

Inhoud | Contents

98	Colofon
99	Redactioneel <i>Chris Zaal</i>
100	Agenda
102	Nieuws
106	Van het WG

Evenementen | Events

110	How to grow a mathematical model <i>Nick Ovenden</i>
112	Nieuwe dimensies, ruimer bereik <i>Joost Hulshof</i>
114	De toekomst van het wiskundeonderzoek <i>Rien Kaashoek, Henk van der Vorst</i>

Oratie | Inaugural lecture

116	Verdeel en heers <i>Arjan van der Schaft</i>
-----	--

Onderzoek | Research

126	The most powerful computing in the universe? <i>Agoston E. Eiben</i>
132	From bioinformatic pattern analysis to evolutionary dynamics <i>Paulien Hogeweg</i>
139	A linear algebra exercise <i>Frits Beukers, Ronald van Luijk, Raimundas Vidunas</i>

Interview | Interview

141	Een bemoeial met smaak, interview met Mike Keane <i>Gerard Alberts, Willem van Zwet</i>
-----	---

Boeken | Books

146	Mosterd na de maaltijd <i>Willem Schaafsma</i>
150	Het Chinese begin <i>Wim Veldman</i>

Onderwijs | Education

157	Niveau gevraagd <i>Jaap Top</i>
160	Rendement versus niveau <i>Jack van Lint</i>
166	Het Wiskunde A1,2 examen <i>Bert Zwaneveld</i>

Problemen | Problem section

188	Universitaire Wiskunde Competitie
191	Problemen

Rubrieken | Departments

125	Oud Archief <i>Danny Beckers</i>
154	TeX <i>Michael van Hartkamp</i>
156	Column: From Nottingham Forest <i>Jan Bouwe van den Berg</i>
163	Online publishing: Grothendiecks erfenis <i>Reinie Erné</i>
176	Boekbesprekingen

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder. **ISSN 0028-9825**

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
<http://www.math.leidenuniv.nl/~naw>

Hoofredactie

Ger Koole (koole@cs.vu.nl)
Chris Zaai (zaal@math.leidenuniv.nl)

Eindredactie

Derk Pik (drpik@math.leidenuniv.nl)

Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@wens.kun.nl)
Hans Melissen (j.b.m.melissen@its.tudelft.nl)
Jaap Molenaar (J.Molenaar@tue.nl)
André Ran (ran@cs.vu.nl)
Bert Zwaneveld (Bert.Zwaneveld@ou.nl)

Bureau redactie

Jos Brakenhoff (naw@math.leidenuniv.nl)
Annelies Hafkenscheid (naw@math.leidenuniv.nl)

Medewerkers

Wieb Bosma (bosma@sci.kun.nl)
J.A.W. van Casteren (vcaster@wins.uia.ac.be)
Jan van de Craats (jcr@euronet.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@its.tudelft.nl)
Michael van Hartkamp (michael@vanhartkamp.com)
Geertje Hek (ghek@science.uva.nl)
Teun Koetsier (teun@cs.vu.nl)
Joop Kolk (kolk@math.uu.nl)
Pieter Moree (moree@science.uva.nl)
Jan van Neerven (J.vanNeerven@its.tudelft.nl)
Mark Peletier (mark.peletier@cw.nl)
Hans Sterk (sterk@win.tue.nl)
Roel Stroeker (stroeker@few.eur.nl)
Jaap Top (J.Top@math.rug.nl)

TeX-ondersteuning

Marco Boon (m.a.a.boon@tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@its.tudelft.nl)

Abonnementstarieven 2001/Subscription rates 2001

Nederland 90 Euro (4 nummers)
Buitenland 105 Euro (4 issues)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Corrie van Os (wg-admin@math.uu.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
tel. 030-2531430, fax 030-2518394

Exchange subscriptions

Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam

Advertenties

Christiaan van de Woestijne (cvdwoest@math.leidenuniv.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101

Vormgeving

Kitty Molenaar, Amsterdam

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEX)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Op de omslag

De eerste bladzijde van het anonieme *Boek der negen hoofdstukken over de wiskunst*, het Chinese equivalent van de *Elementen* van Euclides. Zie verder 'Het Chinese begin', pagina 150.

Bron: www.math.sfu.ca/histmath/China/1stCenturyAD/NineChapIntro.html

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient u elektronisch aan te bieden aan de hoofdredactie: koole@cs.vu.nl

Uitgebreidere informatie en auteursinstructies kunt u vinden op:

<http://www.math.leidenuniv.nl/~naw/html/auteurs.html>

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	uiterste inleverdatum kopij
3	05-09-2002	06-06-2002
4	06-12-2002	06-09-2002
1	10-03-2003	06-12-2003
2	09-06-2003	07-03-2003

Wiskundig Genootschap

Het Wiskundig Genootschap is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. Het genootschap werd in 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Het is 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap.

Leden van het Wiskundig Genootschap ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor het Wiskundig Genootschap bedraagt €70 per jaar en gepensioneerden betalen €35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of HBO-opleiding, AiO's en OiO's kunnen lid worden tegen het gereduceerde tarief van €25 per jaar.

Leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO kunnen aanspraak maken op een gereduceerd tarief van €50.

Members of the Société Mathématique de France, and of the American, Australian, Belgian, Indian, London and South-African Mathematical Societies pay €50 instead of the full membership fee of €70 a year.

Homepage

<http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Corrie van Os (wg-admin@math.uu.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
tel. 030-2531430, fax 030-2518394

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Eduard Looijenga (UU, *voorzitter*), Mark Peletier (CWI, *secretaris*), Luc Florack (TUE, *penningmeester*), Harm Bakker (RUG), Geertje Hek (UvA), Metha Kamminga (NHL), Anette Kik (CWI), Jaap Molenaar (TUE, UT), Michel Vellekoop (UT), Koos Vrieze (UM).

Wiskunde prijst zich uit de markt

“Voeg oude studies samen in profielen”, kopte het NRC van 23 mei. Volgens die krant blijken de universiteiten uitgewerkte plannen te hebben om het onderwijs op zowel alfa- als bèta-faculteiten drastisch te reorganiseren. De bestaande studies, zoals wiskunde en de moderne talen, moeten worden geschrapt en vervangen door brede ‘profielen’.

Een VSNU-commissie onder leiding van rector magnificus T. Sminia van de Vrije Universiteit heeft plannen voor het bèta-onderwijs uitgewerkt. De commissie laat zich kritisch uit over het niveau van het onderwijs: de opleidingen zijn te versnipperd, trekken steeds minder studenten en het aantal uitvallers is onverminderd hoog. Bovendien houden de studies zich louter bezig met de eigen opleiding, terwijl de samenleving en het bedrijfsleven breder opgeleide studenten vragen. De commissie-Sminia stelt voor het onderwijs in de eerste drie studiejaar te clusteren in drie profielen: ‘Levenswetenschappen en technologie’, ‘Natuurwetenschappen en technologie’ en ‘Technische informatica’. Wiskunde is ondergebracht in het profiel ‘Natuurwetenschappen en technologie’, samen met natuurkunde, sterrenkunde en scheikunde.

De veranderingen in het onderwijs buitelen over elkaar heen: de basisvorming (officieel mislukt), de Tweede Fase (net ingevoerd), de bachelors-masters (met ingang van komend studiejaar). En dan komt nu de VSNU met de bovenstaande plannen, die gelukkig niet zo definitief zijn als de krant suggereert. Ook lijken lang niet alle universiteiten deze ideeën te steunen.

Met de aanleiding lijkt niets mis: wiskunde trekt inderdaad weinig studenten, het studierendement is niet om over naar huis te schrijven en de huidige opleiding is voornamelijk gericht op specialistisch wetenschappelijk onderzoek.

Maar wordt met zulke rigoreuze plannen het kind niet met het badwater weggegooid? Ook al klinken de plannen op het eerste gezicht niet onredelijk, ze doen alleen aan symptoombestrijding. Want trekt zo’n ‘profiel’ meer studenten dan de afzonderlijke studies gezamenlijk? Hoe wordt het studierendement verhoogd? Is er in het nieuwe model ruimte voor onderwijsvernieuwingen of verdwijnen er door de clustering juist onderwijsaanstellingen? Fundamentele vragen blijven onaangeroerd. Waarvoor dienen

universitaire studies op te leiden? Wat is de rol van de wetenschap? Hoe zit het met de aansluiting op de masteropleidingen?

Maar kritiek is makkelijk te geven. Feit is dat de exacte studies, met wiskunde voorop, onder druk staan, precies vanwege de genoemde redenen: de zorgwekkend lage instroom, de lage rendementen en de onmaatschappelijke gerichtheid.

Wat dat betreft wordt het hoog tijd om de hand in eigen boezem te steken. Nog steeds richten de huidige wiskundeopleidingen zich alleen op toekomstige onderzoekers. Studenten die het ‘heilige’ pad van het onderzoek verlaten worden gezien als ‘afvalligen’, dat wil zeggen, verloren voor het wiskundeonderzoek en daarom niet meer interessant. Ook al belijden de studiebrochures dat communicatie, educatie en management volwaardige alternatieven zijn van de onderzoeksvariant, diep in hun hart ziet de academische staf dit anders.

Nog steeds wordt wiskundestudenten voorgehouden zich alleen op wiskunde te concentreren, dat theorie vele malen veel belangrijker is dan toepassingen, dat onderwijs, communicatie of management slechts ordinaire, wereldse bijzaken zijn. Kortom, de wiskundestudie is nog steeds een zeer specialistische opleiding, waar studenten alleen slagen als ze zich dezelfde zware oogkleppen aanmeten als hun docenten. Het resultaat: wereldvreemde wetenschappers en cynische individualisten.

De huidige generatie aankomende studenten is niet specialistisch, maar generalistisch ingesteld. Is communicatief. Aankomende studenten voelen intuïtief aan dat een wiskundestudie voor hen te eenzijdig is.

Het wordt daarom hoog tijd dat de wiskundeopleidingen moderniseren. Met meer ruimte voor de individuele ontplooiing van studenten. Een bredere opleiding, met zichtbare raakvlakken met de maatschappij en met andere vakken. De vraag is alleen of de opleidingen dit zelf nog mogen uitvoeren, of dat dit voor hun gedaan wordt!

Chris Zaal
hoofdredacteur Nieuw Archief voor Wiskunde

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
zaal@math.leidenuniv.nl

Agenda

juni 2002

16 juni

□ Onmogelijke getallen

Lezing door Hendrik Lenstra, die spreekt over onmogelijke getallen als π en priemgetallen.

plaats *Paradiso, Amsterdam*

info <http://www.klpoll.nl>

17–20 juni

□ Discrete probability

This workshop will focus on discrete probability and related areas, including combinatorics, randomized algorithms and scaling limits of discrete random structures.

plaats *Eurandom, TUE*

info <http://www.eurandom.tue.nl>

17–21 juni

□ 7th international conference on p-Adic functional analysis

Organisatie: W. Schikhof (KUN), A. Escassut (Clermont Ferrand), C. Perez-Garcia (Santander).

plaats *Universiteit Nijmegen*

info <http://www.sci.kun.nl/math/p-adic2002>

23–28 juni

□ SCEE-2002

Fourth International Workshop SCEE-2002 on Scientific Computing in the Electronics Industry. Aimed at mathematicians and electronical engineers.

plaats *Technische Universiteit Eindhoven*

info <http://www.win.tue.nl/scee2002>

27 en 28 juni

□ High performance optimization techniques 2002

plaats *Universteit Tilburg*

info <http://ssor.twi.tudelft.nl/~hpopt/hpopt2002>

juli 2002

1–3 juli 2002

□ 23e Society for multivariate analysis in the behavioral sciences

Congres bedoeld als discussiepodium voor onderzoekers op het gebied van de kwantitatieve methodologie in de sociale wetenschappen.

plaats *Tilburg*

info <http://www.kub.nl/SMABS2002>

5–11 juli

□ 7de Computer Olympiade

plaats *Maastricht*

info <http://www.cs.unimaas.nl/Olympiad2002>

12–17 juli

□ Orthogonal polynomials and special functions

Euro Summer School

plaats *Leuven, België*

info aw.twi.tudelft.nl/~koelink/opsf2002.html

21 juli – 2 augustus

□ String theory and quantum gravity

plaats *UvA, Amsterdam*

info <http://www.science.uva.nl/math/research>

augustus 2002

3–10 augustus

□ Logic Colloquium '02

plaats *Münster*

info <http://www.math.uni-muenster.de/LC2002>

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

5–9 augustus en 12–16 augustus

☐ **Vierkant zomerkampen**

plaats Lunteren

info <http://www.vierkantvoorwiskunde.nl>

11–16 augustus

☐ **Geometric and algebraic combinatorics 2**

Conference with emphasis on Algebraic Graph Theory, Finite Geometry, and Combinatorial Designs.

plaats Conferentiecentrum Boschoord, Oisterwijk

info <http://few.kub.nl/gac2>

23–24 augustus

☐ **Wiskunde en gezondheid**

Vakantiecursus voor leraren in de exacte vakken.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info <http://www.cwi.nl/events>

27–30 augustus

☐ **Euro-Par 2002 Conference**

Topic 11: Numerical Algorithms

plaats Paderborn, Duitsland

info <http://europar.upb.de>

30–31 augustus

☐ **Wiskunde en gezondheid**

Vakantiecursus voor leraren in de exacte vakken.

plaats CWI, Amsterdam

info <http://www.cwi.nl/events>

september 2002

5–6 september

☐ **ICT-Kenniscongres**

plaats Nederlands Congres Centrum, Den Haag

info <http://www.ict-kenniscongres.nl>

13 september

☐ **Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade**

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info <http://olympiads.win.tue.nl/nwo>

23–25 september

☐ **6th International Colloquium on Grammatical Inference**

plaats Amsterdam

info <http://www.illc.uva.nl>

25–27 september

☐ **Woudschoten-conferentie 2002**

De 27ste conferentie van de Nederlands-Vlaamse Numerieke Wiskunde Gemeenschappen heeft als thema: Eindige elementen.

plaats Conferentiecentrum Woudschoten, Zeist

info <http://www.cwi.nl/~jankok/woudschoten.html>

november 2002

7–11 oktober

☐ **Stochastic Models from Statistical Physics**

plaats Eurandom, Eindhoven

info <http://www.eurandom.tue.nl>

18 oktober

☐ **CWI in Bedrijf**

plaats CWI, Amsterdam

info <http://www.cwi.nl/events>

20 oktober

☐ **Nationale Wetenschapsdag**

Universiteiten en onderzoeksinstituten openen hun deuren voor het grote publiek.

plaats heel Nederland

info <http://www.weten.nl>

21–22 oktober

☐ **Belgian-Dutch Conference on Artificial Intelligence (BNAIC'02)**

plaats Faculty Club, Groot Begijnhof, Leuven

info <http://www.cs.kuleuven.ac.be/conference/bnaico2>

16 november

☐ **Jaarvergadering/studiedag NVvW**

plaats Utrecht

info <http://www.nvww.nl>

7–9 november

☐ **Analysis and optimization of stochastic networks**

plaats Eurandom, Eindhoven

info <http://www.eurandom.tue.nl/announcements.htm>

18–22 november

☐ **Workshop on Branes and Cosmology**

plaats Lorentz Center, Leiden

info <http://www.lc.leidenuniv.nl>

23 november

☐ **Ars et Mathesis-dag**

plaats Het Brandpunt, Baarn

info <http://www.arsetmathesis.nl>

29 november

☐ **Afscheidssymposium Marinus Kaashoek**

plaats Auditorium VU, Amsterdam

info André Ran, ran@cs.vu.nl

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar naw@math.leidenuniv.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Vertakking bliksem wiskundig verklaard

Onderzoekers van het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) in Amsterdam hebben ontdekt hoe elektrische ontladingen zoals bliksem zich vertakken. Zij hebben aangetoond dat het verschijnsel direct volgt uit het eenvoudigste wiskundige model van een ontlading. Tot nu toe werd aangenomen dat dit niet mogelijk was. Het werk van Manuel Arrayás, Ute Ebert en Willem Hundsdoerfer verscheen op 6 mei in het tijdschrift *Physical Review Letters*. De theorie is ook van toepassing op de onlangs waargenomen opwaartse bliksem: ontladingen van een donderwolk naar de veel hoger gelegen ionosfeer, die plaatsvinden op een veel grotere schaal dan de gewone bliksem naar de grond, en zich nog veel sterker blijken te vertakken.

De kracht van het CWI-model ligt in zijn eenvoud. De verklaring van de vertakkingen wordt gegeven met een model dat tot op heden daar-toe niet in staat werd geacht. De studie van vertakking in elektrische ontladingen is ook van industrieel belang, bijvoorbeeld bij het zuiveren van rookgassen of het produceren van ozon.

Henk Nieland



Wiskundigen willen leegloop een halt toeroepen

Donderdag 18 april werd het rapport *Nieuwe dimensies, ruimer bereik* in Den Haag aangeboden aan secretaris-generaal mr. H.J.E. Bruins Slot van het ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen. In de pers werd er ruime aandacht besteed. Enkele citaten:

Het Parool, 20 april, *Wiskundigen presenteren reddingsplan*: In de jaren negentig halveerde het aantal wiskundestudenten en nog steeds zet die daling zich voort. Als Rien Kaashoek, hoogleraar wiskunde aan de Vrije Universiteit het cursusjaar 2001/2002 een zeer goed jaar voor de VU noemt, dan is dat dus betrekkelijk: er schreven zich tweeëntwintig studenten bij de wiskundefaculteit in. Landelijk genomen lag het aantal eerstejaars wiskundestudenten op ruim tweehonderd en voor het komende jaar wordt weer een daling van twintig procent verwacht. Kaashoek is een van de initiatiefnemers van het rapport. Het rapport richt zich op het onderzoek en niet zozeer op de geringe animo bij studenten — dat is grotendeels een maatschappelijk probleem. “Niet voor niets hebben onze plannen ook steun van het bedrijfsleven”, aldus Lex Zandee, die namens de NWO bij het rapport betrokken was. Het Ministerie van OCW reageerde weinig enthousiast op die geldaanvraag, al werd het idee van clusters verwelkomd.

De Volkskrant, 27 april, *Wiskunde cijfert zich uit het moeras*: “Ik weet niet wie over vier, vijf jaar de banken, verzekeraars en andere afnemers nog moeten bevolken”, zegt prof.dr. Henk van der Vorst. Hij is behalve een van de internationaal best geciteerde wiskundigen, ook initiatiefnemer van een nieuwe nationale strategie voor wiskundeonderzoek. In eerste plaats bepleiten de opstellers dat de Nederlandse wiskundigen zich meer gaan concentreren op raakvlakken met de buitenwereld

Het ideaal is een stuk of twaalf tot veertien onderzoeksclusters, gedragen door vier tot zes hoogleraren, met nog eens tien man staf en nog eens acht tot tien promovendi. Het extra te fourneren geld (veertig miljoen euro) moet vooral hoogleraarsaanstellingen mogelijk maken die boven de gebruikelijke financiering op basis van aantallen studenten uitstijgen. Is zo'n fikse uitbreiding realistisch? Volgens Annejet Meijler, directeur Exacte wetenschappen bij onderzoeksfinancier NWO in Den Haag en zeer nauw betrokken bij het nieuwe initiatief, is er geen sprake van luchtflitsen. "De wiskunde in Nederland," zegt ze, "heeft al de omvang van een beetje ruime familie. Bij de eerste de beste Albert Heijn werken ook zeventig mensen. Dit plan biedt een zakelijke berekening van wat minimaal nodig is als Nederland wiskundig de broek wil kunnen ophouden."

bron: de Volkskrant, het Parool

Het achtendertigste Nederlands Mathematisch Congres

Op 4 en 5 april 2002 heeft het achtendertigste NMC plaatsgevonden in Eindhoven. Doel van het congres was het presenteren van nieuwe ontwikkelingen in de wiskunde aan alle Nederlanders die, al dan niet actief, in het vak geïnteresseerd zijn. Het realiseren van deze ambitieuze doelstelling vergt nogal wat presentatievaardigheden van de sprekers. Het vinden van de juiste balans tussen het motiveren, het uitleggen en het informeren in een voordracht is, gezien de brede achtergrond van het publiek, erg belangrijk. Helaas was deze balans maar moeilijk terug te vinden in de door mij bezochte voordrachten op de eerste dag, maar dit werd redelijk compenseerd door de voordrachten op de tweede dag.

Het congres was opgebouwd uit hoofdvordrachten en minisymposia. De onderwerpen van de mini-symposia liepen erg uiteen en dekten de interesse van een breed publiek: geschiedenis, industrie, onderwijs en onderzoek. Hoewel volgens de NAW-editie van juni 2000 er een dalende tendens in het aantal bezoekers te bespeuren valt, merkte ik daar weinig van. Integendeel, de deelnemerslijst telde 283 bezoekers; meer dan twee maal zoveel als in 2000.

Naast de traditionele hoofdvordrachten en mini-symposia werden dit jaar, bij wijze van experiment, twee parallelle presentaties van promotieonderzoek gehouden. In een tijdsbestek van 5 minuten kregen promovendi de mogelijkheid om hun onderzoek bij een groot en breed publiek naar voren te brengen. Dit resulteerde in een amusant en informatief uur waarin promovendi enthousiast over hun onderzoek vertelden. Jammer genoeg bleef een vergelijkbaar replek, waarbij mogelijk interessante contacten konden ontstaan, bij veel promovendi achterwege.

Samenvattend kijk ik terug op een goed georganiseerd congres met een gevarieerd programma. De traditionele focus op verschillende richtingen in de wiskunde, met name die op het wiskunde-onderwijs, werd door mij zeer gewaardeerd. De presentaties van promotieonderzoek, die extra aandacht schenken aan promovendi, mogen mijns inziens een vast onderdeel van het programma worden. Op naar het negendertigste NMC in Nijmegen!

Sandjai Bhulai

Leopold Vietoris overleden

Op 9 april overleed op de oudste inwoner van Oostenrijk, Leopold Vietoris, 4 juni 1891 – 9 april 2002. Hij was ook de oudste wiskundige van de wereld. Hij is 110 geworden.

Vietoris was topoloog en een van de eersten die zich begaf op het terrein van de algebraïsche topologie. Vietoris, geboren in Radkers-

burg (Styria), studeerde in Wenen, voltooide in de Eerste Wereldoorlog in Italiaanse (!) krijgsgevangenschap zijn proefschrift. Hij werd in 1928 hoogleraar in Wenen en in 1930 in Innsbruck waar hij de rest van zijn leven bleef wonen. Zijn naam leeft voort in de Vietoris-topologie, de Vietoris-homologie, de Mayer-Vietoris-rij en de afbeeldingsstelling Vietoris-Begle. Vietoris had een bijzondere band met Nederland doordat hij, dankzij een Rockefeller-beurs, tot het illustere gezelschap (met Menger en Alexandrov) hoorde dat in 1924/25 bij Brouwer aan topologie werkte. Vietoris publiceerde als uitvloeisel van deze samenwerking een verfijning van de dekpuntsstelling, waar Begle in 1950 op voortbouwde.

Gerard Alberts



Vietoris bij zijn 108-ste verjaardag

Emeritaat Huib Kwakernaak

Huib Kwakernaak liet karretjes rijden die stokken konden balanceren. Zo zou een student nooit meer vergeten wat je met terugkoppeling kunt bereiken. Overigens is de student die bij Kwakernaaks afscheid aan de karretjes herinnerde, hoogleraar vervoer geworden.

Kwakernaak (1937) gaat met emeritaat als hoogleraar deterministische systeemtheorie aan de Universiteit Twente. Sinds zijn benoeming in 1970 begeleidde hij meer dan 300 afstudeerders. Hij behoort tot de generatie die zich begin jaren zestig de moderne systeemtheorie in de Verenigde Staten bij mensen als Zadeh en Kalman eigen maakte en verder ontwikkelde. Zijn leerboek uit 1972 *Linear Optimal Control Systems*, met R. Sivan, wordt nog altijd herdrukt en gebruikt. Een belangrijk deel van zijn onderzoek ligt op het gebied van polynomiale methoden.

Huib Kwakernaak is Fellow of the IEEE (Institute of Electrical and Electronic Engineers) en werd onderscheiden met de Distinguished Service Award van de IFAC (International Federation of Automatic Control). Hij is hoofdredacteur van *Automatica*. Hij was mede-oprichter en enkele jaren directeur van de onderzoeksschool DISC (Dutch Institute of Systems and Control).

Jos de Smit (UT), Jan Willem Polderman (UT), Geert Jan Olsder (TUD), Martin van Maarseveen (TUD), Okko Bosgra (DISC) en Tamer Basar (IFAC) deden hem op 12 april uitgeleide. In zijn afscheidsrede herinnerde Kwakernaak aan de Delftse hoogleraar Van de Marel die natuurkunde gaf op zijn middelbare school en hem inspireerde tot de studie in dat vak. Lof zwaaide hij toe aan die andere grote Nederlandse naam in de systeemtheorie, Jan Willems, vanwege diens baanbrekende definitie van systeem. Kwakernaak heeft een nieuw leerboek op stapel staan, *Design Methods for Control Systems*, met Okko Bosgra, en hekelde en passant het huidige waarderingssysteem dat een wetenschapper geen erkenning geeft voor het schrijven van boeken.

Gerard Alberts & Jan Schut

Wiskunde Scholen Prijs

Op de vrijdag van het Nederlands Mathematische Congres te Eindhoven vond ook de uitreiking plaats van de Wiskunde Scholen Prijs 2002. Dit evenement is onderdeel van het WisKids-project (zie NAW december 2001, pagina 311). De wedstrijd heeft tot doel de aandacht te vestigen op de vele enthousiasmerende activiteiten op het gebied van het wiskunde-onderwijs op de middelbare scholen. Dit jaar was de eerste keer dat deze wedstrijd plaatsvond. Er waren dertig vooraanmeldingen, hetgeen resulteerde in dertien inzendingen in drie categorieën.

Professor Fred van der Blij presenteerde op geanimeerde en onderhoudende wijze de prijsuitreiking. Het juryoordeel werd door Van der Blij samengevat: de inzendingen waren leuk om te lezen; dertien inzendingen is geen groot aantal, maar bleek toch veelbelovend genoeg als start voor dit nieuwe initiatief. Er waren veel één-persoons-initiatieven en maar weinig inzendingen van hele secties. Op <http://www.fi.uu/wiskids> staat het complete juryrapport.

De eerste prijs basisvorming (1000 euro) was voor het Barlaeus gymnasium te Amsterdam. Het onderwerp was: 'Raadselachtige wiskunde'. Dit was een project van docent Bart Sevenek. In de eerste brugklas moesten leerlingen puzzels presenteren. Later in het jaar werd de oplossing gepresenteerd. Als voorbeeld voerden twee leerlingen uit klas 1a het 1089-raadsel ten tonele: neem twee getallen van drie verschillende cijfers, trek de kleinste van de grootste af, draai het eindresultaat om en tel dit erbij op. Resultaat: 1089. Daarna volgde een verzorgd en hermetisch sluitend bewijs van dit resultaat. Perfect!

Het IJsselcollege uit Capelle a/d IJssel kreeg de tweede prijs (750 euro) in de basisvorming voor hun Wiskundespeurtocht en IJssellympics. De eerste prijs vmbo (1000 euro) was voor het Stedelijk College te Eindhoven met een vliegerproject, de eerste prijs voor havo/vwo (klas 3-6) (1000 euro) was voor het Meridiaancollege te Apeldoorn, met een project over projecties in de wijk.

Dit was de eerste keer dat deze wedstrijd gehouden is. Veel docenten bleken schroom te hebben om zichzelf op te geven, waarschijnlijk vanwege een gering vertrouwen in de eigen kwaliteit. Hopelijk kunnen de inzendingen van dit jaar leraren en scholen motiveren volgend jaar meer in te zenden, zodat de Wiskunde Scholen Prijs kan bijdragen wiskundeonderwijs in een goed daglicht te stellen.

Chris Zaal



Leerlingen van klas 1a van het Barlaeus Gymnasium presenteren de oplossing van hun raadsel.

Emeritaat Bert Peletier

Van 18 tot 29 maart vond in het Lorentz centrum in Leiden de *Workshop on Nonlinear Phenomena in Science* plaats. De workshop was georganiseerd ter ere van het emeritaat van Bert Peletier, die vanaf

1977 hoogleraar aan de universiteit van Leiden is geweest. Van 1967 tot 1974 was hij verbonden aan de universiteit van Sussex in Engeland en daarna was hij enkele jaren hoogleraar in Delft. Hij heeft bijgedragen aan de ontwikkeling van het vakgebied van de niet-lineaire analyse van gewone en partiële differentiaalvergelijkingen. Hij begeleidde vele succesvolle promovendi op dit gebied.

Van hen waren de meesten met een voordracht op de workshop aanwezig. De workshop had ongeveer veertig deelnemers die vrijwel allemaal met Bert Peletier hadden samengewerkt. Het gemak waarmee menige spreker verschijnselen uit de alledaagse (biologische, fysische) werkelijkheid door abstracte analyse verklaarde was opvallend. Daarmee was het ook op het gebied van de wiskundige modellering een bijzondere workshop.

Derk Pik

Delftse lessen

De Technische Universiteit Delft zet nieuwe lijnen uit voor de toekomst. De strategienota van september 2001 en portfolio van maart 2002 dreigen dit najaar geïmplementeerd te worden. Op de nominatie om 'afgebouwd' te worden staat het onderzoeksprogramma Algebra en Meetkunde. In concreto betekent dit dat de leerstoelgroep Algebra van Prof.dr.ir Th.H.M. Smits en Meetkunde van Prof.dr J.M. Aarts hun onderzoekstijd verliezen en dat de leerstoelen na het emeritaat van beide hoogleraren niet opgevuld zullen worden. De vrijkomende acht formatieplaatsen worden ingezet om het onderzoek van informatica te versterken. Wiskunde in Delft valt onder de faculteit ITS, Informatietechnologie en Systemen, die vijf jaar geleden werd geformeerd uit Toegepaste Wiskunde, Informatica en Elektrotechniek. Decaan Jan van Katwijk van ITS haast zich om te zeggen dat er "geen mensen of loopbanen worden afgebroken, slechts programma's". Maar de onderzoeksruimte verdwijnt, geeft hij toe.

De TU Delft wil tot de top behoren en realiseert zich dat dat niet op alle terreinen tegelijk kan. Er moeten keuzes gemaakt worden, een portefeuille samengesteld van programma's waarin men werkelijk wil scoren. Een portfolio-commissie onder voorzitterschap van Prof.dr.ir P.M. Dewilde adviseerde om te koersen op een beperkt aantal speerpunten en per faculteit op een beperkt aantal thema's. Op basis van strategienota en portfolio nemen nu de faculteiten hun besluiten over de concrete invulling van de operatie. Hoewel in het zicht van de finish de hele operatie een beetje uitgesteld en bijgesteld wordt — in het najaar verschijnt een 'update' van de nog verse strategienota — lijkt de opheffing van het Algebra & Meetkunde-programma onontkoombaar. De faculteit ITS zelf heeft hier immers toe besloten: "De thematiek van het onderzoeksprogramma Algebra en Meetkunde sluit in onvoldoende mate aan bij het onderzoeksthema Intelligent Systems en is niet in te passen in gekozen thematiek van het onderzoeksthema Applied Mathematics. Alhoewel het onderzoeksprogramma niet als 'slecht' te beoordelen is, is de kwaliteit, visie en focussering onvoldoende om het als zelfstandig onderzoeksprogramma een levensvatbare toekomst te garanderen."

