter bovendriehoek door nullen te vervangen. Dat leidt tot het stelsel

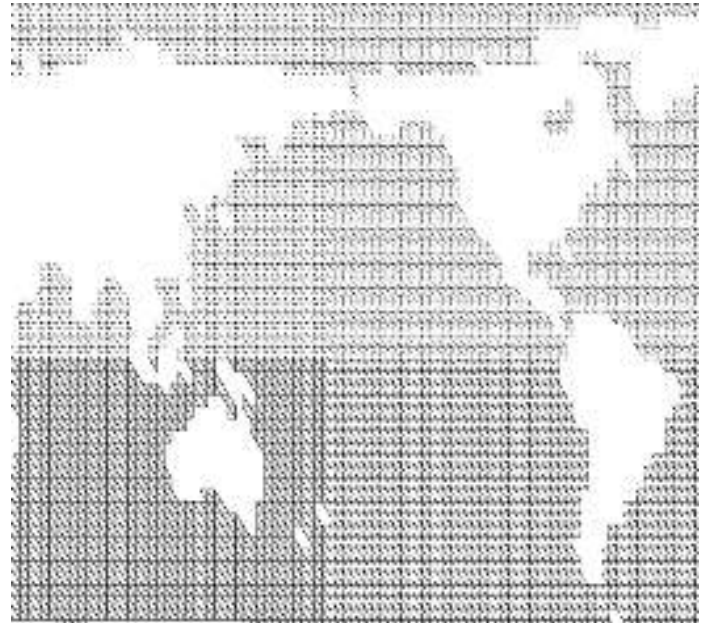
$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix},$$

en dit stelsel heeft als oplossing $x_1 = 2.1$, $x_2 = \frac{7.95}{7}$, en $x_3 = \frac{5.9}{6}$. Dit is inderdaad nauwkeuriger. Dit hoeft niet altijd te gelden; er zijn situaties waarbij deze aanpak geen verbetering geeft.

Goedkoper en beter?

Al met al hebben we voor ons kleine probleempje tegen een slechts geringe rekenbesparing een beroerdere oplossing gekregen. Voordat we verder gaan, past daarom een beschouwing over de kosten van deze verschillende aanpakken. Voor een stelsel met n vergelijkingen en n onbekenden zijn we bij het vegen van de eerste kolom $2(n-1)^2$ rekenoperaties kwijt (als er geen operaties wegvallen door eventuele nullen die in het stelsel zelf al voorkomen). Daarna, voor de tweede kolom, bedragen de rekenkosten $2(n-2)^2$ operaties. Hieruit volgt dat voor het vegen van de gehele onderdriehoek de rekenkosten ongeveer $\frac{2}{3}n^3$ bedragen. Het oplossen van het resterende bovendriehoeksstelsel kost dan nog ruwweg n^2 operaties, en voor grotere n valt dat relatief in het niet. De kosten voor het verkrijgen van de exacte oplossing lopen dus op met de derde macht van n . Men gaat gemakkelijk na dat de benaderingen die met het benedendriehoeksgedeelte van het stelsel berekend worden, verkregen worden tegen kosten die evenredig zijn met de tweede macht van n . Voor grote problemen ligt hier dus een enorm voordeel voor het grijpen.

Echter: hoe nu deze benaderde oplossing goedkoop te verbeteren? Ook daar had Gauss natuurlijk aan gedacht. Om zijn aanpak te beschrijven, gaan we over op matrixnotatie. Deze was in Gauss' tijd nog niet bekend en dat maakte de beschrijving van zijn reken-



Figuur 1 Het rekenrooster voor een oceaanstroming

aanpak wat omslachtig. We schrijven het stelsel als $Ax = b$, met

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 21 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Het benedendriehoeksgedeelte van A noteren we met L :

$$L = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

en dan is de benaderde oplossing dus verkregen uit het oplossen van $L\tilde{x} = b$. Voor verbetering van deze oplossing zoeken we naar het ontbrekende deel Δx :

$$A(\tilde{x} + \Delta x) = b,$$

en hiervoor geldt dus

$$A\Delta x = b - A\tilde{x} \equiv r.$$

Het ligt nu voor de hand om Δx ook weer met een Gauss benadering te berekenen, dus we bepalen $\tilde{\Delta x}$ uit

$$L\tilde{\Delta x} = r,$$

en we corrigeren met deze benadering onze eerste schatting $\tilde{x}$:

$$\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \tilde{\Delta x}.$$

We kunnen deze truc natuurlijk blijven herhalen en dat levert ons de volgende iteratieformule op

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + L^{-1}(b - Ax^{(i)}),$$

waarbij de vector $y = L^{-1}(b - Ax^{(i)})$ berekend wordt door

$$Ly = b - Ax^{(i)}$$

op te lossen.

We voeren dit proces nu uit voor ons kleine stelseltje. Bij gebrek aan betere informatie starten we maar met $x^{(0)} = 0$. In Tabel 1 staan de resultaten voor de eerste drie iteratiestappen weergegeven. Zoals we zien, neemt het aantal correcte decimalen met ongeveer twee per stap toe. Dat is natuurlijk niet altijd het geval: het hangt af van de mate waarin de diagonaal in A overheerst.

De rekenkosten per iteratiestap bedragen ruwweg $2n^2$ operaties (optellingen, aftrekkingen, vermenigvuldigingen) voor het berekenen van $Ax^{(i)}$, plus nog eens n^2 voor het oplossen van het benedendriehoekstelsel met L , dus totaal $\approx 3n^2$ operaties per stap. De oplossing via de directe veegmethode vergt $\approx \frac{2}{3}n^3$ operaties, dus als je met het benaderde resultaten na minder dan

$$(\frac{2}{3}n^3)/(3n^2) = \frac{2}{9}n$$

slagen tevreden bent, dan heb je rekenwinst geboekt.

Voor Gauss had het rekenen met deze iteratiemethode ook enorme voordelen: het was weliswaar voor $n = 4$ niet zo efficiënt in termen van rekenoperaties als het directe oplossen, maar het grote voordeel voor hem was dat je de benaderingen niet nauwkeurig hoeft uit te rekenen. Reken- en afrondfouten corrigeren zich zelf als het ware in het verdere verloop van de iteratie. Aan het residu $b - Ax^{(i)}$, dat je toch moet uitrekenen, kan je in iedere stap zien hoe goed de gevonden benadering bij het gegeven stelsel past. Hij schreef dan ook opgetogen in een brief aan zijn collega Gerling dat je dit half in je slaap kon uitvoeren, danwel dat je onderwijl aan andere zaken kon denken.

Gauss had het geluk dat zijn stelsels sterk diagonaal dominant waren waardoor bij hem het iteratieproces redelijk snel convergeerde, ongeveer zoals in het voorbeeld dat wij bekeken hebben. Bij de zeer grote lineaire stelsels, zoals die bijvoorbeeld in oceaanstromingen optreden, is dat vrijwel nooit het geval en dan convergeert de Gauss-methode akelig langzaam of zelfs helemaal niet. Men heeft dus al heel lang uitgekeken naar snellere alternatieven.

stap	1	2	3
x_1	2.1000	2.0017	2.000028
x_2	1.1357	1.0023	1.000038
x_3	0.9833	0.9997	0.999995

Tabel 1 Resultaten voor drie Gauss-iteraties

Krylov-ruimten

We keren terug naar de basis iteratieformule

$$\begin{aligned} x^{(i+1)} &= x^{(i)} + L^{-1}(b - Ax^{(i)}) \\ &= x^{(i)} + L^{-1}r^{(i)}, \end{aligned} \quad (1)$$

met $r^{(i)} = b - Ax^{(i)}$. We zullen verder, voor het gemak, maar aannemen dat de startvector x_0 gelijk is aan de vector met allemaal nullen.

Door vergelijking (1) te vermenigvuldigen met $-A$ en er links en rechts b bij op te tellen, krijgen we

$$\begin{aligned} b - Ax^{(i+1)} &= b - Ax^{(i)} - AL^{-1}r^{(i)} \\ r^{(i+1)} &= r^{(i)} - AL^{-1}r^{(i)} \\ &= (I - AL^{-1})r^{(i)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Vergelijking (2) geeft een relatie tussen twee opeenvolgende residu vectoren en we kunnen deze formule herhaald toepassen. We krijgen dan

$$\begin{aligned} r^{(i+1)} &= (I - AL^{-1})^{i+1}r^{(0)} \\ &= (I - AL^{-1})^{i+1}(b - Ax^{(0)}) \\ &= (I - AL^{-1})^{i+1}b. \end{aligned}$$

Kennelijk kan het residu in de $i + 1$ -ste stap geschreven worden als allerlei machten van AL^{-1} maal de vector b . Merk op dat we nooit, maar dan ook echt nooit, de matrix L^{-1} zelf uitrekenen. Dat zou veel te inefficiënt zijn. Omdat deze matrix steeds voorkomt in een product met een vector, komt het er dus op neer dat we in staat moeten zijn de vector $y = L^{-1}z$ uit te rekenen voor zekere z . Dat gaat op de inmiddels bekende manier, door y op te lossen uit

$$Ly = z.$$

We kijken nu nog eens naar de oorspronkelijke iteratie en we zien dat we deze herhaald kunnen toepassen, zodat we de volgende vorm overhouden

$$\begin{aligned} x^{(i+1)} &= x^{(i)} + L^{-1}r^{(i)} \\ &= x^{(i-1)} + L^{-1}r^{(i-1)} + L^{-1}r^{(i)} \\ &\vdots \\ &= x^{(0)} + \sum_{j=0}^i L^{-1}r^{(j)} \\ &= \sum_{j=0}^i L^{-1}r^{(j)}. \end{aligned} \quad (3)$$

We kunnen dat nog wat handiger herschrijven:

$$\begin{aligned} L^{-1}r^{(j)} &= L^{-1}(I - AL^{-1})^j b \\ &= (I - L^{-1}A)^j L^{-1}b. \end{aligned}$$

Uit vergelijking (3) leren we dat $x^{(i+1)}$ geschreven kan worden als een combinatie van de vectoren

$$L^{-1}b, L^{-1}AL^{-1}b, (L^{-1}A)^2L^{-1}b, \dots, (L^{-1}A)^iL^{-1}b.$$

Zo'n ruimte, die opgespannen wordt door opeenvolgende machten van een matrix (in ons geval $L^{-1}A$), losgelaten op een vaste vector (in ons geval $L^{-1}b$), heet een Krylov-ruimte, naar de Russische wiskundige *A.N. Krylov*. Krylov-maakte voor zijn berekeningen in de dertiger jaren van de vorige eeuw gebruik van deze ruimten, maar het duurde tot rond 1950 voordat dat voor lineaire stelsels een beetje succesvol begon te worden.

Lanczos kwam in 1952 op het idee om te onderzoeken of de Krylov ruimte betere benaderingen bevatte dan de benadering die door het Gauss-proces wordt opgeleverd [5]. Hij merkte op dat het werk dat gedaan moest worden om de basis vectoren te berekenen ongeveer net zo veel was als het werk dat in het Gauss-iteratie proces verstookt moest worden: namelijk voor uitbreiding van de basis is een operatie met A nodig en een keer oplossen met L . De vraag rijst wel meteen of deze basis geschikt is om mee te rekenen en Lanczos had al snel in de gaten dat de 'Krylov'-basisvectoren niet erg orthogonaal waren; erger nog, ze maken na een aantal stappen meestal een zeer kleine hoek met elkaar. Hij kwam daarom op het idee om van meet af aan een orthogonale

basis voor de Krylov-ruimte te construeren. Dat gaat als volgt. De eerste vector is $L^{-1}b$ en deze delen we door zijn lengte:

$$v_1 = L^{-1}b / \|L^{-1}b\|_2.$$

Vervolgens laten we hier de operatie $L^{-1}A$ op los $w_1 = L^{-1}Av_1$. We hebben nu twee vectoren en we trekken van w de projectie op v_1 af

$$z_1 = w_1 - (w_1, v_1)v_1.$$

We normeren dit resultaat en dat levert ons de tweede orthogonale basisvector

$$v_2 = z_1 / \|z_1\|_2.$$

Dit proces zetten we voort. Stel dat we j stappen hebben uitgevoerd, dan hebben we dus de onderling orthogonale vectoren $v_1, v_2, \dots, v_j$. De volgende vector krijgen we door de operatie $L^{-1}A$ op v_j los te laten en er vervolgens de projecties op alle voorgaande vectoren vanaf te trekken:

$$\begin{aligned} w_j &= L^{-1}Av_j \\ z_j &= w_j - \sum_{k=1}^j (w_j, v_k)v_k \\ v_{j+1} &= z_j / \|z_j\|_2 \end{aligned} \quad (4)$$

De set vectoren $v_1, v_2, \dots, v_j$ vormt een set van onderling loodrechte basisvectoren (met lengte 1) voor de Krylov-ruimte van dimensie j . We moeten nu nog in deze ruimte de beste benadering voor de oplossing bepalen. Dit deed Lanczos op een zeer handige manier. We vatten de basis vectoren op als de kolommen van een matrix:

$$V_j = [v_1 | v_2 | \dots | v_j],$$

dan kunnen we het resultaat van het orthogonalisatie proces (4) schrijven als

$$L^{-1}AV_j = V_{j+1}H_{j+1,j}, \quad (5)$$

met $H_{j+1,j}$ een $j+1$ bij j dimensionale matrix met de volgende elementen

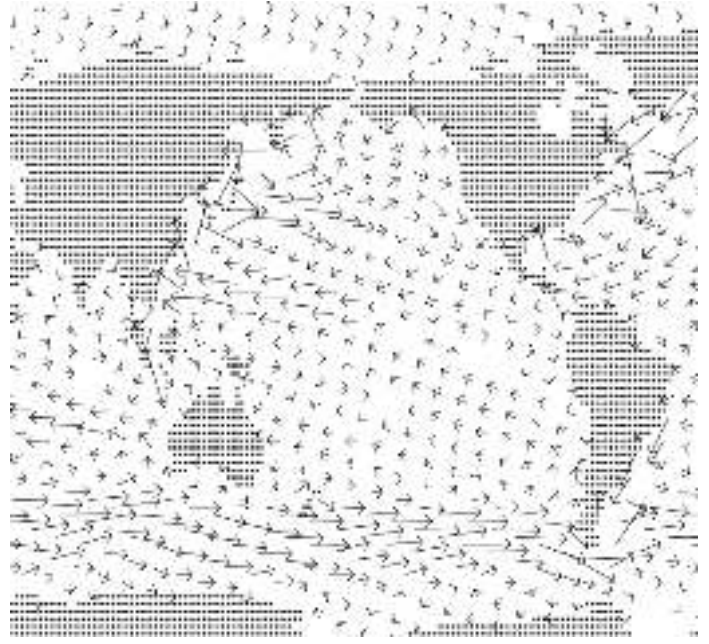
$$H_{j+1,j} = \begin{bmatrix} (w_1, v_1) & (w_2, v_1) & (w_3, v_1) & \cdots & (w_j, v_1) \\ \|z_1\|_2 & (w_2, v_2) & (w_3, v_2) & \cdots & (w_j, v_2) \\ 0 & \|z_2\|_2 & (w_3, v_3) & \cdots & (w_j, v_3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & (w_j, v_j) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \|z_j\|_2 \end{bmatrix}.$$

Nu merken we op dat elke vector, en dus ook de gezochte benaderde oplossing, in de j dimensionale Krylov-ruimte geschreven kan worden als $x^{(j)} = V_j y$, waarbij y een vector is met j coördinaten. We moeten nu nog aangeven wat we met beste benadering zullen bedoelen. Lanczos vond het prima als het residu dat bij die benadering past loodrecht op de Krylov-ruimte stond. Om die Krylov-ruimte bij het stelsel te laten passen, keek hij naar het residu voor de vergelijking

$$L^{-1}Ax = L^{-1}b.$$

Dan eisen we dus dat

$$L^{-1}b - L^{-1}Ax^{(j)} \perp \{v_1, v_2, \dots, v_j\},$$



Figuur 2 Met behulp van de geconjugeerde gradiëntenmethode kost de berekening van de oceaanstroming slechts enkele seconden rekestijd op een workstation.

ofwel: $L^{-1}b - L^{-1}AV_j y \perp \{v_1, v_2, \dots, v_j\}$.

Door nu keurig de loodrechtheid voor alle vectoren uit te schrijven en gebruik te maken van de observatie dat

$$L^{-1}b = \|L^{-1}b\|_2 v_1$$

en van vergelijking (5), komen we tot het verrassende resultaat dat de vector y oplossing is van het j bij j stelsel

$$\begin{bmatrix} (w_1, v_1) & (w_2, v_1) & (w_3, v_1) & \cdots & (w_j, v_1) \\ \|z_1\|_2 & (w_2, v_2) & (w_3, v_2) & \cdots & (w_j, v_2) \\ 0 & \|z_2\|_2 & (w_3, v_3) & \cdots & (w_j, v_3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \|z_{j-1}\|_2 & (w_j, v_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|L^{-1}b\|_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Met de gevonden oplossing y construeren we de benaderde oplossing x_j simpelweg als $x_j = V_j y$.

Oceaanstromingen

Een aantal opmerkingen is hier op zijn plaats. Lanczos bedacht deze methode oorspronkelijk voor het geval dat $L^{-1}A$ symmetrisch, of liever symmetriseerbaar, was. In dat geval kunnen er enorme vereenvoudigingen worden aangebracht vanwege het feit dat dan $(w_k, v_j) = 0$ voor alle $j < k-1$. Dat betekent een grote winst in efficiency. De resulterende methode is in zijn uiteindelijke vorm gepresenteerd in 1954 door Hestenes en Stiefel, onder de naam *geconjugeerde gradiënten methode* [4]. Pas veel later werd de niet-symmetrische variant populair. De meest bekende en gebruikte variant voor niet-symmetrische matrices is *GMRES*, in 1986 voorgesteld door Saad en Schultz [6].

```

Bereken  $r_0 = b - Ax_0$  voor start vector  $x_0$ 
for  $i = 1, 2, \dots$ 
  Los op  $z_{i-1}$  uit  $Kz_{i-1} = r_{i-1}$ 
   $\rho_{i-1} = r_{i-1}^* z_{i-1}$ 
  if  $i = 1$ 
     $p_1 = z_0$ 
  else
     $\beta_{i-1} = \frac{\rho_{i-1}}{\rho_{i-2}}$ 
     $p_i = z_{i-1} + \beta_{i-1} p_{i-1}$ 
  endif
   $q_i = Ap_i$ 
   $\alpha_i = \frac{\rho_{i-1}}{p_i^* q_i}$ 
   $x_i = x_{i-1} + \alpha_i p_i$ 
   $r_i = r_{i-1} - \alpha_i q_i$ 
  stop indien residu klein genoeg
end;
```

Figuur 3 De geconjugeerde gradiënten methode

Laten we nog eens op een rijtje zetten wat we gedaan hebben:

- We zijn uitgegaan van de simpele Gauss-iteratie (ook wel Gauss-Seidel-iteratie genoemd).
- Die iteratie levert benaderingen in Krylov-ruimten op.
- Met vrijwel net zoveel werk kan ook meteen een orthogonale basis voor die Krylov-ruimten geconstrueerd worden.
- De constructie van de orthogonale basis levert meteen de coëfficiënten van een klein stelsel op.
- Oplossing van dat kleine stelsel leidt tot een *optimale* benaderde oplossing in de Krylov-ruimte van de gegeven dimensie.

Dit lijkt tot ingewikkelde code aanleiding te zullen geven, maar we zien in figuur 3 dat dit voor de geconjugeerde gradiënten methode reusachtig meevalt.

Is deze aanpak nu werkelijk zoveel goedkoper dan directe oplosmethoden of dan de oorspronkelijke Gauss-methode? Dat hangt af van het aantal iteratieslagen dat nodig is. Dat aantal hangt weer af van de gekozen basis iteratie. In plaats van L kan je natuurlijk ook andere delen K van de matrix A afsplitsen, zolang dat maar een goedkoop te berekenen benadering oplevert. Dat gebeurt tegenwoordig vaak met onvolledig uitgevoerde veegpro-

cessen. Hoe onvolledig je dat nog mag doen om toch een efficiënte methode te krijgen is niet bekend, het hangt op een onbekende manier van het probleem af. Dit aspect vereist veel ervaring en veel geëxperimenteer, maar het levert dan ook vaak groot succes op. De oceaanstromingen kunnen meer dan een factor n sneller opgelost worden in vergelijking met slim uitgevoerde veegmethoden (die gebruik maken van de vele nullen in het stelsel). Bij NASA rekende men ooit uit dat de krachtverdeling, die optreedt bij de lancering van de ruimteshuttle, met het Gauss-veegproces meer dan 520,000 jaar rekentijd op een supercomputer zou vereisen. Met de standaard Gauss-iteratie treedt vrijwel geen convergentie op en die is dus onbruikbaar, maar de geconjugeerde gradiënten methode, in combinatie met een onvolledig veegproces, vroeg slechts een tiental minuten rekentijd.

Voor het oceaanprobleem uit figuur 1 kon het stromingsprofiel uiteindelijk in luttele seconden op een normaal werkstation berekend worden: de grootte van de pijlen in figuur 2 geeft de sterkte van de stroming aan.

De zogenaamde Krylov-iteratiemethoden worden op uiteenlopende gebieden met succes toegepast: oceaanstromingen, olie-reservoir simulatie, elektrische circuits, mechanische constructies, tunnelboringen, vliegtuigontwerp, medische toepassingen, etc.

Ondanks het feit dat de methode steeds toegesneden moet worden op een bepaalde klasse van problemen bieden ze zoveel snelheidswinst dat men niet meer zonder kan. Er vindt nog steeds zeer veel onderzoek plaats op dit gebied. Er worden hele congressen gewijd aan het ontwerp van bruikbare afsplitsingen K van de matrix van het stelsel, en de publikaties op dit gebied behoren tot de meest geciteerde artikelen uit de wiskunde. Een artikel over een efficiënte Krylov methode voor niet-symmetrische stelsels (in feite een combinatie van het geconjugeerde gradiënten idee met de GMRES methode) was het meest geciteerde wiskundeartikel uit de jaren negentig [7].

Voor een goed overzicht van iteratieve methode en verdere verwijzingen zie het zogenaamde *Templates* boek [1].

Dankwoord

De redactie dankt Miente Bakker van het CWI voor zijn medewerking aan de totstandkoming van deze serie. De syllabi behorende bij de vakantiecursussen zijn te vinden op internetpagina [2].

Referenties

- 1 R. Barrett, M. Berry, T. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, and H. van der Vorst. *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- 2 www.cwi.nl/static/publications.bibl/cwi.syllabi.html
- 3 C. F. Gauss. *Werke, Band IX*. Teubner, Leipzig, 1903.
- 4 M. R. Hestenes and E. Stiefel. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, 49:409–436, 1954.
- 5 C. Lanczos. Solution of systems of linear equations by minimized iterations. *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, 49:33–53, 1952.
- 6 Y. Saad and M. H. Schultz. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 7:856–869, 1986.
- 7 H. A. van der Vorst. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of non-symmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 13:631–644, 1992.

Daan Wanrooy

Hinthamereinde 10

5211 PN Den Bosch

wanrooy@sci.kun.nl

Opinie

Geen vergunning vereist

Het boek 'Trots op mijn studie', onder redactie van Gerard Alberts en Femke Kok, verschijnt 2 september bij de opening van het academisch jaar van de Katholieke Universiteit Nijmegen. Het is als tegengif bedoeld voor alle gepraat over studeerbaarheid en studiepunten, tegengif voor het afgeven op de wetenschappen. Als mensen geen vreugde aan hun studie zouden beleven dan zouden ze immers ook geen zes jaren investeren in zoveel intellectuele discipline. Daan Wanrooy is wiskundestudent in Nijmegen. Hij heeft geen studentgerichtheid, geen studievaardigheden, zelfs geen vergunning nodig om zeker te weten dat hij wiskundige is. Dit is een licht ingekorte versie van zijn bijdrage aan het boek.

Hij staart fronsend naar een bord vol vreemde tekens. Sommige van die tekens zijn letters uit het alfabet waaraan kleine cijfertjes gehangen zijn. Tussen die letters staan nog vreemdere tekens: kleine driehoekjes met een streepje eronder, plusjes waar een cirkeltje omheen is getrokken of langgerekte, wiebelige streepjes. Ook komen er veel paren voor: rechte, gehoeke, gekrulde en gebogen haakjes waartussen weer andere tekens geplaatst zijn. Af en toe ontwaakt hij uit zijn trance en voegt nog meer tekens toe tot hij tevreden lijkt te zijn met wat er op het bord verschenen is.

Hij draait zich om. Een vrouw staat op uit haar stoel en loopt met uitgestoken hand op hem af. Hij laat het krijtje in haar handpalm vallen.

"Het ziet er goed uit," zegt ze, "maar dít kun je niet zonder meer zeggen." en ze zet een blok om een groepje tekens. Terwijl ze nu zelf het bord vol schrijft vervolgt ze: "Als je echter het volgende opmerkt ..."

Het voorgaande is niet het script voor een film over een *mad scientist* die met zijn snode plannen de wereld in zijn macht probeert te krijgen of voor *Good Will Hunting II* waarin nu een vrouw de hoofdrol speelt. Nee, het bovenstaande geeft een beeld van twee met elkaar communicerende wiskundigen. Van de manier waarop ze hun gedachten aan elkaar duidelijk proberen te maken opdat ze beiden overtuigd raken van een bepaald gegeven. Van twee wiskundigen die, zonder de wetten van de wiskunde te overtreden, uit het ene het andere afleiden. Die man, dat ben ik. Ik ben dus wiskundige. Die vrouw, dat is niet mijn collega, maar mijn studiegenootje: wij zijn student. Hier zou je van op kunnen kijken. Hoe kan een student zich nu wiskundige noemen? Is die titel niet beschermd?

Fermat

Anders dan bij sommige andere studies lieg je niet wanneer je zegt dat je wiskundige bent, als je wiskunde studeert. Iemand die rechten studeert kan zich niet zomaar advocaat of rechter noemen en een eigen bureau openen. Een geneeskundestudent kan niet zomaar een praktijk beginnen en zich voor arts uitgeven. Hoe goed deze studenten ook zijn in het uitoefenen van die taken, zij zullen eerst de benodigde diploma's moeten hebben.

Het is niet zo dat je diploma's moet hebben voordat je wiskundige bent. Pierre de Fermat, een Fransman die in de zeventiende eeuw leefde, heeft een aantal wiskundige stellingen op zijn naam staan. Een daarvan staat bekend als de laatste stelling van Fermat en is pas in 1995 bewezen. Fermat wordt zeker als wiskundige erkend, maar hij heeft nooit wiskunde gestudeerd. Hij was jurist van beroep en al zijn wiskundig werk kwam voort uit zijn hobby.

Niemand zal je dus verbieden om jezelf wiskundige te noemen, als je daar behoefte aan hebt. Er is geen vergunning voor nodig. Toch is het niet zo dat iedereen die zich wiskundige noemt ook daadwerkelijk wiskundige is. Wiskundige ben je als je jezelf met wiskundige zaken bezig houdt. Dit klinkt erg flauw en dat is het in wezen ook, maar toch bevat het een kern van waarheid.

Een eigen wereld

Wiskunde is een vreemde wetenschap. Bijna alle andere wetenschappen proberen op een of andere manier de wereld om zich heen beter te begrijpen. Een bioloog bestudeert de aardse natuur en de relaties tussen verschillende delen en komt zo tot een beter begrip van die natuur. Hetzelfde geldt voor een natuurkundige die de levensloop van sterren bestudeert, of een psycholoog die de psyche van de mens onderzoekt. Een wiskundige is, in beginsel, niet geïnteresseerd in de wereld om zich heen. Hij heeft zijn eigen wereld, die hij stap voor stap opbouwt tot een geweldige constructie. In het veelvuldig gebruik worden de abstracte, wiskundige objecten uit die wereld voor een wiskundige concreet en krijgen ze een eigen bestaansrecht. Deze eigen wereld geeft de wiskunde een bijzonder karakter.



Dat wiskunde anders is dan natuurkunde kun je zien in het volgende spelletje. Stel een natuurkundige een vraag die hij in principe kan beantwoorden, zoals: "Waarom zijn sterren bolvormig?" In de uitleg van de natuurkundige speelt ongetwijfeld de zwaartekracht een belangrijke rol. Stel na de uitleg van de natuurkundige opnieuw een vraag die begint met "Waarom..." en die wordt gevormd door naar een specifiek deel van de eerste uitleg te vragen. De tweede vraag zou hier bijvoorbeeld kunnen luiden: "Waarom trekken verschillende massa's elkaar dan aan volgens de wet van de zwaartekracht?" Nu durf ik te wedden dat het spelletje na ongeveer vijf keer eindigt met de uitleg: "Dat weten we niet."

Speel je dit spelletje met een wiskundige, dan gaat het heel anders. Ook in dit geval zal het zo zijn dat je na ongeveer vijf vragen klaar bent, maar nu eindig je niet met "Dat weten we niet" maar met "Dat hebben we samen zo afgesproken." Voordat je wiskunde kunt bedrijven, moet eerst duidelijk worden gemaakt waar je het precies met elkaar over wilt hebben. Is dat vastgesteld, dan kun je van daaruit op overzichtelijke wijze voortbouwen, zodat je altijd kunt aangeven waarom iets is zoals het is. Een wiskundige is iemand die met behulp van logisch redeneren uit wiskundige principes nieuwe wiskundige principes bedenkt. Met behulp van dergelijke principes kunnen wiskundige problemen worden opgelost.

Inzicht

Iedereen die wel eens naar een sportwedstrijd heeft gekeken kent ongetwijfeld het gevoel: dat wil ik ook kunnen. Net zo goed willen kunnen turnen, zwemmen of curlen kan een enorme drijfveer zijn om juist deze sport fanatiek te gaan beoefenen. Wanneer je uiteindelijk na hard trainen een wedstrijd of toernooi wint, komt er een fijn gevoel over je. Zulke ervaringen heb ik ook binnen de wiskunde. Vorig jaar raakte ik bekend met een puzzeltje Fiver (<http://thinks.com/java/fiver/fiver.htm>). Het puzzeltje bestaat uit een vierkant bord met knopjes die aan en uit kunnen. In het begin zijn alle knopjes uit. Het doel is om alle knopjes aan te krijgen. Dit kun je proberen te bereiken door op de knopjes te drukken. Als je op een knopje drukt, wisselt het knopje met al zijn directe burens van aan naar uit en andersom. Na een tijdje gepuzzeld te hebben met steeds weer verschillende bordgroottes vroeg ik mij af of de puzzel voor elk bord oplosbaar is. Het bleek toen dat ik daar met de wiskunde die ik had geleerd, een uitspraak over kon doen. Bij toeval las ik later in een

wiskundig tijdschrift een artikel van een wiskundige die zich over dezelfde vraag had gebogen en hetzelfde antwoord had gegeven als ik.

Het goede gevoel gaat voor mij verder dan dat. Het is natuurlijk altijd leuk wanneer je iets hebt geleerd waarmee je echt iets kan doen. Wanneer ik echter iets echt begrepen heb, iets volkomen heb doorgrond, dan krijg ik echt een kick. Wat ik dan in mijn hoofd heb opgebouwd is echt heel mooi. Het ontroert me.

Wiskunde is zeer toegankelijk

Omdat de wiskunde zich in een denkbeeldige wereld afspeelt, is het gemakkelijk om aan wiskundige problemen te werken. Het enig wat je in principe nodig hebt, is pen en papier. Dat is wel anders dan bij studies zoals sterrenkunde. Zonder de bouw van grote, dure telescopen zou de sterrenkunde niet zo'n hoog niveau hebben gehad, als zij nu heeft. Wiskundige problemen zijn ook snel gemaakt. Je hoeft maar op straat te lopen, voor een verkeerslicht te moeten stoppen en erg lang moeten wachten. Je kunt je dan afvragen of het verkeerslicht niet sneller op groen zou kunnen zonder dat er ongelukken gebeuren.

Doordat je niet zo heel veel nodig hebt om aan wiskundige problemen te werken zijn sommige wiskundige problemen zeer toegankelijk. Neem bijvoorbeeld het Vermoeden van Goldbach. Iedereen die het basisonderwijs doorlopen heeft, kan dit wiskundige probleem begrijpen. Het enige wat je ervoor moet kunnen is optellen en delen. Als je weet dat een priemgetal een getal is dat alleen deelbaar is door 1 en zichzelf, dan kun je het Goldbach Vermoeden ook formuleren: "Ieder even getal groter dan 2 is een som van twee priemgetallen."

Tot nu toe heeft niemand een bewijs voor het vermoeden kunnen vinden. In geen enkele andere wetenschap, vermoed ik, zijn open problemen uit te leggen in één zin zonder dat je een enorme hoeveelheid voorkennis nodig hebt.

Niet alleen

Omdat wiskunde zich afspeelt in een denkbeeldige wereld komt het vaak voor dat een wiskundige zich terugtrekt om over wiskundige zaken na te denken. Veelal doet hij dat alleen, omdat het zo moeilijk is twee dingen tegelijk te doen. Misschien wel na uren, dagen, weken of jaren eenzaam denken komt een wiskundige tot een prachtige ontdekking, die de moeite van het denken waard is. Daar eindigt het echter niet. Hoewel het er de schijn



Daan Wanrooy

van heeft dat je wiskunde in je eentje doet, is dat maar ten dele waar.

Voor mij is het erg belangrijk, dat er andere mensen zijn waar ik mee kan praten: over wiskunde, maar dat niet alleen, ook over echt belangrijke zaken. Niets is prettiger dan even uit je denkpatroon te worden geschud, even heel iets anders te doen. Daarom ben ik ook blij dat ik in Nijmegen ben gaan studeren. Hier ben ik een aantal mensen tegengekomen met wie ik graag omga, niet alleen in de wiskunde, ook daarbuiten. Het zijn die mensen die wiskunde tot iets echt moois maken.

"Prachtig!" mompelt hij en knikt met zijn hoofd bij ieder symbool dat zij op het bord schrijft. Ze draait zich om en kijkt hem aan. Dan bekijkt ze het bord van grotere afstand.

Ze doet weer een stap naar voren en laat haar gedachten nog eens gaan over de boodschap die is neergeschreven. Als in een gebed prevelt ze bij ieder teken een bijpassend woord, totdat ook zij genoeg neemt met wat er te lezen staat. Ze gooit het krijtje met een mooi boogje in zijn richting. "Dat", zegt ze, met een glimlach op haar gezicht, "is het geheim van de smid." "Wauw, hoe kwam je op dit idee, dat is echt geweldig!" Hij richt zich op, pakt de spons van de tafel en met enkele op en neer gaande beweging is van het kalkspoor niet veel meer over dan een waterige spiegel. "De volgende vraag is ook interessant!" zegt hij enthousiast en begint al met schrijven. Ze rent het lokaal uit. "Ik ga liever buiten frisbeeën."

J. Leo van Hemmen

Physik Department T35, Technische Universität München

85747 Garching bei München, Germany

lvh@ph.tum.de

Boekbespreking The collected works of P.A.M. Dirac, 1924–1948

On the verge of new mathematics

Het is honderd jaar geleden dat Paul Dirac werd geboren. Hij was een van de meest begaafde theoretische fysici die de twintigste eeuw gekend heeft. Dirac gaf een geheel relativistische beschrijving van het electron en voorspelde het bestaan van een positron. In 1933 wonnen Schrödinger en hij de Nobelprijs voor de fysica. Ook heeft hij wezenlijke bijdragen geleverd aan diverse gebieden binnen de wetkunde zoals de distributietheorie, spectraaltheorie en de theorie van partiële differentiaalvergelijkingen. Het eerste deel van zijn verzamelde werken is in 1995 verschenen en wordt besproken door Leo van Hemmen, hoogleraar in de theoretische (bio)fysica aan de Technische Universiteit München.

Paul Adrien Maurice Dirac was one of the most prominent theoretical physicists of the 20th century and had at the same time a deep and lasting influence on mathematics. He was born in Bristol on August 8, 1902. In 1918 he entered the University of Bristol and became a student of electrical engineering. A year later his father and the children gave up their Swiss nationality and became British citizens by naturalization. He graduated as an electrical engineer at Bristol in 1921 and two years later in mathematics, both times with 1st class honors. In October 1923 he became a postgraduate student at St. John's College, Cambridge, and began research in theoretical physics under the supervision of the widely respected R.H. Fowler at the Cavendish Laboratory.

Commutation relations

In May 1926 Dirac submitted a dissertation entitled *Quantum Mechanics* after Fowler in August 1925 had shown him galley proofs of Heisenberg's breakthrough in quantum mechanics [1]; see van der Waerden [2] for a translation of Heisenberg's paper and an excellent short account of the historical developments. December 1st of the same year Dirac published his first paper on the subject. Here he introduced the notion of 'commutator' $[q, p] = qp - pq$ for two operators q and p defined, as we would now say, on a suitable domain. The commutator has been a mainstay of quantum mechanics ever since. Furthermore, he coined the problem of how to represent commutation relations [3] such as $[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ where the q_i and p_j are finitely many self-adjoint operators with the p 's and q 's commuting among each other, δ_{ij} is the Kronecker delta, and $\hbar > 0$ is Planck's constant h divided by 2π . There is a simple solution in the one-dimensional case where $q := x$ is a coordinate, $p := (\hbar/i)d/dx$ the momentum (operator) belonging to it, and, evidently, $[q, p] = i\hbar$. In more than one dimension, its analogue directly gives an explicit representation of the commutation relations $[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$. One may then ask: what is it good for and is it the only one?

It is good for quantum mechanics, but what is quantum mechanics? Let us quote Dirac himself [4]: "We now make the further assumption that *linear operators correspond to the dynamical variables at a cer-*

tain time. By dynamical variables are meant quantities such as the coordinates and the components of velocity, momentum and angular momentum of particles, and functions of these quantities — in fact the variables in terms of which classical mechanics is built up. The new assumption requires that these quantities shall occur also in quantum mechanics, but with the striking difference that *they are now subject to an algebra in which the commutative axiom of multiplication does not hold.*” Instead the algebra is determined by prescribing commutators, for example, as indicated above. The next step consists of introducing a dynamics based on the classical Hamiltonian; an example will be given below. Once the dynamical variables and their dynamics have been specified, the dynamical system as such is fully determined. Until now quantum mechanics has successfully explained all phenomena at the atomic level.

Dirac simply posed the representation problem and indicated a solution. He never bothered about uniqueness and other intrinsically mathematical questions. It was von Neumann who showed as early as 1931 that *finitely* many $U_i(s) = \exp(isq_i)$, $V_j(t) = \exp(itp_j)$, satisfying $U_i(s)V_j(t) = \exp(i\hbar st\delta_{ij})V_j(t)U_i(s)$, are essentially unique in that they are the ones given above or a direct sum thereof. (Years later Rellich and Dixmier brought p and q back to the ‘floor’ where they came from [3].)

The idea behind the problem of finding a commutator representation is that quantum-mechanical commutators ought to be derivable from their classical counterparts, the Poisson brackets, by multiplying the latter by $i\hbar$; this rule proposed by Dirac is physically deep — and very elegant. Finally, in the very same 1926 paper referred to above, he indicated how time-dependent perturbation theory for a self-adjoint operator and Fermi-Dirac statistics are to be treated.

The Dirac equation

In 1928 he introduced the ‘Dirac equation’, the first relativistic formulation of the quantum mechanics of the electron. The paper introducing it makes for fascinating reading and utmost elegance [5]. Dirac eliminated his equation’s drawback of having negative energies without lower bound by a solution that led to the ‘anti-electron’, i.e., the positron, which should have the same mass as the electron but opposite charge; it was discovered by Anderson in 1933. The year before he was elected Fellow of the Royal Society — a bit late, if one realizes that our present formulation of quantum mechanics and Dirac’s unification of two different approaches, namely, the matrix mechanics due to Born, Heisenberg and Jordan and the Schrödinger equation with its wave function, was completely finished by then. Dirac and Schrödinger were jointly awarded the Nobel Prize for physics in 1933. A year earlier, in 1932, Dirac had been elected Lucasian Professor of Mathematics at the University of Cambridge. One of his predecessors in the chair was Newton. He held the position until his retirement in 1969, when he moved to Tallahassee, Florida. Here he died on October 20, 1984. He was also buried there. He was survived by his wife Margit Wigner, whom he had married in 1937; she was a sister of Eugene P. Wigner, a master of group theory [6] and another physics Nobel Prize winner. There is the rumor that, when a friend was visiting them shortly after their marriage, Dirac introduced his wife by saying “This is Wigner’s sister.”