Met name voor Aarts is de boodschap bitter. Hij heeft er bij de vorming van de faculteit ITS in 1997 hard aan getrokken dat groepen zouden integreren. Er is nogal wat voor nodig om te zorgen dat de wiskundigen niet toegeven aan hun natuurlijke neiging tot verkeren in eigen kring. De wiskunde werd verdeeld over verschillende afdelingen. Algebra en Meetkunde vond onderdak bij de afdeling met de fantasievolle naam 'Mediamatica'. En nu krijgt juist zijn groep het verwijt dat ze er onvoldoende in is geslaagd aansluiting te vinden. Geef je je eigen naam, organisatievorm en in zekere zin de eigen identiteit op, krijg je

de kous op de kop. Waar de Universiteit Twente overweegt de wiskunde op te splitsen, waar de VSNU speelt met een advies de bèta-studies op een hoop te gooien, is Van Katwijk door de recente ervaring wijs geworden: "Het slechtste wat je kunt doen, wanneer je een discipline wilt ontwikkelen, is het verdelen in brokjes en inbedden als een soort gezwelletjes in andere organen."

Maar de Delftse profileringswoede keert zich toch ten halve. Binnen de commissie Dewilde heeft Prof.dr.ir R. de Borst, directeur van het Koiter-instituut, herinnerd aan de propaedeutische functie van wiskunde en mechanica. De commissie heeft aanbevolen deze beide 'technische basisdisciplines' te bundelen in een centrum. "Dit biedt de mogelijkheid om het onderzoek op deze gebieden beter te profileren en doet recht aan de centrale rol die zij in de opleidingen vervullen. Het College van Bestuur neemt deze aanbeveling over en zal de discipline wiskunde onderbrengen in een centrum voor Applied Mathematics dat verankerd wordt binnen de faculteit ITS. De discipline mechanica wordt ondergebracht in een centrum voor Applied Mechanics dat verankerd wordt binnen het Koiter-instituut." Na dit CvB-besluit van 12 maart jongstleden kan Van Katwijk, wiens facultaire portfolio in eerste concept nog had gesteld dat voor het dienstverlenend onderwijs al het facultaire personeel kon worden ingeschakeld, dan ook trots stellen dat de faculteit de propaedeutische functie van de wiskunde koestert.

Gerard Alberts

Kwaliteit van onderzoek aan Nederlandse universiteiten

Het Centrum voor Wetenschaps- en Technologiestudies te Leiden rekende voor het weekblad *Elsevier* uit welke Nederlandse universiteiten meetellen in de internationale top van het wetenschappelijke onderzoek. Voor 34 disciplines werd vastgesteld hoeveel publicaties de laatste tien jaar behoorden bij de tien procent van de wereldwijd meest geciteerde artikelen. Op het gebied van de wiskunde scoorde de Universiteit van Utrecht het hoogst, met veertig artikelen bij tien procent van de wereldwijd meest geciteerde artikelen. Op de tweede plaats kwam Delft met 33 artikelen en op de derde plaats stond Leiden met 24 artikelen. De totale productie van de drie faculteiten ontloopt elkaar bijna niet; alle drie faculteiten produceerden ongeveer 220 artikelen in de periode 1991-1996.

Bij de bestudering van de cijfers op de website van het Centrum voor Wetenschaps- en Technologiestudies blijkt overigens dat het artikel *Quasi-periodic motions in families of dynamical systems* van H.W. Broere (RUG), G.B. Huitema (KPN) en M.B. Sevryuk (Moskou) het meest geciteerde Nederlandse wiskunde-artikel in de periode 1991-1996 is. Het is enigszins teleurstellend dat de lijst met tijdschriften die door het Centrum voor Wetenschaps- en Technologiestudies belangrijk genoeg worden geacht, geheim wordt gehouden. *bron: Elsevier, 16 maart 2002*

AIO/OIO-overleg overhandigt rapport aan minister Hermans

Slechts zeven procent van de promovendi is in staat om het onderzoek binnen de daarvoor gestelde termijn af te ronden, aldus het Landelijk AIO/OIO Overleg (LAIOO). Zij heeft door middel van kwalitatief onderzoek geprobeerd te achterhalen wat de belangrijkste knelpunten bij de begeleiding van jonge onderzoekers zijn. De knelpunten zijn samen met aanbevelingen aan bestuurders, begeleiders en jonge onderzoekers zelf, gebundeld in het rapport *Behoud Talent!* Minister Hermans heeft het rapport op 25 februari jongstleden in ontvangst genomen tijdens een door het LAIOO georganiseerd symposium. Hij maakte bekend financiële middelen ter beschikking te willen stellen om de

positie en organisatorische slagkracht van het LAIOO in de universitaire gremia te versterken. D. Breimer (voorzitter van het college van rectoren) gaf aan dat hij zeer te spreken is over de aanbevelingen die gedaan worden door het LAIOO.

Enkele belangrijke aanbevelingen uit *Behoud Talent!*: in plaats van hoogleraren nog meer formuleren te laten invullen dienen ze overtuigd te worden van het nut van een goede begeleiding van promovendi, de promotierendementscijfers dienen op meerdere niveaus (facultair en universitair) geëvalueerd te worden en op alle niveaus dient er open gesproken te worden over promotierendementscijfers. Meer informatie: <http://pubwww.tudelft.nl/laioo/BT.htm>

Ingrid Giebels

Najaarssymposium 2001

Op 20 december 2001 organiseerde het Wiskundig Genootschap het najaarssymposium dat in het teken stond van wiskunde en muziek. Het symposium werd bijgewoond door ongeveer zestig wiskundige muzikliefhebbers van alle leeftijden. Er waren drie thema's: akoestische eigenschappen van houtblaasinstrumenten, muziekweergave en toonstemmingen. Het geheel werd omlijst met zeer afwisselende muziek. Zo werd de dag muzikaal geopend door het blaaskwintet Cartouche.

In de eerste lezing liet Kees Nederveen aan de hand van een groot assortiment aan houtblaasinstrumenten zien en horen hoe verschillende aanblaastechnieken, vorm en plaats van de gaten de karakteristieke klank van een instrument bepalen. Na een muzikaal intermezzo, wederom verzorgd door Cartouche, was het woord aan barokfluitbouwer Simon Polak. Hij vertelde over de moeilijkheden van het maken van de juiste boring en het vinden van buiken en knopen. In het tweede thema legde Ronald Aarts onder andere uit hoe het Ultra Bass effect in een kleine radio wordt verkregen en wat de ideale plaats is van vijf speakers om stereo signalen uit te breiden tot Incredible Surround (0° , $\pm 30^\circ$ en $\pm 110^\circ$). Tijdens de lunch die volgde werd weer eens duidelijk dat muziek een bindend element is voor verschillende mensen van uiteenlopende leeftijd.

Het derde thema begon met de voordracht van Aad Goddijn waarin de middentoonstemming en andere historische stemwijzen centraal stonden. In een stuk van Rossi dat op een clavecimbel werd uitgevoerd, waren de aparte klanken van de middentoonstemming duidelijk te horen. Gelukkig waren er bij dit technisch lastigere gedeelte handouts aanwezig, wat ook gold voor de voor de volgende lezing verzorgd door Jan van de Craats. Van de Craats vertelde over de rechthoekige toonsystemen van Euler en het idee van Huygens het octaaf in eenendertig gelijke deelintervallen te verdelen. Na een meeslepend piano intermezzo gespeeld door Frank Redig werd het derde thema afgesloten door Theo Althuis. Hij maakte de toehoorders wegwijs in de atonale muziek. In atonale muziek kent men geen grondtoon en zijn alle tonen even belangrijk; er is daarom minder structuur te horen. Althuis liet zien dat er echter wel wiskundige structuren in deze muziek terug te vinden zijn. Met een afsluitende borrel kwam er een eind aan deze geslaagde dag, die voor velen een goede start van de kerstvakantie was. *Hilke Rösler*

Erratum maartnummer 2002

Weia Reinboud, een van de twee auteurs van het artikel *Snel-lius versneld* staat als studente vermeld. Dit moet *publiciste* zijn.

De eindredactie

Deze rubriek is een kroniek van de activiteiten van het Wiskundig Genootschap. Van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan en toekomstige activiteiten worden aankondigd.

Financieel verslag 2001 en begroting 2002

Met ingang van 1 januari 2001 is de financiële boekhouding grotendeels geautomatiseerd. Het *Microsoft Excel*-werkblad, welk voorheen gebruikt werd, heeft plaats gemaakt voor professionele boekhoudsoftware van *Davilex Business*. Dit garandeert interne consistentie (debet- en creditzijde zijn altijd in evenwicht, rekenfouten behoren tot het verleden, overeenstemming met kasboektotalen wordt bij invoer afgedwongen) en zal op den duur de taak van de penningmeester en de overdracht van het penningmeesterschap vereenvoudigen. Daarnaast bieden de vele rapportagemogelijkheden een vollediger beeld ter ondersteuning bij kascontroles.

De nieuwe werkwijze heeft implicaties voor de vorm van het financieel jaarverslag. Zo is de rubricering in overeenstemming gebracht met boekhoudkundige conventies en daardoor afwijkend van die uit voorgaande jaren. Waar nodig zullen wijzigingen in rubricering toegelicht worden.

Balans begin 2001

De beginbalans 2001 is afgeleid uit de eindbalans 2000. De rubricering is echter gewijzigd. De huidige balans bevat de balansposten *vaste activa*, *vlootende activa*, *eigen vermogen* en *vreemd vermogen*. De relatie tussen oude en nieuwe rubrieken volgt eenvoudig door tabel 1 met tabel 2 te vergelijken. De eindbalans 2000 is ongewijzigd overgenomen uit het financieel jaarverslag 2000 (tabel 1). De beginbalans 2001 is inhoudelijk gelijk, maar maakt gebruik van de nieuwe rubricering (tabel 2).

NAW adverteerders, Pi sponsors, deelname Epsilon Uitgeverij en overbrugging Pythagoras zijn specificaties van *vorderingen* (of *debiteuren*) en zullen in de toekomst, voor zover van toepassing, onder die verzamelrubriek in de balans bijeengebracht worden. De ad hoc post Pi sponsors is ingevoerd als verzamelpost voor sponsors van het Pi evenement en keert op de eindbalans 2001 niet meer terug. Merk op dat er geen overeenkomstige specificatie voor Pi-gerelateerde crediteuren bestaat; deze vallen onder de verzamelpost *crediteuren*.

De oude posten betaalrekeningen en deposito's vallen onder de nieuwe rubriek *liquide middelen*, waarbij de eerste voortaan uitgesplitst wordt naar de afzonderlijke courante rekeningen. De deposito komt in de loop van 2001 tot uitkering en zal daarom niet meer op de eindbalans 2001 figureren.

De oude post effecten heet voortaan aandelen en maakt onderdeel uit van de rubriek *financiële vaste activa*, tezamen met de spaarrekeningen Postbank Kapitaalrekening en ABN AMRO Kapitaalmarktindexrekening. Deze laatste twee worden voortaan uitgesplitst naar de afzonderlijke spaarrekeningen in tegenstelling tot voorgaande jaren.

De voormalige balanspost openstaande rekeningen blijft bestaan onder de nieuwe naam crediteuren totaal of kortweg *crediteuren*.

De reservering adresboek heet voortaan algemene reserve. De bijzondere reserve blijft als zodanig bestaan. Reserveringen vormen tezamen met het kapitaal het *eigen vermogen*. Het kapitaal (dus eigen vermogen zonder de reserves) zal, net als in voorgaande jaren, als maatstaf voor de resultatenrekening gehandhaafd worden.

Balans eind 2001

De balans over het boekjaar staat in tabel 3.

Resultatenrekening 2001

Het eigen vermogen is over het boekjaar 2001 (na koerswinstcorrectie) met f 21.305,46 oftewel € 9.668,00 afgenomen, zie tabel 4.

BATEN	f	€	LASTEN	f	€
betaalrekeningen	61.013,09	27.686,53	openstaande rekeningen	146.509,00	66.482,89
spaarrekeningen	326.099,51	147.977,51	reservering adresboek	20.000,00	9.075,60
deposito's	25.246,30	11.456,27	bijzondere reserve	24.000,00	10.890,73
effekten	11.064,03	5.020,64			
NAW adverteerders	5.902,65	2.678,51			
Pi sponsors	41.892,20	19.009,85			
deelname Epsilon Uitgeverij	18.740,00	8.503,84			
overbrugging Pythagoras	23.385,93	10.612,07	kapitaal eind 2000	322.834,71	146.496,00
	513.343,71	232.945,22		513.343,71	232.945,22

Tabel 1 Eindbalans 2000 volgens oude rubricering

ACTIVA	f	€	PASSIVA	f	€
vlottende activa:			vreemd vermogen:		
<i>vorderingen:</i>			<i>crediteuren:</i>		
NAW adverteerders	5.902,65	2.678,51	crediteuren totaal	146.509,00	66.482,89
Pi sponsors	41.892,20	19.009,85			
deelname Epsilon Uitgeverij	18.740,00	8.503,84	eigen vermogen:		
overbrugging Pythagoras	23.385,93	10.612,07	algemene reserve	20.000,00	9.075,60
<i>liquide middelen:</i>			bijzondere reserve	24.000,00	10.890,73
Postbank	36.658,02	16.634,68			
ABN AMRO Bank	24.355,07	11.051,85			
deposito	25.246,30	11.456,27	kapitaal begin 2001	322.834,71	146.496,00
vaste activa:				513.343,71	232.945,22
<i>financiële vaste activa:</i>					
aandelen	11.064,03	5.020,64			
Postbank Kapitaalrekening	200.000,00	90.756,04			
ABN AMRO Kapitaalmarktindex	126.099,51	57.221,46			
	513.343,71	232.945,22			

Tabel 2 Beginbalans 2001 volgens nieuwe rubricering. Afgezien van de rubricering komt deze overeen met tabel 1.

ACTIVA	f	€	PASSIVA	f	€
vlottende activa:			vreemd vermogen:		
<i>vorderingen:</i>			<i>crediteuren:</i>		
debiteuren	6.715,00	3.047,13	crediteuren totaal	141.694,01	64.297,94
dubieuze debiteuren	1.830,50	830,64			
deelname Epsilon Uitgeverij	16.840,00	7.641,66	eigen vermogen:		
overbrugging Pythagoras	5.575,62	2.530,11	algemene reserve	20.000,00	9.075,60
<i>liquide middelen:</i>			bijzondere reserve	24.000,00	10.890,73
Postbank	47.604,76	21.602,10			
ABN AMRO Bank	87.220,97	39.579,15			
vaste activa:					
<i>financiële vaste activa:</i>					
aandelen	9.312,39	4.225,78	kapitaal eind 2001	299.777,61	136.033,15
Postbank Kapitaalrekening	179.000,52	81.226,89			
ABN AMRO Kapitaalmarktindex	131.371,86	59.613,95			
af rondingsverschillen		0,01			
	485.471,62	220.297,42		485.471,62	220.297,42

Tabel 3 Eindbalans 2001

	<i>f</i>	€
kapitaal eind 2000	322.834,71	146.496,00
koerswinst	-1.751,64	-794,86
	321.083,07	145.701,14
saldo	-21.305,46	-9.668,00
afroondingsverschillen		0,01
kapitaal eind 2001	299.777,61	136.033,15

Tabel 4 Resultatenrekening 2001

	<i>f</i>
deelname Epsilon Uitgeverij begin 2001	18.740,00
Af: door Epsilon Uitgeverij aan WG afgelost	1.900,00-
deelname Epsilon Uitgeverij eind 2001	16.840,00

Tabel 5 Mutaties in deelname Epsilon Uitgeverij. De vetgedrukte bedragen zijn terug te vinden in de beginbalans 2001 respectievelijk eindbalans 2001.

	<i>f</i>
overbrugging Pythagoras begin 2001	23.385,93
Af: door Pythagoras aan WG betaald	12.810,31-
Af: WG sponsoring 2001 aan Pythagoras	5.000,00-
overbrugging Pythagoras eind 2001	5.575,62

Tabel 6 Mutaties in overbrugging Pythagoras. De vetgedrukte bedragen zijn terug te vinden in de beginbalans 2001 respectievelijk eindbalans 2001.

Toelichting op balans en resultatenrekening 2001

- De rubriek *dubieuze debiteuren* betreft onzekere vorderingen (dat wil zeggen vorderingen gebaseerd op onzekere informatie). In de loop van 2002 zal meer zekerheid hieromtrent verschaft worden.
- Epsilon Uitgaven betaalde in 2001 *f* 1.900,00 aan aflossing. De deelname van het WG in Epsilon Uitgaven is hierdoor gedaald van *f* 18.740,00 naar *f* 16.840,00: tabel 5.
- Pythagoras loste in 2001 *f* 12.810,31 af aan het WG. Dit bedrag is tezamen met het jaarlijkse sponsorbedrag van het WG aan Pythagoras van *f* 5.000,00 in mindering gebracht op de overbrugging Pythagoras. Deze is daardoor afgenomen van *f* 23.385,93 (begin 2001) tot *f* 5.575,62 (eind 2001): tabel 6.
- De aandelenportefeuille is per ultimo 2001 als volgt samengesteld: 165,9772 aandelen Rolinco à € 25,46: € 4.225,78, dat is *f* 9.312,39.
- Er is in voorgaande jaren *f* 20.000,00 gereserveerd tbv. het adresboekje. Deze reserve is in 2001 niet verhoogd, omdat de kosten van toekomstige productie dit bedrag naar alle waarschijnlijkheid niet zullen overstijgen.

Begroting en kosten 2001 en begroting 2002

Tabel 7 toont de begrote en werkelijke kosten over het boekjaar 2001 en de kosten zoals die begroot zijn voor het boekjaar 2002.

Toelichting bij tabel 7:

Ad 4125: De salarisverdeling is als volgt:

- hoofdredactie NAW: 35% (0.3 fte),
- eindredactie NAW: 29% (0.2 fte),
- bureauredactie NAW: 21% (0.4 fte),
- secretariaat WG-ledenadministratie: 15% (0.2 fte).

De salarisbegroting voor 2001 is te laag ingeschat.

Ad 4151: Dit betreft het WG-aandeel in de portiekosten; de bijdrage van het CWI (in 2001 *f* 8.635,09 oftewel € 3.918,43) is hierin reeds verdisconteerd. De totale uitgaven aan porti door WG en CWI samen bedraagt derhalve *f* 15.498,49 oftewel € 7.032,91. In de begroting voor 2001 was de CWI bijdrage niet voorzien; dit verklaart het verschil met de werkelijke kosten.

Ad 4157, 4160: De relatie tussen de nieuwe rubriek overige kosten en de oude rubricering is enigszins arbitrair. Hierdoor is een stricte vergelijking tussen werkelijke kosten en de begroting voor 2001 moeilijk te maken. Dit geldt in mindere mate overigens ook voor enkele andere rubrieken.

Ad 4154: De begroting gaat uit van de veronderstelling dat de reservering van € 4.000 toereikend is.

Ad 4170: Het WG heeft in 2001 de volgende sponsorbijdragen verstrekt:

- najaarssymposium: *f* 1.500,00,
- wintersymposium: *f* 700,91,
- Stichting Vierkant: *f* 3.000,00,
- Abacus: *f* 1.000,00.

Het totaal hiervan bedraagt *f* 6.200,91 oftewel € 2.813,85. In de begroting is, naast een schatting op basis van feitelijke sponsoring in 2001, ook een sponsorbijdrage aan Pythagoras (€ 2.250), aan het Nederlands Mathematisch Congres (€ 900) en ten behoeve van de Brouwerlezing (€ 2.000) opgenomen. Uitgangspunt is dat de overige kosten verbonden aan laatstgenoemde door derden gedragen zullen worden. De oorspronkelijke begroting voor 2001 is aanmerkelijk hoger dan de feitelijke kosten. Voor een deel is dit te verklaren doordat de sponsoring aan Pythagoras over 2001 op een andere wijze verrekend is, namelijk via de overbrugging aan Pythagoras (zie tabel 6).

Ad 4200: De premie voor de bestuursverzekering voor 2002 is feitelijk ten laste gekomen van 2001. Dit verklaart zowel de begroting voor 2002 als het verschil tussen werkelijke kosten en begroting voor 2001.

Ad 4252: Door late facturering van voorgaande jaren is er feitelijk een bedrag aan IM afgedragen over 1999/2000 dat hoger is dan de reservering van *f* 6.000 die daarvoor gemaakt is, namelijk *f* 8.543,60. Het verschil van *f* 2.543,60 is ten laste gebracht van 2001. De afdracht IM over 2001 bedraagt *f* 3.932,60, zodat de totale afdracht IM ten laste van 2001 *f* 6.476,20 bedraagt, oftewel € 2.938,77.

Ad 4253: De KNAW heeft het grootste deel van de jaarlijkse kosten op zich genomen van het IMU-lidmaatschap van Nederland (dit was niet geanticipeerd in de begroting voor 2001). Het WG draagt € 750 per jaar bij.

Ad 7250: De afdracht SDF wordt niet als kosten beschouwd. De donaties SDF worden niet als baten beschouwd. Deze twee posten zijn per definitie in balans. De afdracht SDF is in 2001 niet uitgevoerd. Het bedrag uit voorgaande jaren (*f* 4.377,69) is tezamen met de in 2001 binnengekomen donaties (*f* 1.919,50) ondergebracht als "afdracht SDF" in de verzamelpost *crediteuren* op de eindbalans 2001. Het totaalbedrag zal in 2002 daadwerkelijk worden afgedragen.

Begroting en baten 2001 en begroting 2002

Tabel 8 toont de begrote en werkelijke baten over het boekjaar 2001 en de baten zoals die begroot zijn voor het boekjaar 2002.

Toelichting bij tabel 8:

Ad 5150: Het aantal contributie verschuldigde WG-leden bedraagt 1290 (peildatum: 26 maart 2002). Deze zijn verdeeld over vier tarief-groepen (per 1 januari 2002): €70 (gewone leden: 885), €50 (reciprociteitsleden: 155), €35 (gepensioneerde leden) en €25 (studentleden). Door de nieuwe tarieven wordt er over 2002 een hogere bate uit contributies verwacht. De werkelijke inkomsten over 2001 zijn hoger dan begroot door het innen van achterstallige contributies middels herinneringsfacturen.

Ad 5151: In de begroting is uitsluitend de structurele bate van het Godefroy legaat opgenomen. Baten uit donaties wijken in 2001 in gunstige zin af van voorgaande jaren, maar dit wordt als een eenmalige meevaller beschouwd.

Ad 5153: De begroting is gebaseerd op de op dit moment lopende contracten met adverteerders voor NAW jaargang 2002. Het staat vrijwel vast dat advertentie-inkomsten in 2002 aanmerkelijk lager zullen uitvallen dan in 2001.

Ad 9000, 9052, 9090: De rente-inkomsten over 2002 zullen lager zijn dan in 2001 als gevolg van de afname van het spaartegoed. De

tot uitkering gekomen deposito leverde in 2001 bovendien extra rente-inkomsten op.

Samenvatting

Tabel 7 en tabel 8 tonen een saldotekort over 2001 van €9.668,00 (€101.612,85 minus €91.944,85) en een begrotingstekort voor 2002 van €3.250 (€99.250 minus €96.000).

Het feitelijke saldotekort €9.668,00 is aanzienlijk kleiner dan aanvankelijk begroot (f 65.000, oftewel €29.495,71, zie financieel jaarverslag 2000). Ondanks hogere salariskosten is er sprake van een aanzienlijke kostenreductie op de posten porti (dankzij het CWI aandeel hierin), afdracht IMU (dankzij de forse KNAW bijdrage) en sponsoring. De eerste twee zijn structureel van aard. Ook zijn er meevallende eenmalige baten, met name uit donaties en achterstallige contributies.

Het tekort neemt volgens de begroting verder af tot €3.250 over het boekjaar 2002. Helaas is de significante stijging van de baten uit contributies en de daling in salariskosten niet voldoende om het tekort geheel op te heffen. De verwachte tegenvallende inkomsten uit advertenties NAW zijn de belangrijkste oorzaak. Desalniettemin kan men constateren dat het WG zijn weg gevonden lijkt te hebben naar een gezondere financiële positie.

Luc Florack, penningmeester, Utrecht, 4 april 2002

grootboekrek. nr.	omschrijving	begroot 2001 (f)	begroot 2001 (€)	werkelijk (€)	begroot 2002 (€)
4125	salarissen	76.500	34.714,19	43.187,91	40.000
4151	porti	21.000	9.529,38	3.114,48	3.500
4153	ontwerpkosten	14.000	6.352,92	9.727,55	10.000
4154	PR/reclamekosten	5.000	2.268,90	4.000,00	0
4155	vergaderkosten	3.000	1.361,34	1.613,96	1.700
4157, 4160	overige kosten	23.250	10.550,39	7.584,06	7.500
4161	declaraties	2.000	907,56	1.922,98	2.000
4170	sponsoring	20.500	9.302,49	2.813,85	8.000
4200	verzekering	600	272,27	531,68	0
4251	afdracht EMS	3.500	1.588,23	1.545,00	1.500
4252	afdracht IM	3.000	1.361,34	2.938,77	2.000
4253	afdracht IMU	12.150	5.513,43	750,00	750
4152, 4950	drukwerk & papier	52.000	23.596,57	21.563,72	22.000
4980	bankkosten	1.500	680,67	318,89	300
7250	afdracht SDF	2.000	907,56	0	0
	afrondingsverschillen		0,01		
4+7	kosten totaal	240.000	108.907,25	101.612,85	99.250

Tabel 7 Resultatenrekening 2001 en begroting 2002: Kosten.

grootboekrek. nr.	omschrijving	begroot 2001 (f)	begroot 2001 (€)	werkelijk (€)	begroot 2002 (€)
5150	contributies WG-leden	117.000 ¹	53.092,29	65.450,12	77.500
5151	legaten en donaties	0 ²	0	2.471,20	250
5152	abonnementen NAW	16.700	7.578,13	8.347,18	8.500
5153	advertenties NAW	16.000	7.260,48	6.865,95	2.250
5160	overige baten	7.000	3.176,46	218,61	0
5251	contributies EMS-leden	1.300	589,91	508,23	500
5252	abonnementen IM	2.000	907,56	1.080,00	1.000
9000, 9052, 9090	rente	15.000 ³	6.806,70	7.003,56	6.000
	afrondingsverschillen		0,01		
5+9	baten totaal	175.000	79.411,54	91.944,85	96.000

Tabel 8 Resultatenrekening 2001 en begroting 2002: Baten.

Noten: 1 Dit bedrag is inclusief SDF donaties; 2 Legaten en donaties zijn samengevoegd met rente, v.i; 3 Dit bedrag is inclusief legaten en donaties.

Nick Ovenden

*Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
n.c.ovenden@tue.nl*

Experiences at SWI 2002

How to grow a mathematical model

In de week van 18 februari vond in Amsterdam de Studiegroep Wiskunde met de Industrie plaats. Zestig wiskundigen kwamen bijeen om in groepsverband een aantal problemen op te lossen die door verschillende bedrijven werden aangedragen. De studiegroep is een initiatief van de Stichting Wiskunde Toegepast (STW) en is dit jaar georganiseerd door het Centrum voor Wiskunde en Informatica en de Universiteit van Amsterdam. In 2003, van 17 tot en met 21 februari, zal de Studiegroep Wiskunde met de Industrie in het Lorentz centrum in Leiden plaatsvinden. Nick Ovenden uit Londen was een van de deelnemers aan de studiegroep in Amsterdam. Hij behaalde zijn PhD aan het University College London op een onderwerp in de stromingsleer en werkt nu aan de Technische Universiteit van Eindhoven als post-doc aan een Europees project om de geluidsproductie van vliegtuigen te verminderen. Hij vertelt over zijn persoonlijke ervaringen in de Studiegroep.

Throughout my life I have often bought roses for various reasons. Usually, the reason is to express love to the current object of my affections. Occasionally, I have bought roses to apologise or sympathise. But never have I bought them to calculate the leaf area per unit height or to determine the age distributions of the leaves. Has the way I live my life really changed since my attendance at the 42nd European Study Group with Industry in Amsterdam in February?

The first ever study group with industry was set up in Oxford in 1968 and the concept is simple to explain. A small group of industrialists each present a "real-world" problem to a throng of mathematicians eager to extract the relevant parts and transform the real world into something that can be written on a side or two of A4 paper. Whilst the outcome of a study group can be and is, more often than not, unpredictable, the closeness of the encounter between real world and mathematical model clearly delivers benefits to both sides. From one viewpoint, the study group acts as an excellent advertisement for ap-

plied mathematics to the wider community; how else would any of us get on Dutch children's television! However, the close interaction with industry additionally reminds mathematicians that some assumptions and simplifications, so easily made from the safe haven of their mathematics departments, are not always representative of what is actually going on. As an added bonus, the study group can lead to future collaboration and even new avenues of research, both being excellent incentives for anyone.

Introductory talks

On the first day at the University of Amsterdam, the industrialists were invited to give introductory talks about their respective problems. During the sessions we learned about: overheated fish in Amsterdam Zoo, lossless 1-bit data compression on a CD, diffusion of Eurocoins across the EU, growing roses in a greenhouse, placing components on chips with holes and, finally, determining past sea temperatures from the fossilised remnants of long-dead plankton. Well, no one could complain about lack of variety but that did not make the choice easy. I was clearly no expert in compressing data or electronics, every plant I had ever looked after had died and I wasn't entirely sure how compassionate I felt for the tropical fish.

In my opinion, the choice of which problem you decide to attempt is a very difficult, but unfortunately, a very important one to be made carefully. Of course, no one is forcing you to stay in one group and it is perfectly possible to wander around all of them during the week. However, the wandering strategy seemed an unprofitable exercise to me because, being a young researcher without a huge wealth of experience, I knew that I would need some time to get into a problem. I also imagined that wandering in on a group asking questions, making some sharp criticisms and then leaving might appear somewhat annoying to the more committed participants if I was not careful. In the end, it took me until the following morning to finally decide which problem to tack-

le, and the rose growing problem seemed to be a perfect ‘study-group’ problem for a variety of reasons. What I liked most about the rose problem was that the industrialist, Dick van der Sar, was a biologist and non-mathematician who has models but finds them difficult to apply directly to his situation. I envisaged that, in three days, it would be feasible to extract the relevant information from him and, by applying some realistic assumptions, create a simple model of the greenhouse. Certainly, it worried me whether such a task would be achievable for other problems, where the industrialist has a strong grasp of mathematics and where the problem has been around for decades. For this reason, perhaps problems that seem initially well-posed and set in mathematical terminology will actually turn out to be the hardest to solve. Indeed, unless you are an expert already or have some flash of inspiration, it is unlikely that you will perform better in three days than the countless people who have been struggling with such problems for years!

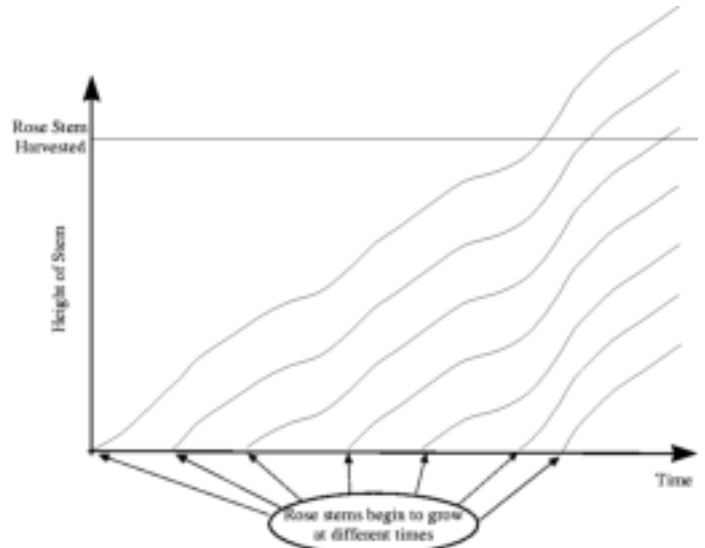
The rose model

Looking back, the three days I spent in a group developing the rose model were a fascinating time for me. The first two days defined the perfect love-hate relationship formed when a mathematician has too close an encounter with the real world. The conflict manifests itself as a tug-of-war, a push and pull, where assumptions are made and then broken by being unable to escape from the reality of the problem. For most biological systems, it is very difficult to find two variables that are truly independent. However, in every circumstance some dependencies are stronger than others and discovering these in a greenhouse full of roses proved to be challenging indeed.

Despite the initial difficulties, our group quickly settled into a very effective working strategy where no one assumed leadership and the work was planned democratically. This completely flat hierarchical structure of our group was a pleasant surprise for myself, and something I viewed as a typical Dutch trait, not always so easily adopted by other cultures. Major decisions were normally taken by the entire group prior to splitting into smaller units to investigate specific problems. These small groups would rarely last more than an hour or so before returning to a full group meeting. The frequent full-group discussions were required to make steady progress, especially as we had begun the project lacking any clearly defined goals. This situation I can only describe as similar to driving through thick fog, necessitating repeated corrections to our course to prevent the group from straying down the wrong path.



The roses study group: seated from left to right: Georg Prokert, Derk Pik, Bas van 't Hof, Onno Bokhove, standing from left to right: Philipp Getto, Nick Ovenden, Vivi Rottschäfer, Johan Dubbeldam.



Rose stems grow by roughly the same amount in the same climatic conditions. However, roses are in fact unselfish and the increase in biomass is shared equally throughout the entire rose bush.

On Wednesday afternoon, during a coffee break, the group reached something of a low point. With time rapidly running out, many of us were fearful whether we would have anything to present on Friday. In hindsight, our situation was not so depressing as a significant observation had just been made that would simplify the model greatly. One issue that had been nagging some of us was a graph of the heights of different rose stems over time (see sketch). What appeared strange was that all the stems grew by roughly the same amount in the same climatic conditions. But surely, taller roses with more leaves would photosynthesise more and grow faster? However, as we discovered from Dick, roses are in fact unselfish and the increase in biomass is shared equally throughout the entire rose bush. This observation formed a major basis for our model.

After the coffee break, a complete change of gear took place and a very intense two hours passed. Some of us thrashed out components of the model on the board, whilst others began to analyse real data and write the software for the model as details were finalised. All of us continued working into the evening and by the next day a skeletal outline of our model was produced, and even documented using LaTeX. We now knew where the flaws were and a small group of us went back to a heated debate on the blackboard. Two details remained, how to determine the age distribution of the leaves and how the part of the rose bush that is not harvested affects the photosynthetic production. These last points were finally hammered out just as the clock reached 3pm. With only three hours to go, the model was finished.

Presentation

A last fond memory of mine was writing the presentation, which was also done collectively. We would sketch each slide on the board, argue, people would grab a chalk and start changing things, and within a couple of hours the entire talk was complete! On Friday, the presentation went smoothly and I felt very proud of our accomplishments.

To conclude, the Dutch have taken the concept of study groups and made it into their own successful venture. I would like to thank particularly the organisers and the members of my group for making the week such an enjoyable and valuable experience. So, can anyone tell me how to register for next year's in Leiden?

Joost Hulshof*Divisie Wiskunde en Informatica**Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit**De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam**jhulshof@cs.vu.nl*

Nieuwe dimensies, ruimer bereik

Het hoofdkantoor van VNO-NCW is gevestigd in de Malietoren te Den Haag. In dit prestigieuze gebouw werd op 18 april de eerste nota van het gezamenlijk Overleg Onderzoekscholen Wiskunde aangeboden aan Harm Bruins Slot, secretaris-generaal van OC&W. Joost Hulshof heeft het rapport kritisch bekeken.

Terwijl de kwaliteit van het wiskundig wetenschappelijk onderzoek in Nederland onverminderd hoog is en in toenemende mate wordt gestimuleerd door nieuwe toepassingsgebieden, loopt het budget voor dit onderzoek onder invloed van dalende studentenaantallen dramatisch terug. Universiteiten zijn voor wat hun financiering betreft in de eerste plaats scholen. Minder studenten betekent minder geld om wiskundigen aan te stellen dan wel in dienst te houden. Omdat over het algemeen wetenschappers bij wiskunde-instituten zowel docent als onderzoeker zijn, doemt het schrikbeeld op dat bij blijvend lage studentenaantallen ook het onderzoek marginaliseert en op den duur verdwijnt. Bijgevolg wringen wiskunde-instituten zich in de vreemdste bochten om maar extra studenten te trekken. Soms steken ze elkaar, onder druk van boven, de loef af; het resultaat is minimaal. Daarnaast vechten de onderzoekers van de diverse instituten met een lage succeskans om een greep uit de mager gevulde NWO/KNAW onderzoekspotten, een strijd die ze vervolgens zelf moeten reguleren. De hierbij gedissipeerde energie gaat nog eens extra ten koste van het teruglopende onderzoekspotentieel.

Een nieuwe nota

Op 18 april 2002 werd in het hoofdkantoor van VNO-NCW de nota *Nieuwe dimensies, ruimer bereik* gepresenteerd. Ondertitel: *Een nationale strategie voor wiskundeonderzoek en gerelateerde masteropleidingen*. Deze nota is uitgebracht door het nationaal Overleg Onderzoekscholen Wiskunde in samenwerking met de NWO Advies Commissie Wiskunde en poogt de neergaande spiraal naar boven toe om te buigen. Het rapport brengt de situatie in wiskundig Nederland over de afgelopen twintig jaar in kaart, signaleert nieuwe onderzoeksvragen en -mogelijkheden en komt met een pakket maatregelen met als doel de

Nederlandse voorhoedepositie in het internationale wiskundeonderzoeksveld te behouden en te versterken. De nadruk hierbij ligt op het clusteren van onderzoek en het aantrekken van nieuw talent, waarbij nieuwe leerstoelen en masteropleidingen een grote rol wordt toebedacht. Op het prijskaartje staat een bedrag van bijna veertig miljoen euro over een periode van vijf jaar.

De in de nota gepresenteerde strategie gaat uit van 'Wiskunde op raakvlakken' als koepelthema boven een indeling van het wiskundeonderzoek in zeven thema's: 'Wiskunde en levenswetenschappen', 'Wiskunde en beeldverwerking', 'Wiskunde en scientific computing', 'Wiskunde en netwerken', 'Financiële Wiskunde', 'Wiskunde en dynamica', en 'Wiskunde en theoretische natuurkunde'. Dat betekent dat het zwaartepunt van het onderzoek wordt gelegd op raakvlakken tussen wiskunde en toepassingen en tussen wiskundige deelgebieden onderling. Aansluitend bij deze thema's komen onderzoeksclusters die met de extra middelen de in de nota geschetste ambities moeten waarmaken.

Iedere betrokkene zal zich bij het lezen van de nota afvragen in hoeverre hij het eens is met deze visie en zich kan vinden in de genoemde onderverdeling. Ons vakgebied heeft de nodige stoelendansachtige herindelingen doorgemaakt waardoor verder snijden vaak alleen maar makkelijker werd gemaakt. De nogal dwingende toon van de nota kan daarbij gemakkelijk de indruk wekken dat er weer een nieuwe structuur van boven wordt opgelegd, met een nieuwe stoelendans als gevolg.

Clustervorming

Echter, met sceptische reacties schieten we niets op. Vat ze op als kritische kanttekening. Waar het om gaat is hoe we, geïnspireerd door de nota, verder moeten. Of het geld voor de nota nu wel of niet loskomt, clustervorming is hoe dan ook noodzakelijk. De huidige structuur van een leerstoel met een, of als je geluk hebt twee U(H)D posities, is achterhaald en beperkt. Om in de geest van de nota te spreken, de ruimte voor het aanbrengen van raakvlakken houdt niet over. Een bijkomend probleem is dat voor actieve onderzoekers op U(H)D posities het carrièreperspectief beperkt is. Veelal is het wachten op een vrijkomende

leerstoel. Als het lukt die te veroveren, wacht een drastische vermeerdering van taken die alleen indirect met onderzoek te maken hebben. Clustervorming, zeker als dat gepaard kan gaan met uitbreiding van het aantal vaste posities, zou ook hierin verbetering brengen. De vraag is dus niet *of* we moeten gaan clusteren, maar *hoe* we gaan clusteren.

Mijn eigen vakgebied

Dat partiële differentiaalvergelijkingen (PDV's) een tak van wiskunde vormen met veel raakvlakken binnen en buiten de wiskunde is evident. Met wie ik wil clusteren weet ik ook wel en omgekeerd. In Amsterdam (UvA, VU en CWI) werken we al nauw samen en daarnaast is de link met de TUE sterk. De kern van de cluster is er dus al, alleen de officiële structuur nog niet. Die moet meer dan alleen van papier zijn. Daarmee bedoel ik dat we herkenbare coördinaten nodig hebben en faciliteiten, waaronder een gemeenschappelijke werkplek, die samenwerking en profilering als cluster verder bevorderen.

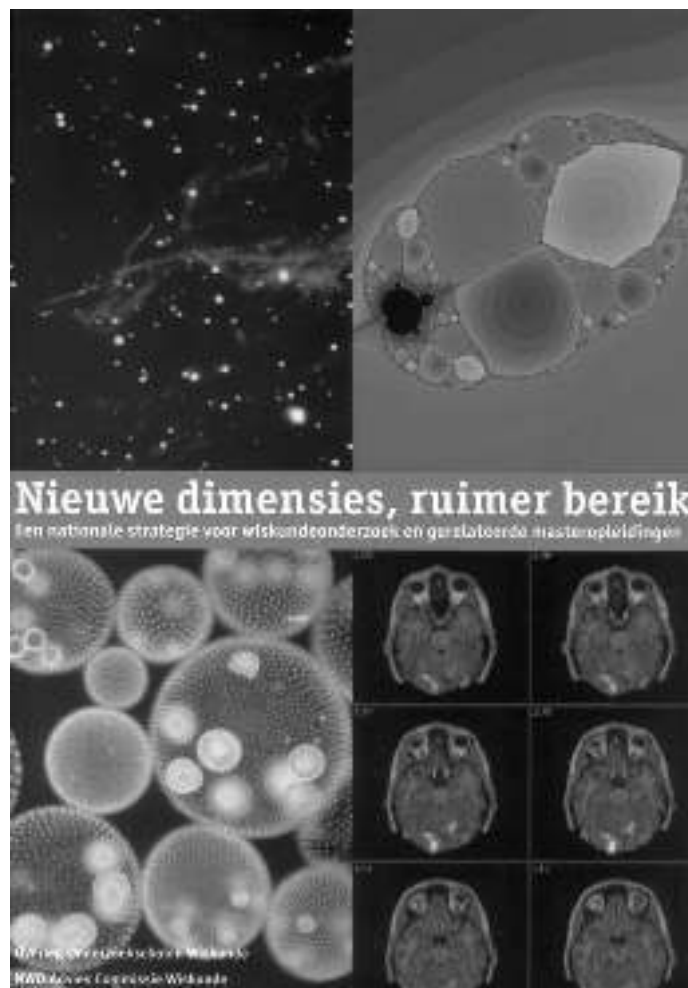
Mijn eigen universiteit zou het natuurlijk prachtig vinden als zij dit cluster zou huisvesten. Om verschillende redenen betwijfel ik of dat haalbaar, dan wel een goed idee is. Waarom wel bij de VU en niet bij een andere universiteit? En moet er wat anders voor ingeleverd worden? Het maken van zo'n keuze zal beïnvloed worden door overwegingen die weinig met het belang van het cluster zelf van doen hebben. Bovendien lijkt me dat universiteiten het aan zichzelf verplicht zijn om breed geïntereerd te blijven. Dus beter geen smalle profileringen en daardoor in zichzelf gekeerde clusters.

Voor ons is een goed alternatief gebruik te maken van de mogelijkheden die het CWI kan bieden en we zijn bezig hierover afspraken te maken. Concreet denken we dan aan detachering van de betrokken onderzoekers bij het CWI voor bijvoorbeeld een dag per week. Maak dit voor de universiteiten aantrekkelijk door de salariskosten over te nemen. Kies een vaste CWI-dag waarop alle onderzoekers in de cluster op het CWI zijn. De infrastructuur van het CWI is daar geschikt voor.

Evenzo kunnen universiteiten profiteren van CWI-medewerkers die meedoen aan het onderwijs. Dit ligt mede voor de hand omdat clusters het voortouw moeten gaan nemen met nieuwe (onderdelen van de) masteropleidingen. Het cluster moet een landelijke en internationale uitstraling krijgen door het organiseren van workshops, speciale semesters, posities voor *visiting researchers* en de eerder genoemde onderwijsactiviteiten. Hiermee kan ook buitenlands talent worden geworven en wordt het CWI ook voor Nederlandse onderzoekers een aantrekkelijkere plek om een sabbatical door te brengen.

De nota gaat uit van clusters bestaande uit zo'n 15 professoren en universitaire (hoofd)docenten (U(H)D's) en bijna net zoveel A(O)IO's. Ik denk dat de nieuwe posities moeten worden ingevuld door jonge onderzoekers aan wie na de postdocfase een duidelijk carrièrepad wordt geboden. Daar hoort ook bij dat onderzoekers die promotieonderzoek trekken en begeleiden als promotor kunnen optreden. Ik zie geen heil in een van tevoren vastgestelde indeling van de groep in wetenschappelijke rangen; dat beperkt de flexibiliteit.

Terugkerend naar een algemener perspectief lijkt het me dat ook voor andere groepen deze overwegingen relevant zijn. Eurandom in Eindhoven zou eenzelfde rol kunnen spelen als hierboven geschetst voor het CWI. En in Leiden hebben we nog, weliswaar niet alleen voor wiskunde, het Lorentz Center. Dat er geld bij moet is duidelijk. Om succesvol te lobbyen is het nodig dat de Nederlandse wiskundegemeenschap meer dan voorheen naar buiten toe één front vormt. De nota doet goede suggesties, de gemaakte indeling in onderzoeksgebieden is flexibel en kan aangepast worden wanneer nodig.



Imagoprobleem

Het probleem van de lage studentaantallen wordt door deze nota niet aangepakt. Dit onderwerp kan niet los worden gezien van de ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs op het vwo en het imago dat ons vak heeft in de maatschappij. Het programma *Leraar in onderzoek* is het enige actiepunt van de nota dat hier mee te maken heeft. Ik vraag me af of de filosofie achter dit programma niet bijgesteld moet worden. Extra NWO-gelden om de band tussen Voorbereidend Wetenschappelijk Onderwijs en wetenschap te versterken moeten zo gebruikt worden dat er ook een uitstralend effect is. Anders is het niet meer dan een druppel op een gloeiende plaat. Wat ons imago betreft, al typend op het voetbalveld waar mijn zoon een toernooi speelt, blijkt hoe lastig het is om de andere vaders (geen moeders deze keer) uit te leggen waarmee ik bezig ben en waarom. Het beeld bij de gemiddelde Nederlander van wiskunde is dat het klaar is. We moeten dus (de relevantie van) onze onderzoeksvragen aan de man brengen. Daarbij moet onderscheid gemaakt worden tussen de gemiddelde Nederlander, scholier en ministerie. Wat dat laatste betreft heeft de wiskunde behoefte aan iemand met gezag, iemand die bij de minister kan binnenlopen. ←

Nieuwe dimensies, ruimer bereik. Een nationale strategie voor wiskundeonderzoek en gerelateerde masteropleidingen., Den Haag, voorjaar 2002.

Te bestellen bij: zandee@nwo.nl

Rien Kaashoek

*Divisie Wiskunde en Informatica
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam
kaash@cs.vu.nl*

Henk van der Vorst

*Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
vorst@math.uu.nl*

De toekomst van het wiskundeonderzoek

Op 18 april werd in Den Haag de nota 'Nieuwe dimensies, ruimer bereik' gepresenteerd tijdens een minisymposium over de toekomst van het Nederlandse wiskundeonderzoek. In drie korte toespraken werd het belang van het wiskundeonderzoek en de behoefte aan wiskundig geschoolden naar voren gebracht. Het verschijnen van de nota past in een campagne om het Nederlandse wiskundeonderzoek een nieuwe financiële impuls te geven. Henk van der Vorst en Rien Kaashoek, auteurs van de nota, bespreken het vervolg.

De presentatie van de nota 'Nieuwe dimensies, ruimer bereik' werd met champagne gevierd. Marian Kolleveld, voorzitter van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, vroeg zich af waarom. Immers, de positie van het Nederlandse wiskundeonderzoek is niet rooskleurig. Bovendien was de reactie van de secretaris-generaal van het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen die namens het ministerie de nota in ontvangst nam, wel erg terughoudend. Maar er was genoeg te vieren. De nota bleek een juweeltje, het gezamenlijk optrekken was een genoegen, de voordrachten waren inspirerend. De champagne was ook bedoeld als feestelijk startschot van het vervolg van de lobby-campagne, die als doel heeft 40 miljoen euro binnen te halen voor het wiskundeonderzoek.

De reactie van het ministerie

De nota werd in ontvangst genomen door de secretaris-generaal van OC&W, mr. Harm Bruins Slot. Zijn boodschap bevatte drie elementen. 1) De Nederlandse wiskunde heeft met deze nota goed positie gekozen, voor-

beeldig ook voor ander bèta-disciplines. Een uitstekend plan, bijzonder dat de Nederlandse wiskundigen zich zo eensgezind presenteren. De minister vindt ook dat de verdere afkalving moet worden gestopt en dat de wiskunde niet verder mag wegzakken. 2) Er staat geen zak met geld klaar. De universiteiten ontvangen voldoende financiële middelen van de overheid om de problemen bij wiskunde op te lossen. Het ministerie legt de bal bij de universiteiten. 3) Er komen verkiezingen en daarna komt er een nieuwe regering. Het is zeker niet onmogelijk dat het NWO-budget substantieel omhoog gaat. NWO heeft dan de ruimte om het wiskundeonderzoek extra te ondersteunen en moet dat dan ook doen.

De situatie in Amerika

De hoogste ambtelijke functionaris van OC&W speelde het spel zoals het hoort. Een zak met geld mag niet meteen verwacht worden. De secretaris-generaal verschaftte voldoende aanknopingspunten om de lobby-campagne met overtuiging voort te zetten.

Vergelijking met de succesvolle campagne van de Amerikaanse NSF laat zien dat een eerste afhoudende reactie niet ongewoon is. Daar reageerde de overheid aanvankelijk ook niet positief op het voorgestelde stimuleringsprogramma van de 'Division of Mathematical Sciences'. Maar na een intensieve lobby-campagne werd toch geld binnengehaald: 20 miljoen dollar in 2002, waarvan 7 miljoen dollar voor 'Focused Research Groups', 7 miljoen dollar voor Mathematical Sciences Research Institutes (onder andere voor nieuwe instituten) en 6 miljoen dollar voor diverse partnerships.

Een ander geluid

Tijdens het minisymposium klonk er onverwachte bijval uit de hoek van het Nederlandse bedrijfsleven, dat steeds meer problemen ondervindt bij het vinden van afgestudeerden aan Nederlandse universiteiten in de exacte wetenschappen, waaronder ook wiskundigen. Shell vangt dit op met 'global recruiting', met als gevolg dat een (60%) Nederlands bedrijf meer en meer gerund wordt door buitenlanders. Het voortbestaan van Shell als Nederlands bedrijf komt daardoor in gevaar. Van den Brule (Shell), de eerste spreker van het symposium, gaf in zijn bijdrage aan dat Shell zich aantrekkelijker gaat opstellen in de schaarse markt van jonge exacte wetenschappers door een verandering in het gewenste profiel voor nieuwe employees. Managementcapaciteiten krijgen in dit profiel minder de nadruk. Hij toonde een lijstje van belangrijke wiskundige uitdagingen voor Shell, die zich uitstrekken over hun core-business, geen gefrommel in de zijlijn dus. De uitdagingen corresponderen prachtig met de zeven thema's van Wiskunde op Raakvlakken uit de nota. Geen wonder dat in de wandelgangen bleek dat de reactie bij Economische Zaken toeschietelijker is en men daar meer doordrongen is van de urgentie van de situatie.

Universiteitspolitiek

Onder invloed van de mogelijkheden van moderne computers neemt het mathematisch modelleren een steeds belangrijker plaats in bij vrijwel elke menselijke onderzoeksactiviteit. Een moderne universiteit kan daarom niet zonder wiskunde. Dat betekent in ieder geval dat er een bescheiden staf aanwezig

moet zijn voor het serviceonderwijs. De kans dat zo'n kleine staf via eigen onderzoek actief voeling kan houden met de snelle ontwikkelingen in het internationale onderzoek, is betrekkelijk klein. Als onze kennisintensieve economie aansluiting wil houden met dat deel van de wereld waarmee wij voor onze welvaart moeten concurreren, dan moeten er grotere, levendige onderzoeksgroepen gecreëerd worden. Dat is de kern van de nota 'Nieuwe dimensies, ruimer bereik'.

Als onderzoeksgroepen naar aard en thema over de universiteiten gespreid worden, dan wordt nergens het onderwijs van het onderzoek geïsoleerd. Het is zaak dat de betrokken faculteiten dit onderkennen en met hun aanstellingsbeleid toewerken naar lokale zwaartepunten. Zo'n zwaartepunt is kansrijker in de strijd om ze en 3e geldstroom en kan daarmee een deel van zijn eigen financiering waarborgen. We zien dit proces bij verschillende instellingen op gang komen. Voorbeelden zijn Leiden met getaltheorie, de UvA met mathematische fysica, en recentelijk Twente met toegepaste analyse.

Masteropleidingen

Levenskrachtig en dynamisch onderzoek draait uiteindelijk om jong talent en daarvoor is actieve participatie in alle vormen van onder-

wijs een vereiste. Het overal lokaal opzetten van masteropleidingen is in dit verband om meerdere redenen bijzonder inefficiënt. Het versnipperd onze onderwijsinzet, maakt het duur en vermindert de kans dat talent tijdig op een plek komt waar ontplooiing optimaal is. De tweejarige masteropleiding biedt uitstekende mogelijkheden voor samenwerking. Bijvoorbeeld door het eerste jaar via landelijk georganiseerde colleges in te vullen voor een viertal gedifferentieerde opleidingen en het tweede jaar naar eigen specialiteit binnen een enkel cluster in te vullen, met meer nadruk op de individuele vorming.

Dat kan prachtig omdat het tweede jaar in de meeste programma's al een flinke afstudeerperiode omvat. De student kan na het eerste jaar beter dan voorheen zijn voorkeur bepalen en dat kan er aan meewerken dat het talent sneller op de juiste plaats terecht komt. De student komt binnen zo'n cluster optimaal in aanraking met het onderzoek. De nota pleit ervoor om de onderzoeksvarianten van de wiskundemasteropleidingen geheel vanuit de clusters te laten plaatsvinden. Het is zaak dat op dit punt, vooruitlopend op de daadwerkelijke vorming van clusters, snel actie ondernomen wordt. Het huidige model van circa 30 masteropleidingen voor pakweg 100 studenten is namelijk inefficiënt, komt bepaald on-

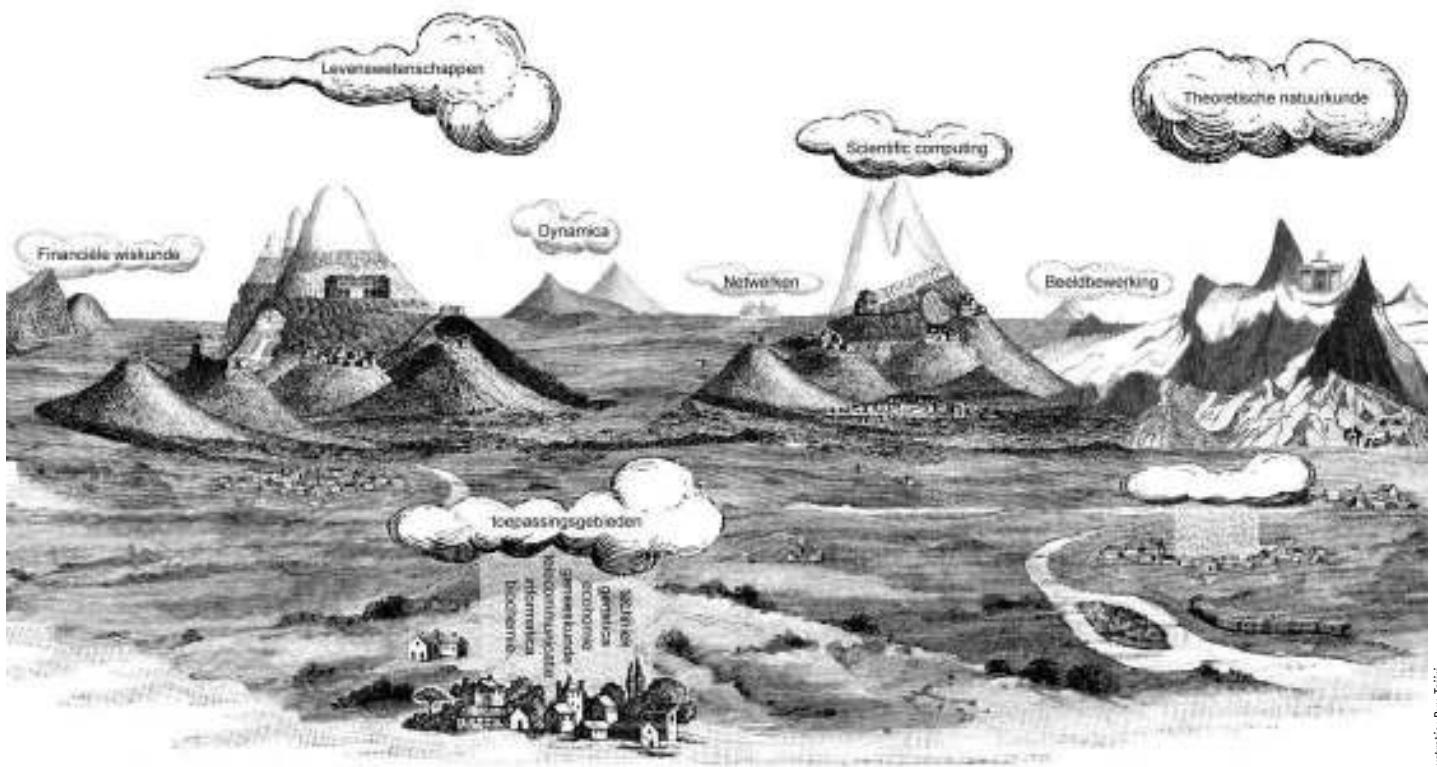
gelofwaardig over en zal vermoedelijk niet bijdragen tot grotere populariteit van de wiskundeopleidingen. Gericht reclame voor een gezamenlijk gedragen pakket van opleidingen met tal van specialisatie-mogelijkheden zal vermoedelijk op meer positieve aandacht kunnen rekenen. Het landelijk Overleg Onderzoekscholen Wiskunde (OOW) moet op dit punt het initiatief nemen. In overleg met het voorzittersplatform, is daarvoor reeds een kleine commissie aan het werk gezet.

Een bredere aanpak

De OOW-nota beperkt zich expliciet tot het (universitaire) onderzoek, maar de campagne zou dat niet hoeven te doen. Het Nederlandse wiskundeonderzoek is maar een klein wereldje. Het gaat om ongeveer 330 vaste en evenzovele tijdelijke aanstellingen. In een groter geheel geplaatst, speelt deze kleine groep wiskundigen een centrale rol in het onderwijs, in de industrie en in het bedrijfsleven. Het in de nota geschetste probleem wint daarmee nog aan betekenis. Het OOW gaat zich daar sterk voor maken!

Dankwoord

De auteurs danken Chris Zaal en Lex Zandee voor hun bijdragen aan de tekst en Annejet Meijler voor het suggereren van de illustratie.



Illustratie: Ryo Tajiri

Voorstel voor een nieuwe indeling van het wiskunde-onderzoeklandschap. Het huidige wiskunde-onderzoeklandschap in Nederland is te weinig geprofileerd. De nota 'Nieuwe dimensies, ruimer bereik' doet voorstellen voor een herprofilering. De toppen van het nieuwe landschap worden gevormd door een uitgebalanceerde set clusters op deelgebieden van de wiskunde. De thema's van 'Wiskunde op raakvlakken' zweven boven de clusters en vormen een actieve link naar maatschappelijke, economische en wetenschappelijke vraagstukken.

Arjan van der Schaft

Faculteit der Toegepaste Wiskunde

Universiteit Twente

Postbus 217, 7500 AE Enschede

twarjan@math.utwente.nl

Inaugurele rede

Verdeel en

Het modelleren van fysische verschijnselen door middel van differentiaalvergelijkingen heeft een rijke geschiedenis die zeker drie eeuwen omspannt. Aan dit klassieke en levendige vakgebied zijn in de vorige eeuw vele nieuwe aspecten toegevoegd. Uit de behoefte om deze fysische processen zichzelf te laten besturen is de systeemtheorie voortgekomen. Hierbij kan men denken aan elektrische circuits, robots, de automatische piloot in een vliegtuig of de thermostaat van een verwarming. De ontwikkeling van een vakgebied zoals bijvoorbeeld de ruimtevaart is zonder de systeemtheorie ondenkbaar. Arjan van der Schaft, samen met H. Nijmeijer auteur van het op dit gebied veelgebruikte boek 'Nonlinear Dynamical Control Systems' en hoogleeraar deterministische systeem- en besturingstheorie aan de Faculteit der Toegepaste Wiskunde van de Universiteit Twente, geeft in zijn inaugurele rede een overzicht van dit vakgebied.

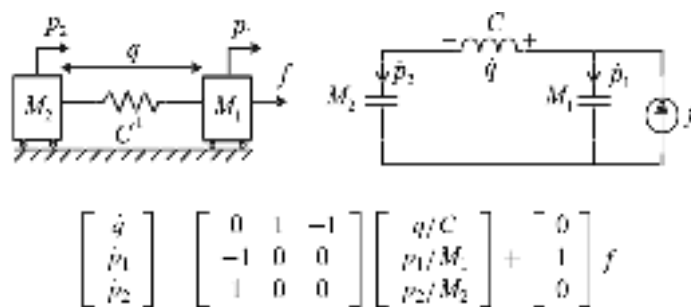
Het houden van een rede waarin een persoonlijk visie wordt gegeven op onderzoek en onderwijs bij het aanvaarden van een leeropdracht aan een universiteit is een enigszins oubollige maar interessante traditie, waartoe eigenlijk ieder lid van de universitair gemeenschap in staat zou moeten gesteld; ik kom daar later nog op terug.