Distribution theory

The influence of Dirac on the development of both physics and mathematics is immense. In addition to his research papers, his book *The principles of quantum mechanics* [4] had an impact that is hard to overestimate; its second edition published in 1935 was the most influential.

I now list a few of his main ideas. The *Dirac delta function* δ , which is not a function but a distribution, was the key theme in the prelude to the theory of distributions developed by Laurent Schwartz in the late forties [8]. Dirac defined his delta function $\delta(x - a)$ to have support $\{a\}$ and, for any continuous function f , satisfy the equality

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x - a) = f(a). \quad (1)$$

Furthermore, he noticed (see [4]) that it ‘appears whenever one differentiates a discontinuous function.’ One might argue that Heaviside also played a role but, in fact, it is a negligible one since he did his, no doubt innovative, work half a century earlier (1893–94) without anybody really worrying about its mathematical meaning [7]. Dirac’s masterful usage of the delta function changed the scene completely and established the need for a rigorous justification.

Spectral theory

The delta function also played a dominant role in Dirac’s spectral theory of ‘generalized’ eigenfunctions. Let us consider, for instance, the coordinate $q := x$ and the momentum $p := (\hbar/i)d/dx$ on the real line, two self-adjoint operators obeying $[q, p] = i\hbar$ on a suitable dense domain $[3, 10]$ in $L^2(\mathbf{R})$. It is plain that q has been given its spectral representation where it is ‘diagonal’. Its counterpart p , however, is not but its Fourier transform is. To wit, Dirac observed that plane waves $\exp(ikx)$ are its eigenfunctions, $p \exp(ikx) = \hbar k \exp(ikx)$. Mathematically, they are not since the Hilbert space $L^2(\mathbf{R})$ is too small to contain them. They are *generalized* eigenfunctions, a notion that can be made precise in terms of a Gelfand triple [9] consisting of a smaller space V in the self-dual Hilbert space $\mathcal{H}$ contained in a larger dual space $V^* : V \subset \mathcal{H} = \mathcal{H}^* \subset V^*$. It is the space V^* that contains generalized eigenfunctions such as $\exp(ikx)$. The argument that now comes is a specimen of Dirac’s mathematical elegance. The original idea was published as a two-page argument just before the second world war.

A complex Hilbert space $\mathcal{H}$ is a linear vector space that is complete with respect to the norm induced by the inner product $\langle \cdot | \cdot \rangle$. It is taken to be linear in the *right*-hand side. We will soon see that there is a good reason for doing so. Dirac called $\langle$ a ‘bra’ and $\rangle$ a ‘ket’ since the inner product $\langle \cdot | \cdot \rangle$ looks like a bracket. A good notation leads half the distance to a good result. Let then $\mathcal{H}$ be finite-dimensional and let Λ be a self-adjoint operator in $\mathcal{H}$. Its eigenvalues are called λ , the corresponding eigenvectors $|\lambda\rangle$ satisfy $\Lambda|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$, and they are normalized so that $\langle \lambda | \lambda' \rangle = \delta_{\lambda\lambda'}$. The key question Dirac wanted to answer was: what does the spectral representation of Λ look like? Using his bracket notation we readily see

$$\Lambda = \sum_{\lambda} |\lambda\rangle \lambda \langle \lambda| \quad (2)$$

where the sum is over all eigenvalues λ . The corresponding decomposition of unity, which is running under the name ‘completeness of the eigenfunctions’, is

$$\mathbf{1} = \sum_{\lambda} |\lambda\rangle \langle \lambda|. \quad (3)$$

The proof of the pudding consists in noting $(|\lambda\rangle \langle \lambda|)|x\rangle = \langle \lambda|x\rangle|\lambda\rangle$. To verify (2) it suffices to let it operate on each of the eigenvectors; the result is evidently true. Moreover, we have obtained a suggestive way of writing projection operators. For what follows we observe that $\mathbf{1}$ is a matrix with elements $\mathbf{1}_{ij} = \delta_{ij}$.

We now return to $L^2(\mathbf{R})$ and ask the same question as in (2) for the operator $p = (\hbar/i)d/dx$. Let

$$(\mathcal{F}f)(k) = \int \exp(ikx)f(x) dx / \sqrt{2\pi}$$

be the Fourier transform with inverse $\overline{\mathcal{F}}$ so that $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}$ is the identity operator. Dirac wrote

$$f(y) = (\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f)(y) = \int dx f(x) \left\{ \int \frac{dk}{2\pi} \exp[ik(x-y)] \right\} \quad (4)$$

and concluded

$$\int \frac{dk}{2\pi} \exp ik(x-y) = \delta(x-y) \quad (5)$$

so as to obtain the analogue of (3) — a relation that is evident in the context of distribution theory [8]. What do we gain? A lot, if, following Dirac, we consider a delta function as the ‘unit’ for multiplying functions in (a dense subset of) $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, which with the benefit of hindsight is taken to be a convolution algebra, interpret (5) as the analogue of (3), use Dirac’s notation,

$$\mathbf{1} = \int \frac{dk}{2\pi} |\exp(ikx)\rangle \langle \exp(iky)|, \quad (6)$$

write $|k\rangle := |\exp(ikx)\rangle$, and note

$$p = p\mathbf{1} = \int \frac{dk}{2\pi} |k\rangle \hbar k \langle k| \quad (7)$$

since $p \exp(ikx) = \hbar k \exp(ikx)$. That is to say, $\exp(ikx)$ is now a *generalized* eigenfunction and (7) corresponds to (2). Mathematically [3],

one could say that the Fourier transform is a diagonalizing transformation in that $\overline{\mathcal{F}}p\mathcal{F} = \hbar k$ but Eq. (7) is far more suggestive. It was Dirac’s genius that wrote down a suggestive notation and derived spectral representations that were given their mathematical justification [9] years later. Since Dirac was right, why complain?

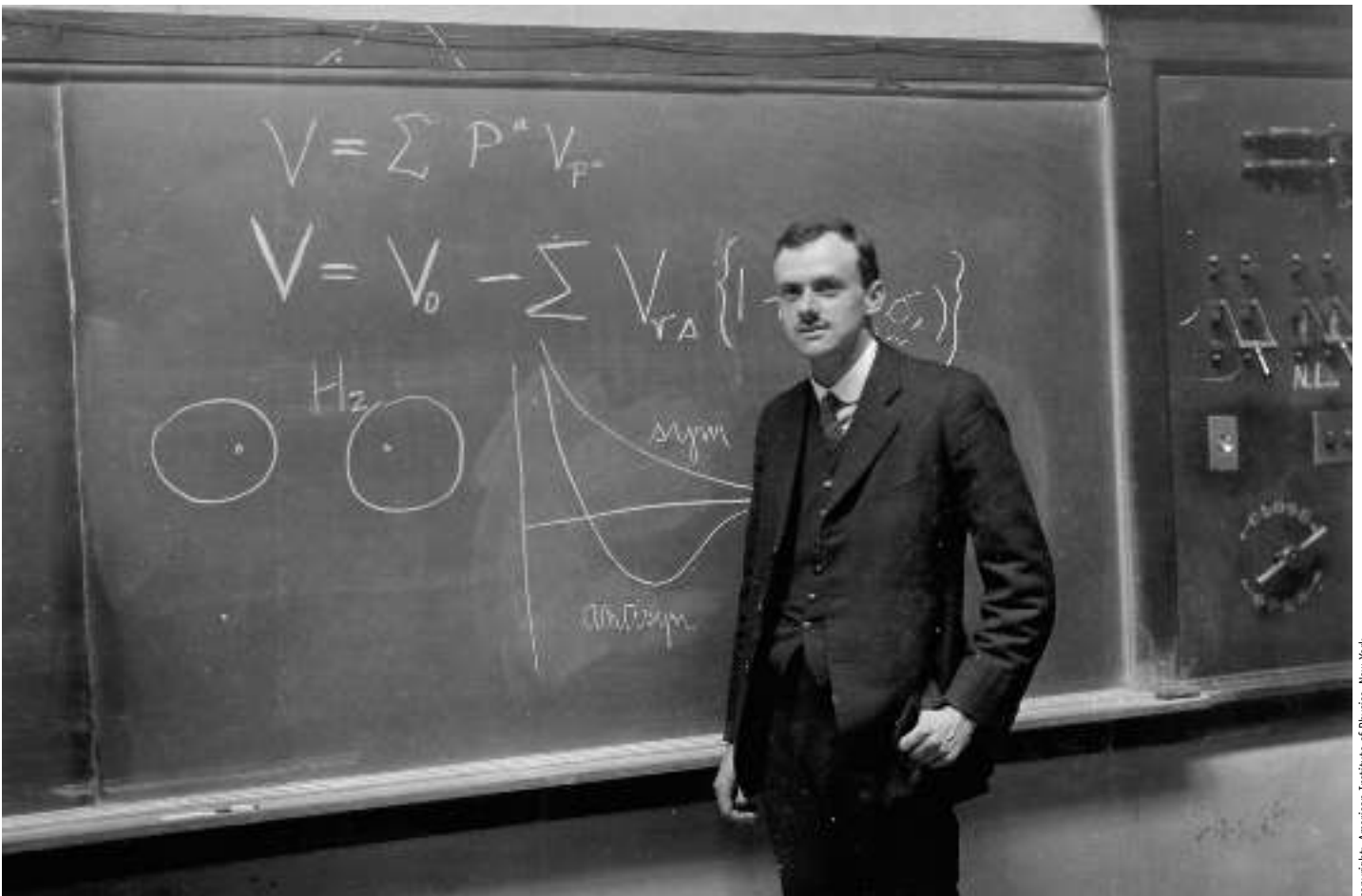
Feynman-Kac formula

Also for what is now called the Feynman-Kac formula, Dirac laid the foundations. We sketch the idea and refer to the literature [10–12] for technical details. Let us consider a particle with mass $m = 1$ in a regular external potential V defined on $\mathbf{R}^3$. The particle’s Hamilton function (‘energy’) is $(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2 + V$. Its quantum-mechanical equivalent is the Hamilton operator $H = -\hbar^2 \Delta/2 + V$ with the negative Laplacian $-\Delta$ stemming from the substitution $p_x \mapsto (\hbar/i)\partial_x$, etc. The time evolution of the particle’s wave function, belonging to $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^3)$, is given by the unitary operator $\exp(-itH/\hbar)$. The Trotter product formula [13] then tells us

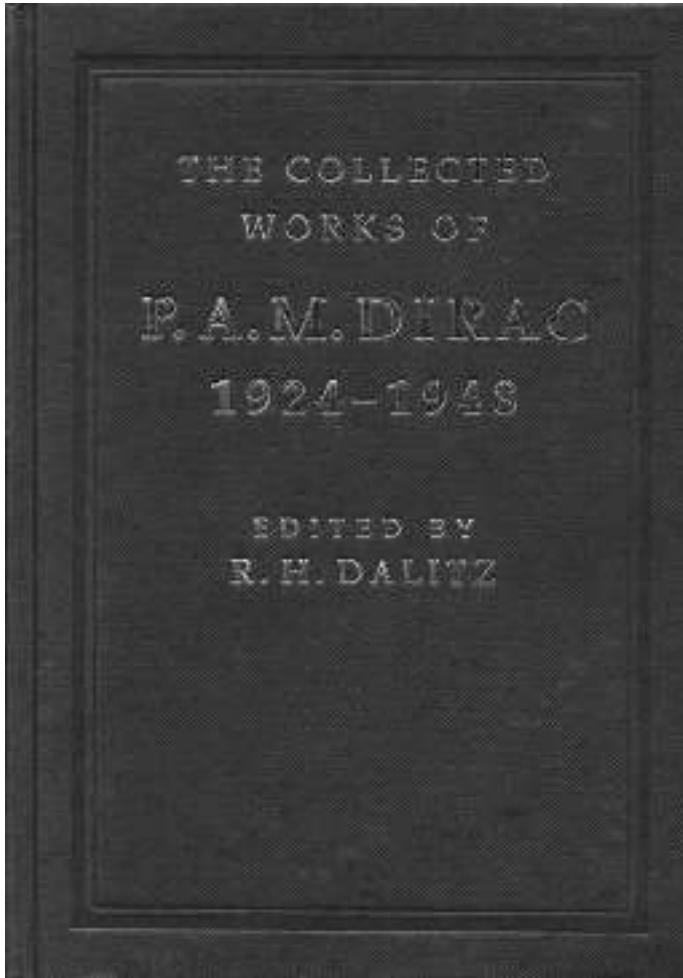
$$\exp(-itH/\hbar) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[e^{i(\hbar t/2n)\Delta} e^{-(it/n\hbar)V} \right]^n. \quad (8)$$

For the three-dimensional Laplacian there exists an explicit representation of the time evolution as an integral operator,

$$\left[e^{i(\hbar t/2n)\Delta} f \right](x) = \left(\frac{n}{2\pi i \hbar t} \right)^{3/2} \int dy \exp \left(\frac{in\|x-y\|^2}{2\hbar t} \right) f(y). \quad (9)$$



Paul Dirac in the thirties, explaining ‘exchange interaction’ in the quantum mechanics of the hydrogen molecule H_2 as a consequence of its two electrons being *identical* particles obeying Fermi-Dirac statistics; cf. §58 of the 4th edition of his classic [4] on quantum mechanics. The equation on the blackboard is to be Eq. (32) of the book, viz., $V = V_0 - (1/2) \sum_{r < s} V_{rs} \{1 + (\sigma_r, \sigma_s)\}$ with σ representing either particle’s spin, a vector, and (σ_r, σ_s) standing for their inner product. As it behooves a good theoretician, the prefactor 1/2 is missing on the blackboard.



Combining (8) and (9) we find

$$[\exp(-itH/\hbar)f](x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{n}{2\pi i \hbar t} \right)^{3n/2} \int \dots \int dx_1 \dots dx_n \right\} \exp[iS_n(x_0, x_1, \dots, x_n; t)/\hbar] f(x_n) \quad (10)$$

where the x_k are taken at times $t_k = kt/n$ and

$$S_n(x_0, x_1, \dots, x_n; t) := \sum_{i=1}^n \frac{t}{n} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\|x_i - x_{i-1}\|}{t/n} \right)^2 - V(x_i) \right]. \quad (11)$$

In view of the choice of the x_k and the limit $n \rightarrow \infty$, it is tempting to interpret $[\|x_i - x_{i-1}\|/(t/n)]^2$ as the velocity $v(t_i)^2$ squared, so that we are left with the *classical* kinetic energy $T = v^2/2$ and, hence, with the Lagrangian $L = T - V$ in the sum appearing in (11). As $n \rightarrow \infty$ we put $x_n := y$ and allow the sum to formally converge to the so-called action

$$S(x, y; t) = \int_0^t ds L(x, y; s) \quad (12)$$

for a path $\{x(s); 0 \leq s \leq t\}$ starting in $x_0 := x$ and ending in y .

Returning to (10) it is now even more tempting to interpret the expression between the curly brackets as a measure, to be called ‘ $d\omega$ ’ for the moment, write

$$[\exp(-itH/\hbar)f](x) = \int dy K(x, y; t) f(y) \quad (13)$$

with the kernel K being given by

$$K(x, y; t) = \int 'd\omega' \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t ds L(x, y, \omega; s)\right] \quad (14)$$

for paths ω starting at x at time $t = 0$ and ending at y at time t . This, in fact, is what Dirac wrote down as early as 1933 in a paper on *The Lagrangian in quantum mechanics* [14], long before Feynman published the results of his 1942 Ph.D. thesis in 1948 [15].

Feynman, who was aware of Dirac’s work, took the representation (14) serious and observed that in the classical limit, when quantum mechanics has to reduce to classical mechanics by taking $\hbar \rightarrow 0$, the principle of stationary phase leads to paths that are extrema of the action appearing in (14) and, hence, satisfy the Euler-Lagrange equations for this variational problem — as should be the case. In fact, though Feynman has been credited for this, Dirac [14] already said so ...

The consequences of the above circle of ideas have been very rich. Mark Kac wrote a fundamental paper [16] in 1951 showing that, if the Schrödinger equation is replaced by the diffusion equation, which simply means that it in (10) is replaced by t , then the heuristic ‘measure’ $d\omega$ as postulated in (14) can be interpreted as a proper one, the Wiener measure. To be precise, the Wiener paths are continuous but *nowhere* differentiable so that the classical, time-integrated, kinetic energy $\int_0^t ds T(x_0, x_n; s)$ makes no sense as such. Only the *combination* with the sum over paths leads to a Wiener measure μ_x over paths starting at x at time $t = 0$. What is then left from (13) is the Feynman-Kac formula

$$[\exp(-tH/\hbar)f](x) = \int d\mu_x(\omega) \exp\left[-\frac{1}{\hbar} \int_0^t ds V(\omega(s))\right] f(\omega(t)). \quad (15)$$

Its impact on mathematical physics as well as probability theory has been huge [11–12] and it is good to realize where it stems from: a short paper of Dirac in the *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion* — a consequence of his close relationship with Russian physicists, first and foremost Peter Kapitza, who was Royal Society Professor at Cambridge’s Trinity College but was not allowed by Stalin to return to England from a visit to Moscow in 1935. Also (14) is still as ‘Feynman path integral’ a focus of intense mathematical research [17] so as to make it mathematically well-defined. Once this goal would be achieved, the classical limit $\hbar \rightarrow 0$ of quantum time evolution, such as in (14), would be an interesting corollary.

Conclusion and outlook

Dirac’s ideas have been a steady source of inspiration. Not only have they led to new physics but also to novel mathematical research. A nice example is the question of whether an electron is to be considered as a point source or as a charge distribution of finite extent. His paper *Classical theory of radiating electrons* [18] was long considered to have “spectacular deficiencies” (editor Dalitz’ original statement) because of run-away solutions and the supposedly ad hoc asymptotic condition. Recent research [19] has shown that it can all be understood and makes good sense in the context of singular perturbation theory.

As for the collected works, more than half of them stemming from the ‘golden years’ 1925–1939, the printing is as it behooves Cambridge University Press. The price, however, is not. The editor has interpreted his task in a minimal way and provided hardly more than the six pages chronology of Dirac’s life. There is no comment, no evaluation, nothing — except for the tables of contents of the different editions of Dirac’s extraordinary book on quantum mechanics [4], the English versions of the prefaces to the Russian editions, a printed version of Dirac’s hand-written original of what became Chapter XI-a of the first (1932)

Russian edition, and a copy of Fowler's 1925 note to Dirac written on Heisenberg's galley proof [1]: "What do you think of this? I shall be glad to hear." In view of the results his invitation triggered, Fowler should have been more than glad. In passing I note that about 15 percent of Dirac's early papers have been published in the Proceedings of the Royal Society (London) through Fowler: the time between submission and publication was hardly ever more than a month. Who said that present-day letter journals were fast?

To compensate the defect of missing background information [20], Dirac's wonderful style often leads to unsurpassed clarity. Though he considered himself a theoretical physicist, his style is reminiscent of a mathematician's. Despite their clarity, both his mathematics and his physics would, in my opinion, have profited greatly from expert explanation and interpretation putting them into a perspective that incorporates present-day insight; Spohn's work [19] is just an indicative example.

In summary, I have touched upon a few of the main contribu-

tions of Dirac to mathematics: distributions, spectral theory, and the Feynman-Kac formula. In so doing, I have left aside, among other things, his impact on our present understanding of quantum mechanics, the vast mathematical domain devoted to 'Dirac operators' [21], that may [22–24] but need not be restricted to a manifold, and his novel idea of a 'magnetic monopole', which is closely related to the Chern class c_1 [25]. It is fair to expect that Dirac's collected works (1924–1948) will remain a source of inspiration for both mathematicians and physicists, be they active researchers or historians of science.

Acknowledgments

I am greatly indebted to Aernout van Enter, Harald Friedrich, and Erik Thomas for a critical reading of the manuscript and helpful comments. I also thank Cliff Taubes for reference [24].