De prikkelend bedoelde titel van deze voordracht zal ik hanteren als lijfspreuk voor het gebied van de Wiskundige Systeem- en Besturingstheorie (Mathematical Systems and Control Theory), waarover ik in het eerste deel van deze voordracht iets zal vertellen. In het tweede deel van de voordracht zal ik vervolgens de rol van de wiskunde (en in het bijzonder de toegepaste wiskunde) aan de universiteit bespreken, om dan in het laatste deel nog iets te zeggen over universitair onderzoekbeleid.

Wiskundige systeem- en besturingstheorie

Het vakgebied van de wiskundige systeem- en besturingstheorie is een relatief nieuwe loot aan de wiskundige boom, die pas vanaf het eind van de vijftiger jaren van de twintigste eeuw een duidelijke vorm heeft gekregen. Grote namen die aan de beginfase zijn verbonden zijn onder andere Wiener (die de naam *cybernetica*, afgeleid van het Griekse woord voor stuurman voorstelde), Pontryagin, Bellman, en in het bijzonder Kalman.

Vanaf het eerste begin is de systeem- en besturingstheorie een sterk interdisciplinair vakgebied geweest, dat zijn wortels heeft in onder andere de klassieke regeltechniek (voortbouwend op het werk van Bode en Nyquist in de dertiger jaren), de Fourieranalyse, variatierekening en waarschijnlijkheidsrekening in de wiskunde, en diverse richtingen in het modelleren en ontwerpen van technische en biologische systemen, zoals netwerktheorie, de theorie van rekenmachines, en theorieën over de



Figuur 1 Twee fysische modellen; éénzelfde wiskundig systeem



Arjan van der Schaft

heers

werking van het zenuwstelsel.

Vanuit sociologisch standpunt is het een typische ‘naoorlogse’ activiteit die de schotten tussen verschillende wetenschapsgebieden slechtte, en een frisse start probeerde te maken voor een theorie van ‘algemene’ systemen die de bestaande disciplines van elektrotechniek, werktuigbouwkunde, biologie en wiskunde deels kon overstijgen. De daarbij optredende opwinding en spanning vibreert gelukkig nog steeds door in het vakgebied, al is de jeugdige overmoed inmiddels verdwenen.

De rol van de wiskunde in de ontwikkeling van de systeem- en besturingstheorie is zeer groot geweest. De wiskunde verschaftte de universele taal om modellen uit verschillende vakgebieden op dezelfde wijze te beschrijven. Het eenvoudige voorbeeld dat de bewegingsvergelijkingen van een mechanisch systeem bestaande uit twee zich in een rechte lijn verplaatsende massa's gekoppeld door een lineaire veer gelijk zijn aan de bewegingsvergelijkingen van een elektrisch circuit met twee condensatoren en één spoel is nog steeds een eye-opener voor studenten (zie figuur 1).

Meer in het algemeen bleek de wiskunde een bijna onuitputtelijke bron van concepten en technieken om systeemmodellen op verschillende niveaus van algemeenheid te bestuderen en om uiteindelijk een zelfstandige theorie van wiskundige systemen te ontwikkelen. Ten nadele van de wiskunde kan hieraan toegevoegd worden dat het veelal niet wiskundigen van origine waren die deze ontwikkelingen initieerden en vormgaven, maar ingenieurs met een sterke theoretische belangstelling. Dit raakt aan een belangrijk facet van de wiskundebeoefening, waar ik in het tweede deel van de voordracht op terug zal komen. Van meet af aan is een belangrijk aspect van de systeemthe-

orie, waarmee het gebied zich beslissend onderscheidt van bijv. de mathematische fysica, dat het zich niet beperkt tot het *beschrijven* van wiskundige modellen van systemen uit verschillende wetenschapsgebieden, maar zich ook richt op het *voorschrijven* van modellen met gewenst gedrag. Naast de *analyse* van modellen gaat het dus ook om de *synthese* van modellen. Dit heeft verstrekkende gevolgen, die niet altijd even goed begrepen en geapprecieerd worden. Aan de andere kant geeft dit het vakgebied enorme mogelijkheden, die naar mijn vaste overtuiging nog maar voor een zeer klein deel zijn geëxploreerd.

Open dynamische systemen

Laat ik daarom iets vertellen over het conceptuele kader van de wiskundige systeem- en besturingstheorie, in het bijzonder over de aspecten die ik samenvat met het motto ‘Verdeel en Heers’. De meeste wiskundigen bestuderen dynamische systemen als *gesloten systemen*: de systeemvariabelen ontwikkelen zich eenduidig in de tijd als functie van hun beginvoorwaarden. De analyse van dit soort systemen, met als kenmerkende voorbeelden de banen van de planeten van het zonnestelsel of de weerpatronen in de atmosfeer van de aarde, biedt nog steeds ongelooflijke uitdagingen. Een gesloten systeem is per definitie een idealisatie: het systeem als deel van de werkelijkheid zal altijd enige interactie ondergaan met de omgeving. Dit is echter de onderliggende hypothese voor de experimentele bestudering van alle fysische modellen: we onderzoeken de evolutie van een aantal systeemvariabelen waarbij we andere systeemvariabelen constant beschouwen (de beroemde *ceteris paribus* conditie).

Systeemtheoretici echter nemen een fundamenteel ander gezichtspunt: dynamische systemen worden expliciet gemodelleerd als *open*



Figuur 2 Open systeem versus gesloten systeem

systemen die interacteren met hun omgeving. Meestal wordt dit gedaan door de systeemvariabelen te onderscheiden in *interne* variabelen (de variabelen die ook in een mathematisch-fysische beschrijving figuren) en *externe* of interactievariabelen. De interactie met de omgeving vindt plaats via deze variabelen. Omdat het gedrag van de omgeving per definitie onbekend is wordt de dynamica van het systeem nu beschreven door alle mogelijke tijdsfuncties van de interne en externe variabelen die compatibel zijn met de beperkingen die het systeem aan deze variabelen oplegt.

Zeker voor technische systemen lijkt de beschrijving als intrinsiek open systeem het meest vruchtbare standpunt: als we de dynamica van een fiets willen beschrijven zullen we ook de invloed van de fietser in beschouwing moeten brengen, en het is onbevredigend om dit alleen voor een modale fietser te doen. Een tweede, evenzeer belangrijke, reden voor het beschouwen van open systemen is dat zelfs gesloten systemen vaak zinvol als een *koppeling* van open systemen kunnen worden beschouwd; ik zal hier straks uitgebreid op terug komen.

Vanuit een beperkt wiskundig standpunt impliceert de overgang van gesloten naar open systemen dat stelsels systeemvergelijkingen beschouwd worden waar het totale aantal variabelen groter is dan het aantal vergelijkingen; zogenaamde *onderbepaalde stelsels*. Onderbepaalde stelsels van gewone of partiële differentiaalvergelijkingen hebben geen eenduidige oplossingen, en zijn traditioneel in de wiskunde als veelal slecht gestelde problemen terzijde geschoven. Alleen in nieuwe wiskunderichtingen zoals de operations research is het belang van, in dit geval meestal statische, onderbepaalde stelsels onderkend.

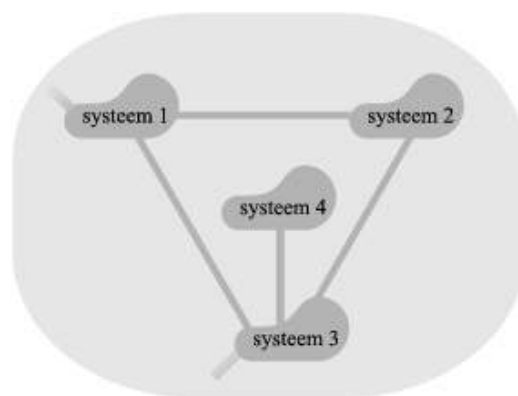
Als we echter iets verder van ons wiskundige huis gaan is het idee van open systemen welverspreid. In het bijzonder in de technische wetenschappen is het conceptuele kader van open systemen gemeengoed, hoewel het vaak niet geformaliseerd wordt. Een vergaande formalisatie van het begrip open systeem heeft wel plaatsgevonden binnen de informatica. Ook het standpunt van de *signaaltheorie*, waarbij systemen beschreven worden als het verband tussen in- en uitgangssignalen, is direct op het idee van open systeem gebaseerd.

Tot dusver hebben we een open systeem alleen gepositioneerd ten opzichte van een volledig onbekende omgeving. De grote kracht van het concept 'open systeem' is echter *compositionaliteit*: een open systeem kan gekoppeld worden aan één of meerdere andere open systemen, met resultaat een nieuw open systeem (figuur 3).

We kunnen het proces van compositie van twee kanten bekijken: aan de ene kant de *analyserichting* waar een gegeven complex systeem uiteengerafeld wordt tot een koppeling van eenvoudige deelcomponenten, en complementair de *syntheserichting* waar verschillende open systeemcomponenten worden samengesteld tot een complex systeem. Beide richtingen liggen aan het hart van de wiskundige systeem- en besturingstheorie. De analyserichting is direct verbonden met de systeemtheoretische manier van modelleren van complexe pro-

cessen (*Verdeel*), terwijl de syntheserichting direct verbonden is met het ontwerp en de besturing van systemen (*Heers*). Systeemtheoretische wiskundige modellering en analyse is dus het uiteenrafelen van het systeem in onderliggende deelsystemen, en de analyse en verificatie van de dynamische systeemeigenschappen in termen van de eigenschappen van deze deelsystemen en de manier waarop ze aan elkaar gekoppeld zijn. Het is een zeer effectieve manier om tot een inzichtelijke complexiteitsreductie te komen. ('Verdeel' het probleem in eenvoudigere deelproblemen.) Andersom is systeemtheoretisch ontwerp en besturing erop gericht om uit (deels gegeven) deelsystemen een systeem samen te stellen met gewenste eigenschappen. Dit is het basisidee van *terugkoppeling* (feedback) in de besturings- of regeltheorie: het aanbrengen van een eenvoudige terugkoppeling in een gegeven systeem kan de dynamica van het systeem dramatisch veranderen. (Het 'Heersen' vindt dus niet plaats door het tegen elkaar uitspelen van de verschillende deelsystemen, maar juist door hen op goede wijze te laten samenwerken!)

Een wezenlijk element in de wiskundige systeemtheorie is het feit dat de samenstellende deelsystemen van uiteenlopende aard kunnen zijn; deels (analoge) fysische componenten (mechanisch, elektrisch, etc.) en deels (digitale) softwarecomponenten. In dit opzicht kan systeemtheoretisch ontwerp en regeling *virtueel* worden genoemd.

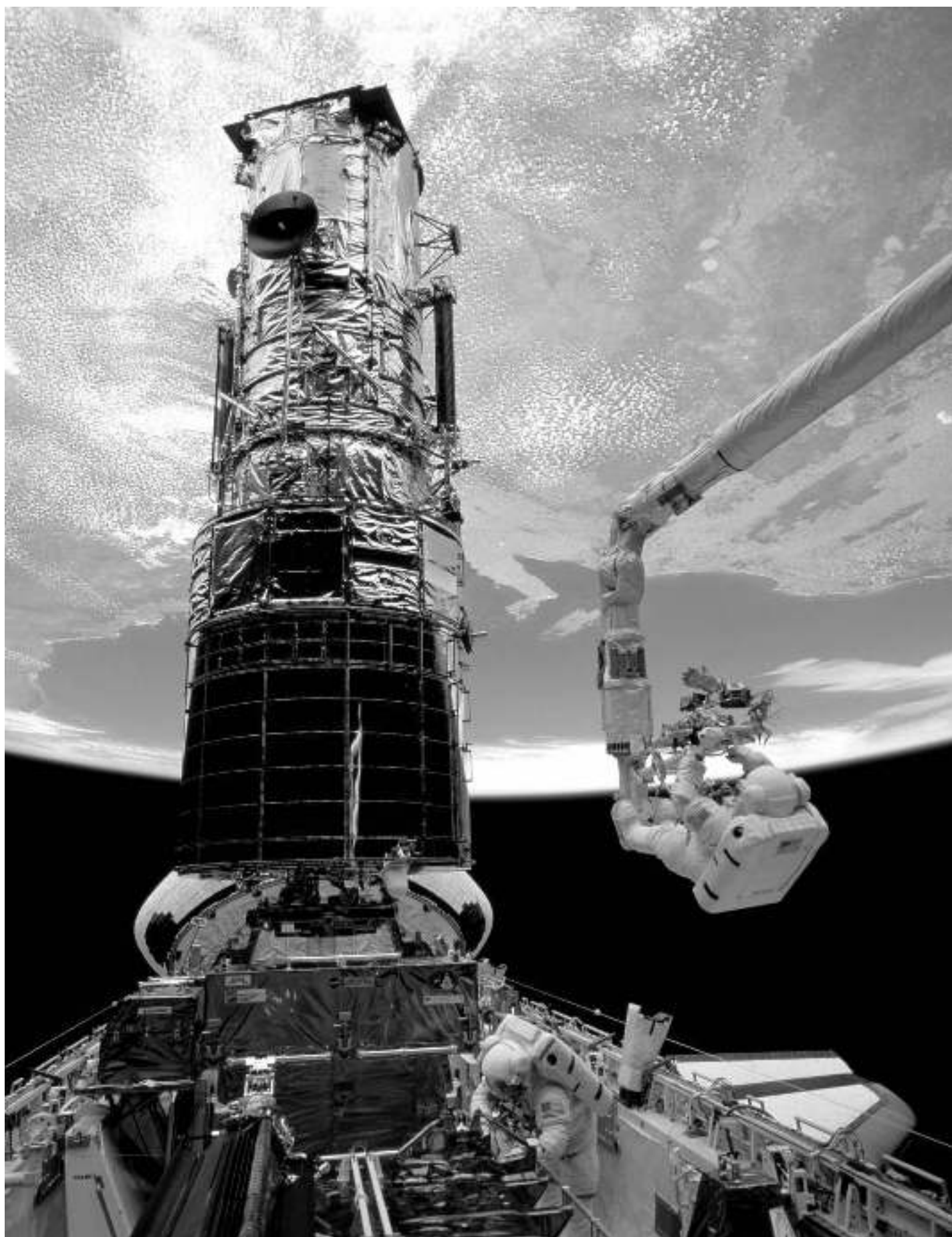


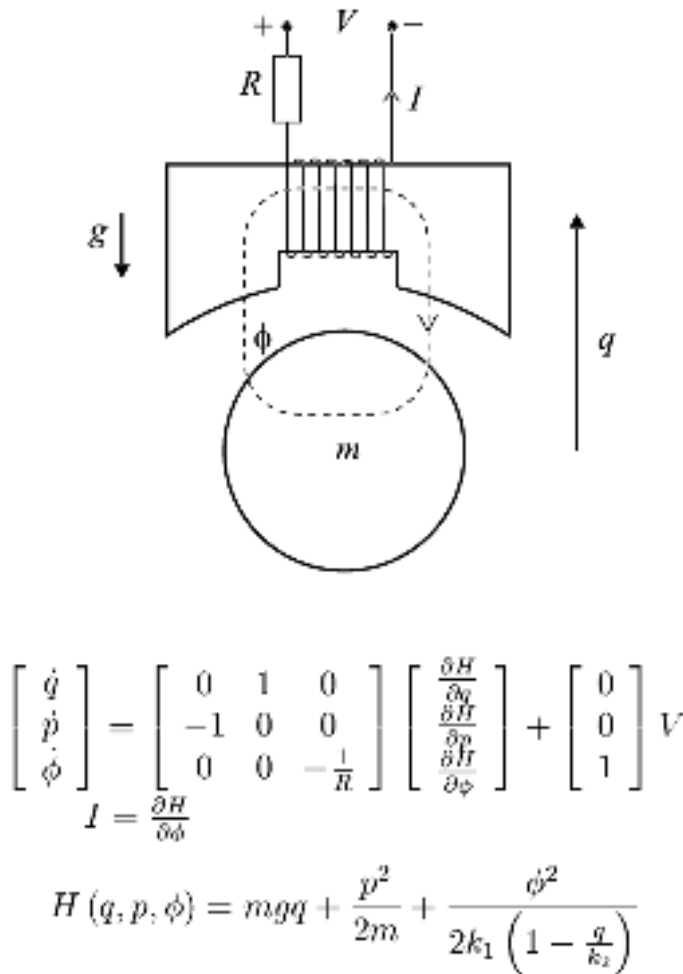
Figuur 3 Compositie

Zeker wat betreft het besturingsaspect is de wiskundige systeemtheorie gerelateerd aan de mathematische besliskunde, en een belangrijke mogelijkheid om het dynamisch gedrag van het systeem zo goed mogelijk te ontwerpen is *optimalisatie*. Hierbij dient aangetekend te worden dat het optimalisatiecriterium vaak niet eenduidig gegeven is, en vooral functioneert als een manier om in het oerwoud van mogelijke terugkoppelingen een structuur aan te brengen.

Natuurlijk is het bovenstaande hopeloos algemeen en zullen velen van u zeggen: "Dat doen wij eigenlijk ook". Dat is grotendeels ook zo, maar de kracht van de wiskundige systeem- en besturingstheorie is juist om dit conceptuele standpunt in wiskundige theorieën te formaliseren, en deze theorieën werkbaar te maken voor verschillende deklassen van systemen. Gelukkig kan de systeemtheorie hierbij sterk profiteren van theorieën die reeds in andere vakgebieden zijn ontwikkeld. In het bijzonder wil ik de theorie van gedistribueerde systemen in de informatica noemen, en de theorie van netwerkmodellering van fysische systemen. Ik mag mij gelukkig prijzen dat beide genoemde

Foto rechts In de ruimtevaart wordt veel met zelfbesturende systemen gewerkt. Hier een foto van astronaut F. Story Musgrave, die aan een Remote Manipulator System (RMS) is bevestigd. Hij staat op het punt om naar de top van de Hubble telescoop te worden gebracht om daar reparaties te verrichten. Copyright: NASA





Figuur 4 Magnetisch zwevende bal

vakgebieden hier op de Universiteit Twente meer dan uitstekend vertegenwoordigd zijn, en ik zal mij inzetten om de interdisciplinaire traditie van de systeemtheorie in deze samenwerking voort te zetten.

Andersom ben ik ervan overtuigd dat, juist omdat het boven geschetste kader zo herkenbaar is voor velen van u, de wiskundige systeemtheorie een zeer fundamentele bijdrage kan leveren aan het onderzoek en onderwijs in verschillende wetenschapsgebieden, en aan hun onderlinge communicatie. De wiskundige systeemtheorie is dan ook een uitstekend voorbeeld van toegepaste wiskunde *pur sang*; ik zal daar later op terug komen.

Het bovengeschetste kader van compositie van open systemen voor modellering, specificatie, simulatie, analyse, ontwerp en regeling, is te algemeen en vaag om in concrete toepassingsgebieden werkbaar te kunnen zijn. Het doel van de wiskundige systeemtheorie is daarom om geschikte deelklassen van systemen wiskundig te formaliseren, en hiervoor een wiskundige theorie te ontwikkelen met bijbehorende gereedschappen en algoritmen.

De grote *success story* van de wiskundige systeem- en regeltheorie gedurende de afgelopen veertig jaar is de ontwikkeling van een theorie van open systemen beschreven door lineaire differentiaalvergelijkingen, waarbij de externe variabelen in *ingang*- en *uitgang*variabelen verdeeld zijn. Deze theorie (in *toestandsvorm* of in *frequentiedomeinvorm*) is uitermate succesvol gebleken, zowel vanuit theoretisch als vanuit toepassingsstandpunt. Het behoort, zeker in de vorm van vele *MATLAB Toolboxen*, tot het dagelijkse gereedschap van veel ingenieurs. Hoewel er nog steeds belangrijke ontwikkelingen binnen deze theorie

plaats vinden (onder andere het laten vallen van het soms beperkende onderscheid tussen in- en uitgangvariabelen in de zogenaamde *behavioral theorie* [9]) zijn er buiten deze klasse van systemen grote uitdagingen voor een wiskundige theorieontwikkeling die het contact met, en de impact op, toepassingsgebieden verder kunnen versterken.

Ik wil hiervan twee voorbeelden bespreken waaraan reeds de afgelopen jaren binnen de vakgroep Systeem-, Signaal- en Besturingstheorie succesvol is gewerkt.

Systeemtheoretische modellering van open fysische systemen

Het eerste voorbeeld betreft de wiskundige formalisering van netwerkmodellen van fysische systemen. De prevalentie manier van modelleren van eindigdimensionale fysische systemen voor simulatie en regeling is *netwerkmodellering*, waarbij het mogelijk complexe fysische systeem als een interconnectie van ideale elementaire deelsystemen wordt beschouwd. Kenmerkende voorbeelden zijn complexe mechanische systemen, elektrische netwerken, en hydraulische systemen. Voordelen van de netwerkbenadering zijn legio: modellen kunnen gemakkelijk uitgebreid en veranderd worden, de elementaire deelsystemen kunnen als toekomstige bouwstenen in bibliotheken opgeslagen worden, sommige eigenschappen van het fysische systeem kunnen al op basis van het netwerkmodel (zonder de vergelijkingen) bestudeerd worden, en deze modellering leent zich uitstekend tot automatisering.

Een conceptueel zeer aantrekkelijke methode van netwerkmodellering is de methode van bondgrafen, zoals geïntroduceerd door Paynter in het begin van de zestiger jaren en onder andere hier bij de faculteit Elektrotechniek door Van Dixhoorn en Breedveld tot bloei gebracht. In een bondgraaf wordt de interconnectie tussen de deelsystemen gebaseerd op vermogensoverdracht. Dientengevolge kunnen ook systemen met deelsystemen uit verschillende fysische domeinen (zoals het mechanische, elektrische, hydraulische en thermodynamische domein) systematisch gemodelleerd worden. In deze zin vormen bondgrafen een universele methode voor netwerkmodellering van eindigdimensionale fysische systemen. Het in Twente ontwikkelde 20-sim is een uitstekend modellering- en simulatiepakket gebaseerd op bondgrafen.

Aan de andere kant is de klassieke wiskundige modellering van bijvoorbeeld mechanische systemen veelal gebaseerd op variatieprincipes. Dit resulteert in de beschrijving van het systeem middels de befaamde *Euler-Lagrange*- en *Hamilton*-vergelijkingen, die aanleiding hebben gegeven tot een ongelooflijk rijke theorie aangaande stabiliteit, integreerbaarheid, symmetrie en reductie. Bijzonder aantrekkelijk is dat deze theorie volledig coördinaatvrij geformuleerd kan worden, door middel van de meetkundige objecten van een *symplectische* en *Poisson*-structuur.

De vraag is derhalve hoe beide aanpakken, de één globaal, gebaseerd op een variatieprincipe, en de ander compositioneel, gebaseerd op interconnectie van elementaire deelsystemen, zich verhouden tot elkaar. Eén van de problemen hierbij is dat de globale manier, uitgaande van de analyse van de vrijheidsgraden van het systeem, de standaard Hamilton-differentiaalvergelijkingen oplevert, terwijl de compositionele manier in het algemeen een gemengd stelsel van *differentiaal*- en *algebraïsche* vergelijkingen genereert.

Het antwoord op deze vraag is zeer aantrekkelijk [1–2]: de manier waarop de elementaire energie-opslaande deelsystemen aan elkaar zijn gekoppeld, inclusief statische vermogensbehoudende verbanden zoals (in een mechanische context) kinematische bindingen en kinematische paren, en (in een elektrische context) transformatoren en gyrotoren, definieert een *meetkundige structuur* op de ruimte

van energievariabelen behorende bij de energie-opslaande elementen. De bewegingsvergelijkingen van het systeem zijn Hamiltons met betrekking tot deze meetkundige structuur en de Hamilton-functie gegeven door de totale opgeslagen energie, alsmede de energiedissipatiestructuur. We noemen deze veralgemeende Hamiltonse systemen *poort-Hamiltonse systemen*, omdat ze zijn opgebouwd uit deelsystemen die door middel van vermogenspoorten met elkaar interacteren.

De gebruikte meetkundige structuur, *Dirac-structuur* genaamd, is een generalisatie van de Poisson-structuur, en laat algebraïsche bindingsvergelijkingen toe. De Dirac-structuur karakteriseert de vermogensdistributie door het systeem, en bepaalt eenduidig de energie-onafhankelijke behoudswetten van het systeem, zoals impuls en totale lading. Bovendien is deze structuur volledig compositioneel: de koppeling van Dirac-structuren definieert weer een Dirac-structuur.

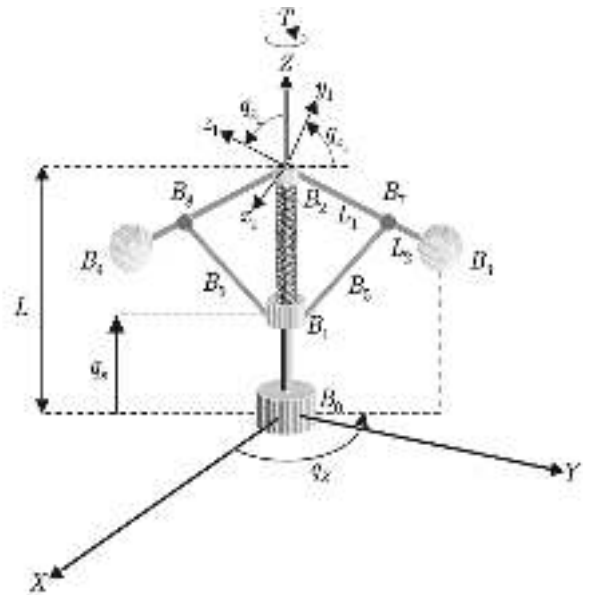
Terwijl de gangbare Hamiltonse formulering van fysische systemen gebaseerd is op de meetkundige structuur van de ruimte van positievariabelen en de bijbehorende impulsvariabelen (eventueel na reductie op basis van symmetrie), wordt in deze nieuwe benadering direct uitgegaan van de ruimte van energievariabelen met daarop een meetkundige structuur gedefinieerd door de compositionele structuur van het systeem. Direct gevolg is dat niet alleen mechanische, maar ook bijv. elektrische en elektromechanische systemen een natuurlijke Hamiltonse formulering toelaten.

Een zeer eenvoudig voorbeeld van de poort-Hamiltonse formulering is al gegeven in figuur 1. De Dirac-structuur wordt in dit geval bepaald door de scheefsymmetrische matrix in de vergelijkingen (die in de elektrische interpretatie correspondeert met de wetten van Kirchhoff). Een eenvoudig voorbeeld van een *elektromechanisch* systeem in poort-Hamiltonse vorm wordt beschreven in figuur 4.

De koppeling van het elektrisch en mechanisch domein vindt in dit geval plaats door de energiefunctie die zowel van de magnetische flux als van de hoogte en de impuls van de metalen bal afhangt. Een meer complex mechanisch voorbeeld is de klassieke Watt reguleur voor stoommachines [3], zie figuur 5.

De theorie van poort-Hamiltonse systemen biedt vele mogelijkheden voor de *simulatie* en *analyse* van fysische (eindig dimensionale) netwerkmodellen, maar ook voor *regeling* en *synthese* (zie bijvoorbeeld [2, 4]). In het bijzonder kunnen op basis van de Dirac-structuur allerlei structurele eigenschappen van het model worden onderzocht, onafhankelijk van de uiteindelijke bewegingsvergelijkingen, die in een voor simulatie en regeling geschikte vorm kunnen worden gegoten. Door extra deelsystemen aan te koppelen beïnvloeden we de Dirac-structuur, de Hamilton-functie en de dissipatie-structuur van het totale systeem, en daarmee de dynamische eigenschappen. Ook kan een directe integratie met het modellering- en simulatiepakket 20-sim plaatsvinden, zoals ten dele nu al gebeurt op basis van het werk van collega Stramigioli van EL en de Drebbe-labo Golo. Tevens biedt de theorie een zeer geschikt kader voor de bestudering van *multi-modale* fysische systemen, zoals vermogensomzetters en wandelende robotten. In dit geval wordt het schakelen tussen de verschillende *modes* van het systeem weergegeven door het schakelen tussen verschillende Dirac-structuren.

Gedurende de afgelopen twee jaar is ook hard gewerkt om het poort-Hamiltonse kader uit te breiden tot oneindig-dimensionale fysische systemen. In het bijzonder zijn we er in geslaagd om kenmerkende voorbeelden zoals de vergelijkingen van Maxwell voor elektromagnetische velden, en de vergelijkingen van Euler voor een ideale vloeistof, als poort-Hamiltonse systemen te modelleren, waarbij de koppeling met andere poort-Hamiltonse systemen via de rand van het ruimte-



Figuur 5 Watt reguleur

lijk domein kan plaatsvinden. De randvoorwaarden voor de partiële differentiaalvergelijkingen zijn dus niet gegeven, maar zijn de externe variabelen van deze oneindig-dimensionale open systemen. Dit opent grote mogelijkheden voor de simulatie en regeling van fysische systemen met zowel eindig-dimensionale en oneindig-dimensionale componenten, zoals bijvoorbeeld in meerlichaamsystemen met flexibele componenten, vermogensomzetters met transmissielijnen, en telemanipulatiesystemen. Het is een grote uitdaging om aan deze onderzoekers vanuit een wiskundig standpunt vorm te geven, in nauwe samenwerking met mijn collega's van het Cornelis Drebbe Instituut voor Mechatronica en van elders.

Hybride systemen

Hoewel in de zestiger en begin zeventiger jaren van de afgelopen eeuw de grenzen tussen de wiskundige systeemtheorie en de informatica nog vloeidend waren (met als direct punt van contact de automaten-theorie), zijn beide disciplines sindsdien ieder hun eigen weg gegaan, en vooral in gebruikte wiskundige formalismen uiteengegroeid. De laatste tien jaar is hierin evenwel een kentering opgetreden, zowel binnen de systeem- en regeltheorie als binnen delen van de informatica.

Binnen de *regeltheorie* is in veel toepassingen het zwaartepunt van de inspanning verschoven naar systeemintegratie en systeemvalidatie. Reden is dat veel technologische systemen steeds complexer worden, en tegelijkertijd dichter bij hun grenzen van performance worden gebracht. Typische voorbeelden zijn chemische processen, regeling van netwerken, en luchtverkeersgeleidingssystemen. Terwijl in de gangbare regeltechniek het zwaartepunt lag bij het ontwerpen van goede regelaars voor de afzonderlijke deelsystemen (of zelfs het ontwerp van een centrale regelaar), leidt dit er toe dat juist de koppelingen tussen de verschillende systeemcomponenten (of systeemcomponenten die in verschillende 'modes' kunnen opereren) cruciaal worden voor de totale performance en betrouwbaarheid van het systeem. Dit is het probleem van *multi-agent control*; inderdaad een andere variant van ons thema *Verdeel en Heers*. Omdat veel van deze koppelingen tussen de deelsystemen van een logische en discrete aard zijn, leidt dit tot de beschouwing van systemen met sterk gekoppelde *continue-tijd dynamica* en *discrete dynamica* (het optreden van 'gebeurtenissen'). Deze gemengde dynamische systemen worden *hybride systemen* genoemd.