The collected works of P.A.M. Dirac, 1924–1948, edited by R.H. Dalitz, Cambridge: Cambridge University Press 1995, 525 xxiv + 1310 p., prijs £175,- (hc), 526 ISBN 0-521-36231-8

References

- 1 W. Heisenberg, *Z. Phys.* **33** (1925) 879–893.
- 2 B.L. van der Waerden, *Sources of quantum mechanics*, Dover, New York, 1968.
- 3 C.R. Putnam, *Commutation properties of Hilbert space operators and related topics*, Springer, New York (1967) Ch. IV.
- 4 P.A.M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*, Oxford University Press, Oxford; the four editions were published in 1930, 1935, 1947, and 1958, respectively.
- 5 P. Goddard, Editor, *Paul Dirac: The man and his work*, Cambridge University Press, Cambridge (1998). See in particular Sir Michael Atiyah's essay on the Dirac equation.
- 6 E.P. Wigner, *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*, Vieweg, Braunschweig (1931); an English edition appeared in 1959 with Academic Press, New York.
- 7 J. Lützen, *Arch. Hist. Exact Sci.* **21** (1979) 161–200.
- 8 L. Schwartz, *Théorie des distributions, Tomes I & II*, Hermann, Paris (1950 & 1951).
- 9 I.M. Gelfand and N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions, Vol. 4*, Academic, New York (1964) Chapter I and, in particular, the appendix.
- 10 M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics II*, Academic, New York (1975) §X.6 & §X.11.
- 11 B. Simon, *Functional integration and quantum physics*, Academic, New York (1979).
- 12 G. Roepstorff, *Path integral approach to quantum physics: An introduction*, 2nd ed., Springer, New York (1996).
- 13 M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics I*, 2nd ed., Academic, New York (1980) §VIII.8.
- 14 P.A.M. Dirac, The Lagrangian in quantum mechanics, *Phys. Z. Sovjetunion* **3** (1933) 64–72. This paper has, of course, been reprinted in the book under review. It reappeared much earlier in *Selected Papers on Quantum Electrodynamics*, ed. by J. Schwinger, Dover, New York (1958) 312–320. There one also finds Feynman's paper [15] on pp. 321–341.
- 15 R.P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20** (1948) 321–341.
- 16 M. Kac, in: *Proc. 2nd Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob.* (1951) 189–215. See also his book *Probability and related topics in physical sciences*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1976) Ch. IV.
- 17 G.W. Johnson and M.L. Lapidus, *The Feynman integral and Feynman's operational calculus*, Oxford University Press, Oxford (2000).
- 18 P.A.M. Dirac, *Proc. R. Soc. (London) A* **167** (1938) 148–169.
- 19 H. Spohn, *Europhys. Lett.* **50** (2000) 287–292.
- 20 The book edited by Goddard [5], though excellent, does not cover the stunning breadth of Dirac's work in physics and mathematics.
- 21 B. Thaller, *The Dirac equation*, Springer, New York (1992).
- 22 H.B. Lawson and M.-L. Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton University Press, Princeton, NJ (1989).
- 23 J. Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, 2nd ed., Springer, Berlin (1998).
- 24 J.W. Morgan, *The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds*, Princeton University Press, Princeton, NJ (1996).
- 25 *Notices Amer. Math. Soc.* **45** (1998) 860–865.

Michael van Hartskamp

Venuslaan 405, 5632 HM Eindhoven

michael@vanhartskamp.com

T_EX-rubriek

BibT_EX

Het professioneel drukken van een wiskundige tekst is een gecompliceerde en kostbare aangelegenheid. Bovendien is de oplage vaak klein, bijvoorbeeld wanneer het een proefschrift betreft. Vroeger werd zo'n tekst getypt, waarna er met de hand de formules in werden geschreven. Het programma T_EX heeft een grote omwenteling in het zetten van wiskundeteksten veroorzaakt. Michael van Hartskamp, aan de Vrije Universiteit gepromoveerd als topoloog, legt deze keer uit hoe je met BibT_EX referenties zet en literatuurlijsten aanmaakt.

Na de vorige aflevering waarin we MikT_EX hebben weten te installeren, nu een kennismaking met een nuttig hulpmiddel. Eén van de vervelendste klusjes bij het schrijven van een artikel (of nog erger: bij het schrijven van een boek) is het maken van de literatuurlijst. Van alle referenties moeten de gegevens worden opgezocht en vervolgens moeten die accuraat worden overgenomen in het verse artikel. Daarbij moeten ze ook nog worden weergegeven volgens de regels van het tijdschrift of de uitgever: titel van een artikel moet cursief, titel van een boek weer recht, enzovoort.

Kopiëren en plakken uit een vorig artikel is natuurlijk aanlokkelijk, maar dan worden misschien ook gegevens opgenomen, waar dit artikel niet naar verwijst. Tot overmaat van ramp moeten we de hele lijst ook nog eens sorteren.

In L^AT_EX is de basis voor een oplossing van het literatuurverwijzing probleem al gelegd door het commando `\cite`. Maar de echte vereenvoudiging komt, al sinds jaar en dag, van het hulpprogramma BibT_EX.

BibT_EX is de automatiseerder van de literatuurlijst en dat zorgt voor minder ellende: het monnikenwerk is voorbij en de kans op inconsistenties in de vormgeving is vrij gering. BibT_EX is echter maar een dom programma. De enige manier om een goede literatuurlijst uit BibT_EX te krijgen is door er goede gegevens in te stoppen. En uitgerekend dat blijkt door het complexe formaat waarin BibT_EX zijn literatuurgegevens wenst weer niet eenvoudig. Ook daar zijn dan weer computerprogramma's voor ontwikkeld, maar de echt handige oplossing voor de wiskundige komt van de AMS. We komen daar later op terug.

BibT_EX werd geschreven door de aan Stanford verbonden Oren Patashnik. De huidige versie 0.99 van BibT_EX ontstond al in 1988. Patash-

nik deed toen de belofte voor versie 1.0, maar die is er nog altijd niet. Het is ook buitengewoon stil rondom BibT_EX en dus zullen we het met deze BibT_EX moeten doen.

Het grote voordeel van het nooit verschijnen van die nieuwe BibT_EX versie is dat vermoedelijk de hele wereld nu over versie 0.99 beschikt. Ook bij MikT_EX is ze inbegrepen. We gaan er dus maar vanuit dat het van het Internet halen en installeren van BibT_EX niet nodig zal zijn.

Ter zake. Eerste de 'gewone' manier waarop L^AT_EX referenties aanpakt. Op de plaats waar we willen verwijzen schrijven we,

```
Zie-\cite{Huyghens}
```

en dit wordt door L^AT_EX vervangen door de juiste referentie. Er staat dan nog slechts 'Zie [1]'. Om dat voor elkaar te krijgen eindigt de L^AT_EX-file met

```
\begin{thebibliography}{99}
\bibitem{Huyghens}
Chr.\ Huyghens, \emph{van Rekening in Spelen van
Geluck}, Epsilon Uitgaven, 1998
\end{thebibliography}
```

Dit laatste stuk is de literatuurlijst en bij dit laatste stuk komt BibT_EX ons te hulp. Het volstaat een file aan te maken, `mijnreferenties.bib`, waarin we alle referenties zetten. Aan het eind van de L^AT_EX-file plaatsen we nu een opdracht om er voor te zorgen dat deze file met referenties ook daadwerkelijk gebruikt wordt.

```
\bibliographystyle{alpha}
\bibliography{mijnreferenties}
```

BibT_EX zoekt zelf uit de file `mijnreferenties.bib` precies die artikelen waarnaar verwezen wordt en neemt alleen deze op in de literatuurlijst die het genereert. De vorm van de literatuurlijst wordt bepaald door de eerste regel. We komen hier op terug.

Omdat BibT_EX een apart programma is, moeten we na het runnen van L^AT_EX zelf BibT_EX opstarten om de literatuurlijst te genereren en vervolgens opnieuw L^AT_EX om ook in L^AT_EX de lijst te kunnen zien. En dan moeten we zelfs nog een keer L^AT_EX runnen om ook de juiste nummers

achter de \cite's te krijgen! Zo dus:

```
latex artikel.tex % verzamelt de gebruikte referenties
bibtex artikel % genereert de literatuurlijst
latex artikel.tex % toont de literatuurlijst
latex artikel.tex % maakt juiste verwijzingen
```

Tot nu toe ziet het er allemaal nog niet zo plezierig uit en voorlopig wordt het alleen nog maar erger. We moeten nu (in een, toegegeven, onplezierig formaat) BibTeX alles over elk item van onze literatuurlijst vertellen. Voor ons voorbeeld krijgen we dan:

```
@Book{Huyghens,
author = {Christiaan Huyghens},
title = {Van {R}ekeningh in {S}pelen van {G}eluck},
publisher = {Epsilon Uitgaven},
year = {1998},
volume = {40},
address = {Utrecht},
note = {vertaald en toegelicht door {W}im {K}leijne}
}
```

Er bestaan overigens specifieke computerprogramma's om de omgang met BibTeX-files te vereenvoudigen. Diverse middelen zijn te vinden op [3]. Ook de Unix-editor Emacs geeft speciale hulp bij het samenstellen van BibTeX-gegevens. Verderop geven we een tip die het meeste werk wegneemt.

Als we alle gegevens van alle artikelen, boeken, enzovoorts, waar naar we willen verwijzen bij elkaar hebben, zijn we klaar. We kunnen volledig automatisch een literatuurlijst maken die precies bevat waar we naar verwijzen en niet meer.

Deze methode heeft een belangrijk voordeel. Als we onverwacht een literatuurlijst moeten vormgeven volgens andere typografische regels, bijvoorbeeld die van de AMS, dan kunnen we volstaan met het in onze $\LaTeX$ -file opnemen van de volgende regel:

```
\bibliographystyle{amsplain}
```

In deze regel wordt namelijk aangegeven welke stijl door BibTeX moet worden gebruikt bij het vormgeven van de literatuurlijst. Meerdere uitgever van (wetenschappelijke) tijdschriften en boeken hebben zo'n 'bibliographystyle' gemaakt die precies de stijl van hun literatuurlijst kent. Zo kunnen we gemakkelijk ons artikel volledig op maat maken.

De stijl bevat ook regels voor de verwijzingen. Zo kan zonder moeite worden gewisseld tussen verwijzingen van de vorm [1], of [Huy98], of nog weer iets anders.

Keren we terug naar de invoer voor BibTeX, dan blijkt dat we als eerste gesteld worden voor de keuze van het soort publicatie. In ons voorbeeld kozen we voor 'Book', maar er zijn veel andere mogelijkheden: Article, InBook, InProceedings, PhdThesis, TechReport, Unpublished (vaak handig voor preprints), enzovoort.

Na de accolade volgt de code die we later zullen gebruiken in het \cite-commando in ons geval dus 'Huyghens'. Dan volgen regels met daarop de gegevens van de betreffende publicatie. Deze regels bevatten een sleutelwoord (author, title, ...) en de invulling daarvan. Per publicatiesoort gelden andere sleutelwoorden als verplicht. Zo is bij een artikel de naam van een tijdschrift verplicht.

Hoe (en zelfs of) de inhoud bij de sleutelwoorden wordt vormgegeven wordt bepaald door de stijl. In sommige stijlen kan het resultaat er dus zeer anders uitzien, dan in andere stijlen. Zo zijn er stijlen die in de 'title' alle hoofdletters (behalve de eerste) door kleine letters vervangen, terwijl andere stijlen dat niet doen. Vandaar dat we vrijwel



Figuur 1

altijd de hoofdletters moeten beschermen door er accolades om heen te zetten; een artikel over L^2 gaat anders al gauw over L^2 ...

Het interessantste om nader op in te gaan is de 'auteur'. Als er meerdere auteurs zijn, volstaat het hen allemaal op te sommen met alleen 'and' er tussen. Als het er te veel worden, kapt BibTeX de lijst bij het genereren af en voegt 'et al' toe.

BibTeX kan vrij goed raden wat iemands voornaam en achternaam is. Zelfs met tussenvoegsels kan BibTeX goed omgaan, mits deze met kleine letters geschreven zijn. Deze scheiding is met name van belang indien we een stukje van de achternaam willen laten terugkeren in het referentieblokje in de tekst: [van71] staat namelijk niet alleen slordig, het is ook weinig onderscheidend.

Het maken van dergelijke BibTeX files met alle gegevens van artikelen blijft een tijdrovende klus, met een grote kans op fouten. Daarom tot slot nog een handige tip, want dankzij het Internet kan het stukken gemakkelijker.

De American Mathematical Society heeft al haar reviews (vanaf 1940) op het web gezet. Deze zijn toegankelijk voor instituten met een abonnement. De elektronische vorm van de Mathematical Reviews, toegankelijk via [4], bevat bij elke recensie ook de gegevens in BibTeX-formaat. Deze hoeven dus alleen maar overgenomen te worden in de bib-file en zijn kant-en-klaar om te gebruiken (zie figuur 1).

Op deze twee bladzijden is de ruimte niet beschikbaar, om dieper op BibTeX in te gaan. Veel meer heb ik gepoogd aan te geven waarom BibTeX handig is, en wat je er mee kunt doen. Wie echt enthousiast geworden is en meer wil weten over hoe met BibTeX om te gaan kan terecht in appendix B van het $\LaTeX$ -boek van Lamport [2] of in hoofdstuk 13 van Goossens' $\LaTeX$ Companion [1]. BibTeX is overigens niet uitsluitend voor $\LaTeX$ geschikt, maar om het in bijvoorbeeld plain $\TeX$ te gebruiken vereist wat aanpassingen en handigheid.

Referenties

- 1 Michel Goossens, Frank Mittelbach en Alexander Samarin, *The $\LaTeX$ Companion*, Addison Wesley, 1994.
- 2 Leslie Lamport, *$\LaTeX$ 2 ϵ , a document preparation system*, Addison Wesley, 2nd ed., 1994.
- 3 <http://www.tci-software.com/bibdb/tools.html>
- 4 <http://e-math.ams.org>

Greg Kuperberg

Department of Mathematics

University of California, Davis, CA 95616

greg@math.ucdavis.edu

Online publishing

Scholarly mathematical communication at a crossroads

Met de komst van de elektronische media hebben wetenschappers veel meer mogelijkheden gekregen om hun werk in de buitenwereld te verspreiden. Het 'math arXiv', is een site waar fysici, wiskundigen en informatici artikelen kunnen plaatsen. Het uiteindelijke doel van de site is het verspreiden, het permanent bewaren en het volledig vrij beschikbaar maken van alle nieuwe onderzoeksliteratuur. Greg Kuperberg, professor aan de wiskundefaculteit van de Universiteit van California, Davis, is beheerder van de afdeling wiskunde van de site.

I agree with the decision to change the name of this series in *Nieuw Archief voor Wiskunde* from *Serials crisis* to *Online publishing*. I do not think that scholarly mathematical communication is plagued by a crisis, but rather that it is at a crossroads. Computers and the Internet in general, and tools such as TeX, MathSciNet, and the math arXiv in particular, have enormously improved mathematical communication. The question is whether, through leadership, we will greatly extend these gains, or, through complacency, we will only see marginal improvements. In my opinion, the math arXiv is a good foundation for further progress.

Like Krzysztof Apt [1], I certainly think that the mathematical research literature should be freely available. But although subscription prices are out of control, they are only one of several major shortcomings of the traditional journal system. The real impetus for change is that the old system is slow and disorganized. All of the reform to date was first adopted by non-paying researchers at privileged universities and institutes. So saving money is ultimately only an important afterthought of the enterprise.

I especially agree with Apt that the key to progress is volunteer work and public funds; they are what I mean by leadership. But it is not so easy to use these resources properly. We won't succeed by simply moving the journal system from the private sector to the public sector, and otherwise keeping it intact. (So I partly agree with Michiel Kolman's skepticism on this point [3].) In this essay I will discuss three topics in the hope of informing future decision-making: The current state of the mathematical literature, the math arXiv, and a proposal to reform peer review.

The status quo

Let us start with an idealization of the traditional system of scholarly communication. Mathematicians write uncertified, temporary preprints. They submit them to journals, which edit them, bless them with peer review, and then distribute them. In fact this system was created more by circumstance than by design, and it has always been supplemented by other venues of research literature such as letters, books, and lecture notes. Also, Zentralblatt and Math Reviews have long organized an otherwise hopelessly disorganized array of journals.

Electronic communication changed this picture in two important ways. First, it made the informal preprint layer of the literature vastly more efficient. Second, and more importantly, it created enormous new pressure to further organize the literature and accelerated a trend towards giantism. As useful as Math Reviews and Zentralblatt are on paper, they are far more useful on-line. The publishers are also agglomerating: Elsevier (which now owns Academic Press) and Springer both have large on-line libraries of mathematics papers that other publishers may never be

able to match. The preprint trend and the giantism trend together also led to the arXiv, which I will describe in more detail below.

But first I would like to comment on the specter of giantism. Naturally most people don't like monopolies. But working mathematicians want a universal digital library of mathematics, and there is no clear way to sustain two of them. The same forces that propel the software producer Microsoft, the internet provider America Online, and the internet bookshop Amazon.com are at play in this market. So the question is not whether there should be a centralized archive of the mathematical literature, but who should control it. I believe that a proprietary monopoly would be grossly against our interests, even if it were owned by a non-profit professional society. But with proper oversight, a non-proprietary archive could remain useful and free.

One interesting precedent for such an archive is CTAN, the Comprehensive TeX Archive Network. All TeX users, including commercial publishers, depend either directly or indirectly on CTAN.

The arXiv

The arXiv was created in 1991 by Paul Ginsparg as an e-mail and ftp-based (file transfer protocol-based) service in high-energy physics; it moved to the Web in 1993 [6]. Now maintained at Cornell, it was originally called hep-th, and it was for several years also called the Los Alamos archives and the xxx e-print archive. It does not claim copyright to its articles, and all access is free. It has some public oversight in that it has advisory committees in each of its disciplines, and is partly supported by the U.S. National Science Foundation (NSF). (I have heard publishing companies criticize the public 'subsidy' of the arXiv.

For the record, NSF award #0132355 is only \$320,000 per year. This is a negligible fraction of the tax dollars that are spent on math and physics journals.)

Authors usually submit articles to the arXiv directly, before submitting them to journals. The arXiv distributes new submissions across the web and blesses them as permanent at the end of each weekday. Submissions may be revised, but all versions of each article are numbered and old versions cannot be revoked. The arXiv is described in an article by Allyn Jackson [2]. Readers who want to know more should also browse it on the web. One convenient means for doing so is the Front for the Mathematics ArXiv [7] (figure 1).

The arXiv now has about 180,000 articles in physics, 20,000 in mathematics, and near-

ly 3,000 in computer science. In many areas of physics, it is already a universal library for the current literature. Many people hope that it will become just as important in mathematics. The success of the math arXiv to date is encouraging, but it will take many years for it to become universal. As the home page of the Front indicates, it is much more popular in some areas of mathematics (algebraic geometry, quantum algebra, geometric topology) than in others (applied mathematics, number theory). Finding ways to improve or further popularize the arXiv will help us reach the ultimate goal sooner.

Significantly, the arXiv upsets the traditional dichotomy between unpublished preprints and refereed publications. Since arXiv articles are both permanent and widely distributed, authors and readers take them

just as seriously as journal papers. (That is why arXiv documents are called articles, or e-prints, and not preprints.) For example, one of the most important papers in quantum algebra is a still-unpublished arXiv article by Maxim Kontsevich [4].

A few journals are also arXiv overlays, which means that they submit their published papers to the arXiv by proxy. One of the most successful overlay journals is *Geometry and Topology* [8]. Here again the distinction between preprints and publications blurs, since readers generally do not keep track of authors' versus journals' versions of papers.