In de *technische informatica* heeft men zich al snel gerealiseerd dat rekenkundige processen (op ieder niveau, van chips tot internet) in veel gevallen inherent *gedistribueerd* van aard zijn, als ruimtelijk gescheiden activiteiten die een gezamenlijke taak uitvoeren. Dit leidt er direct toe om de deelprocessen te beschouwen in termen van hun complexe wederzijdse beïnvloeding, dat wil zeggen, als reactieve of open systemen. Vanaf het eind van de zeventiger jaren heeft dit geresulteerd in de ontwikkeling van formele methoden en gereedschappen voor specificatie en verificatie van gedistribueerde communicerende systemen. Met de verdere groei van de informatica en haar technische toepassingen is tenslotte ook de koppeling van software met fysische systemen in zicht gekomen. Men spreekt in dit verband van *embedded software*, om aan te geven dat voor een complete specificatie en verificatie ook de interactie met de fysische apparaten waarvoor de software is ontworpen in beschouwing dient te worden genomen. Dit leidt derhalve ook voor de informatica tot de bestudering van hybride systemen, waarbij de discrete software processen gekoppeld worden aan continue-tijd fysische systemen.

In zekere zin is het bestuderen van hybride systemen het openen van een doos van Pandora, want zowel de systeemtheorie als de informatica zijn niet voldoende toegerust om deze uitermate rijke klasse van dynamische systemen te kunnen beschrijven en te analyseren (zie bijvoorbeeld [5]). De uitdaging is dus om door het bijeenbrengen van de complementaire kennis binnen de informatica en de systeemtheorie in ieder geval voor deelklassen van hybride systemen een bevredigende theorie voor specificatie, verificatie en regeling te ontwerpen. Ik ben blij dat een enthousiaste samenwerking op dit onderwerp met de leerstoel Formele Methodes en Gereedschappen van Informatica is opgestart, onder andere gesteund door twee NWO-aiO plaatsen. Verder zal ook een zojuist toegewezen EU-kaderproject over stochastische hybride systemen in samenwerking met het Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium (NLR) een krachtige stimulans zijn voor dit onderzoeksthema binnen het onderzoeksinstituut Centrum voor Telematica en Informatie Technologie (CTIT).

Verdere uitdagingen

Nog steeds een zeer belangrijk toepassingsgebied voor de systeemtheorie is de regeltechniek, zoals die beoefend wordt in verschillende technische wetenschappen zoals de elektrotechniek, werktuigbouwkunde en chemische technologie. Het ontwerpen van regelaars voor sterk uiteenlopende technische systemen, zoals servomotoren, chemische processen, laserbewerking en vliegtuigbesturing, biedt grote uitdagingen om de performance van deze systemen te verbeteren, of überhaupt mogelijk te maken.

Belangrijke concepten die de regeltechniek ons heeft geleerd betreffen onder andere de modellering van *onzekerheid* in dynamische systemen, het belang van *terugkoppeling* voor het ontwerp van *robuuste* regelaars, *identificatie* van dynamische systemen, de mogelijkheden voor *adaptatie* van regelaars, alsmede de *grenzen aan het regelen*. Al deze concepten hebben een enorm potentieel ook buiten de grenzen van de traditionele regeltechniek, en zijn naar mijn mening van groot belang voor de wiskundige theorie van dynamische systemen. In het bijzonder de toepassing van deze ideeën op de bestudering van niet-lineaire dynamica is een fascinerend gebied dat veel meer aandacht verdient, juist binnen de wiskunde (zie onder andere [6–7]).

Ik wil hier alleen kort op het laatste concept ingaan: de ‘grenzen van het regelen’ (oftewel, de *limits of performance*). Kenmerkend aspect van de regel- of besturingstheorie is dat het zich bezighoudt met het ontwerp van systemen waarbij gedeelten van het totale systeem



Figuur 6 Links: Norbert Wiener en Max Born, rechts: Claude Shannon

vastliggen. Derhalve kan niet het gehele systeem worden ontworpen, maar dienen de aanwezige vrijheidsgraden in het ontwerp zorgvuldig gebruikt te worden om toch dicht bij een gewenst totaal systeemgedrag te komen. Typisch voorbeeld is een systeem met een aantal regelvariabelen dat veel kleiner is dan het aantal interne (toestand-)variabelen. Op zich is het verbazingwekkend te zien hoe effectief regeling kan zijn: een generiek instabiel hoogdimensionaal systeem kan bijvoorbeeld gestabiliseerd worden met behulp van één regelvariabele. Voor een goed systeemontwerp is het evenwel ook onontbeerlijk om de door de vastliggende systeemcomponenten inherente beperkingen van het totale systeem te kunnen beschrijven en kwantificeren. Dit is van eminent belang in de afweging tussen verschillende ontwerpdoelstellingen, die deels conflicterend kunnen blijken te zijn. Voor lineaire systemen zijn deze ‘grenzen van het regelen’ al bestudeerd door Bode [8], terwijl een nieuwe invalshoek wordt geboden door de *behavioral theorie* [9]. De uitbreiding naar andere klassen van systemen is echter grotendeels open.

Hierbij kan een parallel getrokken worden met de *informatietheorie* zoals ontwikkeld door Shannon in de veertiger jaren. Door de formalisering van begrippen als ‘informatie’ en ‘capaciteit van een kanaal’ werd het mogelijk abstract te redeneren over de mogelijkheden en de beperkingen voor informatieoverdracht via een kanaal met ruis, voortgaand aan een eventueel ontwerp. Deze parallel is overigens meer dan een analogie: in de systeemtheoretische analyse en synthese van complexe systemen zal uiteindelijk ook de informatieoverdracht in de verbindingen tussen de deelsystemen een belangrijke rol spelen.

Toegepaste wiskunde als discipline

Zonder overdrijven kunnen we stellen dat de wiskunde, de ‘koningin der wetenschappen’ (of is dit de theologie?), aan de Nederlandse universiteiten onder druk staat. Voornaamste reden lijkt de afgenomen studenteninstroom, maar ook de beeldvorming van wiskundige onderzoekers als bleke wijsneusjes die puzzels aan het oplossen zijn speelt duidelijk een rol, zowel in de publieke opinie als in de gedachten van universitaire bestuurders, die graag hun universiteit met meer trendy dingen willen laten scoren. Dit is een zorgwekkende ontwikkeling, waarmee de rol van de wiskundebeoefening aan de Nederlandse universiteiten gemarginaliseerd dreigt te worden tot weinig meer dan het verzorgen van toeleverend onderwijs aan andere opleidingen, en het hoeden van het eeuwenoude cultureel erfgoed van de wiskunde.

De wiskunde wordt wel verdeeld in *zuivere wiskunde* en *toegepaste wiskunde*, waarbij het onderzoek in de zuivere wiskunde in eerste instantie door intern wiskundige motieven wordt aangedreven, terwijl het onderzoek in de toegepaste wiskunde vooral gemotiveerd wordt

door vraagstellingen uit andere wetenschappen.

Wat is nu de rol van de toegepaste wiskunde, en waarom dient de toegepaste wiskunde als een zelfstandige discipline aan een universiteit als de Universiteit Twente volwaardig in stand te blijven? Centraal begrip in de toegepaste wiskunde is het *wiskundig modelleren*. Hiermee bedoel ik niet in eerste instantie het afleiden van een correct wiskundig model voor een concrete toepassing, maar veeleer het wiskundig *abstraheren* en *formaliseren* van een conceptueel kader, en de wiskundige theorievorming binnen dit wiskundig formalisme. Zo houdt bijv. de wiskundige statistiek zich bezig met het wiskundig modelleren van onzekerheid, de wiskundige systeem- en besturingstheorie richt zich op het modelleren van open dynamische systemen en de 'maakbaarheid' van dynamisch gedrag door middel van koppeling met andere systemen, terwijl de stochastiek het begrip waarschijnlijkheid modelleert en analyseert. Tweede belangrijk element in de toegepaste wiskunde is de *algoritmiek*. Hier worden de verkregen theoretische resultaten omgezet in algoritmen die toegepast kunnen worden op concrete wiskundige modellen. Met de sterke toename van krachtige en goedkope computers is het bereik van implementeerbare algoritmen zeer sterk toegenomen, en heeft veelal geleid tot gebruikersvriendelijke 'toolboxes' die een grote impact hebben op de wereld van de hedendaagse ingenieur.

De kracht van de toegepaste wiskunde, de wiskundige abstractie en de algemeenheid van de verkregen resultaten, is tegelijkertijd ook haar zwakte. De bijdrage van de wiskunde in bijvoorbeeld technologische toepassingen is niet altijd even goed zichtbaar; zeker niet voor de buitenwacht. Dit geldt voor de theoretische ontwikkelingen, maar veelal ook voor de algoritmische bijdragen omdat 'toolboxes' inderdaad als gereedschapskisten gebruikt worden zonder veel appreciatie voor de onderliggende wiskunde, en eerder met informatica dan met wiskunde worden geassocieerd. Aan de andere kant zijn de bijdragen van de toegepaste wiskunde, juist door hun algemeenheid, vaak veel blijvender dan menig ander onderzoek in de technische wetenschappen. Het vereist daarom een wat langere termijn visie op wetenschappelijk onderzoek om de bijdragen van de toegepaste wiskunde echt op waarde te kunnen schatten.

De toegenomen mathematisering van de wetenschappen is onweersproken, evenals het feit dat de taal van de fysisch-technische wetenschappen de wiskunde is. Tezelfdertijd is de wiskunde niet voorbehouden aan de wiskundigen! Inderdaad zijn belangrijke ontwikkelingen in de wiskunde geïnitieerd door niet-wiskundigen, die vanuit hun eigen vakgebied, veelal gedreven door een sterke wiskundige belangstelling, tot belangrijke doorbraken in de toegepaste wiskunde kwamen. Dit geldt zeker ook voor de systeem- en besturingstheorie. De rol van de wiskundige is derhalve verre van onaantastbaar. Sterker nog, als de wiskundigen zich terugtrekken op hun wiskunde, dan is de kans groot dat de wiskundige ontwikkeling van andere wetenschapsgebieden door niet-wiskundigen gedaan zal worden. De toegepaste wiskundige zal zijn rol dus in zekere zin moeten bevechten, en de enige manier waarop dit echt succesvol kan zijn is als hij een aanzienlijke domeinkennis van één of meerdere wetenschapsgebieden heeft en in direct gesprek is met partners uit deze gebieden. Als aan deze voorwaarde is voldaan ben ik van mening dat de bagage van de toegepaste wiskundige zo goed is, dat hij een unieke bijdrage aan de wetenschapsontwikkeling kan geven; juist door zijn vermogen tot abstractie en algemeenheid. Het fascinerende feit dat dezelfde wiskundige concepten en technieken toepasbaar zijn op sterk uiteenlopende toepassingen is een zeer overtuigend argument voor het in stand houden en verder tot bloei brengen van een zelfstandige wiskundediscipline aan de universiteit,

voor onderzoek en onderwijs.

De afgelopen jaren is onze faculteit Toegepaste Wiskunde zeer succesvol geweest in het vergroten van het aantal tweede- en derdegeldstroomprojecten. Dit is een goede ontwikkeling die, vooral in samenwerking met partners van andere faculteiten, nog meer kansen biedt. De toegepaste wiskunde als geheel zal echter nooit een echte 'grootverdiener' kunnen zijn, simpelweg omdat landelijk de middelen voor fundamenteel onderzoek beperkt zijn en een eenzijdige focus op derdegeldstroomprojecten het gevaar in zich bergt dat toegepaste wiskunde zich op langere termijn van haar eigenlijke missie vervreemdt. De discipline Toegepaste Wiskunde zal dus haar rol binnen de universiteit op inhoudelijke gronden moeten kunnen beargumenteren.

Universitair onderzoekbeleid

Zoals naar verluidt in vroeger dagen wetenschappers uit verschillende gebieden met elkaar discusseerden over de wetenschap als geheel, zo is heden ten dage een favoriet gespreksonderwerp het universitaire onderzoekbeleid, en meer in het bijzonder de laatste ontwikkelingen en roddels op dit gebied. Ik wil deze gelegenheid aangrijpen om hier slechts een paar losse opmerkingen over te maken. Tevens houd ik mij het recht van 'voortschrijdend inzicht' voor; hetgeen in de universitaire bestuurswereld staat voor het binnen enkele maanden handig kunnen overspringen van de ene mening naar een tegenoverstelde mening.

Toen enige tijd geleden de faculteit Toegepaste Wiskunde in financiële problemen verzeilde was een veel gebezigd argument voor bezuiniging het motto "als we een bedrijf waren zouden we allang failliet zijn", waarop soms logisch werd geantwoord met "ja, maar we zijn geen bedrijf". In zekere zin geeft dit de spanning aan van het gehele universitaire beleid. De maatschappelijke functie van de universiteit is een algemene instelling te zijn voor wetenschappelijk onderwijs en fundamenteel onderzoek. Hierop wordt zij door de maatschappij beoordeeld en hierom wordt zij gerespecteerd. Ook voor het bedrijfsleven is deze 'missie statement' van de universiteit klip en klaar. Uitgangspunt van ieder universitair onderzoekbeleid dient daarom de kwaliteit van het fundamenteel onderzoek te zijn, waarbij deze kwaliteit gemeenten wordt op basis van internationale wetenschappelijke publicaties. Daarnaast is het van belang om deze kwaliteit te gelde te maken door het aanvragen van extra onderzoeksgelden in de tweede- en derdegeldstroomsfeer, om zo het onderzoekspotentieel van de universiteit te kunnen verhogen.

Hoe kan de onderzoekskwaliteit van de universiteit in stand gehouden en verbeterd worden? Naar mijn mening is dit vooral een kwestie van aanstellings- en personeelsbeleid: het benoemen van goede onderzoekers (en onderwijzers), en hen behouden en zich laten ontwikkelen. Belangrijk element hierin is het scheppen van een stimulerend onderzoeksklimaat waarin de prestaties van individuen worden gewaardeerd. Hierbij denk ik nog niet in de eerste plaats aan de materiële waardering — dit is niet de uiteindelijke motivatie voor een universitaire loopbaan — maar aan waardering in de collegiale sfeer en aan loopbaanontwikkeling. Per definitie zal dit een zeer individuele zaak zijn, waarvoor geen uniforme meetlat kan worden aangelegd. Niets is meer demotiverend voor een onderzoeker die uitstekend publiceert dan te horen dat hij eigenlijk te weinig derdegeldstroomprojecten verwerft.

In de huidige structuur zie ik de volgende problemen met het personeelsbeleid. Universitaire bestuurders hebben de neiging om hun verantwoordelijkheid naar lagere regionen door te schuiven. In het bijzonder denkt men aan de leerstoelen als 'business units' die 'afgerekend' kunnen worden op hun prestaties. Dit is misschien uit financiële

managementoverwegingen aantrekkelijk, maar bergt vele gevaren in zich. Natuurlijke academische eenheden zijn niet de leerstoelen maar de wetenschappelijke disciplines, de 'departments' in Amerikaanse terminologie. Binnen deze disciplines dienen de wetenschappers alle ruimte te hebben om zich individueel te ontwikkelen en initiatieven te nemen, ook buiten de leerstoel om. Leerstoelen, of combinaties van leerstoelen, hebben een eerste verantwoordelijkheid voor het onderzoek en onderwijs op deelgebieden. Leerstoelhouders vervullen in dit geheel een wetenschappelijk leidende rol. Echter niet in die zin dat zij het onderzoek en onderwijs voor de andere leden van de leerstoel bepalen, maar veeleer als wetenschappelijk stimulator en initiator, en als 'wetenschappelijk uithangbord' van de leerstoel.

De invulling van de rol van leerstoelhouder vooral als manager van de leerstoel is gevaarlijk. Allereerst is de combinatie van wetenschappelijk onderzoek en management spanningsvol. Dit kan leiden tot de beeldvorming van een hoogleraar als 'iemand in toga, die tegelijk zijn eigen broek moet ophouden'. Ook hier geldt weer dat het functioneren van een hoogleraar niet langs één meetlat beoordeeld dient te worden. Het nadrukkelijk ophangen van een universitaire organisatie aan een fictief beeld van een hoogleraar kan echter gemakkelijk tot problemen leiden. In de tweede plaats kan een te grote nadruk op de managersrol van de hoogleraar er toe leiden dat de overige leerstoel leden de bescherming van de leerstoel verkiezen boven het ontwikkelen van zelfstandige (en leerstoeloverschrijdende) initiatieven. In dit opzicht was de oude WUB, waarin de verantwoordelijkheid voor onderwijs en onderzoek bij de gehele vakgroep lag, veel beter dan de huidige situatie.

De wetenschappelijke onderzoekwereld kan per definitie niet hiërarchisch gestructureerd zijn. Immers, in wetenschappelijk onderzoek is iedereen gelijk. In dit opzicht is de Angelsaksische structuur van de universiteiten waarbij alle vaste stafleden direct onder de 'department chairman' ressorteren een beter voorbeeld. De UD's en zeker de UHD's dienen, op basis van hun individuele kwaliteiten en expertise, de kans te krijgen een volwaardige rol te spelen in alle universitaire processen. Klein, maar misschien typerend, voorbeeld is de huidige terminologie 'assistent promotor' voor de dagelijkse begeleider van een aio, hetgeen toch zeker (in navolging van andere universiteiten) in *copromotor* verbeterd zou moeten worden.

Tenslotte, onderzoekbeleid en de universitaire onderzoeksinstituten. 'Sturing' van onderzoek betekent voornamelijk 'stimulering' en het uitbouwen en bundelen van bestaande expertise die nauw met personen

is verbonden. 'Top' onderzoeksinstituten kunnen niet opgericht worden, maar dienen opgebouwd te worden, waarbij personeelsbeleid en incentives voor samenwerking sleutelementen zijn. Expertise in fundamenteel technisch-wetenschappelijk onderzoek kan slechts langzaam worden opgebouwd, zowel in individuele als in organisatorische zin (zeker op een Nederlandse universiteit met beperkte financiële mogelijkheden). Universitaire onderzoeksinstituten kunnen een belangrijke en nuttige rol spelen in het stimuleren van interdisciplinaire samenwerking en het bundelen van krachten voor gemeenschappelijke initiatieven en de verwerving van externe onderzoeksgelden. Ook als 'uithangbord naar buiten' zijn zij van veel belang. Als interdisciplinaire instituten dienen zij per definitie 'open dynamische systemen' te zijn, met vloeiende grenzen die gemakkelijk in de tijd veranderen, zonder in statische constellaties te verstarren.

Het vakgebied van de wiskundige systeem- en besturingstheorie, zoals ik het boven heb geschetst, heeft inhoudelijk aansluiting bij verschillende van de onderzoeksinstituten van deze universiteit. Ik ben blij dat de huidige samenwerking met collegae van andere faculteiten floreert binnen het Cornelis Drebbel Instituut voor Mechatronica en binnen het Centrum voor Telematica en Informatie Technologie (CTIT). Ik zal mij inzetten om de 'dynamica' van deze instituten verder te versterken.

Afronding

Wiskunde, en zeker toegepaste wiskunde, is een prachtig vak. Het trachten wetenschappelijke concepten en resultaten wiskundig te formaliseren, en met elkaar te relateren en tot hun essentie terug te brengen, om dan vervolgens met deze objecten verder te kunnen redeneren, en algemene resultaten af te leiden die weer terugvertaald kunnen worden naar toepassingsgebieden, is een fascinerende ontdekkingsreis, die nooit ophoudt. Bron voor deze fascinatie is voor mij de verwondering, verwondering deels over de kracht en effectiviteit van de wiskunde, maar vooral verwondering over de nieuwe horizons die altijd weer opdoemen op deze trektocht van de menselijke geest. Het is een voorrecht om binnen zo'n traditie werkzaam te zijn, en deze te kunnen doorgeven aan een jongere generatie, middels onderwijs en begeleiding van promovendi. Het vakgebied van de wiskundige systeem- en besturingstheorie biedt ongekende mogelijkheden voor wetenschappelijke ontdekkingsreizen. Ik verheug me op toekomstige reizen in het aangename reisgezelschap van de afdeling Systeem-, Signaal- en Besturingstheorie, en van collegae van andere faculteiten en elders. 

Noten

- 1 A.J. van der Schaft, B.M. Maschke, The Hamiltonian formulation of energy conserving physical systems with external ports, *Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik*, 49, pp. 362–371, 1995.
- 2 A.J. van der Schaft, *L₂-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*, 2nd revised and enlarged edition, Springer-Verlag, London, 2000.
- 3 Watt's governor, *Britannica* DVD 2000, 1994–2000 Encyclopaedia Britannica, Inc.
- 4 R. Ortega, A.J. van der Schaft, I. Mareels, B.M. Maschke, Putting energy back in control, *IEEE Control Systems Magazine*, 21, pp. 18–33, 2001.
- 5 A.J. van der Schaft, J.M. Schumacher, *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems*, Springer Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol.251, Springer-Verlag, London, 2000.
- 6 S. Sastry, *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*, Springer, New York, 1999.
- 7 H. Nijmeijer, A.J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag, New York, 1990 (4th printing 1998).
- 8 H. Bode, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, D. van Nostrand, New York, 1945.
- 9 J.C. Willems, On interconnections, control, and feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42, pp. 326–339, 1997.

Danny Beekers

Universiteit Nijmegen, Mathematisch Instituut
Postbus 9010, 6500 GL Nijmegen
dbeekers@sci.kun.nl

Oud Archief

Danny Beekers, aio in de geschiedenis van de wiskunde aan de Katholieke Universiteit Nijmegen, beschrijft in deze rubriek voorvallen uit de geschiedenis van de wiskunde.

De prent rechtsonder over de introductie van het metrieke stelsel verscheen in het in de jaren 1840 gepubliceerde *Prenten-Magazijn voor de Jeugd*. We treffen de prent aan onder de titel 'Vaderlandsche Geschiedenis' in de serie prenten over de Franse revolutie. Er staan onder anderen twee van de grote Nederlandse wiskundigen van die tijd op: Jan Hendrik van Swinden (staand) en Hendrik Aeneae (rechts naast hem). De prent werd ter stichting en lering aan schoolkinderen voorgehouden en strekte tot visuele ondersteuning van de geschiedenisles.

De prent illustreert het belang dat de jonge natie Nederland hechtte aan het opkweken van vaderlandslievende, eerzame en nationalistische burgers. Wat de prent niet laat zien waren de problemen waarmee de (afgebeelde) commissie in Parijs te maken kreeg. Zo liepen de verkregen meetwaarden ten behoeve van de lengtemeting van de meridiaan fors uiteen en werd op een aantal punten gewoon gestemd over de 'meest correcte' waarde om de lengte van de meridiaan met de vereiste nauwkeurigheid te kunnen vaststellen. Toen dan uiteindelijk op democratische wijze overeenstemming was bereikt over de lengte van de meridiaan en daaruit afgeleide lengte van de meter tot op twee decimalen (in Franse *tiers*) was bepaald, bleek het de handwerksman die de standaard zou gaan gieten niet mogelijk om zo nauwkeurig te werken. De wetenschappelijke winst bestond hoofdzakelijk uit de astronomische gegevens die tijdens de kostbare operatie van de lengtemeting verzameld waren.

Meer problemen deden zich voor bij de invoering van het nieuwe stelsel. Niet alleen waren de meeste mensen niet bereid of niet bij machte om over te schakelen op het nieuwe stelsel; veel lokale machthebbers ontleenden een deel van hun status aan het feit dat zij de ijkwaarden van hun lokale maten- en gewichtenstelsel in beheer hadden. Voor de revolutionairen was een belangrijk voordeel van het metrieke stelsel dan ook het universele karakter: de lokale besturen werden buiten spel geplaatst en de ijk in de plaatselijke waaggebouwen werd voortaan uitgevoerd door ambtenaren van de centrale regering. Bovendien benadrukten deze waarden de gelijkheid die door de revolutie gepredikt werd; al was er heel wat oorlog nodig om iedereen van die gelijkheid te overtuigen. Napoleon blies de invoering van het metrieke stelsel uiteindelijk af omdat bleek dat veel mensen moeite hadden met de omschakeling.

Dat brengt ons op een tweede punt dat deze prent beoogt. Niet alleen de nationale trots, ook de acceptatie van het nieuwe stelsel van maten en gewichten beoogde de uitgever met deze prent te bevorderen. Sinds 1820 was het metrieke stelsel in Nederland namelijk opnieuw in-

gevoerd. Vergelijkbaar met de stompzinnige reclamecampagne waarop de Nederlandse overheid haar burgers rond de invoering van de euro getraakteerd heeft — wellicht is hier sprake van een vaderlandse traditie? — werd toen in tal van brochures gemeld dat de nieuwe maat direkt was afgeleid uit Gods schepping (de meter was 'natuurlijk') en dat wetenschappers altijd precies de maat zouden kunnen reconstrueren mocht die verloren gaan. Uiteraard werden ook serieuze voordelen, zoals de tientallige onderverdeling aangestipt — de oude maten waren in het algemeen niet tientallig verdeeld.

In de naamgeving werden wel concessies gedaan bij de invoering in 1820: zo heette de meter *Nederlandsche el*, de decimeter *Nederlandsche palm*, enzovoort. Daarmee waren twee voor de hand liggende bezwaren bezworen, namelijk dat de meter een Franse vinding was (vanwege Napoleon gevoelig) en dat de fraaie latijnse en griekse voorvoegsels voor de gewone man van de straat geen houvast boden. De aangebrachte link tussen de lengte-, oppervlakte- en inhoudsmaten was echter een didactisch probleem dat werd onderschat: in het oude stelsel werden lengtes bijvoorbeeld in uren gaans uitgedrukt en oppervlaktes in de opbrengst (schoven graan of iets dergelijks) of de bewerkingstijd (benodigde tijd om het geheel om te ploegen). Praktische betekenis had dat over het algemeen niet meer, maar het verband tussen de lengte- en oppervlaktematen was daarmee wel helderder: een rechthoekig veld van 2 uur bij 3 uur, mat geen 6 vierkante uren in oppervlakte! De finesses van het metrieke stelsel werden (en worden) onderschat.

Literatuur

Ken Alder, 'A revolution to measure: the political economy of the metric system in France' in: M. Norton Wise, *The values of precision*, Princeton, NJ (1995), 39–71



Agoston E. Eiben

Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam
gusz@cs.vu.nl

Overzichtsartikel

The most powerful compu

De handelsreiziger die de kortste route wil bepalen om N steden te bezoeken, is een bekend voorbeeld van een probleem dat voor grotere waarden van N op geen enkele een computer is uit te rekenen. Een alternatieve, in dit artikel beschreven manier om een dergelijk probleem aan te pakken is het aanleggen van een grote verzameling van 'oplossingen', waar de beste de andere oplossingen zal verdringen. De wetenschap die de beginselen van Darwin van natuurlijke selectie toepast bij het ontwerpen van automatische probleemoplossers, waartoe bovenstaande methode ook behoort, heet evolutionary computing. Guszt Eiben, sinds augustus 1999 hoogleraar computational intelligence, geeft een overzicht van het vakgebied.

Developing automated problem solvers (that is, algorithms) is one of the central themes of mathematics and computer science. Similarly to engineering, where looking at Nature's solutions has always been a source of inspiration, copying 'natural problem solvers' is a stream within these disciplines. When looking for the most powerful problem solver of the universe, two candidates are rather straightforward:

- the human brain;
- the evolutionary process that created the human brain.

Trying to design problem solvers based on these answers leads to the fields of neurocomputing, and evolutionary computing, respectively. The fundamental metaphor of evolutionary computing relates natural evolution to problem solving in a trial-and-error (also known as generate-and-test) fashion.

In natural evolution, a given environment is filled with a population of individuals that strive for survival and reproduction. Their fitness – determined by the environment – tells how well they succeed in achieving these goals, that is to say, it represents their chances to live and multiply. In the context of a stochastic

generate-and-test style problem solving process we have a collection of candidate solutions. Their quality – determined by the given problem – determines the chance that they will be kept and used as seeds for constructing further candidate solutions.

Surprisingly enough, this idea of applying Darwinian principles to automated problem solving dates back to the forties, long before the breakthrough of computers [14]. As early as in 1948 Turing proposed 'genetical or evolutionary search' and already in 1962 Bremermann actually executed computer experiments on optimization through evolution and recombination. During the sixties three different implementations of the basic idea have been developed at three different places. In the USA Fogel introduced evolutionary programming [13, 15], while Holland called his method a genetic algorithm [16–17, 21]. In Germany Rechenberg and Schwefel invented evolution strategies [22–23]. For about 15 years these areas developed separately; it is since the early nineties that they are envisioned as different representatives ('dialects') of one technology that was termed evolutionary computing [1–3, 10, 20]. It was also in the early nineties that a fourth stream following the general ideas has emerged: Koza's genetic programming [4, 18]. The contemporary terminology denotes the whole field by evolutionary computing, or evolutionary algorithms, and considers evolutionary programming, evolution strategies, genetic algorithms, and genetic programming as sub-areas.

EVOLUTION		PROBLEM SOLVING
environment	↔	problem
individual	↔	candidate solution
fitness	↔	quality

Table 1 The basic evolutionary computing metaphor linking natural evolution to problem solving

ting in the universe?

What is an evolutionary algorithm?

As the history of the field suggests there are many different variants of evolutionary algorithms. The common underlying idea behind all these techniques is the same: given a population of individuals the environmental pressure causes natural selection (survival of the fittest) and hereby the fitness of the population is growing. It is easy to see such a process as optimization. Given an objective function to be maximized we can randomly create a set of candidate solutions, that is to say, elements of the domain of the objective function, and apply the objective function as an abstract fitness measure – the higher the better. Based on this fitness, some of the better candidates are chosen to seed the next generation by applying recombination and mutation to them. Recombination is a binary operator applied to two selected candidates (the so-called parents) and results one or two new candidates (the children). Mutation is a unary operator, it is applied to one candidate and results in one new candidate. Executing recombination and mutation leads to a set of new candidates (the offspring) that compete – based on their fitness – with the old ones for a place in the next generation. This process can be iterated until a solution is found or a previously set computational limit is reached. In this process selection acts as a force pushing quality, while variation operators (recombination and mutation) create the necessary diversity. Their combined application leads to improving fitness values in consecutive populations, that is, the evolution is optimizing. (Actually, evolution is not ‘optimizing’ as there are no general guarantees for finding an optimum, it is rather ‘approximizing’, by approaching optimal values closer and closer over its course.)

Let us note that many components of such an evolutionary process are stochastic. So is selection, where fitter individuals have a higher chance to be selected than less fit ones, but typically even the weak individuals have a chance to become a parent or to sur-

vive. For recombination of two individuals the choice on which pieces will be recombined is random. Similarly for mutation, the pieces that will be mutated within a candidate solution and the new pieces replacing the old ones are chosen randomly. The general scheme of an evolutionary algorithm is given in figure 1.

For the sake of completeness, let us note that the replacement step is often called survivor selection. It is easy to see that the above scheme falls in the category of generate-and-test algorithms. The fitness function represents a heuristic estimation of solution quality and the search process is driven by the variation and the selection operators. Evolutionary algorithms possess a number of features that can help to position them within the family of generate-and-test methods. For example, they are population based, that is to say, they process a whole collection of candidate solutions simultaneously, they mostly use recombination to mix information of two candidate solutions into a new one and they are stochastic.

The aforementioned dialects of evolutionary computing follow the above general outlines and differ only in technical details. For instance, the representation of a candidate solution is often used to characterize different streams. Traditionally, the candidates are represented by (that is to say, the data structure encoding a solu-

```
INITIALIZE population with random candidate solutions
COMPUTE FITNESS of each candidate
while not STOP-CRITERION do
  SELECT parents
  RECOMBINE pairs of parents
  MUTATE the resulting offspring
  COMPUTE FITNESS of new candidates
  REPLACE some parents by some offspring
od
```

Figure 1 General scheme of an evolutionary algorithm



Figure 2 A result of the Escher machine

tion has the form of) bit-strings in genetic algorithms, real-valued vectors in evolution strategies, finite state machines in evolutionary programming and trees in genetic programming. These differences have a mainly historical origin. Technically, a given representation might be preferable over others if it matches the given problem better, that is, it makes the encoding of candidate solutions easier or more natural. For instance, for solving a satisfiability problem the straightforward choice is to use bit-strings of length n , where n is the number of logical variables, hence the appropriate evolutionary algorithm would be a genetic algorithm. For evolving a computer program that can play checkers trees are well-suited (namely, the parse trees of the syntactic expressions forming the programs), thus a genetic programming approach is likely. It is important to note that the recombination and mutation operators working on candidates must match the given representation. That is, for instance in genetic programming the recombination operator works on trees, while in genetic algorithms it operates on bit-strings. As opposed to variation operators, selection takes only the fitness information into account, hence it works independently from the actual representation. Differences in the commonly applied selection mechanisms in each stream are therefore rather a tradition than a technical necessity.

It is worth to note that the borders between the four main evolutionary computing streams are diminishing in the last decade. This 'unionism' has a technical and a psychological aspect. On the one hand, many evolutionary algorithms have been proposed that are hard to classify along the traditional lines. On the other hand, more and more evolutionary computing researchers and practitioners follow a pragmatic attitude choosing whichever type of representation, variation operators, or selection procedures are appropriate, without bothering much about whether the resulting combination fits in one of the traditional categories.

Representation	bit-strings
Recombination	1-point crossover
Mutation	bit-flip
Selection	fitness-proportional
Replacement	generational

Table 2 Sketch of the simple genetic algorithm

Genetic algorithms

In this section we go into more details and illustrate the working of evolutionary algorithms by discussing a well-known type: genetic algorithms.

The simple genetic algorithm

During the last two decades several GA variants have been introduced. Here we will discuss the oldest version, named simple GA, that can be easily specified by the particular instantiations of the EA components as shown in table 2.

In the sequel we will consider these components one by one. The first step in handling a problem by an evolutionary algorithm is to define the representation. In evolutionary terms, one needs to specify which genotypes, also called chromosomes, represent (encode) the given phenotypes, the candidate solutions. To illustrate this matter let us take an extremely simple problem: maximizing $f(x) = x^2$ on $\mathbb{N}$ between 0 and 31. The simple genetic algorithm representation would use bit-strings of length 5 with the obvious encoding, for example 11000 denoting 24. This defines the genotype space $\{0,1\}^5$, where the genetic search will take place. The fitness value of a given genotype (bit-string) is the square of the uniquely defined phenotype (integer) it represents.

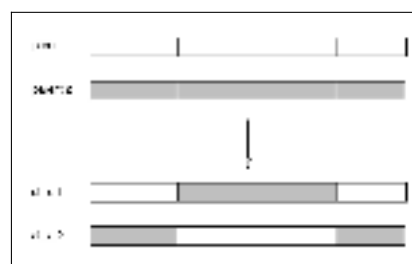


Figure 3 Example of 2-point crossover

Fitness proportional selection assigns selection probabilities to chromosomes proportionally with their fitness:

$$Prob(c_i) = f(x(c_i)) / \sum_{j=1}^m f(x(c_j)),$$

where m is the population size, $c_j \in \{1, \dots, m\}$ denote the chromosomes, and $x(c_i)$ stands for the integer encoded by c_i . Then m independent drawings with replacement, based on these selection probabilities, are performed to select m chromosomes that will undergo crossover and mutation. The selected chromosomes form the mating pool. Note that this mechanism is biased, in the sense that chromosomes with a higher fitness get a higher selection probability and expectedly deliver more copies into the mating pool. After the mating pool has been established recombination, implemented by 1-point crossover, and mutation are executed.

For recombination, the mating pool is divided into randomly selected pairs and 1-point crossover is applied to each pair. An algorithm parameter called crossover rate p_c prescribes the probability of actually executing the operator on a given pair — with a chance of $1 - p_c$ it will not be performed and the two children are simply identical copies of the parents. When executing 1-point crossover, first a crossover point is selected randomly, telling after which bit position the strings will be crossed. Then the two strings are broken at this point and the tails are exchanged. A straight-

forward generalization of this operator is the n -point crossover that uses n crossover points and combines the resulting segments from the parents in an alternating fashion. Figure 3 illustrates this operator for $n = 2$.

The mutation operator traverses a given genotype to be mutated from left to right and at each position it flips the bit with probability p_m , the so-called mutation rate. Note that by the stochastic character of crossover and mutation four types of offspring can be generated: offspring that ‘escaped’ both operators and are identical to old chromosomes, offspring that result from application of one of the operators only, and offspring that is obtained by crossover and mutation. The last steps to execute in a simple genetic algorithm cycle are to determine the fitness of the newborn offspring and, based on the fitness values, to decide which of them can enter the population. Since the population size is kept constant, allowing a new chromosome is always at the cost of removing an old one. In this, the simple genetic algorithm is indeed very simple: the whole old population is deleted and each newly generated chromosome is allowed into the new one. This mechanism is called generational replacement. The Darwinian survival-of-the-fittest is thus somewhat implicit here, the simple genetic algorithm rather features mating-of-the-fittest.

Maximizing the function $f(x) = x^2$

Here we show the details of one selection-reproduction cycle on a simple (thus traceable) problem after Goldberg [16]. Table 3 shows a random initial population of four genotypes, the corresponding phenotypes, their fitness values and figures corresponding to fitness proportional selection. Table 4 exhibits the results of crossover on the given mating pool, together with the corresponding fitness values. In the table $\text{Prob}_i = f_i / \sum f_j$, the expected count after selection is $f_i / \bar{f}$ (displayed values are rounded up), and the actual count stands for the number of copies in the mating pool, that is to say, it shows the simulated outcomes of the drawings. Although manually engineered, this example shows a typical progress: the average fitness grows from 293 to 439 and the best fitness in the population from 576 to 729.

Other genetic algorithms

As mentioned earlier, there are many variants of the simple genetic algorithm, usually intended to fix one of its shortcomings. Various representations have been introduced to circumvent the limitations of using bit-strings. A natural extension is using real-valued vectors – an obvious choice for multi-dimensional ($\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$) optimization problems. Another commonly used option is using integer vectors, allowing a finite number of possible values at each position in the chromosomes. A specific case of this is the so called order-based representation, where chromosomes are permutations over a finite alphabet. Obviously, crossover and mutation operators must be adopted to new representations. For instance, in case of order-based representation, the operators must create permutations from permutations.

Another line of extending the simple genetic algorithm is to change the parent selection mechanism. A popular one is k -tournament selection, where k candidates are drawn randomly from the population with a uniform distribution, their fitness values are compared, and the best one winning the tournament gets selected. A clear advantage of this mechanism is that the selective pressure is scalable by the parameter k .

string nr.	initial population	x value	fitness $f(x) = x^2$	Prob_i	expected count	actual count
1	0 1 1 0 1	13	169	0.14	0.58	1
2	1 1 0 0 0	24	576	0.49	1.97	2
3	0 1 0 0 0	8	64	0.06	0.22	0
4	1 0 0 1 1	19	361	0.31	1.23	1
Sum			1170	1.00	4.00	4
Average			293	0.25	1.00	1
Max			576	0.49	1.97	2

Table 3 The x^2 example 1: initialization, evaluation, and selection.

string nr.	mating pool	crossover point	offspring after xover	x value	fitness $f(x) = x^2$
1	0 1 1 0 1	4	0 1 1 0 0	12	144
2	1 1 0 0 0	4	1 1 0 0 1	25	625
2	1 1 0 0 0	2	1 1 0 1 1	27	729
4	1 0 0 1 1	2	1 0 0 0 0	16	256
Sum					1754
Average					439
Max					729

Table 4 The x^2 example 2: crossover and offspring evaluation. Mutation is omitted for the sake of simplicity.

There are also variations of the replacement (survivor selection) mechanism. In the so-called steady-state genetic algorithms only a part of the whole population is replaced in one cycle. For instance, 2 new chromosomes are created after parent selection, crossover and mutation, and they are immediately reinserted in the population removing two old solutions. To choose the old ones to be replaced there are several options again.

Evolution strategies and self-adaptation

In this section we sketch evolution strategies. Hereby we present a second member of the evolutionary algorithm family and illustrate a very useful feature in evolutionary computing: self-adaptation. In general, self-adaptivity means that some parameters of the evolutionary algorithm are varied during a run in a specific manner: the parameters are included in the chromosomes and co-evolve with the solutions. This feature is inherent for evolution strategies, that is to say, from the earliest versions ESs are self-adaptive. During the last couple of years also other EAs are adopting self-adaptivity. The one glance summary of evolution strategy is given in table 5, detailed explanation is given in the text below.

Evolution strategies are typically used for continuous parameter optimization problems, that is to say, functions of the type $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, using real-valued vectors as candidate solutions (no

Representation	real-valued vectors
Recombination	discrete or intermediary
Mutation	Gaussian perturbation
Selection	uniform random
Replacement	(μ, λ) or $(\mu + \lambda)$
Speciality	self-adaptation of mutation step sizes

Table 5 Sketch of evolution strategie

encoding step needed). Parent selection is done by drawing individuals with a uniform distribution from the population of μ . Thus, unlike in GAs, there is no bias for quality here. Selective pressure comes from creating $\lambda > \mu$ offspring (very often μ/λ is about 1/7). After creating λ offspring and calculating their fitness the best μ of them is chosen *deterministically* either from the offspring only, called (μ, λ) selection, or from the union of parents and offspring, called $(\mu + \lambda)$ selection. Recombination in evolution strategies is rather straightforward, two parent vectors $\bar{u}$ and $\bar{v}$ create one child $\bar{w}$, where:

$$w_i = \begin{cases} (u_i + v_i)/2 & \text{in case of intermediary} \\ & \text{recombination,} \\ u_i \text{ or } v_i \text{ chosen randomly} & \text{in case of discrete} \\ & \text{recombination.} \end{cases}$$

The so-called global variant of recombination is performed for an arbitrary number of parents. The mutation operator is based on a Gaussian distribution requiring two parameters: the mean, which is always set at zero, and the standard deviation σ , which is interpreted as the mutation step size. Mutations then are realized by replacing components of the vector $\bar{x}$ by

$$x'_i = x_i + N(0, \sigma),$$

where $N(0, \sigma)$ denotes a random number drawn from a Gaussian distribution with zero mean and standard deviation σ . By using a Gaussian distribution here, small mutations are more likely than large ones. The particular feature of mutation in evolution strategies is that the step-sizes are also included in the chromosomes, in the most general case one for each position $i \in \{1, \dots, n\}$. A typical candidate is thus $\langle x_1, \dots, x_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ and mutations are realized by replacing $\langle x_1, \dots, x_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ by $\langle x'_1, \dots, x'_n, \sigma'_1, \dots, \sigma'_n \rangle$, where

$$\sigma'_i = \sigma_i \cdot e^{N(0, \Delta\sigma)}, \quad x'_i = x_i + N(0, \sigma'_i),$$

and $\Delta\sigma$ is a parameter of the method.

By this mechanism the mutation step sizes are not set by the user, they (the $\bar{\sigma}$ part) are co-evolving with the solutions (the $\bar{x}$ part). To this feature it is essential to modify the σ 's first and mutate the x 's with the new σ values. The rationale behind it is that an individual $\langle \bar{x}, \bar{\sigma} \rangle$ is evaluated twice. Primarily, it is evaluated directly for its viability during survivor selection based on $f(\bar{x})$. Secondly, it is evaluated for its ability to create good offspring. This happens indirectly: a σ value evaluates favourably if the offspring generated by using it turns viable (in the first sense). Thus, an individual $\langle \bar{x}, \bar{\sigma} \rangle$ represents a good $\bar{x}$ that survived (μ, λ) or $(\mu + \lambda)$ selection and a good $\bar{\sigma}$ that proved successful in generating this good $\bar{x}$.

In general, modifying algorithm parameters during a run is motivated by the fact that the search process has different phases and a fixed parameter value might not be appropriate for each phase [9]. For instance, in the beginning of the search an exploration takes place, where the population is wide spread, locating promising areas in the search space. In this phase large leaps are appropriate. Later on the search becomes more focused, exploiting information gained by exploration. During this phase the population is concentrated around peaks on the fitness landscape and small variations are desirable. Self-adaptivity is a spe-

cific on-line parameter calibration technique, where the parameters (mutation step sizes in evolution strategies) are changed by the algorithm itself with only minimal influence from the user (for example, the value of $\Delta\sigma$). In fact, the algorithm is performing two tasks simultaneously, it is solving a given problem and it is calibrating itself for solving that problem. A particularly nice feature of evolutionary algorithms is their robustness – the evolution of the evolution works not only in carbon, but also in computer simulations.

What are evolutionary algorithms good for?

Evolutionary algorithms form a metaheuristic, applicable to a wide range of problems. They are not developed with a specific problem domain in mind and are also not particularly tailored for some application area. Therefore, it is hard to give a list of problems or problem types where they provably outperform alternative techniques. However, there is a widely shared view that in general evolutionary algorithms are very good on complex, ill-understood problems without an adequate analytical model or problems that do not have an optimal, analytical solution algorithm. In particular, an evolutionary algorithm is likely to succeed in comparison with other approaches if one or more of the following hold:

- the given problem has many parameters leading to a large search space,
- the problem has parameters of different types (for example, reals and integers),
- there are complex non-linear interactions between the parameters leading to a complex non-linear objective function,
- the objective function has many local optima,
- the objective function is changing over time,
- there is noise in the data hindering exact calculations.

Common wisdom within evolutionary computing also states that evolutionary algorithms are seldomly superior on problems that have been subjects of intensive study and have sophisticated solution methods, possibly with theoretical guarantees for an optimal solution. The same common wisdom says, however, that it costs only little effort (in comparison with those sophisticated methods: much less effort) to develop an evolutionary algorithm delivering an acceptable solution in acceptable running time. This is an often mentioned trade-off and it is widely believed that evolutionary algorithm solutions are very often very good, making them a serious alternative to other approaches. Citing an unknown evolutionary algorithm researcher: “An evolutionary algorithm is the second best algorithm for any problem”.

Systematic and thorough comparisons between evolutionary algorithms and other methods on (academic) benchmarks are scarce, but there are reported good results ranging from combinatorial problems, for example, graph coloring [12], to data mining, see [7], for instance. On the other hand, there are a lot of reports on successful applications, typically spread over journals and conference proceedings related to specific areas. A query on web page [24] in the subject area Computer Science using “genetic” as search term, restricting the search to the journal section and the year 2001 resulted in 366 hits (October 2001 figure). A very interesting account of the power of evolutionary computing is given in [19]. The authors set eight criteria to establish whether a computer program (an evolutionary algorithm, in this case) delivers

human-competitive results. These criteria include:

1. The result was patented as an invention in the past, is an improvement over a patented invention, or would qualify today as a patentable new invention.
2. The result is equal to or better than a result that was accepted as a new scientific result at the time when it was published in a peer-reviewed scientific journal.

Using these criteria the authors show numerous instances where evolutionary computing has produced a result that is competitive with, and often better than, human performance, for instance in design of electrical circuits, computational molecular biology, quantum computing, or the automated creation of a checker player playing as well as 'class A' humans.

It is often claimed that an evolutionary algorithm is not an optimizer in the strict sense [8]. Rather, evolutionary computing – similarly to natural evolution – is a very good designer of complex structures that are well adapted to a given environment or task. The examples from [19] fit into this view and evolutionary design is forming a rapidly growing, successful application area [5–6]. One particular form of design is represented by evolutionary art, where the user interactively breeds pieces of art (pictures or music, for instance). In this creative symbiosis the evolutionary system is generating pieces of art and the user executes subjective selection. The selected pieces are then randomly recombined and mutated thus forming the next generation. A popular example, the Escher Evolver, has been on exhibition in the Gemeentemuseum in the Hague between May and October 2000 [11], see figure 2 for an image evolved during this exhibition.

Finally, let us mention that evolutionary systems are also frequently used for simulation purposes. In such applications the evolutionary process is not supposed to solve a problem, but serves as an underlying mechanism behind a certain phenomenon. Simulations are then ran in a what-if mode, where the emphasis lies on the emerging behavior and its dependencies on system parameters. Artificial life and evolutionary economy (at least certain branches of them) are two well-known example areas, sharing the view that survival-of-the-fittest is a major driving force in the animal world as well as in the arena of economic players.

Concluding remarks

We explained the basics of evolutionary computing providing the metaphor linking natural evolution to problem solving and illustrating the matter with two specific evolutionary algorithms. Evolutionary computing can be seen in a broader perspective of natural computing, an emerging discipline uniting various developments concerned with algorithms mimicking natural processes. Well-known other members of this family are neural networks, simulated annealing, and DNA computing. The power of this movement is rooted in the power of certain natural processes that can be envisioned as problem solving. With some exaggeration it can be said that Nature is the best general problem solver we know. It is thus nothing but natural (sic!) to try to adapt Nature's tricks for solving problems by computers. Therefore, it's safe to state that this movement is viable, and to expect that it will bring along further interesting developments. ◀

References

- 1 T. Bäck, *Evolutionary Algorithms in Theory and Practice*, Oxford University Press, New York, 1996.
- 2 T. Bäck, D.B. Fogel, and Z. Michalewicz, editors, *Evolutionary Computation 1: Basic Algorithms and Operators*, Institute of Physics Publishing, 2000.
- 3 T. Bäck, D.B. Fogel, and Z. Michalewicz, editors, *Evolutionary Computation 2: Advanced Algorithms and Operators*, Institute of Physics Publishing, 2000.
- 4 W. Banzhaf, P. Nordin, R.E. Keller, and F.D. Francone, *Genetic Programming: An Introduction*, Morgan Kaufmann, 1998.
- 5 P.J. Bentley, editor, *Evolutionary Design by Computers*, Morgan Kaufmann, 1999.
- 6 P.J. Bentley and D.W. Corne, editors, *Creative Evolutionary Systems*, Academic Press, 2002.
- 7 M. Brameier and W. Banzhaf, 'A comparison of linear genetic programming and neural networks in medical data mining', *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 5(1), 17–26, 2001.
- 8 K. A. DeJong, 'Are genetic algorithms function optimizers?', In R. Männer and B. Manderick, editors, *Proceedings of the 2nd Conference on Parallel Problem Solving from Nature*, 3–13, North-Holland, 1992.
- 9 A.E. Eiben, R. Hinterding, and Z. Michalewicz, 'Parameter control in evolutionary algorithms', *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 3(2), 124–141, 1999.
- 10 A.E. Eiben and Z. Michalewicz, editors, *Evolutionary Computation*, IOS Press, 1998.
- 11 A.E. Eiben, R. Nabuurs, and I. Booij, 'The Escher evolver: Evolution to the people', In P.J. Bentley and D.W. Corne, editors, *Creative Evolutionary Systems*, 425–439, Academic Press, 2001.
- 12 A.E. Eiben, J.K. van der Hauw, and J.I. van Hemert, 'Graph coloring with adaptive evolutionary algorithms', *Journal of Heuristics*, 4(1), 25–46, 1998.
- 13 D.B. Fogel, *Evolutionary Computation*, IEEE Press, 1995.
- 14 D.B. Fogel, editor, *Evolutionary Computation: the Fossile Record*, IEEE Press, 1998.
- 15 L.J. Fogel, A.J. Owens, and M.J. Walsh, *Artificial Intelligence through Simulated Evolution*, John Wiley, 1966.
- 16 D.E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison-Wesley, 1989.
- 17 J.H. Holland, *Adaption in natural and artificial systems*, MIT Press, 1992, First edition: 1975, The University of Michigan.
- 18 J.R. Koza, *Genetic Programming*, MIT Press, 1992.
- 19 J.R. Koza, M.A. Keane, J. Yu, F.H. Bennett, W. Mydlowec, 'Automatic creation of human-competitive programs and controllers by means of genetic programming', *Genetic Programming and Evolvable Machines*, 1(1/2):121–164, 2000.
- 20 Z. Michalewicz, *Genetic Algorithms + Data structures = Evolution programs*. Springer, Berlin, 3rd edition, 1996.
- 21 M. Mitchell, *An Introduction to Genetic Algorithms*. MIT Press, 1996.
- 22 I. Rechenberg, *Evolutionstrategie: Optimierung Technischer Systeme nach Prinzipien der Biologischen Evolution*, Fromman-Holzboog Verlag, Stuttgart, 1973.
- 23 H.-P. Schwefel, *Evolution and Optimum Seeking*, Wiley, New York, 1995.
- 24 <http://www.sciencedirect.com/science>

Paulien Hogeweg*Theoretical Biology and Bioinformatics Group**Universiteit Utrecht**Padualaan 8, 3584 CH Utrecht**P.Hogeweg@bio.uu.nl***Overzichtsartikel**

From bioinformatic pattern analysis to evolutionary dynamics

Ribonucleïnezuur (RNA) vervult twee verschillende rollen binnen een cel. Enerzijds heeft het molecuul de functie om informatie op te slaan (net zoals desoxyribonucleïnezuur (DNA)), anderzijds dient het als katalysator (op een manier zoals ook eiwit deze rol vervult). Bovendien kan RNA optreden als katalysator voor zijn eigen reproductie. Het molecuul kan daarom worden beschouwd als een minimaal model om de afbeelding tussen een genoom en een organisme te bestuderen. Paulien Hogeweg, hoogleraar bio-informatica aan de Universiteit Utrecht, geeft een overzicht van de theoretische inzichten die in de laatste tien jaar over dit onderwerp zijn verkregen.

The genomes of more than 50 organisms have now been fully sequenced and are available in public databases, providing a wealth of data and a great number of opportunities and challenges for fundamental bioinformatic research. Most people consider the release of the human genome (incomplete as it may be) as the milestone and since that moment the term 'post genomic era' has emerged, indicating that, once we have the genome sequence, there is still a long way to go to understand the functioning organism. The ultimate aim of bioinformatic research in the post genomic era is 'to compute the organism from its DNA sequence', or, in more technical terms, 'to compute the phenotype (i.e., the set of observable characteristics as determined by genotype and environment) from the genotype (i.e., the genetic constitution of the individual)'. Lofty, and as yet far away as this aim may be, in this paper we will try to go even one step beyond it. Beyond the 'prediction' of the phenotype from the genotype of existing entities, we aim at the understanding of which type of entities are likely to evolve, as well as which types are likely not to evolve, and the evolutionary dynamics which determines that.

Clearly, we can only make progress towards any of these goals by focusing on manageable subproblems. Thus, a much studied subproblem is the prediction of the way an RNA or a protein molecule folds into a functional shape, using the sequence information (see below).

Here we will focus on RNA. The reason that we focus on RNA and not on protein is that its possible secondary structures can be calculated relatively easily. RNA is best known for its intermediate role in producing proteins from DNA: DNA is transcribed into RNA, which is then translated into a protein. However, RNA has many more functions, as it

acts as enzyme, i.e., as a catalyzer as well, both on its own and as part of RNA-protein complexes. In fact, the plethora of known functions is still increasing daily, and it includes also defense and gene regulation.

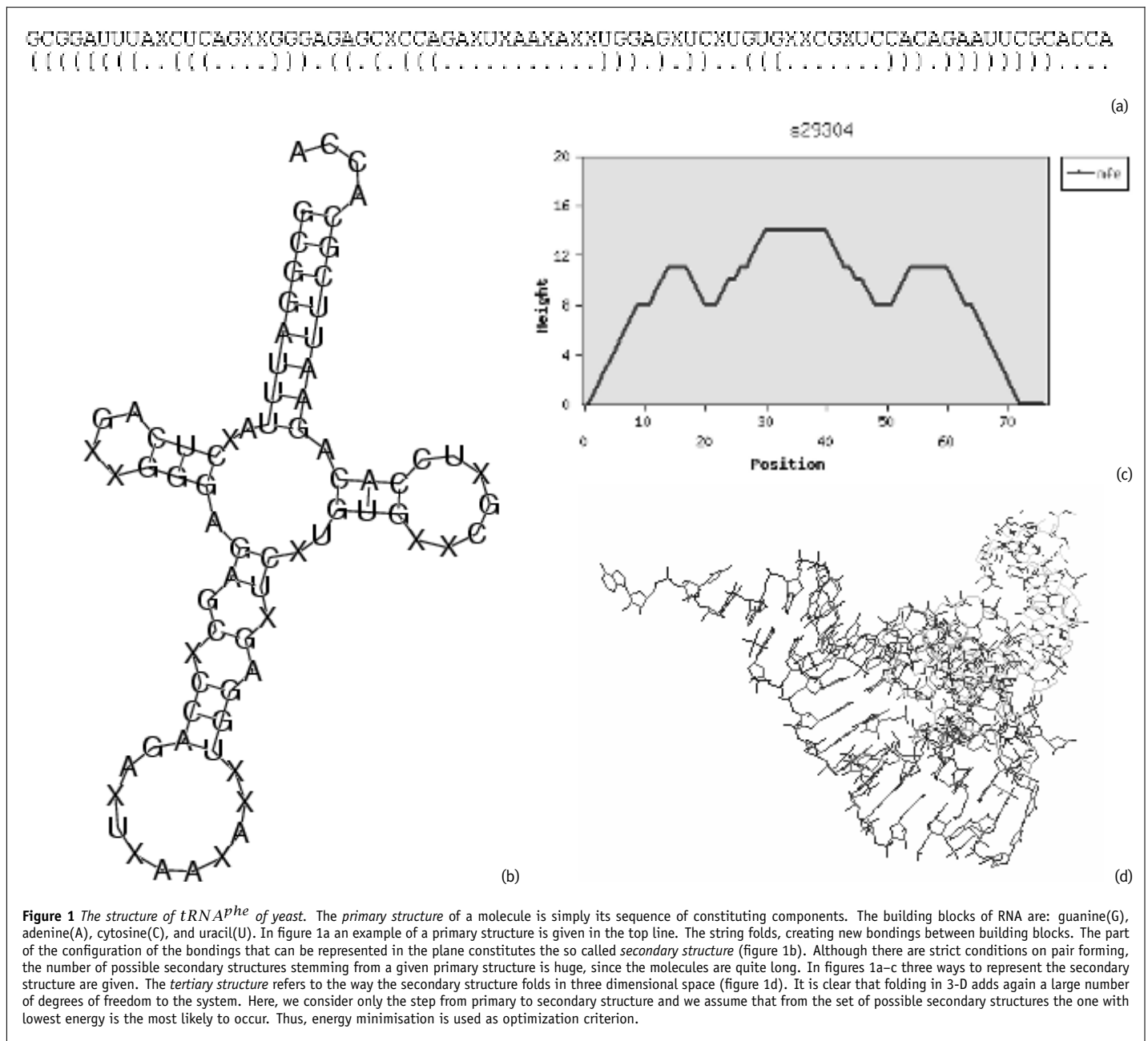
Because of these multiple roles in very fundamental processes, it is assumed that the so-called RNA world was a stage in pre-biotic evolution, in which RNA molecules served both for information storage and for catalysis, while the more specialized molecules, DNA and proteins, are later additions.

Here we will examine the properties of single RNA molecules. The enzymatic function depends primarily on the shape of the molecule. We will use the secondary structure as an approximation of the shape, and therewith of the 'phenotype' of the RNA sequence.

Thus we can, for this biologically interesting, simple special case, proceed to study the further questions outlined above. We will study the general properties of the genotype-phenotype mapping, the resulting evolutionary dynamics when, per definition, mutations occur at the level of the genotype (sequence) and the selection occurs at the level of the phenotype (secondary structure).

From genotype to phenotype

The figures 1a–d illustrate the relation between an RNA sequence and its higher order structures. The RNA sequence under consideration consists of 4 nucleotides: G,C,A, and U. The secondary structure is formed by the binding of the complementary base-pairs G-C, A-U and G-U. The figure shows three different but equivalent representations of this two dimensional intermediate. In figure 1a the RNA sequence is depicted as a string of parentheses and dots, where the opening and closing parentheses indicate a nucleotide bound to the downstream and upstream ones, respectively, and the dots show unbound bases (Konings and Hogeweg 1989). Figure 1b presents the conventional 'cloverleaf' structure, in which bound base-pairs are drawn adjacent, and in figure 1c the so-called 'mountain range representation' (Hogeweg and Hesper 1984) is shown, which retains the linear sequence at the bottom, and which represents the bonds by moving up when the nucleotide is bound to a nucleotide downstream (to the right), and down when it is bound to an upstream one. Unbound bases are given by plateaus. In figure 1d a possible tertiary structure is sketched. Although it is not



clear at first sight, the secondary structure is mostly a true part of the tertiary structure and dominates it energetically.

Energy minimization

Our calculations are based on the observation that in nature structures with minimal energy are most likely to be formed. We calculate the free energy of a secondary structure from empirical stacking energies, i.e., the energies involved in the formation of specific base pairs.

Dynamic Programming methods

A dynamic programming (DP) algorithm for RNA secondary structure prediction was first developed by Zuker et al. (1981). The ideas behind DP are given in a separate frame. Hairpin loops and internal loops (i.e., loops with an unbound basis) — both are present in the cloverleaf of figure 1b — are destabilizing, and they give rise to the occurrence of many relative minima in the free energy. However, an efficient algo-

rithm that does find the minimal energy configuration, is available. We will use it as the basis of our exploration of the general properties of the RNA genotype phenotype mapping. Indeed, the availability of this algorithm spawned these investigations.

Although the secondary structures derived by the dynamic programming method are pretty good, especially for relatively short sequences, the minimal energy configuration the DP algorithm finds does not always coincide with empirically determined ones. For one thing, it does not deal with the more complex features of secondary structures as pseudo-knots (see for example figure 4). Dynamic programming extensions to include these features have been developed (Rivas and Eddy, 1998) but become very cumbersome in time and space requirements, respectively ($O(N^6)$ and $O(N^4)$), and are therefore not very useful. However, also in 'normal' secondary structures prediction errors are rampant in long RNA's. This can be due to mistakes in the stacking energy data (and these have indeed been modified and improved

Dynamic programming

Dynamic programming is a general method for sequential decision making. It can be used for models that are dynamic in nature or problems in which the sequential aspect is introduced in an artificial way. An example of the latter is the shortest path in a (road) network, with distances $d(x, y)$ between crossings x and y . Let $V(x, n)$ be the shortest path from any x to the destination z using n streets. Then $V(x, n + 1)$ can be expressed in $V(y, n)$ in the following way:

$$V(x, n + 1) = \min_y \{d(x, y) + V(y, n)\}.$$

If we take $V(x, 0) = \infty$ and $V(z, n) = 0$, then computing $V(x, n)$ for increasing n leads us to the shortest path.