Nonetheless the arXiv does not completely displace journals. They are no longer needed to typeset, distribute, or archive the mathematical literature, but they still perform the crucial function of peer review. This is why

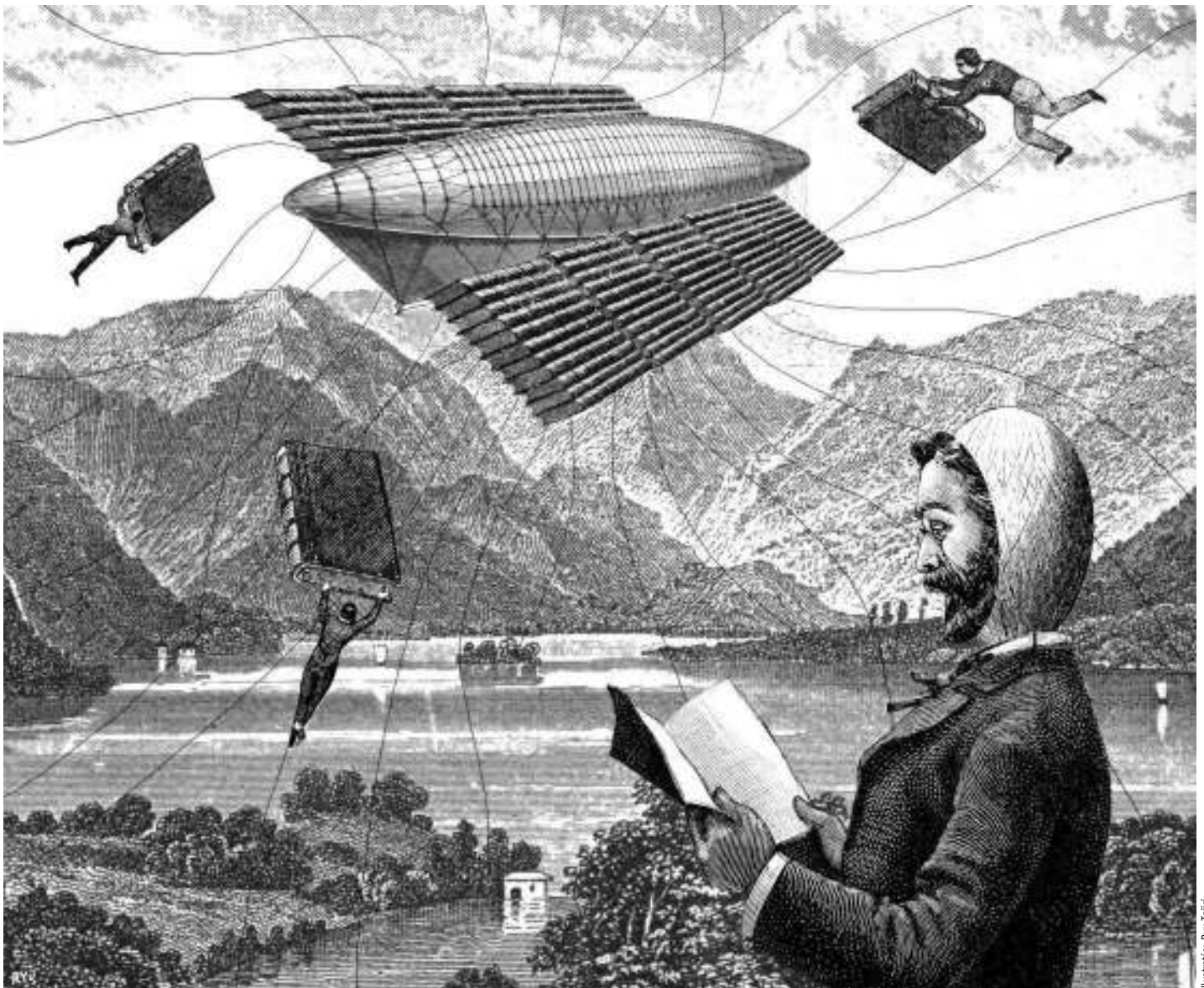




Figure 1

almost all arXiv articles are still submitted to journals or conference proceedings. Overlay journals also illustrate this point: While journal status does not distinctly affect the text of an arXiv article, the fact that an article has been accepted by a journal does still matter to readers, and even more to authors.

Serious peer review probably cannot fit directly into the arXiv. The arXiv is lightly moderated to screen out miscued and misclassified submissions (which is why submissions are not announced immediately), but this is a superficial effort compared to refereeing papers, or to reviewing them for Math Reviews or Zentralblatt. Rather, in heavily arXived areas of research, journals are a *de facto* second layer of the permanent literature, with the arXiv as the first layer. (Hence the term ‘overlay’.)

Peer review

In the idealized journal system, the diligent referee first checks the main results of a submitted paper. If they are correct, the referee and the editor then consider whether the results meet the journal’s standard. In practice the system is far from ideal. Referees have very little accountability (although some do an admirable job anyway). Many papers are accepted on the basis of name recognition or out of guilt — just because the referees sat on them for too long. Authors need not take no for an answer, because they can scout for journals that will publish them. Journal edi-

tors should serve as a second line of defense, but in practice they are only slightly more accountable than referees. (Again, some do an admirable job anyway.) In the end, readers do not know who refereed any given paper or why it was accepted. Because papers can only be published once, the system reduces peer review to simple binary approval.

In my opinion, Math Reviews and Zentralblatt are inherently more useful forms of peer review, because the reviews are not anonymous. Their publishers do not agree with me; by their own rules, reviewers are not required to fully referee papers. But some do so anyway. Many mathematicians know of notoriously mistaken papers that were inexplicably published. The community is often angry with the referees of such papers, but anonymity protects them from the readers rather than the authors.

Typically the Math Review sets the record straight. My favorite such case is the celebrated review by Gábor Fejes Tóth of Wu-Yi Hsiang’s inadequate proof of the Kepler sphere-packing conjecture [5]. Even in the usual case when both authors and referees do a good job, Math Reviews obviously inform readers more than any referee reports could, since the latter are confidential.

In the presence of the arXiv, it is relatively easy to reform journals so that they function much more like Math Reviews. If a journal is purely an arXiv overlay, then it need not take possession of its papers. So why should it wait for authors to submit to it? It could instead allow anyone to nominate (‘submit’) any arXiv article for review, whether or not it has been published elsewhere. Let us call such a review service an ‘open journal’. If an open journal reduces selection to its utilitarian minimum, it should add some other value for readers to take it seriously. It is therefore natural for open journals referees to write public, non-anonymous reports as Math Reviews does. (But reviewers who are not interested in a submission can reject it privately and anonymously.)

The open journal experiment has been tried before, both in connection with the arX-

iv and elsewhere. For example Quick Reviews [9] is a review service in quantum computation maintained by Daniel Gottesman; it is mostly but not exclusively arXiv-based. But existing experiments lack a crucial feature: They are not designed to substitute for journal names in the author’s list of publications. For this purpose an open journal should do three things. It should retain the trappings of a traditional journal, such as an editorial board, an on-line masthead, and a bibliographic citation style. It should also keep the author informed of the status of papers under review. And it should prod editors and reviewers to attend to submissions, as traditional journals do.

While many readers presume that referees check the results of papers, in practice editors would scare away their referees if they actually demanded this. This inconsistency is only tenable because refereeing is anonymous. My best idea to address the problem is to have the reviewers check one of three options:

1. I have checked the main results.
2. I do not doubt the main results.
3. I doubt the main results.

Some reviews might need to be co-signed to support option 1. Presumably option 3 would be rarely used.

It remains to be seen whether the open journal model will succeed. Or one might ask, who will pay people to do all of the work? I see two reasons to be cautiously optimistic. First, as we already know, publishers pay the mathematicians who manage, edit, and referee traditional journals very little or not at all. Most of the paid work for a traditional journal is for typesetting and distribution. Most of the incentive for the mathematicians involved is in credit for professional service. In principle this incentive could also sustain open journals. Second, I think that once the arXiv is sufficiently established in mathematics, journals will naturally evolve towards the open model. But I hope that, through leadership, we can arrive at the future earlier. $\leftarrow$

References

- 1 Krzysztof Apt, *Towards free access to scientific literature*, Nieuw Arch. Wisk. (5) **2** (2001), no. 3, 251–255.
- 2 Allyn Jackson, *From preprints to e-prints: the rise of electronic preprint servers in mathematics*, Notices Amer. Math. Soc. **49** (2002), no. 1, 23–32.
- 3 Michiel Kolman, *Free publishing?*, Nieuw Arch. Wisk. (5) **2** (2001), no. 4, 349–350.
- 4 Maxim Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds, I*, arXiv:q-alg/9709040.
- 5 Gábor Fejes Tóth, *Review of Hsiang, “On the sphere packing problem and the proof of Kepler’s conjecture”*, MR 95g:52032.
- 6 arXiv.org e-Print archive, <http://arxiv.org>
- 7 Front for the Mathematics arXiv, <http://front.math.ucdavis.edu>
- 8 *Geometry and Topology*, <http://www.maths.warwick.ac.uk/gt>
- 9 Quick Reviews, <http://www.quickreviews.org>

Danny Beckers

Universiteit Nijmegen, Mathematisch Instituut
Postbus 9010, 6500 GL Nijmegen
dbeckers@sci.kun.nl

Oud Archief

De sensatie een oud tijdschrift of een oude brief op te slaan kennen de meesten van ons wel. ‘Deden ze dat toen zo? Maakten ze zich daar toen druk over?’ Danny Beckers, aio in de geschiedenis van de wiskunde aan de KUN, zal in deze rubriek geregeld een titelblad, een mooi plaatje, een raar symbool, een bizarre ruzie uit de geschiedenis van het Wiskundig Genootschap aangrijpen terwille van de historische verlustiging.

Heden ten dage is de wiskundige nauwelijks nog een publieke figuur te noemen. Op televisie zie je met de regelmaat van de klok beursgoeroes, economen en directieleden; nooit een (persoon in de hoedanigheid van) wiskundige. Wiskunde komt in de meer populaire media niet aan bod, hetgeen erop duidt dat ‘de wiskundige’ geen herkenbare figuur is (althans niet in brede kringen).

Dat was in de zeventiende en achttiende eeuw anders. Veel wiskundigen waren toen tevens publieke figuren: Johan de Witt (1625–1672) en Willem Kersseboom (1691–1771) waren als bekende staatslieden ook wiskundig actief. Toch waren bij ‘het grote publiek’ niet deze mensen gezichtsbepalend voor de wiskunde. Voor velen was wiskunde vooral gerepresenteerd door de plaatselijke rekenmeester of ingenieur die zich omwille van zijn naamsbekendheid in publieke debatten begaf, om gunstig af te steken bij zijn collega’s — tevens concurrenten. Zij noemden zich, en stonden bekend als, *wiskonstenaars*.

Dit beeld van de wiskundige als publieke figuur werd door de schrijver Pieter Langendijk in 1715 gebruikt als de komische achtergrond voor een toneelstuk. Het stuk, *De wiskonstenaars of ’t gevluchte juffertje*, handelt over Izabel, die door haar voogd Anzelmus gedwongen wordt te trouwen met de wiskundige Raasbollius. Ze geeft aan haar voogd te kennen dat ze de liefde van haar leven in Am-

sterdam heeft ontmoet. Anzelmus sluit haar op, opdat ze zich niet aan deze jongeman zal verbinden. Izabel vlucht echter en ontmoet in het geniep haar geliefde in een herberg ergens tussen Utrecht en Amsterdam. Anzelmus en doktor Raasbollius ontdekken de vlucht, en reizen Izabel achterna. Ongelukkig genoeg willen zij in dezelfde herberg de nacht doorbrengen. In de herberg ontmoet doktor Raasbollius een collega, doktor Urinaal, en zij raken in discussie: Raasbollius is aanhanger van het geocentrische wereldbeeld, terwijl de Copernicaan Urinaal juist het heliocentrisch wereldbeeld belijdt.

Het ‘kluchtspel’ van Langendijk is op rijm gesteld waarbij de zinnen soms halverwege worden overgenomen door een ander karakter: de acteurs moesten dus goed op elkaar zijn ingespeeld. De beide wiskundigen treden samen op wanneer in de herberg een aantal mensen wil gaan eten. Zij komen ruzie makend binnen terwijl Anzelmus probeert de gemoederen enigszins te bedaren:

Raas. *’k Loof dat gy nooit geen sfeer of globus hebt gezien.*

Weet gy wat sinus is, oftangens? Uri. Ja. Raas. *Misschien.*

Den klootschen driehoek, vriend, weet jy die te berekenen?

Uri. *Jy weet van de Algebra zoo min als hemeltekenen!*

An. *Maar heeren, weest gerust.* Uri. *Die lompe botmuil praat*

Met my, en weet van triangel noch quadraat!

De argumenten van de beide heren worden breed uitgesponnen en geïllustreerd met het tekenen van cirkels op de vloer, waarbij de schalen en kannen van de gedekte tafel worden geplukt om dienst te doen als hemellichamen. Op de afbeelding staan de beide wiskundigen druk gesticulerend bij hun construc-

ties, terwijl de dames en heren toeschouwers zich aan de maaltijd zouden willen begeven.

Uiteindelijk loopt het allemaal goed af. De wiskundigen verzoenen zich en delen elkaars uitvindingen, waaronder een uit veren opgebouwde vestingmuur die iedere kanonskogel die erop wordt afgevuurd weer terug schiet richting aanvaller. De oom van Izabel ziet in dat Raasbollius geen geschikte huwelijkskandidaat is. Hij heeft inmiddels kennis gemaakt met de Rechtskundige die Izabel wil trouwen, en acht hem een geschiktere huwelijkskandidaat.

Overigens stelt Langendijk de Rechten niet boven de Wiskunde: de verloofde van Izabel is wiskundig ook enigszins onderlegd. In zijn voorwoord geeft de auteur bovendien aan dat het hem er om gaat de spot te drijven met de gewaande wijsheid van sommige rekenmeesters, niet om het vak zelf. Deze persiflage toont echter dat de regel “alle publiciteit is goede publiciteit” uitzonderingen kent. Gelukkig lezen middelbare scholieren geen Langendijk meer.

Literatuur

H.J. Zuidervaar, *Van ‘konstgenoten’ en hemelse fenomenen*, Rotterdam: Erasmus (1999)



Gravure naar een toneel uit *De wiskonstenaars* van Pieter Langendijk: de wiskundigen Raasbollius en Urinaal discussieren over de loop der planeten terwijl gasten en personeel hongerig toezien.

Boekbesprekingen

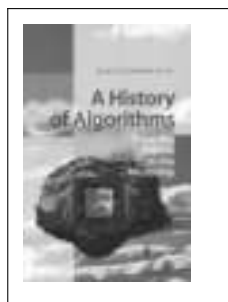
Book Reviews

Alle in de vijfde serie van het NAW verschenen boekbesprekingen zijn te vinden op onze webpagina.

Tevens staat daar een lijst met ter recensie aangeboden congresverslagen en eventueel andere boeken.

Indien u er prijs op stelt een van deze verslagen te bespreken, meld dit dan binnen een maand na verschijnen van dit nummer (bij voorkeur per e-mail) op onderstaand adres.

Eindredactie: Jaap Top
Redactieadres: Boekbesprekingen WG
Instituut voor wiskunde en informatica
Postbus 800, 9700 AV Groningen
Webpagina: <http://www.math.rug.nl/revwg/>
E-mail: revwg@math.rug.nl



C. Weeks

A history of algorithms. From the pebble to the microchip

Berlin: Springer-Verlag, 1999

524 p., prijs €50,10

ISBN 3-540-63369-3

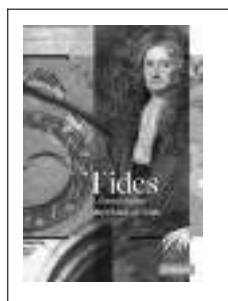
The purpose of this book is to present an historical introduction of various classical mathematical and numerical algorithms. Each chapter is organised around a number of texts describing the origins of an algorithm or a class of algorithms.

The following algorithms are discussed: elementary arithmetic operations (including devices to facilitate the practical execution of these operations, like the abacus), constructing magic squares, solving linear equations $ax = b$ where a and b are given integers, and where one tries to avoid the need to compute $a^{-1}b$, finding the greatest common divisor of two integers and for solving the related problem $ax + by = c$ in integers x and y , given the integers a, b, c , the calculation of π , solving the equation $f(x) = 0$ including specific examples like the extraction of square roots (Newton's and related methods), proving primality of an integer, and for finding the prime factors of a composite integer, the solution of systems of linear equations in an exact way, and in an approximate way, the construction of tables, and for interpolation, extrapolation, and approximation within these tables, quadrature, which means finding the area below a given curve (Chapter 11), approximating solutions of differential equations, approximation functions, and accelerating convergence, for instance when approximating an infinite sum.

The last chapter is of a more philosophical nature, treating algorithms in relation to decidability and computability questions. The book closes with a useful list of biographies of 210 principal characters appearing in this book. (It appears that the well-known Gauss-Seidel algorithm for the iterative solution of systems of linear equations should be called the Gauss-von Seidel algorithm.)

The book contains a wealth of historical material. For the algorithms covered, it is recommended as a valuable book of reference to the sources.

H.J.J. te Riele



D.E. Cartwright

Tides, a scientific history

Cambridge: Cambridge university press, 2000

292 p., prijs £52,50

ISBN 0-521-62145-3

Dit boek geeft een overzicht van de geschiedenis van het onderzoek naar getijden. Het begint met de ideeën van vroege culturen (Grieks, Indiaas, Chinees, Arabisch) en het eindigt met recente ontwikkelingen op het gebied van de remote sensing en de numerieke oplossing van de relevante vergelijkingen. De fysica van de getijden heeft veel grote filosofen, wiskundigen en natuurkun-

digen bezig gehouden: Aristoteles, Posidonius, Plinius de oudere, Albumasar (Abu Ma'shar), Galileo, Descartes, Bacon, Kepler, Newton, Bernoulli, Euler, Laplace, Whewell, Airy, Kelvin, G. Darwin (een zoon van de beroemde bioloog) en H. Lamb, om er een paar te noemen. Ook in de twintigste eeuw is er nog veel onderzoek gedaan. Dit heeft geleid tot een vrij compleet begrip van de oceaantijden. Een goed moment om terug te kijken dus.

Het boek beschrijft de ontwikkelingen van stap tot stap. Er zijn daarbij verschillende hoogtepunten. Om te beginnen het inzicht dat de aantrekkingskracht van de maan en de zon de oorzaak van het getij zijn (Newton). Aanvankelijk beschouwde men alleen de statische vervorming van de oceaan. Laplace was de eerste die de relevante vloeistofdynamische vergelijkingen formuleerde (met daarin reeds de zogeheten Coriolis-term — nog voordat Coriolis geboren was!) en een begin maakte met een studie van de dynamische respons. De beschrijving van het getij als geforceerde propagerende zwaartegolven in een oceaan met continenten heeft moeten wachten op de komst van supercomputers. Het is waarachtig geen simpel probleem, onder andere door de complexiteit van de forcering (ik heb mijn kennis van de hemeldynamica moeten oprispen), de zelfattractie, de complexe geometrie, het feit dat de gedwongen golven soms bijna resonant zijn, niet-lineaire effecten en de rol van de (turbulente) wrijving in de randzeeën. Het is interessant om te lezen hoe zowel voorspel- als waarneemmethoden door de eeuwen heen verbeterd zijn. Een recent hoogtepunt vormen de satellietwaarnemingen, met hoge precisie en groot ruimtelijk oplossend vermogen, die de theorie fraai bevestigd hebben.

De geschiedenis van het getijdenonderzoek is onderdeel van de geschiedenis van het natuurwetenschappelijk onderzoek. Het boek is daarom tevens een interessante case study van de ontwikkeling van de natuurwetenschap in het westen. Cartwright is een autoriteit op het gebied van het getijdenonderzoek. Zijn taal is over het algemeen helder en verzorgd. Het boek is fraai uitgevoerd, met reproducties van sleutelpagina's uit historische documenten, portretten, foto's en nuttige diagrammen. *G. Komen*

M. Hazewinkel

Handbook of Algebra I en II

Amsterdam: Elsevier, 1996/2000

915/878 p., prijs € 136,13/158,82

ISBN 0-4448-2212-7/0-4445-0396-X

Volgens de auteur van dit handboek, Michiel Hazewinkel, kan het aantal ideeën, beginselen en resultaten in de algebra gesteld worden tussen de 50000 en 200000. Vele hebben een naam, andere liggen (diep) verscholen in boeken of artikelen. Niettemin is gepoogd, zeer succesvol naar het lijkt, die zaken in referentie-indexen achterin elk deel van dit handboek te benoemen. Het Mathematics Subject Classification Scheme dat hier gehanteerd wordt, omvat de nummers 20, 19, 18, 17, 16, 15, 13, 12, 11, 08 en 06. Laat ik u vertellen wat u in de delen I en II zoal aantreft. Elke bijdrage is een in zichzelf gesloten stuk werk, voorzien van een (meestal uitvoerige) lijst met verwijzingen.