A dynamic programming algorithm can also be used for finding the minimal-energy secondary structure. The energy of a structure depends on the way pairs are formed in the RNA molecule. The idea is that the minimal energy folding of a sequence can be determined from the way its subsequences can be folded. For example, the minimal energy for the sequence from position i to j can be expressed in the minimal energies of subsequences such as $(i + 1, j - 1)$, depending on whether i and j are paired or not. By starting the calculation with sequences of length 2 we can recursively compute the minimal energy folding for sequences of arbitrary length.

over the years), unrecognized base modifications, longer range energy contributions, or due to the fact that secondary structures occurring in vivo are not necessarily minimal energy structures.

To try to amend such shortcomings in secondary structure predictions a number of alternative methods are developed and used.

Comparative evolutionary methods

RNA molecules in various species which share a common evolutionary ancestry (*homologous* RNA's), especially those with conserved catalytic activity, presumably fold into the same structure. Thus, when several sequences are available, the variation among those can be exploited for finding the functional structure. To do this one simply determines all energetically feasible, possibly overlapping, secondary structure elements (i.e., hairpins) of all available sequences and one selects a subset which occurs in all sequences. Moreover, so called compensatory base substitutions, where two bases are mutated such that the binding is preserved, support the functionality of hairpins, and therewith their eligibility in the consensus structure (see for example Gutell 1993). This approach is very useful when the homologs are available, and indeed the use of homology information is the predominant method in finding protein secondary structures, for which no simple dynamic programming algorithms are available. For our purposes a single sequence to secondary structure calculation is, however, needed.

Simulation methods

While, from a mathematical point of view, the dynamic programming energy minimization algorithms are far superior to stepwise stochastic energy minimization, that use local structure transitions, the latter sometimes better recover biologically functional structures. For example, Flamm et al. (2000) developed such a simulation method, with

additions and deletions of single bonds, and single step 'sliding' of bonds (involving a break and a formation of an adjacent bond) as elementary steps. Using this algorithm, they have shown, for example, that in tRNA functional structure is not the energetic minimum, but that it is the structure with the largest probability of forming. Similarly they showed that the RNA structure, which can be replicated in an in-vitro evolution experiment, is not the minimal energy fold, but is the one which is formed far more frequently than the minimal energy fold.

Conclusion

Standard methods from dynamic programming (DP) for the calculation of RNA secondary structure are not perfect, and one should use in addition other approaches to study particular RNA sequences. Indeed, new methods are developed to combine, for example, comparative and DP methods. (For an overview see Zuker 2000.) Nevertheless, the DP algorithm captures the general properties of the relation between the primary and secondary structure of RNA. We will use it to uncover these general properties in the next sections.

Characterizing RNA primary to secondary structure mapping

The first thing to note about the RNA primary to secondary structure mapping is that there are many more primary structures than there are secondary structures. This is immediately clear from the "bracket representation" (figure 1a) of RNA secondary structure, which consists of only three symbols, whereas there are four nucleotides. Moreover, while there are a-priori no constraints on the ordering and frequencies of nucleotides, there are constraints on the secondary structure: all opening and closing brackets should match, stability of helices requires runs of at least two brackets, and hairpins should have a length of at least 3 long. These constraints yield $1.4848 n^{-3/2} (1.8488)^n$ shapes for strings of length n (Schuster et al., 1994). Exhaustive calculation of all minimal energy secondary structures of sequences of length 30, consisting entirely of G's and C's, yields the numbers from the table below.

1.07 10 ⁹	sequences
2.18830 10 ⁵	secondary structures
2.2718 10 ⁴	'typical structures'
93.4%	seq's in typical structure

Thus, not only do the sequences outnumber the secondary structures by far, more than 90% of the sequences fold in about 10% of the secondary structures. Moreover, it has been shown (using a 'reverse' folding algorithm) that these 10% typical shapes percolate through the whole sequence space. Thus maximally different sequences can fold into the same secondary structure, and there is a path between them of sequences which do also fold into this secondary structure, each being only 1 or 2 mutations from the next one. These properties generalize to longer sequences and to GCAU sequences: the frequency distribution appears to follow a Zipf law ($f(x) = 1.24 (71.2 + x)^{1.23}$), and the frequent ones together form a giant component (Schuster et al. 1994).

A general way to represent the sequence to structure mapping is to compare the difference in primary structure to the difference in secondary structure. This can be expressed for example as correlation length. A more complete representation is the representation as 'RNA landscape' (figure 2) (Fontana and Schuster 1987, Huynen et al., 1993). Here the frequency distribution of structure differences for a given sequence difference is plotted in 3D.

This landscape is obtained as follows. First, the number of point mutations is fixed. An example of a point mutation is a replacement of an A by a G base. Next, the specified number of point mutations is applied in a random fashion and the corresponding change in secondary structure is calculated. Possible measures for such a change are discussed in the next section. The number of times a specific change in secondary structure is met is plotted as the local height of the landscape.

From the figure we see that (a) the correlation length is rather small: the distribution does not change after more than ca. 10 mutations and (b) although a single base change generally changes the secondary structure little or not at all, it may cause the minimal energy structure to become entirely different, as seen from the long tail of the front-most curve, which corresponds to changing only one base. Taken together, the RNA landscape and the percolating 'typical' structures indicate the following characteristics of the primary to secondary structure mapping:

- A small neighborhood in sequence space maps to all regions in structure space. Thus, given an RNA sequence, any ('typical') sec-

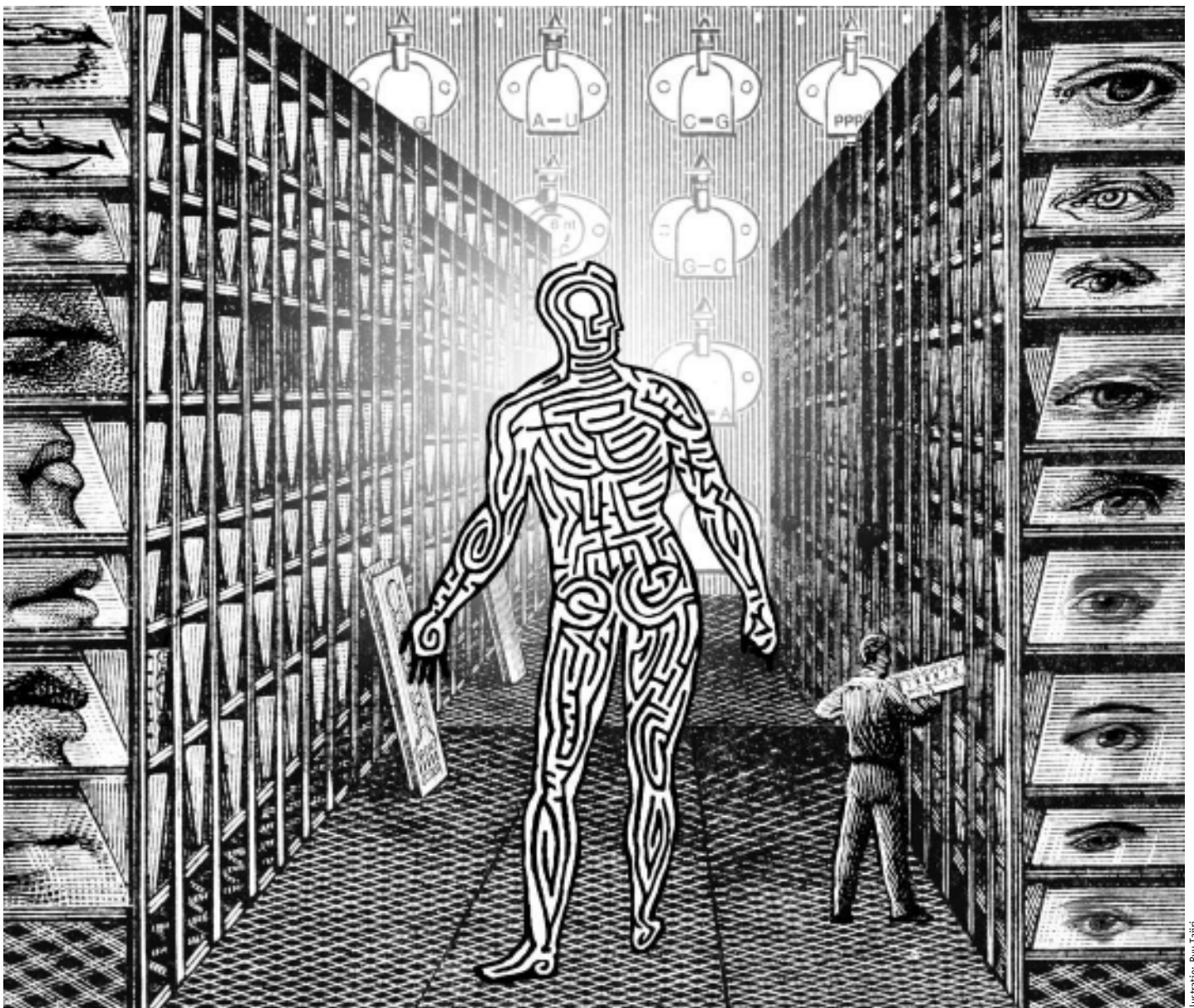
ondary structure is relatively 'close by' and can be reached with relatively few mutations.

- 10% of the points in structure space map to all regions in sequence space. Thus, any ('typical') RNA secondary structure, can be formed by very different sequences, and can therefore be compatible with other constraints (e.g., for coding a particular protein).

These properties seem to be 'ideal' for evolution (Schuster et al. 1994). We will study this in the next section. Here we can already answer one of the questions posed in the introduction: We expect to encounter biologically functional RNA secondary structures only in the subclass of 10% 'typical' secondary structures: others are hard to find, and hard to maintain in evolving systems.

Evolutionary dynamics on RNA landscapes

It is common wisdom that optimization on so-called rugged landscapes is difficult due to local peaks. The RNA landscapes are rugged, the



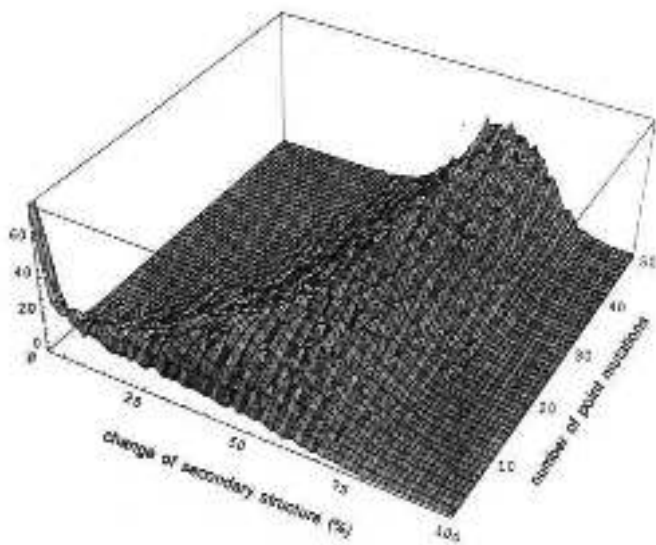


Figure 2 RNA landscape

correlation length is small as shown above. In this section we will study evolutionary optimization on this particular rugged landscape. We will show that the ruggedness is not necessarily an obstacle to optimization.

We study evolution on RNA landscapes by assuming that the 'fitness' depends on the secondary structure. We choose a certain secondary structure as the one with the highest fitness. Note that when we choose this secondary structure as the secondary structure in which an arbitrary RNA sequence folds, or when we choose it from a biological sequence database, chances are that the secondary structure is a 'typical' one as defined above. Fitness of other sequences is defined in terms of distance to the optimal structure in structure space. Distance between secondary structures can be measured in various ways, e.g. as tree distance, possibly using coarse graining by omitting length of stacks and loops, but also simply as the number of non-equal signs in the string representation of secondary structure.

The evolutionary dynamics is defined similar to that used for optimization in evolutionary computation. A population of RNA molecules is subjected to a replication, mutation, and selection regime. Each molecule has the same probability of replication. During replication mutations occur in the strings with a certain probability. The probability of 'death' of a molecule depends on its 'fitness'. This leads to a variable population, which on average will increase its fitness upto a point where selection and mutation balance. We assume chemostat conditions (i.e., the total RNA population is kept constant). We use only point mutations (i.e., changes of nucleotides), but similar behavior is observed when other changes like insertions, deletions and crossing over are used.

Epochal evolution and molecular clock

A typical evolutionary time course is shown in figure 3, which shows the approach towards the fittest structure from an arbitrary initial population (Huynen et al., 1996). The time course shows a pattern of 'punctuated equilibria' or 'epochal evolution'.

This implies that the system walks for some time along a so-called 'neutral path' on which the fitness is constant, although the sequence continues to change at a constant rate (i.e., is 'clocklike').

On the neutral path the walk through the space of all possible RNA molecules behaves as a diffusionlike process, with a diffusion coefficient depending on the number of neutral neighbors (λ), population size (N), replication rate (a), and the mutation rate per position (μ), and the sequence length (l) and can be approximated by: $D = \lambda(5al\mu/(3 + 4N\mu))$ (Huynen et al., 1996). When the population on a neutral path approaches a point where a higher fitness neutral path is 'near' (i.e., 1 or 2 mutations away) it can jump to the higher neutral path, and subsequently diffuses along the new path. This 'scenario' provides a unification between the concept of neutral evolution and of adaptive evolution where the former may facilitate the latter (Huynen 1996, Zuckerkandl 1997, Fontana and Schuster 1998a,b). Along the neutral path the population will continue to encounter in its neighborhood new structures, although there is a set of structures which remains in its 'shadow' all along the path.

Evolution of mutational robustness

The picture sketched above: diffusion on a network of neutral paths (also called a neutral network) and occasional shifts to higher neutral paths, would suggest that once the highest neutral paths is reached, no further evolution occurs, and that the population properties, at least on average, remain constant. Early simulation studies on RNA evolution have shown that this is not the case. In particular the 'shape' of the RNA landscape (compare figure 2) around the population changes during a long term evolutionary trajectory which remains on a certain fitness level. The average fitness of close mutants increases and so does the correlation length. (Huynen and Hogeweg 1994). The effect is small, but significant, for evolution with just point mutations, but becomes much stronger when crossovers and insertion/deletions are included.

Van Nimwegen et al. (1999) have demonstrated this effect analytically. Assuming a large fitness difference between 'on' and 'off' the neutral path, they show that the diffusion over a neutral net according to a mutation selection regime will lead to areas with relative high connectivity in the neutral network.

Note that the connectivity is a global property of the landscape, while the landscape is 'sampled' only locally by the population. It is interesting to compare this result with two well-known random walks: a blind ant, which chooses a random neighbor and only makes a step when on the neutral net, spends equal amounts of time at

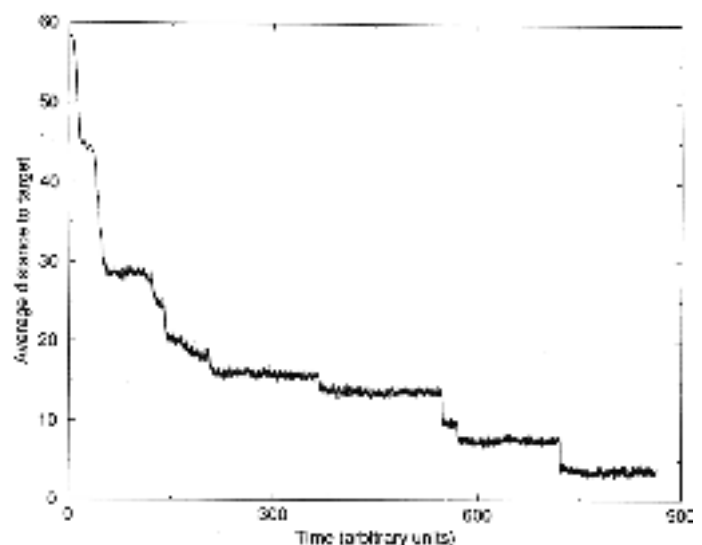


Figure 3 Punctuated evolutionary dynamics

each node on the neutral net; on the other hand, a myopic ant, which chooses a random neighbor on the neutral net, sees an average connectivity of $D = \hat{d} + \text{Var}(\hat{d})/\hat{d}$. The result depends on mutation rate and population size: it holds when their product is large enough; for very small values the connectivity 'seen' by the population remains average. They checked their analytical results with simulations on an RNA landscape, constructing the connectivity matrix by exhaustive search and showed an excellent fit.

It is a well-known experimental observation that one can obtain an increase of fitness of a population in a new environment relatively easily, but that the mutational robustness of such newly evolved population is low relative to the wild type. Bioinformatic analysis of viral RNA's reveals a larger mutational robustness than expected from random sequences (Wagner and Stadler, 1999). The above results demonstrate that this is an automatic result of evolutionary dynamics and that no explicit selection on robustness is needed (as is often assumed).

Long neutral paths and shortcuts

In a rugged fitness landscape neutral paths will 'meander'. The question arises which route will be chosen by the evolutionary dynamics, the long one along the neutral path, or a much shorter one for which a ditch should be crossed? The results mentioned above suggest that the neutral path is followed. Van Nimwegen derived the following (simplified) expression comparing the length of the neutral path which can be transferred in the time that it takes to cross a ditch of a particular width (i.e., w , number of mutations) and height (σ , fitness drop), given population size n and mutation rate μ :

$$V = \frac{n}{w!} \left(\frac{\log(\sigma)}{\mu} \right)^{w-1}.$$

This result was obtained by tracing the ancestry trees of mutants in the ditch, to find the crossing probability. When the mutation rate is not too large, the result shows the following.

- A very long neutral path can be transferred in the time it takes to cross even a shallow and narrow ditch. Thus, we should indeed expect that the evolutionary dynamics typically follows the neutral path, without shortcuts.
- The width, rather than the depth of the ditch, determines the crossing time. This can be understood qualitatively by the fact that the width relates to the number of steps that the non-fit mutant should survive, while being negatively selected with a strength proportional to the depth of the ditch.

For large mutation rates the population 'perceives' the ditch not as a ditch and crosses it by diffusion as on the neutral path. From this analysis we can conclude:

- It is the structure of the neutral networks rather than the ruggedness of the landscape which determines the evolutionary dynamics. This result is shown directly by Barnett (1998) by including neutral path in a family of landscapes categorized by ruggedness (Kauffman 1993),
- Evolutionary dynamics is qualitatively different from energy minimization dynamics as used in many other optimization techniques with respect to the crossing of 'energy barriers': in case of energy minimization the probability depends on the height of the barrier whereas in evolutionary dynamics it depends primarily on the width (due to the competition with the rest of the population).

Discussion and perspectives

In this paper we used a simple, but biologically relevant example of

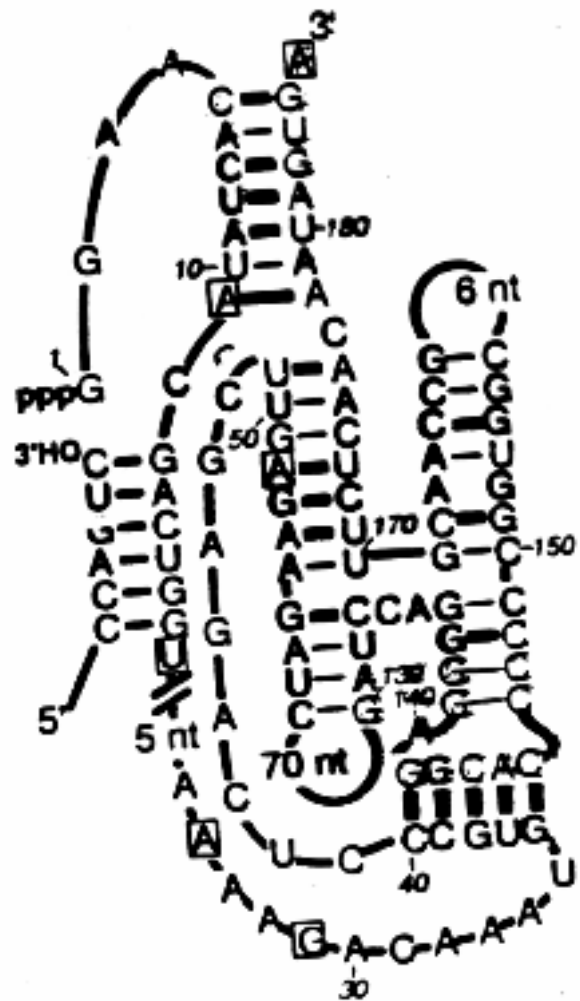


Figure 4 Evolved ligase (Eklund et al., 1995)

the 'coding' of secondary RNA structure in the RNA sequence.

In studying the evolutionary dynamics on RNA landscapes, we study the relationship between a particular 'coding' structure and evolutionary optimization. The relation between coding structure and evolutionary optimization can be studied from three different perspectives, i.e.,

- given a coding structure, how is the optimization dynamics
- given a problem, how should it be coded to obtain efficient optimization
- given evolutionary dynamics what kind of coding structure will be selected?

In this paper we took the first perspective and studied the static structure of the landscape and the evolutionary dynamics on the landscape. The obtained insights in RNA evolution have been discussed above. In addition, the theory of RNA evolution gives some unexpected insights in the other perspectives.

- We have seen that a very redundant and rugged coding structure can be beneficial for evolutionary optimization, whereas reasoning from the second perspective it would seem that one should minimize the size of the search space and minimize the ruggedness.
- We have seen that, although landscapes are usually characterized by their average properties, the evolutionary dynamics exploits the variation in the landscape and so can 'choose' to a certain extent the

coding structure it encounters. We have seen that, for the evolutionary scenario considered here, i.e., evolution towards a fixed target structure, it biases the coding structure towards larger mutational robustness.

Interestingly, in-vitro evolution experiments, in which certain binding and catalytic properties of RNA are maximized, are very successful: almost any desired catalytic function (including many but not yet all which are indispensable for the putative RNA world) can be obtained easily from randomized initial sequences. In such experiments one uses large populations (circa 10^{15} molecules, but this is still vanishing small relative to all possible sequences), no mutation and only few selection steps. The success of these experiments bears out forcefully the redundancy of RNAs at the functional level. The complex nested pseudo-knot secondary structure of figure 4 is an example of a selected catalytic domain. It has 92 conserved positions, and is found in a pool of 10^{15} molecules with a random stretch of 220 nucleotides. The same experiment yielded several equally efficient catalysts, some much simpler. Interestingly, the frequency of complex structures found is much larger than expected and as compared to smaller catalytic domains: apparently catalysis is more abundant in complex structures. (Eklund et al., 1995, Sabeti et al., 1997).

We used the RNA sequence to secondary structure mapping in these investigations, as the only biological mapping which can be computed realistically. Similar results have been obtained by using rough lattice models for protein folding. Moreover, the main features discussed here, i.e., redundant genotype-phenotype mapping, neutral networks, epochal evolution, and increase of mutational robustness during long term evolution appear also to occur *mutatis mutandis* in more complex situations such as in experiments on evolution of morphogenesis

through gene regulation and differential adhesion (Hogeweg 2000).

The image of evolution on a static fixed dimensional fitness landscape with simple neighborhood relations as considered here is an over-simplification. Mutations other than point mutations, e.g. duplications, insertions, and deletions change the sequence length and thus the dimensionality of the landscape, cross-overs change the neighborhood relations and through co-evolution the landscape is altered in the same time-scale as the movement of the population over the landscape. Nevertheless, the concepts developed here are useful for the analysis of such more complicated situations. For example, in the case of co-evolution we have shown that instead of evolving to 'flatter' parts of the landscape, evolution is to more rugged parts of the landscape and that insertion, deletions, and cross-overs make the bias in long term evolution more pronounced (Huynen and Hogeweg, 1994).

Biological systems are multilevel systems and the 'distance' between genotype and phenotype is much larger than the 'distance' between RNA primary and secondary structure as examined here. Both for bioinformatic pattern analysis and for bioinformatic modeling of the function and evolution of such systems the great challenge is to face the complexity, and to uncover the function/consequences of the complexity and the evolutionary dynamics which leads to it. 

Acknowledgements

The theory on RNA evolution which I have reviewed in this paper has been developed over the last decade, primarily by the group of Peter Schuster with Walter Fontana and Peter Stadler (Vienna) and by my former students Martijn Huynen and Erik van Nimwegen. I thank them for sharing their interesting work with me.

References

- Barnett, L. (1998) *Ruggedness and neutrality: The Nkp family of fitness landscapes*, in C. Adami et al., eds. Artificial Life VI (MIT press) p. 18–27.
- Eklund E.H., Szostak J.W., Bartel DP (1995) Structurally complex and highly active RNA ligases derived from random RNA sequences. *Science*. 1995 Jul 21;269(5222):364–70.
- Flamm C., Fontana W., Hofacker IL, Schuster P. (2000) RNA folding at elementary step resolution. *RNA*. 2000 Mar;6(3):325–38.
- Fontana W., Schuster P. (1987) A computer model of evolutionary optimization. *Biophys. Chem*. 1987 May 9;26(2-3):123–47.
- Fontana W., Schuster P. (1998a) Shaping space: the possible and the attainable in RNA genotype-phenotype mapping. *J. Theor. Biol.* 1998 Oct 21;194(4):491–515.
- Fontana W., Schuster P. (1998b) Continuity in evolution: on the nature of transitions. *Science*. 1998 May 29;280(5368):1451–5.
- Gutell R.R. (1993) Comparative studies of RNA: inferring higher-order structure from patterns of sequence variation. *Curr. Opin. Struct. Biol.* 1993; 3: 313–322.
- Hogeweg P., Hesper B. (1984) Energy directed folding of RNA sequences. *Nucleic. Acids. Res.* 1984 Jan 11;12(1 Pt 1):67–74.
- Hogeweg P. (2000) Shapes in the shadow: evolutionary dynamics of morphogenesis. *Artif. Life*. 2000 Winter;6(1):85–101.
- Huynen M.A. (1996) Exploring phenotype space through neutral evolution. *J. Mol. Evol.* 1996 Sep;43(3):165–9.
- Huynen M.A., Bork P. (1998) Measuring genome evolution. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 1998 May 26;95(11):5849–56.
- Huynen M.A., Hogeweg P. (1994) Pattern generation in molecular evolution: exploitation of the variation in RNA landscapes. *J. Mol. Evol.* 1994 Jul;39(1):71–9.
- Huynen M.A., Stadler P.F., Fontana W. (1996) Smoothness within ruggedness: the role of neutrality in adaptation. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 1996 Jan 9;93(1):397–401.
- Huynen M.A., Konings D.A., Hogeweg P. (1993) Multiple coding and the evolutionary properties of RNA secondary structure. *J. Theor. Biol.* 1993 Nov 21;165(2):251–67.
- S.A. Kauffman (1993) *The origin of order*. Oxford Univ. Press 709pp.
- Kimura M. (1993) *The neutral theory of molecular evolution*. Cambridge Univ Press.
- Konings D.A., Hogeweg P. (1989) Pattern analysis of RNA secondary structure similarity and consensus of minimal-energy folding. *J. Mol. Biol.* 1989 Jun 5;207(3):597–614.
- van Nimwegen E., Crutchfield J.P., Huynen M. (1999) Neutral evolution of mutational robustness. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 1999 Aug 17;96(17):9716–20.
- van Nimwegen E. (1999) *The statistical dynamics of Epochal Evolution*, thesis Utrecht University.
- van Nimwegen E., Crutchfield J.P., Melanie Mitchell M. (1999) Statistical Dynamics of the Royal Road Genetic Algorithm, *Theoretical Computer Science*, 1999 Nov 6;229(1–2): 41–102.
- van Nimwegen E., Crutchfield J.P. (2000) Metastable evolutionary dynamics: crossing fitness barriers or escaping via neutral paths? *Bull. Math. Biol.* 2000 Sep;62(5):799–848.
- Rivas E., Eddy S.R. (1999) A dynamic programming algorithm for RNA structure prediction including pseudoknots. *J. Mol. Biol.* 1999 Feb 5;285(5):2053–68.
- Sabeti P.C., Unrau P.J., Bartel D.P. (1997) Accessing rare activities from random RNA sequences: the importance of the length of molecules in the starting pool. *Chem. Biol.* 1997 Oct;4(10):767–74.
- Schuster P., Fontana W., Stadler P.F., Hofacker I.L. (1994) From sequences to shapes and back: a case study in RNA secondary structures. *Proc. R. Soc. Lond. B. Biol. Sci.* 1994 Mar 22;255(1344):279–84.
- Wagner A., Stadler P.F. (1999) Viral RNA and evolved mutational robustness. *J. Exp. Zool.* 1999 Aug 15;285(2):119–27.
- Zuckerandl E. (1997) Neutral and Nonneutral Mutations: The Creative Mix-Evolution of Complexity in Gene Interaction Systems *J. Mol. Evol.* 1997 Apr;44(4):470.
- Zuker M., Stiegler P. (1981) Optimal computer folding of large RNA sequences using thermodynamics and auxiliary information. *Nucleic. Acids. Res.* 1981; 9: 133–148.
- Zuker M. (2000) Calculating nucleic acid secondary structure. *Curr. Opin. Struct. Biol.* 2000 Jun;10(3):303–10.

Frits Beukers

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
beukers@math.uu.nl

Ronald van Luijk

Department of Mathematics # 3840
University of California
Berkeley, CA 94720-3840, U.S.A.
rmluijk@math.berkeley.edu

Raimundas Vidunas

Departement Wiskunde-Informatica
UIA, Universiteit Antwerpen
Universiteitsplein 1, 2610 Wilrijk, België
vidunas@uia.ua.ac.be

A linear algebra exercise

In het decembernummer van het jaar 2000 verscheen een open probleem van Frits Beukers in de problemenrubriek (probleem 10) om gehele getallen a , b en c te bepalen zodat een zekere matrix $M_{a,b,c}$ (zie (1)) drie geheeltallige eigenwaarden heeft. Ronald van Luijk en Raimundas Vidunas hebben aangetoond dat het probleem oneindig veel oplossingen heeft. In dit artikel worden drie oneindige families gepresenteerd.

Anyone who has ever composed a written test on linear algebra knows that it often takes considerable effort to make the numbers come out right. In fact, this problem may even be harder than the linear algebra problem itself. A particular subject where this problem arises, is eigenvalues of symmetric matrices. Usually we consider only matrices with integral coefficients. We know that 4×4 -matrices tend to become too laborious. Since 2×2 -matrices are not very exciting we have to confine ourselves to 3×3 -matrices. We know that there are 3 real eigenvalues in this case. We cannot let the poor students solve irreducible cubic equations, so we might see to it that the eigenvalues are integers, which the students can recognize by inspection. Moreover, computing the eigenvalue equation of an arbitrary symmetric 3×3 -matrix may be a little too stressful. So we choose our matrix to have a simple shape, say

$$M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

But now we created a problem for ourselves. How to choose integers a , b , c such that the symmetric matrix $M_{a,b,c}$ has three integral eigenvalues?