Deel I. De sectie Linear Algebra behandelt onder meer de Van der Waerden conjecture and applications; random matrices; voorts werk over matrix vergelijkingen en dito functies, alsmede factorisatie van matrix veeltermen. Na een bijdrage over ma-

troiden belanden we bij de sectie Fields, Galois Theory, Algebraic Number Theory: higher derivation Galois theory of inseparable field extensions, complete discrete valuation fields, Abelian class field theories en infinite Galois theory. Lidl en Niederreiter schrijven over Finite Fields and applications; Narkiewicz over Global class field theory en Van Tilborg over Finite Fields and error correcting codes. Na een uitstapje via Semi-rings, Near-rings en Near-Fields belanden we in categorieëentheorie. Zo schrijven MacLane en Moerdijk over Topos Theory en Street heeft een bijdrage over Categorical Structures. Dan volgen bijdragen van Carlson over Cohomology of groups en van Jarden over Homotopy and homological algebra, naast zaken als bijvoorbeeld cohomologie van categorieën, en dergelijke. Via Ideals and Modules van Lafon, wordt deel I besloten door werk van Cohn over Polynomial and power series rings and firs; simple and prime rings volgen, waarna Van den Essen schrijft over Algebraic microlocalisation et cetera. Tot slot vinden we Yamagata's verhaal over Frobenius rings.

Deel II begint met onderwerpen uit de categorieëentheorie: Scott schrijft over categories and computer science en Plotkin over algebra, categories and databases. Wat de homologische algebra betreft, Helemskii heeft het over homology for the algebras of analysis. Dan volgt Wagner met stable groups en Popescu met Artin approximation. In het hoofdstuk over associative rings and algebras schrijven drie auteurs onder meer over noncommutative invariant theory, distributive submodule lattices, serial modules and rings, separable algebras. Er wordt vervolgd met theorie van varieteiten over algebra's, ringen en groepen, waarna infinite dimensionale Lie superalgebras en nilpotent and solvable Lie algebras aan de beurt komen. Verder treffen we dan aan infinite Abelian groups, infinite-dimensional representations of quantum algebras door Klimyk. Deel II wordt besloten met onderwerpen uit abstracte en functionele representatietheorie; Bouc behandelt Burnside rings en Webb geeft u een guide to Mackey functors.

We kunnen hier gerust spreken van een zeer ambitieus project. Er is in de eerste twee delen van dit handboek een gigantische hoeveelheid informatie opgeslagen; heel veel was tot nu toe in betrekkelijk ontoegankelijke talen verwoord of slechts in tijdschriftartikelvorm raadpleegbaar. Het vereist moed en een gezonde dosis opportunisme om zo'n project te starten en door te zetten. In de voorliggende delen I en II zijn alle bijdragen van een uitstekend niveau en ze geven een beeld van de veelzijdigheid en breedte van de algebra. *R.W. van der Waall*



G. Puninski

Serial Rings

Dordrecht: Kluwer, 2001

226 p., prijs € 81,-

ISBN 0-7923-7187-9

Een moduul heet uni-seriëel als de verzameling deelmodulen totaal geordend wordt door de inclusierelatie. Een ring heet seriëel als hij als links (rechts) moduul directe som is van eindig veel uni-seriële modulen. Wanneer men in een seriële ring een maximaal

orthogonaal systeem van idempotenten kiest, dan kan men de elementen van de ring opvatten als blokmatrix's, waarbij de diagonaalblokken bij lokale uni-seriële ringen horen. Nu zat u waarschijnlijk niet te wachten op een boek over seriële ringen, maar men moet Puninski na geven dat hij veel over seriële ringen weet te vertellen. Alleen jammer dat steeds weer blijkt dat hij het Engels niet voldoende beheerst om zijn bedoeling correct over te brengen. Wat dacht u bijvoorbeeld van: 'For instance such a function never reaches its largest finite value.' Een grootste waarde die geen waarde is, dus. Dit zou de uitgever op moeten vangen, dacht ik. Kijk maar eens hoe keurig de London Math Society dat doet met Puninski's artikel over modeltheorie en ontbinding van seriële modulen. Hij construeert daar een 'pure projective module W without indecomposable decomposition over an exceptional uni-serial ring'. Je moet er maar lol in hebben. Bij Kluwer Academic Publishers (sic!) zien ze de taak van een uitgever kennelijk anders. Zelfs een spellingcontrole kon er niet van af. Of zouden ze denken dat 'dealins' een technische term is? *W. van der Kallen*

This book contains all of what you expect to appear naturally in a first study of complex tori. It gives a survey of known results (such as developed by Shimura in his influential 1963 paper), and it develops new results completing the picture of what we should know about complex tori. As a first encounter with this subject it is a nice guide. As a basic reference book for this topic it is valuable. *F. Oort*



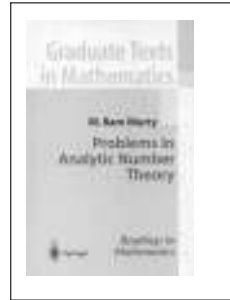
C. Birkenhake and H. Lange
Complex tori
(Progress in mathematics; 177)
Berlijn: Birkhäuser Verlag, 1999
272 p., prijs €60,33
ISBN 0-8176-4103-3

A complex torus is a connected, compact (commutative), complex Lie group. It can be obtained as factor space $\mathbb{C}^g / \Lambda$, where $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ is a lattice. An abelian variety over $\mathbb{C}$ is a complex torus, but conversely there are 'many' complex tori which are not algebraizable. In the study of intermediate Jacobians (Weil, Griffiths) complex tori appear naturally. Complex tori, their endomorphisms, families of complex tori and several other properties related with complex tori are studied in this book.

Here are some topics covered in the book. The Poincaré reducibility theorem, valid for abelian varieties, valid only for certain complex tori, is analyzed. The theory of 'Shafarevich extensions' as studied by Zarhin and the reviewer are of help. Non-degenerate complex tori (tori which have a line bundle giving a non-degenerate Hermitian form) are compared with polarized complex tori. The dimension of the 'largest quotient abelian variety' of a complex tori is equal to the transcendence degree of the field of meromorphic functions. Endomorphisms are studied parallel to work by Shimura on abelian varieties, PEL-type varieties; in this book we find a study of families of complex tori with given endomorphisms.

Several parts of the book compare properties of abelian varieties and aspects of complex tori. For example 'intermediate Jacobians' as defined by Griffiths and by Weil in general are not the same; these are discussed in Chapter 4: definitions are given, and examples show the difference.

As another example, one would like to have a family containing 'all complex tori' of a given dimension, and we would like to have moduli-interpretations as we use to have for polarized abelian varieties. These topics are amply discussed.



M. Ram Murty
Problems in analytic number theory
(Graduate texts in mathematics; 206)
New York: Springer-Verlag, 2001
452 p., prijs €50,11
ISBN 0-387-95143-1

Dit boek is een verzameling van ongeveer 500 opgaven (en uitwerkingen) in de analytische getaltheorie. In de eerste helft van het boek worden de opgaven geformuleerd, verdeeld over een aantal hoofdstukken. Ieder hoofdstuk begint met een beknopte behandeling van enige theorie. In de tweede helft van het boek vindt men de meestal volledige uitwerkingen van de opgaven. De titels van de verschillende hoofdstukken geven een goed beeld van wat aan de orde komt: aritmetische functies, priemenvrij rijen, de priemgetalstelling, contourintegratie, functionaalvergelijkingen, Hadamard producten, expliciete formules, de Selberg klasse, zeefmethoden en p -adische methoden. De Selberg klasse is pas in de tachtiger jaren van de vorige eeuw ingevoerd door Atle Selberg en staat momenteel erg in de belangstelling van onderzoekers in de analytische getaltheorie. De behandeling hiervan in een inleidend boek als dit is dus een beetje verrassend (maar welkom!). Extra opgave: hoeveel plustekens moeten op bladzijden 20 en 21 een minteken zijn en hoeveel minnen een plus?

De auteur heeft (samen met Jody Esmonde) ook een opgavenboek als dit geschreven voor de algebraïsche getaltheorie (besproken in NAW 5/2 nr.1). Ik denk dat de auteur er zeker in geslaagd is twee boeken te schrijven die zeer geschikt zijn voor zelfstudie. *P. Moree*



H. Niederreiter en C.P. Xing
Rational points on curves over finite fields
(London mathematical society lecture note; 285)
Cambridge: Cambridge university press, 2001
245 p., prijs £27,95
ISBN 0-521-66543-4

Een algebraïsche kromme over een eindig lichaam heeft maar eindig veel punten over dat lichaam. Hoeveel kunnen dat er zijn? De belangrijkste stelling over dit probleem is het analogon van de Riemannhypothese, bewezen door André Weil in 1948. Deze stelling zegt dat als een (gladde, meetkundig irreducibele, projectie-

ve) kromme C over een eindig lichaam F_q van q elementen precies m punten heeft met coördinaten in F_q , de volgende ongelijkheden moeten gelden

$$q + 1 - 2g\sqrt{q} \leq m \leq q + 1 + 2g\sqrt{q}.$$

Hier is g het *geslacht* van de kromme C . Het is een maat voor de 'ingewikkeldheid' van C , te vergelijken met de graad van een vlakke kromme. Men past deze stelling vaak toe op een vaste kromme, zoals bijvoorbeeld $X^n + Y^n = Z^n$, die men dan reduceert modulo variërende priemenvrij q . In het genoemde voorbeeld geldt is $g = (n-1)(n-2)/2$, en de ongelijkheden van Weil zeggen dan dat het aantal punten van de kromme modulo q gelijk is aan een hoofdterm $q+1$ en een restterm die op z^n hoogst $2g\sqrt{q} = (n-1)(n-2)\sqrt{q}$ is. Voor grote q is de restterm veel kleiner dan de hoofdterm.

Tot 1980 leek Weil's stelling het laatste woord over deze materie te zijn. In dat jaar construeerde V.D. Goppa zekere codes met behulp van algebraïsche krommen over eindige lichamen F_q . Het lichaam F_q speelt de rol van het *alfabet* van de code. De codes, die tegenwoordig Goppa-codes heten, zijn erg 'goed' wanneer de kromme veel punten heeft in verhouding tot het geslacht. De constructie is erg flexibel. Vrijwel onmiddellijk ontcrachten M. Tsfasman, S. Vlăduţ en T. Zink een algemeen geaccepteerd vermoeden in de coderingstheorie met behulp van Goppa's codes. Deze ontwikkelingen hernieuwde de belangstelling voor krommen over eindige lichamen. Maar het gezichtspunt is veranderd: in plaats van een vaste kromme C die men modulo vele en dus ook grote priemenvrij q bestudeert, is men nu geïnteresseerd in een *vast* eindig lichaam F_q en variërende krommen C . In het licht van de toepassingen in de coderingstheorie gaat het dan vooral om krommen die veel punten hebben met betrekking tot hun geslacht. Voor de coderingstheorie zijn krommen over het lichaam F_2 van twee elementen het interessantst.

Enigszins verrassend bleek dat de roemrijke stelling van André Weil helemaal niet scherp is vanuit dit gezichtspunt. Als g groot is met betrekking tot q , worden in de ongelijkheden van Weil de rollen van hoofdterm $q+1$ en restterm $2g\sqrt{q}$ omgedraaid! Daarom is de ondergrens niet interessant meer. Die kan eenvoudig met '0' verbeterd worden. Als we Weil's ongelijkheid door g delen en dan g naar oneindig laten gaan vinden we de bovengrens

$$\limsup_{g \rightarrow \infty} \frac{m}{g} \leq 2\sqrt{q}.$$

En deze is ook niet scherp. Men kan namelijk bewijzen

$$\limsup_{g \rightarrow \infty} \frac{m}{g} \leq \sqrt{q} - 1.$$

In het interessantste geval $q = 2$ is dit een spectaculaire verbetering, want $\sqrt{q} - 1 = 0.414\dots$ is bijna zeven keer zo klein als $2\sqrt{q} = 2.82\dots$. Het belangrijkste ingrediënt in het bewijs van de laatste ongelijkheid is overigens toch weer Weil's stelling.

Wanneer q een kwadraat is, is de nieuwe ongelijkheid scherp: er bestaan krommen over F_q van willekeurig groot geslacht g die heel veel, namelijk ongeveer $m = (\sqrt{q} - 1)g$ punten hebben. Maar voor elke andere q is dit niet bekend. Om de ongelijkheid in die gevallen te testen, is het interessant om krommen te construeren over eindige lichamen die veel punten hebben in verhouding tot hun geslacht. Daar gaat het boek van Niederreiter en Xing over.

De meeste van hun constructies zijn abelse overdekkingen van bekende krommen. Ze bepalen het geslacht en het aantal punten met behulp van klassenlichamentheorie. Het boek bevat de beste en meest recente resultaten van de auteurs en anderen aangaande dit probleem. De auteurs bewijzen bijvoorbeeld voor krommen over F_2 dat geldt

$$\limsup_{g \rightarrow \infty} \frac{m}{g} \geq \frac{81}{317} = 0.255\dots$$

Dat is nog altijd ver van de bovengrens $0.414\dots$, maar toch een stuk groter dan de ondergrens 0.

Dit boek is bepaald geen leerboek. Het is eerder een bundeling van de talloze artikelen die de auteurs sinds 1995 over dit onderwerp hebben gepubliceerd.

R. Schoof

J.E. Cremona

Algorithms for modular elliptic curves (2nd ed.)

Cambridge: Cambridge university press, 1997

376 p., prijs \$ 45,-

ISBN 0-521-59820-6

Dit is de tweede editie van Cremona's tabellenboek. Nu we weten dankzij werk van Breuil, Conrad, Diamond en Taylor, voortbordurend op werk van Wiles en Taylor, dat elke rationale elliptische kromme modulaair is, bevat dit naslagwerk de lijst van alle rationale elliptische krommen met conductor kleiner dan 1000.

Omissies en fouten van de eerste editie zijn weggepoetst. De auteur houdt op www.maths.nottingham.ac.uk/personal/jec een webpagina bij waar men zich op de hoogte kan houden van de ontwikkelingen.

J. Huisman

Stephan C. Carlson

Topology of surfaces, knots, and manifolds

New York: John Wiley & Sons, 2001

157 p., prijs €36,40

ISBN 0-471-35544-5

In dit leuke boek worden een aantal aansprekende stellingen uit de meetkunde en de topologie behandeld. Het boek is geschikt voor de student in de eerste jaren van zijn/haar studie, en voor wie na een studie wiskunde onder *topologie* technische verhalen over T_1 en dergelijke verstaat. Wellicht zijn die technische verhalen vaak nodig als voorkennis voor andere disciplines maar het is toch jammer dat veel mensen niet op de hoogte zullen zijn van het in dit boek behandelde materiaal, al was het maar omdat veel ervan aan niet-wiskundigen uitgelegd kan worden.

De opbouw van het boek is: algemene introductie, klassificatie van compacte Riemannse 2-variëteiten, reguliere veelvlakken en betegelingen, grafentheorie, knopentheorie. Vanzelfsprekend wordt met name over deze laatste drie onderwerpen niet meer dan een rudimentaire introductie gegeven. Maar na het lezen kan eenieder meepraten over de bruggen van Königsberg en het vierkleuren probleem, om maar eens wat te noemen.

Nadeel van de populariserende stijl van schrijven is het gebrek aan precisie, waardoor bijvoorbeeld de definitie van *compact gesloten en begrensd* wordt en de auteur aparte definities van 2-dimensionale en 3-dimensionale variëteiten moet vermelden, en ook blijven wel erg veel stellingen onbewezen. Anderzijds

heeft de auteur ook geen alternatief gezien zijn ambities: laagdrempelig en een presentatie van mooie resultaten.

Al met al kan ik eenieder aanraden dit boek eens door te lezen, niet zozeer omdat deze stellingen aan veel andere wiskunde ten grondslag liggen — dan zou het meer voor de hand liggen de aan het onderwerp gerelateerde algebraïsche topologie te bestuderen — maar meer omdat dit boek eens te meer aantoonst hoe leuk wiskunde eigenlijk is.

M. van Manen



K. E. Gustafson and D.K.M. Rao
Numerical range, the field of values of linear operators and matrices

Berlijn: Springer-Verlag, 1997

189 p., prijs €28,63

ISBN 0-387-94835-X

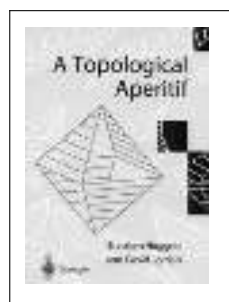
Functionaalanalytici noemen het *numerical range*, matrixmensen *field of values*. De oorspronkelijk Duitse naam *Wertvorrat* leeft nog slechts voort in de notatie $W(T)$. Hierin is T een begrensde lineaire operator op een complexe separabele Hilbertruimte H . De *numerical range* van T is gedefinieerd als $W(T) = \{ \langle Tx, x \rangle \mid x \in H, \|x\| = 1 \}$. Het blijkt dat $W(T)$ convex is en dat zijn afsluiting het spectrum van de operator T bevat. Deze twee fundamentele eigenschappen komen voor de niet-specialist op verrassende wijze tot uiting in het eerste lemma van het boek, waarin bewezen wordt dat de *numerical range* van een 2×2 -matrix, een (eventueel ontaard) ellipsvormig gebied is in het complexe vlak, waarvan de brandpunten gevormd worden door de eigenwaarden van T . De *numerical range* geeft aanleiding tot de *numerical radius* $w(T)$, gedefinieerd als het supremum der moduli: $w(T) = \sup_{\lambda \in W(T)} |\lambda|$, en die equivalent is met de gebruikelijke operatornorm, dank zij de eigenschap $w(T) \leq \|T\| \leq 2w(T)$. Als $w(T) = \|T\|$ (men noemt T dan een *normaloïde* operator) dan vallen deze begrippen ook samen met de spectraalstraal van T . Dit is het geval voor elke *normale* operator, waarvoor ook geldt dat de afsluiting van zijn *numerical range* samenvalt met het convex omhulsel van zijn spectrum (hierdoor wordt de klasse van *convexoïde* operatoren gekarakteriseerd). Deze en vele andere mooie fundamentele eigenschappen staan keurig bewezen in het eerste hoofdstuk. Elke paragraaf hierin is voorzien van *Notes and References* en het hoofdstuk als geheel ook nog eens van *Endnotes*. Zo wordt — zonder dat de loop van het betoog telkens wordt onderbroken — in ruime mate informatie gegeven over alternatieve bewijzen, historische ontwikkelingen, bijzondere gevallen en mogelijkheden tot generalisatie.

De rest van het boek is gewijd aan meer geavanceerde onderwerpen. Hoofdstuk 2, *Mapping Theorems*, handelt voornamelijk over het verband tussen de *numerical range/radius* van een operator T en die van $f(T)$, alsmede over de *numerical range* van producten van operatoren. De intrigerende titel *Operator Trigonometry* van Hoofdstuk 3 duidt op een vakgebied, dat zich ontwikkeld heeft rond het begrip *hoek* van een operator, en waaraan de auteurs belangrijke bijdragen hebben geleverd. Hierin spelen de begrippen *anti-eigenwaarde* en *anti-eigenvector* een rol. Het voorvoegsel *anti* geeft aan dat hierbij gekeken wordt naar *critical turn-*

ings, in tegenstelling tot de gebruikelijke *eigen*-begrippen waarbij juist geen verandering van richting optreedt. De auteurs doen daarom de suggestie om (naar het Duits) te spreken van *winkel-value* en *winkelvector*, hetgeen ook in Scandinavische talen de juiste suggestie schijnt te wekken, maar ze zijn zich er wel van bewust dat dit in het Nederlands iets anders ligt. Het belangrijkste argument om de *numerical range* te beschouwen in samenhang met het onderwerp van hoofdstuk 4, *Numerical Analysis*, is zijn stabiliteit onder kleine perturbaties, dit in tegenstelling tot het gebrek aan stabiliteit van het spectrum. Er worden onder andere enkele resultaten gegeven voor de convergentiesnelheid van optimalisatie-algoritmen in termen van operator-trigonometrische begrippen. Hoofdstuk 5 handelt over het eindig dimensionale geval, in het bijzonder over Hadamard-producten en over enkele generalisaties van de *numerical range*. Hoofdstuk 6 is gewijd aan drie speciale klassen van operatoren: de reeds genoemde normaloïde en convexoïde operatoren en de spectraloïde operatoren, waarbij de spectraalstraal en de *numerical radius* niet samenvallen.

De aanpak van paragraafsgewijs gegroepeerde noten en literatuurverwijzingen wordt in het gehele boek volgehouden, aan het eind gecompleteerd met een volledige bibliografie en een index. Een informatief boek over een onderwerp dat volop in ontwikkeling is.

H. Hoogland



Stephen Huggett and David Jordan
A topological aperitif

London: Springer-Verlag, 2001

166 p., prijs €25,51

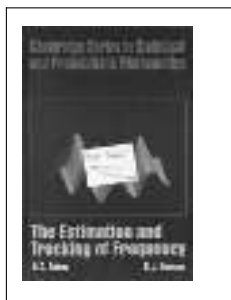
ISBN 1-85233-377-4

Zeg tegen een kennis dat je topoloog bent en, nadat je uitgelegd hebt dat je geen topograaf bent, de geijkte reactie is: "Wat is dat?". Op dat soort momenten moet ik de waarheid (behoorlijk) geweld aandoen want ik doe *algemene en verzameling-theoretische topologie* en weet nog steeds geen smeug verhaal over ultrafilters te vertellen. Ik beschrijf dan iets wat ik niet doe, namelijk rubbermeetkunde, knopentheorie of het aloude knippen en plakken. Dat laatste nu is waar het onderhavige boek over gaat: de topologie van oppervlakken die door het aan elkaar lijmen van driehoeken, vierkanten enzovoort gemaakt kunnen worden.

De schrijvers hebben hierin een goede mix van intuïtie gevonden; iedere invariant wordt goed geïllustreerd en vervolgens onderbouwd, dat wil zeggen dat de invariantie onder homeomorfismen netjes wordt aangetoond. De hoofdmoot van het boek is een bewijs van de classificatiestelling voor compacte oppervlakken: oriënteerbaarheid plus Euler karakteristiek leggen het oppervlak vast. Dit is geen slechte kennismaking met de meetkundige topologie: veel is aanschouwelijk te maken maar voor sommige (niet-oriënteerbare) zaken (Kleinse fles, kruismutsen) is een iets formelere benadering nodig. Op een paar technische punten na — de trianguleerbaarheid van oppervlakken bijvoorbeeld — is het bewijs volledig. Een hoofdstuk over het windingsgetal en appendices over continuïteit, knopen en wat geschiedenis besluiten het boek.

Ik denk niet dat ik de kennis uit het begin dit boekje in de hand zal drukken, tenzij die kennis al wat wiskunde kent en bereid is bij het lezen heel wat kladpapier vol te klieren. Als ik algebraïsche of combinatorische topologie in het curriculum had zou ik dit boek gebruiken voor een cursus van een kwartaal in de propedeuse, als lokkertje (of inderdaad, een aperitief) voor de hogerejaars colleges.

K. P. Hart



B.G. Quinn and E.J. Hannan

The estimation and tracking of frequency

(Cambridge series in statistical and probabilistic mathematics)

Cambridge: Cambridge university press, 2001

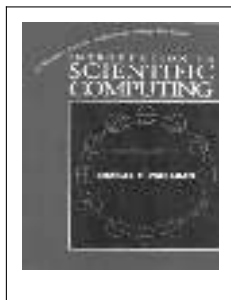
266 p., prijs €67,72

ISBN 0-521-80446-9

Many electronic and acoustic signals can be modeled as sums of sinusoids and noise. However, the amplitudes, phases and frequencies of the sinusoids are often unknown and must be estimated in order to characterize the periodicity or near-periodicity of a signal and consequently to identify its source. This book presents and analyses several practical techniques used for such estimation. The problem of tracking slow frequency changes over time of a very noisy sinusoid is also considered. Rigorous analyses are presented via asymptotic or large sample theory, together with physical insight. The book focuses on achieving extremely accurate estimates when the signal to noise ratio is low but the sample size is large. Each chapter begins with a detailed overview, and many applications are given. The book is intended as an introduction and reference for researchers analyzing such signals.

Quinn en Hannan are both experts in the field. The latter started the book, but after completing drafts of Chapter 2 and 3 he past away and Quinn completed the book. Sometimes this rises to an odd mixture of styles, however they show complete technical mastery of their subject and of the mathematical methods required. The book contains a considerable amount which is new, both conceptually and in a mathematical tightening-up of earlier work and gives a full and modern account of its subject. It ends with an Appendix with Matlab code for the estimation techniques.

R.M. Aarts



C. F. van Loan

Introduction to scientific computing; a matrix-vector approach using matlab

Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2000

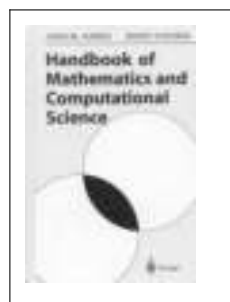
367 p., prijs \$ 60,-

ISBN 0-13-949157-0

Dit boek is een herziene versie van de eerdere uitgave van enkele jaren terug en behandelt onderwerpen uit de numerieke wiskunde aan de hand van het pakket Matlab. In tegenstelling tot de traditionele inleidende boeken in de numerieke analyse brengt

deze uitgave een nieuwe, frisse en moderne kijk op het vakgebied. Het boek bevat een fraaie afwisseling van theorie en experiment, alhoewel de echte analyse van de theoretische resultaten ontbreekt. Positief is te noemen dat rekentijden en speed-ups (een deelhoofdstuk is zelfs gewijd aan parallelle berekeningen; althans een inleiding daarop) worden aangegeven en de verschillende technieken met elkaar worden vergeleken. Verder wordt er veel aandacht besteed aan achtergrondinformatie over de Matlab-routines (de te gebruiken M-files kunnen worden gedownload van internet). Daarnaast wordt een grote hoeveelheid aan M-files gepresenteerd en uitgelegd aan de hand van numerieke voorbeelden. Ter oefening levert de auteur een scala aan opgaven in de vorm van Matlab-experimenten. Enkele minpuntjes die genoemd dienen te worden zijn onder andere het onderbelichten in het laatste hoofdstuk over differentiaalvergelijkingen van impliciete methoden zoals Euler-Backward (minder dan één pagina wordt hieraan besteed!). Tevens zou het boek completer zijn geweest indien de auteur bijvoorbeeld Richardson-extrapolatie en Romberg integratie (zowel in tekst als in experimenten) aan bod zou hebben laten komen. Ook jammer is het feit dat sommige figuren ietwat onduidelijk afgewerkt zijn (line-style, legenda en assen zijn soms ongelukkig gekozen). Het boek kan interessant zijn voor lezers uit de wat meer toegepast-wiskundige richtingen of uit de toepassingen zelf, die naar een praktische inleiding in de numerieke wiskunde op zoek zijn. Eventueel zou het ook gebruikt kunnen worden voor een wat meer op computers gerichte inleidende cursus op dit gebied. Ondanks het feit dat de tekst doorspekt is van stukken Matlab-code is de auteur er toch in geslaagd om de leesbaarheid op een zeer acceptabel niveau te houden. Het boek is prettig door te werken, de uitleg is duidelijk, en bevat een evenwichtige combinatie van tekst, illustraties, stukken code, toepassingen, en vraagstukken.

P. Zegeling



J.W. Harris and H. Stocker

Handbook of mathematics and computational science

New York: Springer-Verlag, 1998

1028 p., prijs €20,45

ISBN 0-387-94746-9

Volgens het voorwoord is dit boek een volledig naslagwerk voor wetenschappers, ingenieurs en studenten. Verder: "Het handboek bevat definities van belangrijke woorden, formules, feiten en regels gebruikelijk in de wiskunde, nuttige voorbeelden en praktische toepassingen". En: "Het handboek richt zich tot een breed spectrum in het dagelijks gebruik van wiskunde. Het voorziet in: a) De wiskundige basis voor middelbare scholieren en beginnende studenten. b) Geavanceerde wiskunde voor gevorderde studenten in wetenschap en techniek. c) Achtergrondmateriaal voor de wetenschapper en ingenieur die bij hun werk veelvuldig gebruik maken van: Numerieke technieken, basis algoritmes, computertalen, tabellen".

Het boek is ingedeeld in 25 hoofdstukken, onderling nogal verschillend in omvang. Alle onderwerpen worden met een 'definitie' (dit woord wordt vermeden) of korte omschrijving inge-

voerd (a). Daarna volgt de vermelding (b) van een aantal eigenschappen van het betreffende onderwerp. Als laatste (c) komen dan een aantal voorbeelden en (veel) formules aan de orde. De drie categorieën (a), (b) en (c) worden in het boek aangegeven met drie aandachtstekens in de kantlijn, waarvan overigens in het boek geen verklaring is te vinden. Het sterkste punt van het boek is (c). De begripsvorming, die uit (a) zou moeten volgen laat zeer te wensen over. Het laatste maakt het dan ook totaal ongeschikt voor in het voorwoord genoemde doelgroepen als scholieren en studenten, nog afgezien van de omstandigheid dat een dergelijk boek nooit aanbevelingswaardig is als leerboek. Als bij een dergelijk handboek de onderwerpen niet alfabetisch gerangschikt zijn, wordt de bruikbaarheid in grote mate bepaald door de precisie en de volledigheid van de index. Echter die wekt niet altijd de indruk met grote zorgvuldigheid te zijn samengesteld. Opvallend daarbij is, dat er onderscheid wordt gemaakt tussen de met hoofdletter en met kleine letter geschreven naam voor hetzelfde begrip; zoekt men bijvoorbeeld onder het woord *ellips*, dan verwijst de index naar de volgende pagina's: Ellipse 319, 395 en ellipse 93, 225, 394, 395, terwijl bij deze verwijzingen gedeeltelijk dezelfde informatie voorkomt, verschijnt paragraaf 8.4, pagina 384, 385, 386, als: "Elements of the ellipse" in de index.

Het boek bevat geen kruisreferenties en geen literatuurverwijzingen, ondanks de vermelding op de achterkant van het titelblad: "includes bibliographical references and index".

Verschillende delen zijn waarschijnlijk in verschillende talen aangeleverd, de vertaling is niet altijd in termen gebruikelijk in de wiskunde. Door zorgvuldige 'proofreading' had een aantal storende fouten, waardoor bepaalde definities zinloos worden, (bijvoorbeeld convergentie van rijen, differentieerbaarheid) vermeden kunnen worden. Het hier besproken boek bevat veel informatie in de vorm van feiten en formules, maar wekt de indruk dat het snel op de markt gebracht moest worden, hetgeen de bruikbaarheid schaadt.

H. Rijnks

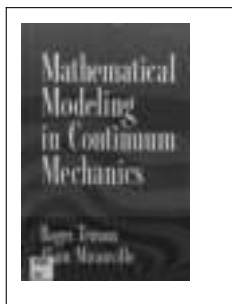
netohydrodynamica en meteorologie gemaakt. Deze summiere inleidingen zijn over het algemeen erg informatief en geven in kort bestek enig inzicht in de meestal ingewikkelde materie die wordt beschreven.

Deel 3 behandelt de vaste-stof mechanica, speciaal die van (lineair) elastische media. Dit deel besluit met een korte sectie over niet-lineair elastische media en composiete materialen.

Deel 4, tenslotte, is specifiek gericht op golfverschijnselen. Ingegaan wordt op de lineaire acoustiek, de soliton vergelijking en de niet-lineaire Schrodinger vergelijking.

De presentatie van bovengenoemde onderwerpen is steeds helder en overzichtelijk. De nadruk ligt zeer duidelijk op een goede wiskundige formulering. De doelgroep voor dit boek ligt dan ook voornamelijk bij wiskundigen, meer specifiek toegepast, industrieel wiskundigen, die een goede basis nodig hebben voor mathematische modellering van fysische processen. Dit boek lijkt hiervoor uitermate geschikt. Een nadeel in dit opzicht is dan wel dat dit boek weinig ingaat op meer praktische problemen. Het boek bevat nauwelijks (practische) voorbeelden (enkel de meest fundamentele) en al helemaal geen opgaven. Voor deze meer praktische aspecten is een ander (aanvullend) boek nodig. Dit laat echter onverlet dat voor een eerste fundamentele kennismaking met de vele verschillende aspecten van de mechanica van continue media dit boek, zeker ook door de zeer leesbare schrijfwijze, van harte is aanbevolen.

A.A.F. van de Ven



R. Teman and A. Miranville
Mathematical modelling in continuum mechanics

Cambridge: Cambridge university press, 2001
288 p., prijs £35,00
ISBN 0-521-64362-7

Dit boek geeft een inleiding tot de continuumsmechanica, met de nadruk op de wiskundige modellering. Het boek is geschreven met veel aandacht voor de theoretische fundering, zonder daarbij de fysische achtergrond uit het oog te verliezen. Het boek is verdeeld in vier delen:

Deel 1 bevat de fundamentele concepten van de continuumsmechanica, zoals de kinematica en dynamica van continue lichamen, constitutieve theorieën en sprongcondities. Ik mis hier een algemeen overzicht van de fundamentele (globale) balanswetten van de continuumsmechanica.

Deel 2 behandelt vloeistoffen, zowel visceuze (Newtonse) als niet-visceuze. Zoals op vele andere plaatsen in het boek wordt hier een aantal korte uitstapjes naar gerelateerde velden als mag-



J. Ryan and Wolfgang Spröig (eds.)
Clifford algebras and their applications in mathematical physics

(progress in physics)
Boston: Birkhäuser Verlag, 2000
320 p., prijs €90,-
ISBN 0-8176-4183-1

This volume contains 17 contributed papers from the section 'Clifford Analysis' of the '5th International Conference on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics' held in Ixtapa, Mexico, 1999. In my opinion almost all these articles are written very well.

The first part is titled 'Partial Differential Equations and Boundary Value Problems'. The article by U. Kähler introduces some generalizations of the Beltrami differential equation. The paper by X. Li is about the relationship between the Beltrami-Laplace operator, its Green's function and Möbius transformations. A Dirichlet problem is solved and two Poisson formulae are established. The connection of this paper with Clifford analysis is rather superficial. The article by W. Spröig reviews some problems in fluid mechanics in the setting of quaternionic analysis, and its main issue is a problem in magneto-hydrodynamics.

The second part of the book is called 'Singular integral operators'. The article by X. Li, T. Qian and J. Ryan deals with the connection between Fourier multipliers and singular integrals on a particular kind of curves and surfaces. The Cauchy-Dunford bounded holomorphic functional calculus of the associated Dirac operator is considered. The contribution of J.B. Reyes and R.A. Blaya is concerned with the quaternionic version of the Riemann

boundary value problem and quaternionic Cauchy integrals on Ahlfors regular surfaces, and a special case of Riemann's problem is solved. M. Martin proves three Hedberg type inequalities for the convolution operator associated with the euclidean Cauchy kernel in higher dimensions.

The third part is called 'Applications in Geometry and Physics'. Using Clifford analysis, S. Bernstein obtains the Borel-Pompeiu formula in several complex variables. This is applied to inverse scattering theory. G. Kaiser elaborates on his extension of physics to *complex* spacetime. In the rather technical paper by J. Snrygg isometry operators and elements of the holonomy group for n -dimensional spaces of arbitrary signature are treated. F. Sommen presents an extension of Clifford analysis in the vein of supersymmetry. For abstract vector variables the calculus remains the same. It is claimed that the radial algebra is a canonical background for supersymmetry. J. Tolksdorf discusses the standard model of elementary particles using Clifford modules, generalized Dirac operators and the Wodzicki residue. Similarity with Connes' noncommutative geometry catches the eye.

The fourth part is titled 'Möbius transformations and monogenic functions'. M. Wada and O. Kobayashi define the Schwarzian for dimensions ≥ 3 . Their main theorem states that the Schwarzian of a map f is constantly zero iff f is a Möbius transformation. Y. Krasnov treats the structure of monogenic functions with values in a Clifford algebra by means of a Dirac operator. In T. Hempfling's paper the radial part of the Cauchy-Riemann operator is discussed. H.R. Malonek gives a definition of hypercomplex derivability of a function defined for paravectors with values in a real Clifford algebra. It is shown that a real differentiable function is derivable iff it is monogenic. In the paper of S.-L. Eriksson-Bique and H. Leutwiler hypermonogenic functions are treated. P. Cerejeiras discusses the existence of a Poisson-Szegö kernel for the Laplace-Beltrami equation for n -dimensional hyperbolic space. Poisson-Szegö kernels for a large family of orientable manifolds are constructed, and Dirichlet-like problems of the Laplace-Beltrami equations are discussed. G.G.A. Bauerle

dan toch eerder *The Code Book* van Simon Singh (London, 1999) zou aanbevelen: beter geschreven, veel meer bloedstollende historische details en bovendien uitgebreidere, ook voor leken meer begrijpelijke informatie over de moderne wiskundige methodes. En wie wil zien hoe de jeugd gegrepen kan worden door de combinatie van wiskunde en cryptologie, moet *In Code* (London, 2000) lezen, het fascinerende verslag dat de Ierse tiener Sarah Flannery samen met haar vader David Flannery schreef over haar avonturen in crypto-land die haar in 1999 de titel European Young Scientist of the Year opleverden.

J. van de Craats

A. Shen

Algorithms and programming problems and solutions

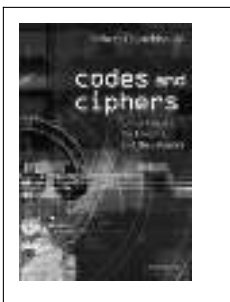
Basel: Birkhäuser, 1996

217 p., prijs €39,48

ISBN 3-7643-3847-4

This book is a translation (by the author) of the Russian version from 1995. The title is very descriptive: the subject indeed is Algorithms and Programs, the format is Problems and Solutions. Each chapter and each section consists of algorithmic problems, over 320 problems altogether. For most of the problems the solution is given, most often as a Pascal program. Sometimes only a hint is given, when the problem is a special case of, or a slight deviation from the foregoing one. The first problem reads: write a program block to interchange the value of two integer variables. The last one, without solution, asks for an LR(1) grammar that is not LALR(1). In between is a wide spectrum of algorithms. The first seven chapters cover algorithms usually present in an undergraduate course: combinatorial algorithms (permutations, subsets, partitions), backtracking, sorting, finite state machines (that is: scanning algorithms), algorithms using stacks and (priority) queues, recursion. The above ordering implies that backtracking is introduced without recursion, using the metaphor of a robot traversing an (imaginary) tree. Data structures is not the subject of the book; for both the stack and the queue just a single implementation is given. The next chapters cover some more advanced topics: dynamic programming and elimination of recursion, graph algorithms (shortest path, connected components, breadth and depth first search), pattern matching in text (Knuth-Morris-Pratt, Boyer Moore, Rabin-Karp), hashing, and balanced trees. The final chapters are devoted to parsing: recursive descent-parsing, LR(0)-, LR(1)- and LALR(1)-grammars. These chapters could fit in a compiler course. For all repetitions an invariant is given, so the reader might check the correctness of the algorithm. No explanation on invariants or correctness proofs is given, however, so this knowledge belongs to the prerequisites. This is remarkable, for a book starting with an algorithm to interchange the values of two variables. The author avoids order notation, asking: solve this problem in less than $C \log n$ operation, for some constant C .

It would be hard to schedule a course based on this book in the curriculum. On the other hand it contains a lot of material one would like students to know and understand before leaving university. Who should buy this book? As the author states it in the preface: "This book is addressed both to the ambitious student who wants to test and improve his/her skills, and to the instructor looking for problems for his/her class." This definitely makes



R. Churchhouse

Codes and ciphers: Julius Caesar the enigma and the internet

Cambridge: Cambridge university press, 2001

240 p., prijs €22,57

ISBN 0-521-00890-5

Dit boek biedt een inleiding in de cryptologie voor niet-wiskundigen. Tien van de twaalf hoofdstukken worden besteed aan klassieke methodes, zeg van Julius Caesar tot en met de Enigma en de Hagelin machines. Public-key-cryptologie, RSA, DES, authenticatiemethodes, digitale handtekeningen en cryptologie met behulp van elliptische krommen komen in de laatste twee hoofdstukken slechts oppervlakkig aan de orde. Er is een Appendix met enige wiskundige achtergrondinformatie, maar ook daar zal de leek niet veel wijzer van worden.

Een niet-wiskundige die geïnteresseerd is in klassieke vercijfermethoden vindt in dit boek een degelijke inleiding, hoewel ik

sense. Though this is not the first book on algorithms, it contains a rich collection of problems and well written and well documented solutions. As far as students are concerned, some ambition will not be superfluous, as some solutions and some hints are quite sketchy, and require inventivity from the reader. *P.G. Kluit*



T.E. Andreescu and R. Gelca
Mathematical olympiad challenges
 Boston: Birkhauser-Verlag, 2000
 260 p., prijs € 29,65
 ISBN 0-8176-4155-6

In de loop van de jaren is mij van diverse kanten door vakgenoten gewezen op de vergelijking tussen fysici en wiskundigen wat betreft hun werkplekken: Fysici hebben hun laboratorium met meestal ingewikkelde, dure opstellingen en instrumenten; wiskundigen hebben hun bibliotheek waarin met name die boeken en tijdschriften een rol spelen, welke het gereedschap van het wiskundig metier scherp moeten houden. Een bij uitstek nuttig boekje voor dit soort activiteiten ligt hier voor ons, geschreven door twee Roemenen die hun sporen hebben verdiend in nationale en internationale wiskunde-olympiades en nu regelmatig het U.S.A. International Olympiad Team begeleiden. Beide zijn begenadigde leermeesters die hier een benijdenswaardige collectie vraagstukken (op elementair niveau) met oplossingen hebben gebundeld, rubrieksgewijs gerangschikt naar onderwerp (meetkunde en goniometrie/trigonometrie, algebra en analyse, getaltheorie en combinatoriek). Vaak zijn de gegeven oplossingen verrassend mooi en slim, soms ook komt de lezer zelf met een oplossing, die niet wordt besproken, maar dat is juist het aantrekkelijke van een olympiadevraagstuk... Kortom, een boekje voor mathematici en puzzelliefhebbers om hun slagvaardigheid op deze gebieden te onderhouden en uit te breiden. Aanbevolen! *K.A. Post*



W. Schikhof
Circumspice. Various papers in and around Mathematics in honor of Arnoud van Rooij
 Nijmegen: K.U.N., 2001
 355 p.
 ISBN 90-9014762-4

Het in kort bestek bespreken van een vriendenboek is altijd een moeilijke taak. In dit geval gaat het om een boek met 29 auteurs van 28 artikelen opgedragen aan de 65-jarige Arnoud van Rooij.

De bespreking zou in enkele honderden woorden klaar moeten zijn, dus minder dan een paar regels per artikel. Dat zal zeker geen zin hebben, want nu hebben we al een aantal regels verspeeld. Dus ook geen lijst van de 29 auteurs, maar om toch een indruk te geven van de gevarieerdheid van dit boek noem ik de onderwerpen van de hoofdstukken.

Natuurlijk twee hoofdstukken over onderwerpen waar Van Rooij zelf veel aandacht aan gegeven heeft, allereerst Riesz-ruimten, en natuurlijk een typisch Nijmegense specialisatie: de niet-archimedische analyse. Dit onderwerp is vanuit de door Monna in Utrecht opgebouwde traditie in Nijmegen voortgezet. Zal de niet-archimedische analyse eens een zelfde belang voor de cosmologie krijgen als dat andere vak met de negatieve naam de niet-euclidische meetkunde? Signalen uit Rusland (A. Khrennikov, *Non-archimedean Analyse: quantum paradoxen, dynamical systems and biological models*, Kluwer, 1997) zouden er op kunnen wijzen. Maar de artikelen in dit boek beperken zich tot de wiskunde. Complexe analyse en functionaal analyse demonstren de Utrechts-Nijmegense band door de auteurs Duistermaat, ter Elst, Jeurnink, Kortram, Stegeman, Tijs. Natuurlijk komt ook Logika en Verzamelingenleer aan bod, de door J.J. de Jongh ingebracht traditie, Campschroer over *Hoeveel zegt een plaatje* (met de vraag zegt een plaatje meer dan duizend woorden?) en Veldman over *Bijna de Waaierstelling*. Nog drie hoofdstukken noemde ik niet, namelijk Klassieke Meetkunde, Mathematische Statistiek en Didaktiek en Geschiedenis. Titels als "Voorbeelden van gelijkzijdige veelvlakken", "Wat is normaal?", "En zo is het gekomen" en "Wat vind je zelf?" dagen de lezer van de inhoud uit nu zelf de artikelen te gaan lezen.

Uw recensent ziet er maar van af deze 28 artikelen voor U in te leiden of te bespreken, laat hem volstaan met de titel van het artikel van Van Schalkwijk: "Wat vind je zelf?" Wat voor schatten vind je in deze collectie en wat vind je er zelf van? Ik denk dat vele lezers net als ik met Arnoud van Rooij met plezier in dit boek gelezen hebben.

F. van der Blij



Universitaire Wiskunde Competitie

Opgave A

Toon aan dat

$$\ln 2 = \frac{2}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(4n^2 - 1)}.$$

Opgave B

Definieer, voor $t > 0$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{t}{n^2}\right).$$

Toon aan dat de limiet $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)/\sqrt{t}$ bestaat en bepaal zijn waarde.

Opgave C

Bewijs voor alle $n, k \geq 1$ met $n \geq 2k$ de volgende identiteit:

$$\binom{n+1}{k} = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j+1} \binom{2j}{j} \binom{n-2j}{k-j}.$$

Ster-opgave

Zij $\mathbf{x}$ een toevalsvector in $\mathbf{R}^n$ met onafhankelijke coördinaten die met gelijke kans $\frac{1}{2}$ de waarden ± 1 aannemen. Zij $\mathbf{y}$ een vast gekozen eenheidsvector in $\mathbf{R}^n$. Hoe groot is de kans dat het inwendige product $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ kleiner is dan 1?

Editie Oplossingen 2002/1

Op de ronde 2002/1 van de Universitaire Wiskunde Competitie ontvingen we 3 inzendingen.

Opgave 2002/1-A

Zij $f(t)$ een monisch polynoom in de variabele t van oneven graad n en met gehele coëfficiënten; we nemen bovendien aan dat $f(0) = -1$. Zij p een priemgetal. Bewijs dat $f(t^2)$ *reducibel* is modulo p , dat wil zeggen er bestaan niet-constante monische polynomen $g(t)$ en $h(t)$ zodanig dat

$$f(t^2) = g(t)h(t) \quad \text{modulo } p.$$

Oplossing Voor $q = p^n$ met p priem en $n \geq 1$ zij $\mathbf{F}_q$ het lichaam van orde q . We beschouwen $f(t)$ als element van de ring $\mathbf{F}_p[t]$ over $\mathbf{F}_p$. Stel, algemener, dat $n \geq 1$ en $f(0) = (-1)^n$ in $\mathbf{F}_p$. Als $f(t) = a(t)b(t)$, dan geldt ook $f(t^2) = a(t^2)b(t^2)$. Als $p = 2$ dan geldt $f(t^2) = f(t)^2$. Neem dus vanaf nu aan dat $f(t)$ irreducibel is over $\mathbf{F}_p[t]$ en dat p oneven is. Zij μ het ringhomomorfisme van $\mathbf{F}_p[t]$ gegeven door $\mu(x) = x^p$. Dan geldt voor zekere $a \in \mathbf{F}_{p^n}$ dat

$$f(t) = (t - a)(t - \mu(a)) \dots (t - \mu^{n-1}(a)).$$

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina <http://academics.its.tudelft.nl/uwc>

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Er worden drie editieprijszen toegekend, van 100, 50, en 25 Euro. De puntentotalen van winnaars tellen voor 0, 50, en 75 procent mee in de laddercompetitie. De aanvoerder van de ladder ontvangt een prijs van 100 Euro en begint daarna weer onderaan. Daarnaast wordt twee maal per jaar een ster-opgave aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend.

Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in $\text{\LaTeX}$ wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 november 2002. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

Eindredactie: Jan van Neerven

Redactieadres: Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
j.vanneerven@its.tudelft.nl

De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.



UWC

oplossingen

Omdat $f(0) = (-1)^n$ geldt dus dat

$$a \cdot \mu(a) \cdot \dots \cdot \mu^{n-1}(a) = a^{1+p+p^2+\dots+p^{n-1}} = 1.$$

Daar $\mathbb{F}_{p^n} \setminus \{0\}$ een cyclische groep is met orde $p^n - 1 = (p-1)(1+p+\dots+p^{n-1})$, is dus a een $(p-1)^e$ macht in $\mathbb{F}_{p^n}$, en dus zeker een kwadraat in $\mathbb{F}_{p^n}$ (want p is oneven). Zeg $a = b^2$. Dan geldt $(t - \mu^k(a)) = (t - \mu^k(b))(t + \mu^k(b))$ en dus $f(t) = -g(t)g(-t)$, met

$$g(t) = (t-b)(t-b^p)\dots(t-b^{p^{n-1}}).$$

Maar op grond van symmetrie zijn de coëfficiënten van $g(t)$ invariant onder μ en daarmee element van $\mathbb{F}_p$. Dus $f(t) = -g(t)g(-t)$ is de gevraagde ontbinding over $\mathbb{F}_p$.

Opgave 2002/1-B

Bewijs dat op de kubus van Rubik niet drie hoeken kunnen worden verwisseld door met slechts twee zijvlakken te draaien.

Oplossing Twee inzendingen maakten gebruik van computeralgebra pakketten. Hier volgt een geheel algebraïsche oplossing.

De vraag is equivalent met: "De ondergroep G van S_6 voortgebracht door de twee viercyclen (1234) en (3456) bevat geen driecykel".

Zij T de verzameling van alle 15 partities van $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ in drie blokken van de lengte twee. Zij V de deelverzameling van T bestaande uit de volgende vijf partities:

$$A = (12)(35)(46),$$

$$B = (23)(45)(16),$$

$$C = (34)(15)(26),$$

$$D = (41)(25)(36),$$

$$E = (13)(24)(56).$$

De groep S_6 werkt op natuurlijke wijze op T (door middel van conjugatie, als we de elementen van T als producten van drie disjuncte tweecykels zien). Daar de beide voortbrengers van G de verzameling V als geheel vast laten (met (1234) correspondeert de viercykel $(ABCD)$ en met (3456) de viercykel $(BEDC)$), werkt de ondergroep G dus op V . Merk nu op dat elk van de 15 paren uit $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ in precies één van de vijf partities uit V voorkomt en stel dat $g = (ijk)$ een driecykel is in G . Zij $\{l, m, n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{i, j, k\}$. Dan verwisselt g in V de drie partities die (ij) , (jk) en (ki) bevatten en laat de drie partities die (lm) , (mn) en (nl) bevatten vast. Maar er zijn slechts vijf partities in V , een tegenspraak.

Opgave 2002/1-C

Bewijs dat

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2 \log m}{\log \log m} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{m/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx = 1. \quad (1)$$

Hierin stelt $\log \log m$ de geïtereerde natuurlijke logaritme voor.

Oplossing Beide inzenders die deze vraag hebben opgelost splitsten de integraal in twee of meer stukken en bepaalden vervolgens van ieder afzonderlijk de limiet. Hieronder volgt een iets kortere oplossing.

Schrijf $\rho_m = \log(m(\log m)^2)$. Dan geldt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\rho_m}{\log \rho_m} \times \frac{\log \log m}{\log(m^2)} = 1. \quad (2)$$

UWC

oplossingen

We beginnen met te bewijzen dat

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\log(m^2)}{\log \log m} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{m/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \leq 1. \quad (3)$$

Daartoe bekijken we eerst:

$$\begin{aligned} & \frac{\log(m^2)}{\log \log m} \int_{\log(m^2)}^\infty \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{m/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \\ & \leq \frac{\log(m^2)}{\log \log m} \frac{(\log(m^2))^2}{(\log(m^2))^2 - 1} \int_{\log(m^2)}^\infty \frac{1}{x^2} \log x dx \\ & = \frac{\log(m^2)}{\log \log m} \frac{(\log(m^2))^2}{(\log(m^2))^2 - 1} \left[\frac{\log(\log(m^2))}{\log(m^2)} + \frac{1}{\log(m^2)} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Als m naar oneindig gaat, dan convergeert de uitdrukking in (4) naar 1. De integraal

$$\int_0^{\log(m^2)} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{m/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx$$

kan als volgt naar boven geschat worden:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\log(m^2)} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{m/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \\ & \leq \left(1 - \frac{\log(m^2)}{\exp\left(\frac{1}{2}\log(m^2)\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}\log(m^2)\right)}\right)^{m/2} \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \\ & \leq \left(1 - \frac{2\log m}{m}\right)^{m/2} \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \leq \frac{1}{m} \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1} dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Uit (4) en (5) volgt de bewering in (3), want

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log(m^2)}{\log \log m} \frac{1}{m} = 0.$$

We bewijzen nu ook nog dat

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\rho_m}{\log \rho_m} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{m/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \geq 1. \quad (6)$$

Daartoe schatten we de uitdrukking in het rechterlid van (6) naar beneden:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_m}{\log \rho_m} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{m/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \\ & \geq \frac{\rho_m}{\log \rho_m} \int_{\rho_m}^\infty \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{m/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \\ & \geq \frac{\rho_m}{\log \rho_m} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}\rho_m}{\sinh \frac{1}{2}\rho_m}\right)^{m/2} \int_{\rho_m}^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \\ & \geq \frac{\rho_m}{\log \rho_m} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}\rho_m}{\sinh \frac{1}{2}\rho_m}\right)^{m/2} \int_{\rho_m}^\infty \frac{\log x}{x^2} dx \\ & \geq \frac{\rho_m}{\log \rho_m} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}\rho_m}{\sinh \frac{1}{2}\rho_m}\right)^{m/2} \frac{\log \rho_m}{\rho_m} \\ & = \left(1 - \frac{2a_m}{m}\right)^{\frac{m}{2a_m} a_m}, \end{aligned} \quad (7)$$

UWC

oplossingen

waarbij

$$a_m := \frac{\log(m(\log m)^2)}{(\log m)^2 - \frac{1}{m^2(\log m)^2}}$$

naar 0 convergeert, als m naar oneindig gaat. De uitdrukking in (7) convergeert naar $(e^{-1})^0 = 1$. Dit bewijst dat

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\rho_m}{\log \rho_m} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{m/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \geq 1.$$

Wegens (2) volgt dan

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\log(m^2)}{\log \log m} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{m/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx \geq 1. \quad (8)$$

Uit (3) en (8) volgt dan de bewering in (1).

Uitslag Editie 2002/1

De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

<i>Naam</i>	A	B	C	<i>Totaal</i>
1. Gerben Stavenga e.a. (Utrecht)	9	9	8	103
2. Filip De Smet (Gent)	-	8	9	77
3. Filip Cools/Joeri van der Veken (Leuven)	-	3	-	12

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie

We vermelden alleen de top 5. Voor de complete ladderstand verwijzen we naar de UWC-website.

<i>Naam</i>	<i>Punten</i>
1. Jan Tuitman	261
2. Filip de Smet	250
3. Roelof Oosterhuis	211
4. Filip Cools/Joeri van der Veken	165
5. Hendrik Hubrechts/Steven Delvaux	156

Problemen

| Problem Section

Problem 35 (Floor van Lamoen)

Let two congruent circles (O_1) and (O_2) be tangent to each other, to segment AB and to the circumcircle of triangle ABC , in such a way that O_1, O_2 and C lie on the same side of AB . Prove that the point of contact of (O_1) and (O_2) is concyclic with A, B and the incenter I of the triangle ABC .

Problem 36

Let k be a positive integer, and write $n = 4k + 1$. Prove that $(n^n - 1)/(n - 1)$ is not a prime number.

Problem 37 (Open problem)

Does there exist a continuous surjection $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ such that every convex set has a convex image?

Solutions to Problem 26 and to volume 3, number 1 (March 2002)

Problem 26 (F. Roos)

Does there exist a triangle with sides of integral lengths such that its area is equal to the square of the length of one of its sides?

Solution This problem was solved by Frits Beukers, Jaap Spies and Christiaan van de Woestijne. They show that there are no such triangles. Jaap Spies gives several solutions. All solutions reduce the problem to finding rational points on an elliptic curve. Spies and Van de Woestijne use Heron's formula, but there is a more direct way to find the elliptic curve, as given by Beukers and by Spies, once again. Let a, b, c be the integer sides of the triangle, which we assume positive. Suppose the triangular area equals a^2 . Then, using a as base, the height of the triangle should be $2a$. The perpendicular line on the base divides the base into two pieces of length x (which may be negative) and $a - x$. Then we should have

$$\begin{aligned}x^2 + (2a)^2 &= b^2 \\(a - x)^2 + (2a)^2 &= c^2\end{aligned}$$

A subtraction shows that x is rational. Now denote $\xi = x/2a, \beta = b/2a, \gamma = c/2a$, which are all rational numbers. After division by $(2a)^2$ we find

$$\begin{aligned}\xi^2 + 1 &= \beta^2 \\(1/2 - \xi)^2 + 1 &= \gamma^2\end{aligned}$$

It is a well-known fact that a rational number r has the property that $1 + r^2$ is a rational square if and only if $r = (s - 1/s)/2$ for some rational number s . Hence there exist rational numbers s, t such that $\xi = (s - 1/s)/2$ and $1/2 - \xi = (t - 1/t)/2$. Elimination of ξ gives

$$s + t - \frac{1}{s} - \frac{1}{t} = 1.$$

Clear denominators and we find $s^2t + st^2 - s - t - st = 0$. This is the equation of a non-singular cubic curve, which has a trivial rational point $s = t = 0$, i.e., an elliptic curve. Rational points on an elliptic curve are known to form an abelian group which can usually be computed. Introduce new coordinates x, y by

$$y = \left(\frac{s}{t} + 1\right) \frac{1}{t}, \quad x = \frac{s}{t} + 1.$$

We then find the equation

$$y^2 + xy - y = x^3 - x^2.$$

Solutions to the problems in this section can be sent to the editor — preferably by e-mail. The most elegant solutions will be published in a later issue. Readers are invited to submit general mathematical problems. Unless the problem is still open, a valid solution should be included.

Editor:

R.J. Fokkink

Technische Universiteit Delft

Faculteit Wiskunde

P.O. Box 5031

2600 GA Delft

The Netherlands

r.j.fokkink@its.tudelft.nl

This is a curve of conductor 17 which has four rational points. Beukers and Spies refer to the Cremona table of elliptic curves, which is available at William Stein's homepage <http://modular.fas.harvard.edu/Tables/index.html>. The rational points are $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ and a point at infinity. These all give degenerate triangles. Van de Woestijne actually computes the rational points by hand, referring here and there to Silverman's book. Jaap Spies mentions that he spent a pleasant Christmas holiday reading J.S. Milne's excellent classroom notes, available at <http://www.jmilne.org/math/>.

Problem 27 (L. Bleijenga)

Let L be a Latin square of order n . Show that any matrix $A \subset L$ of order $a \times b$ with $a + b = n + 1$ contains all elements $1, 2, \dots, n$.

Solution This problem received no solution. This is the solution by L. Bleijenga. After permutation one may assume that $L = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$. If a symbol k does not occur in A , then every row of B has a k and so has every column of C . Then k occurs $a + b > n$ times, contradicting that L is a Latin square.

Problem 28 (H. van den Berg)

For integers k, m, n and a prime number $p \geq 5$ show that if $(k^2 - mn)^p + (m^2 - kn)^p + (n^2 - km)^p = 0$, then p divides all three numbers $k^2 - mn, m^2 - kn, n^2 - km$.

Solution This problem received no solution. Problem 28 can be solved by adapting the solution of Problem 7 that appeared in the first issue of volume 2 of *Nieuw Archief*.

Problem 29 (Lute Kamstra)

Let $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N}_0$ and let A be a subset of $\{1, 2, \dots, n + h\}$ of size n . Count the number of bijective maps $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A$ such that $k \leq \pi(k) \leq k + h$ for all $1 \leq k \leq n$.

Solution Jaap van Oosten solved this open problem. The answer is 1, independent of A , n and h . Observe that this is trivially so if $n = 1$, or if $h = 0$. Write $A = \{1, \dots, n + h\} - \{a_1, \dots, a_h\}$ with $a_1 < a_2 < \dots < a_h$. Now perform a double induction on (n, h) . If $a_h = n + h$, then π is a bijection: $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n + h - 1\} - \{a_1, \dots, a_{h-1}\}$ so we reduce to the case for $(n, h - 1)$. If $a_h < n + h$, then for $i < n$ we have $\pi(i) < n + h$. Since $\{1, \dots, n + h - 1\}$ contains $n - 1$ elements of A , we must have $\pi(n) = n + h$, and π gives a bijection: $\{1, \dots, n - 1\} \rightarrow \{1, \dots, n - 1 + h\} - \{a_1, \dots, a_h\}$, so we reduce to the case $(n - 1, h)$.