The eigenvalue equation reads

$$\lambda^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\lambda - 2abc = 0.$$

If $a = 0$ for example and we choose b, c such that $b^2 + c^2 = u^2$

for some integer u (e.g. $b = 3, c = 4, u = 5$), then our eigenvalue equation reads

$$(\lambda - u)(\lambda + u)\lambda = 0.$$

If $a = \pm b$ and a, c are such that $c^2 + 8a^2 = u^2$ for some integer u (e.g. $a = 3, c = 7, u = 11$), then our eigenvalue equation becomes

$$(\lambda \pm c)(\lambda - (\pm c + u)/2)(\lambda - (\pm c - u)/2) = 0.$$

Note that the eigenvalue equation is symmetric in a, b, c . We see that the above ideas yield solutions with the property that $abc = 0$ or $(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2) = 0$. To make our linear algebra problem a little more interesting we would like the numbers a, b, c to be non-zero and with distinct absolute values. Hence we have the following question.

Question. Do there exist non-zero integers a, b, c , with distinct absolute values, such that

$$X^3 - (a^2 + b^2 + c^2)X - 2abc$$

has three integral zeros X ?

Solutions

If we let x , y and z denote the eigenvalues of the given matrix $M_{a,b,c}$, then the characteristic polynomial of $M_{a,b,c}$ equals

$$\lambda^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\lambda - 2abc = (\lambda - x)(\lambda - y)(\lambda - z).$$

Hence we want to find integers a, b, c, x, y, z , such that this polynomial equation holds. Comparing coefficients, we find the equations

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0, \\ xy + yz + zx &= -a^2 - b^2 - c^2, \\ xyz &= 2abc. \end{aligned} \quad (2)$$

These equations describe a two-dimensional surface S in five-dimensional projective space $\mathbb{P}^5$. We look for points with integral or, what amounts to the same, rational coordinates. Instead of

looking for individual rational points we shall look for so-called rational curves on S , i.e. polynomials in one variable which satisfy (2). Note that this surface, which is of degree 6, actually lies in projective four-space, as it is contained in the hypersurface given by $x + y + z = 0$.

Closer scrutiny by Ronald van Luijk has shown that S is birationally equivalent to a so-called singular K3-surface. As a consequence the surface S has a large number of interesting properties, but we shall not go into this here.

From the discussion in the previous section we know that there are infinitely many solutions with $a = 0, x = 0$. Namely $z = -y$ and $y^2 = b^2 + c^2$. This is the projective equation of a unit circle C . We choose t arbitrarily and intersect S with the hyperplane $x = ta$ in $\mathbb{P}^5$. The intersection is a curve of degree 6, but we know that it always contains the conic C as a factor. Hence the remainder of the intersection should be a curve of degree 4. This becomes even more apparent if we take $x = ta$ in (2), take $a = 1$ to go to affine coordinates, and eliminate c, z . We find

$$t^2 y^2 (t + y)^2 - 4b^2 (t^2 + ty + y^2) + 4b^2 (1 + b^2) = 0. \quad (3)$$

This can be considered as a family of fourth degree curves X_t with parameter t , or alternatively, as a fourth degree curve with coefficients in $\mathbb{Q}(t)$. The coordinates of the curve are b, y . A short calculation shows that the curve has two singular points, namely $(b, y) = (0, 0), (0, -t)$. From the geometry of curves we know that such an algebraic curve has genus 1. The points on genus one curves have an abelian group structure which we can now exploit. First we look for a number of obvious points on X_t . They come from the straightforward solutions we found in the previous section. Let us first consider the point with $b = -a = -1$ and $c = y$. A brief calculation shows that $y = -t + 2/t$ and the corresponding point is $(b, y) = (-1, -t + 2/t)$. We denote this point by O . Another point is found by taking $c = 1, y = -b$. We then find the point $(b, y) = (t - 2/t, -t + 2/t)$, which we denote by P . General theory of elliptic curves tells us that we can take O as the neutral element of a commutative addition law on X_t . Doing so, a straightforward, but tedious, computation shows that $2P$ is now given by the point

$$(b, y) = \left(\frac{-t^6 - 4t^4 + 4}{t^6 - 8t^4 + 20t^2 - 12}, \frac{2t^6 - 12t^4 + 16t - 8}{t^7 - 8t^5 + 20t^3 - 12t} \right).$$

After clearing the denominators this gives us the solution

$$\begin{aligned} a &= t(t^6 - 8t^4 + 20t^2 - 12), \\ b &= -t(t^6 - 4t^4 + 4), \\ c &= (t^2 - 2)(t^6 - 6t^4 + 8t^2 - 4), \\ x &= t^2(t^6 - 8t^4 + 20t^2 - 12), \\ y &= 2t^6 - 12t^4 + 16t^2 - 8, \\ z &= -t^8 + 6t^6 - 8t^4 - 4t^2 + 8. \end{aligned}$$

By computing higher multiples nP of P we could in principle find an infinite number of such parametrisations. However, the degrees of the polynomials involved increase like n^2 and become unwieldy very soon.

There is another remark we can make concerning (3). The singular point $(b, y) = (0, -t)$ is a double point and the equation of

its two tangents is easily seen to be

$$4(1 - t^2)b^2 + (y + t)^2 t^4 = 0.$$

Now replace t by $(s + 1/s)/2$ so that $4(1 - t^2) = -(s - 1/s)^2$. The equation of the tangents now factors as

$$\left((y + t)t^2 - b(s - 1/s) \right) \left((y + t)t^2 + b(s - 1/s) \right).$$

Take one of the tangents. At the point $(b, y) = (0, -t)$ it has triple intersection with X_t . So the tangent intersects X_t in only one more point. After a straightforward, but again tedious, computation we find the following points after clearing denominators:

$$\begin{aligned} a &= 2s(s^6 - 5s^4 + 11s^2 + 1)(s^6 + 11s^4 - 5s^2 + 1), \\ b &= 4s(s - 1)(s + 1)(s^2 + 1)^3(s^2 + 2s - 1)(s^2 - 2s - 1), \\ c &= (s - 1)(s + 1)(s^6 - 4s^5 + 3s^4 + 8s^3 + 3s^2 - 4s + 1) \times \\ &\quad \times (s^6 + 4s^5 + 3s^4 - 8s^3 + 3s^2 + 4s + 1), \\ x &= (s^2 + 1)(s^6 - 5s^4 + 11s^2 + 1)(s^6 + 11s^4 - 5s^2 + 1), \\ y &= -(1 + s^2)(s^6 - 4s^5 + 3s^4 + 8s^3 + 3s^2 - 4s + 1) \times \\ &\quad \times (s^6 + 4s^5 + 3s^4 - 8s^3 + 3s^2 + 4s + 1), \\ z &= -16s^2(s - 1)^2(s + 1)^2(s^2 + 1)(s^2 - 2s - 1)(s^2 + 2s - 1). \end{aligned}$$

Bad fibers

Another possibility to find a rational curve on S is to look for bad fibers of the family of curves X_t , i.e. look for those values of t for which X_t acquires an extra singularity. An irreducible fourth degree curve with three singular points has genus 0, in other words, it is a rational curve. Unfortunately, the bad fibers of the family X_t all turn out to be reducible with components not defined over $\mathbb{Q}$. However, it is possible to construct another family of genus one curves on S by intersecting it with the family of hyperplanes $a - b + t(c + z) = 0$. Note that $a - b = 0, z = -c$ also corresponds to a straightforward solution from the first section. It turns out that the special hyperplane $a - b - 2(c + z) = 0$ intersects S in a conic plus a fourth degree curve with three singularities. Rational parametrisation of the latter curve yields the solution

$$\begin{aligned} a &= (4u - 7)(u + 2)(u^2 - 6u + 4), \\ b &= (5u - 6)(5u^2 - 10u - 4), \\ c &= -(3u^2 - 4u + 4)(u^2 - 4u + 6), \\ x &= 2(3u^2 - 4u + 4)(4u - 7), \\ y &= -(u + 2)(5u - 6)(u^2 - 4u + 6), \\ z &= (u^2 - 6u + 4)(5u^2 - 10u - 4). \end{aligned}$$

When we substitute $u = 3$ in the latter parametrisation, we get $a = -125, b = 99$ and $c = -57$ with eigenvalues 190, -135 and -55. By a computer search, we find that this is the second smallest example, when ordered by $\max(|a|, |b|, |c|)$. The smallest has $a = 26, b = 51$ and $c = 114$. $\Leftarrow$

Gerard Alberts

Werkgroep Wetenschap en Samenleving
Katholieke Universiteit Nijmegen
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
g.alberts@cw.nl

Willem van Zwet

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
vanzwet@math.leidenuniv.nl

Interview Mike Keane

Een bemoeial met smaak

Mike Keane trekt rond en gaat nergens ongemerkt voorbij. Dat krijg je met een talenknobbel. Meisjes en een mooi boek lokten hem ooit naar Europa. Na een carrière in drie landen vertrekt hij uit Nederland om pensionering te ontlopen. "Voorlopig ben ik erop uit zelf te bepalen wanneer ik ophoud. Dat is niet alleen een kwestie van geld. Ik heb twee problemen die ik graag de komende vijf jaar nog wil oplossen." Het CWI bood hem op 19 maart een afscheidssymposium aan; het Nieuw Archief interviewde hem.

Mike Keane (San Antonio, Texas, 2 januari 1940) gaat een half jaar naar Japan en dan langere tijd naar Middletown (Connecticut). Als we binnenkomen zit hij braaf aan zijn Japanse lessen, lezen, schrijven, tapes, grammatika.

"Ik doe alles, alle lesmethoden tegelijk. Het is hard werken, iedere keer. Mijn vrouw is Nederlandse, dus Nederlands moest ik wel leren. Het kost me een jaar of drie om een taal goed te leren. Het lukt ook niet goed als je niet in het land verblijft. De belangrijkste voorwaarde om een andere taal te leren is je eigen taal goed te kennen. Geheugen is ook heel belangrijk. Iemand die een taal goed spreekt weet zijn vinger op de situatie te leggen en weet: dit is al eerder voorgekomen, hier gebruik ik *die* uitdrukking. De wens om te assimileren helpt wel, maar is geen absolute voorwaarde. We hebben wel Hebreeuws geleerd,

maar het was onmogelijk, ook in zekere zin niet toegestaan, te assimileren. Japans is nog moeilijker. Het is moeilijk te onthouden wat je hebt geschreven. Je kunt Japans ook niet lezen als je het ziet. Engels is ook moeilijk, voor jullie dan. Goed Frans of Italiaans spreken is ook heel moeilijk."

In Frankrijk hielp hij de KGB-school (Keane, Guivarc'h en Brunel) in *marches aléatoires* van de grond en was hij mede-oprichter van het tijdschrift *Astérisque*. In Nederland stond hij aan de basis van het onderzoek in percolatie-theorie, was hij een van de trekkers van het grote NWO-programma *Rekenintensieve Methoden in de Stochastiek* en steunde hij het Eurandom-initiatief. De waardering voor Keanes werk blijkt uit een onwaarschijnlijk groot aantal gasthoogleraarschappen en uit zijn uitverkiezing tot lid van de KNAW in 1991.

U bent een veelreiziger. U komt in verschillende landen en staat erom bekend dat u zich na verloop van tijd met de zaken gaat bemoeien. "Ik probeer contacten aan te knopen. Het gaat via het samen wiskunde doen, ik probeer te werken aan problemen van andere mensen, en via een glaasje drinken. Ik wil deelnemen, mijn steentje bijdragen, niet alleen aan de wiskunde, maar ook aan de organisatie. Gewoon, als je kunt helpen is het goed; als het hindert, dan moet je weg zijn."

U maakt overal waar u komt school, hebt

overal leerlingen, en bent ook zomaar weer weg. Waarom zo ongedurig? "Dat is goed, dan hebben de leerlingen in ieder geval een baan. Waarom zou ik op mijn plaats moeten blijven zitten. Ik vind het vreselijk om altijd maar op dezelfde plek te zitten." *Is er geen tegenspraak tussen uw engagement en vertrek?* *U bent een zeer sociaal mens, enerzijds...* "en aan de andere kant verlies ik mijn geduld. Dat is juist." *U bent geen diplomaat?* "Misschien ontwikkel ik tegenover sommige mensen een vooroordeel. Het zou kunnen zijn dat ik bij bepaalde mensen besluit, hier kom ik niet verder, en dan geef ik het op. Doet niet iedereen dat?"

Engels is ook moeilijk, voor jullie dan.

Wat drijft u telkens verder. "Ja, dat heb ik me ook afgevraagd. Nieuwsgierigheid heeft er iets mee te maken. Ik ben heel erg geïnteresseerd in verschillende culturen. Het is telkens weer een uitdaging. Het standaard antwoord, en daar zit wel iets van waarheid in, is: als op je instituut iemand binnenkomt en je weet al wat hij gaat zeggen voordat hij zijn mond opendoet, dan is het tijd om te vertrekken. Dat duurt bij mij een jaar of acht. Dan heb ik het punt bereikt, dat ik niet zo nuttig meer ben. Immers, niet alleen de ander zegt telkens hetzelfde, ik ook. Vergelijk wiskundig

onderzoek doen maar met spelen met Rubik's cube. Je kunt je erin oefenen; op een gegeven moment ben je er heel goed in; je kunt er kampioen in worden. Dan komt het moment dat je hem opzij moet leggen en iets anders moet gaan doen. Zo zie ik het werken in een bepaalde omgeving."

Civil Rights Movement

Hoe is het reizen begonnen? "Ik heb gewoon een boek gelezen, Robert Jungk's *Brighter than a thousand suns*. Jungk beschrijft de wetenschapsbeoefening in Göttingen. Dat wilde ik ook. Als je opgroeit in een culturele woestijn als San Antonio, maakt zo'n boek een verpletterende indruk."

U zette zich al af tegen uw omgeving. U was ook actief in de Civil Rights Movement. "Ik was meer met deze beweging bezig dan met mijn studie. De universiteit van Austin stelde ook niet zoveel voor. Mijn methode was braaf naar te college gaan en te luisteren, dan hoefde ik verder niet zoveel te doen."

"Het is ook een raadsel voor mij, hoe ik in die Civil Rights Movement verzeild ben geraakt. Je zou denken, dat wanneer je de discriminatie met de paplepel ingegeven hebt gekregen, je ook zo gaat denken. Bij mij was dat niet zo. Ik heb nooit begrepen waarom sommige mensen achterin de bus moesten zitten. Dat vond ik heel vreemd. Ik had ook veel vrienden onder de zwarte bevolking, dat was voor onze groep weer normaal."

"Het was de tijd van de stand-ins voor de bioscopen. We gingen met zijn allen in de rij staan voor de kassa. Ik schat dat ik een jaar van mijn leven vier avonden per week in de rij heb gestaan. Het ging er heel vriendelijk aan toe: 'We willen graag een kaartje als je onze vrienden ook binnenlaat'. Zo werd de rij wel lang. Twee van de drie bioscopen zijn uiteindelijk gesloten en de derde heeft toegegeven. Ik heb eens zwarte mensen een huis helpen kopen. Zij mochten niet zelf een huis kopen in een witte wijk. Wij kochten het om het door te verkopen. Dat was een beetje riskant, maar echt gevaarlijk was de *voter registration*. We gingen naar kleine dorpjes in het oosten van Texas om zwarten zich te laten inschrijven als kiezer. Daarvoor moest je hun handtekening ophalen. Dat was het soort acties waarbij we tegenstanders met een geweer achter ons aan kregen."

"Mijn ouders waren er tegen, denk ik. Ik deelde mijn kamer in Austin met een zwarte student. De universiteit schreef hen brieven, of ze wel wisten wat hun zoon deed. Mijn cijfers waren prima, dat was nooit een probleem. Mijn ouders zeiden: 'You can do what

you want. Just don't bring him home with you'. Drie jaar lang, van mijn achttiende tot mijn eenentwintigste, was ik bij deze acties betrokken. In Austin woonde ik in een gemeenschap van uit de kerk gezette christenen, de *Christian Faith and Life community*. Van daaruit voerden we die acties. Ik heb er mijn vrouw leren kennen. Zij kwam er een jaar studeren, in 1961. In 1962 zijn we samen naar Europa getrokken en een jaar later kregen we bericht dat de penningmeester van die gemeenschap er met de kas vandoor was. Zo'n gemeenschap was dat."

"Het was ook gewoon het avontuur, dat me naar Europa trok. In Austin waren ook drie meisjes uit Göttingen en een Japanner. We maakten met zijn zessen een rondreis door de Verenigde Staten die eindigde in New York, waar we inscheepten voor Rotterdam met de Holland-Amerika Lijn, heel romantisch. De reden was dat de reis per boot, inclusief de zeven dagen hotelkosten, veel goedkoper was dan de vliegreis, \$200 tegenover \$300."

"Ik wist zeker dat ik weg wilde uit Texas, maar waar ik in stapte, geen idee. De laatste twee jaar had ik bij een computerfirma gewerkt als programmeur. Ik maakte er onder andere simulatiemodellen van rivieren en overstromingen. Dat was, achteraf gezien, mijn eerste kennismaking met de stochastiek. We werkten op een CDC 160. Die machine werd afgeleverd zonder compiler, zonder assembler zelfs. Je moest in machinetaal beginnen. Ik heb daar een assembler voor geschreven. Het was heel leuk werk en toch verbeeld ik me nu, achteraf, dat ik wist dat ik meer wilde dan dat. En Göttingen, dacht ik, dat kon niet verkeerd zijn."

"In Göttingen zaten een heleboel goede jonge wiskundigen, onder anderen Strassen, Krengel, Rosenmüller, Ahlswede en Föllmer, die later bekend zijn geworden. We vormden één grote groep. We hadden veel plezier samen en we leerden ook ontzettend veel. Soms heb je dat, dat er zo'n groep mensen elkaar treft met gemeenschappelijke interesse en onderlinge stimulans. In Göttingen was dat toen zo in de stochastiek. K. Jacobs was onze leidsman daarin. Toen ik afstudeerde, *Diplom*, ging hij juist naar Erlangen en bood mij een plaats aan, *wissenschaftlicher Assistent*. Daar ben ik na anderhalf jaar gepromoveerd. Het ging heel snel en tegelijk heel gemoeidelijk. Af en toe, eens per maand, liep ik bij hem binnen en vertelde wat ik aan het doen was. Toen ik bij zo'n gelegenheid een vondst voorlegde voortbouwend op werk van Kakutani, reageerde hij meteen met: 'Schrijf dat op, dat is goed om op te promoveren'. Het werd

een proefschrift van 26 pagina's. [1] Nu zijn er nog steeds mensen bezig met wat ik toen heb opgeschreven. Jacobs had een heel goed gevoel voor wat interessant was. Ik had veel dingen gedaan, maar dit pikte hij eruit omdat hij dacht dat het goed was en het was ook heel goed voor mij. Kakutani was geïnteresseerd in mijn werk en bood me een baan in Yale aan. Daar heb ik twee jaar gewerkt."

"Toen ik in Yale kwam, in 1968, waren er nog steeds rassenrellen, maar de sfeer was veranderd. Het was veel venijniger geworden, gewelddadig ook. Ze probeerden bijvoorbeeld boeken in de bibliotheek te verbranden. Ik heb me daar niet opnieuw mee ingelaten. De hele politiek was verziekt. Na de studentenopstand van Parijs (1968) heeft het protest een harde wending genomen. Het was niet leuk meer en ik was zelf intussen geheel in beslag genomen door de wiskunde. In Göttingen had ik colleges gevolgd van grote mensen als Siegel, Kneser, Grauert, Deuring en Maak; in Erlangen van Bauer en Nöbeling. Nöbeling deed algebra. Hij is de schuld van mijn eerste — en laatste trouwens — publicatie over algebra, iets over vrije groepen. In Yale had ik een heel plezierig contact met Abraham Robinson in zijn laatste levensjaren. Hij was uit Oostenrijk gevlucht voor Hitler en doceerde ergens in een uithoek in Canada — tot dat iemand hem ontdekte en naar Yale haalde. Robinson was echt een heel goed en heel breed wiskundige, een zeer bijzonder man. Hij was ook iemand die niet uit de mainstream van de wiskunde kwam, daar voelde ik me mee verbonden."

Voor iemand uit de Verenigde Staten moet het strenge en hiërarchische Duitsland toch een cultuurschok geven? "Nou, ik had daar helemaal geen probleem mee. Om te overleven in het Duitsland van de jaren 1960 moest je een kameleon zijn, sowieso. Je moest Duits leren opdat ze niet wisten dat je geen Duitser was. Als je daar echt wilde wonen, moest je assimileren. Dat heb ik gedaan. Bovendien, ik denk niet dat het tot de goede toon hoort, wanneer je in een vreemd land woont, om politiek actief te zijn. In het geregelde Duitsland had ik het gevoel, dat ik veel meer vrijheid had. Het systeem toen was heel erg leuk. Je kon colleges lopen — of niet. Je had geen tentamens. Ik had één examen na drie jaar, het *Diplom*, en nog één, dat was de promotie. Dan werd je ook geacht wat te weten. Ik vroeg waar het over zou gaan en het antwoord was 'alles wat wiskunde is'; ik weet nog dat Maak dat tegen me zei. Dat systeem geeft je zo'n geweldig gevoel van vrijheid! Ik besef dat het niet geschikt

is voor massa-onderwijs. Het is wel heel erg goed voor mensen die willen leren.”

“Dat het een zekere ambitie vereist, daarvan waren we ons niet bewust. Het sprak vanzelf. En natuurlijk, ik was goed in wiskunde, ik had er plezier in. Het was een geweldige ervaring in de bibliotheek in Göttingen te zitten. Ik las alles, ja, ik was een veelvraat. Je leert als het ware door osmose, dat is ook iets uit de Duitse school. Je gaat naar college en de eerste keer dat je iets hoort, snap je er niks van. De tweede keer snap je iets meer en als je de volgende keer komt, dan begint het je te dagen. Je merkt dat de anderen het ook niet snappen. Op die manier gaat dat, echt Duits. De eerste keer dat ik besepte dat ik niet alles kon, was met mijn *Diplomarbeit*. Jacobs gaf me het probleem van de isomorfiestelling, dat Ornstein later heeft opgelost. Dat is een mooi vraagstuk, zei hij. Toen kwam ik tot de ontdekking dat ik het niet kon oplossen. Het was de eerste keer dat iemand me iets voorschotelde dat ik niet kon. Nu komt het regelmatig voor, maar nu heb ik ook meer smaak ontwikkeld.”

Het is wel waar, maar de reden waarom ik weet dat het waar is, bevalt me niet.

Komend vanuit het provinciale Texas voelde u zich dus veel vrijer in de grote wereld van Göttingen. “Een verschil van nacht en dag. Een van de aantrekkelijke dingen over het algemeen van het Duitse systeem is, dat juist omdat ze strakke regels hebben, je binnen die regels alles tegen iedereen kunt zeggen. Een van de dingen die me vaak is opgevallen, is dat ik zo naar Siegel kon lopen of naar Deuring en een vraag kon stellen, een wiskundige vraag. En ik kreeg antwoord, een wiskundig antwoord. En als het onzin was, wat ik vroeg, dan zeiden ze het ook. De typische Amerikaanse reactie in zo’n situatie is: wie is de persoon die mij deze vraag stelt? En niet: wat is de vraag? Dat komt doordat in Amerika de verhoudingen niet zo helder vastliggen. In het Duitse systeem ligt de vorm vast, hier is de professor, daar is de student. Binnen die vorm kun je je veel vrijer bewegen. In de vrijere Angelsaksische omgangsvorm is het veel lastiger omdat je voortdurend ook bezig bent je plaats te bepalen.”

“Het is een kwestie van vrijheid en verantwoordelijkheid. Zoals de theologen zeggen, je hebt de vrijheid om te beslissen, maar je moet ook verantwoordelijkheid nemen voor wat je besloten hebt. Vrijheid heeft een kader, dat heeft de protestantse theologie de afgelopen eeuw ook verwoord, Bultmann, Bonhoeffer,

Buber — eigenlijk komt het uit de joodse traditie. Voor mij geldt het nog steeds; ik vind het nog altijd prettig te werken in een gestructureerd systeem, zoals het Japanse systeem. Daar voel ik me zeer wel thuis. Natuurlijk, als je onderaan in de hiërarchie zit, is het niet zo gemakkelijk om dat te zeggen. In Japan, bijvoorbeeld, is het heel moeilijk om in het sociale systeem op te klimmen. Als je onderaan begint, kom je niet ver.”

Smaak

In Göttingen was Jacobs uw grote voorbeeld?

“Ja, hij was degene die ons controleerde. Hij gaf college, wij luisterden. Tot in Erlangen heb ik altijd zijn colleges gevolgd. Drie kwartier, dan pauze waarin ik geacht werd het bord schoon te vegen, dan weer drie kwartier en dan maakte ik de oefeningen. Die oefeningen schreef hij in Duits handschrift, dus dat heb ik ook leren lezen. Ook jonge mensen in Duitsland konden dat niet lezen, maar ik leerde het, omdat hij erin schreef. Hij was de meester.”

“Jacobs spoorde ons altijd aan naar andere mensen te luisteren. Hij moedigde ons aan om mooie dingen te doen en dingen van anderen over te nemen. Jacobs was niet de topwiskundige met grote nieuwe resultaten, maar hij had wel een zeer goede smaak. Hij wist precies aan te geven wat bijzonder was bij anderen. Dat kun je ook aanwijzen bij zijn leerlingen. Wat die smaak is, is mij nog steeds een mirakel. In zijn voordrachten en colleges was Jacobs altijd een beetje onbeholpen. Soms maakte hij een bewijs niet af omdat hij erin vastliep. Maar hij deed altijd heel interessante dingen. De techniek was niet zo belangrijk, de vorm was niet zo belangrijk, maar de inhoud, daar kwam het op aan. Hij had een visie, een visie op wat zou moeten gebeuren. Misschien was hij niet zo goed in de uitvoering, maar hij had wel een heel goede visie op de wiskunde. Dat heb ik geprobeerd over te nemen. Je probeert het na te bootsen. Misschien ben ik niet zo onafhankelijk als ik zou willen.”

Is smaak veeleer een kwestie van intellectueel fatsoen of van gevoel voor schoonheid? “Schoonheid. Smaak is een gevoel voor schoonheid, maar ook voor wat andere mensen interessant zullen vinden. Smaak is in die zin een quasi-politiek talent. David Ruelle heeft het zo uitgedrukt (in een lezing voor de AMS in 1990): als op een andere planeet kleine groene mannetjes zouden wonen, zouden ze dan dezelfde wiskunde ontwerpen als wij? Ongetwijfeld zullen ze dezelfde natuurkunde hebben als wij, want de stof en de zwaartekracht komt letterlijk uit de grond.



Mike Keane bij zijn afscheid van het CWI, 19 maart 2002

Maar dezelfde wiskunde? Ruelle dacht van niet. Wiskunde komt voort uit abstractie en dat kan een heel andere abstractie zijn. Ik ben het toevallig eens met Ruelle — de kleine groene mannetjes hoeven bij hun abstractie niet dezelfde keuze te maken als wij — maar veel mensen zijn het daar niet mee eens. Veel wiskundigen denken dat de getallen zijn geschapen door god. De meeste getaltheoretici zijn veel religieuzer dan ik. Sommigen geloven in de echte waarheid van het getal drie, daarin volg ik ze toch niet.”

Bedoelt u dat van gemeenschap tot gemeenschap de wiskunde kan verschillen en dat de waardering voor wat goed en slecht is in de wiskunde uiteen kan lopen, omdat wiskunde cultureel bepaald is? “Ja, van land tot land kan dat uiteenlopen. Er zijn landen geweest die gek waren op een bepaald soort wiskunde. Waarom komen er zoveel goede combinatorici (en überhaupt wiskundigen) uit Hongarije? Die mensen kunnen tellen, die tellen echt. Daar is iets gebeurd, daar is een smaak, daar is een traditie gegroeid.”

En wat was de smaak van Jacobs? “Het mooie, daar ging het om. Hij was vooral bezig mensen te laten zien, hoe iets mooi zou kunnen zijn, wat er aantrekkelijk zou kunnen zijn aan een gedachte. Dat bepaalde gedachten verrassend zijn en aantrekkelijk...”

U bent zelf iemand met een sterke wiskundige intuïtie, is dat verwant aan smaak? U noemt zichzelf eerder probleemoplosser dan theoriebouwer, maar uw proefschrift is toch juist een voorbeeld van zo’n verrassende gedachte in de zin van Jacobs? “In de kansrekening moet je inderdaad wel een intuïtie



foto: Jan Schipper

Mike Kean en zijn vrouw Mieke

hebben, hoe de dingen zitten. Dat is veel belangrijker dan de techniek. Als ik het van de techniek moest hebben, dan was ik allang gezakt, denk ik. De technische kant kan wel eens moeilijk zijn, maar er zijn genoeg dingen die verrassend zijn zonder de techniek. Eerlijk gezegd ben ik eigenlijk niet alleen kansrekenaar. Ik doe ook veel andere dingen. In de ergodentheorie ben ik opgegroeid.”

“Mijn proefschrift gaat over rijtjes nullen en enen, ergodentheorie. Ik had een algemene, mechanische manier gevonden om rijen van nullen en enen te genereren, waar een bepaalde symmetrie in zat — geen volledige symmetrie, maar symmetrieën die naar on-eindig gaan — De manier waarop een rij gegenereerd werd, bepaalde de eigenschappen van de rij. Het zijn die eigenschappen die je interesseren. Je kunt op vele manieren toevalrijen genereren; dit is een van de manieren. Ik had een bepaalde klasse rijen apart genomen, die bijzonder mooie eigenschappen had, spectraal-eigenschappen. Het was werk op een toen onbekend terrein. Daar is een hele theorie uit voortgekomen. Andere wiskundigen zijn toen op het idee gekomen, dat je een rij kon construeren met willekeurige eigenschappen. Daar was ik niet op gekomen. Krieger heeft het bedacht en uitgevoerd. Men was enthousiast over dit resultaat, omdat het de mogelijkheid verschafte rijen te construeren met willekeurig welke eigenschap die je voorschrijft. Er waren oudere artikelen van Hahn, Katznelson en Kakutani over dergelijke dingen. Toen kwam mijn artikel en dat van Grillenberger. Uiteindelijk heeft Krieger het idee gehad om er de algemene consequentie uit te trekken. Vervolgens heb-

ben anderen gezien dat dergelijke rijen ook op een andere manier interessant waren. Er zijn nog steeds mensen bezig daarover te publiceren en er precieze eigenschappen uit te halen. Ik denk dat er zo'n honderd artikelen over verschenen zijn. Ik krijg nog regelmatig artikelen toegestuurd waarin mijn proefschrift geciteerd wordt. Zo gaat dat. Een cruciaal voorbeeld van zo'n rij is wat Jacobs de *Mephistowals* heeft genoemd: je schrijft 001 op, dan hetzelfde en dan het tegenovergestelde 110. Nu heb je dus 001 001 110 opgeschreven, daarachter schrijf je hetzelfde en dan het tegenovergestelde: 001 001 110 001 001 110 110 001. Zo ga je door.”

Mephistowals, we hebben in één keer onze ziel verkocht? “Ja, tegenwoordig is het populair het woord fractal voor zulke constructies te gebruiken. Deze rij is bijzonder; hij is door een machine geproduceerd. Dat is een manier om ernaar te kijken. Het is een machine die uit 0 een 001 maakt, uit 1 een 110. Als je begint met 0, dan 001 en je construeert verder door substitutie dan zie je een symmetrie ontstaan die abstract is.”

Waar komt zo'n probleem vandaan? “Ik denk, dat je gewoon heel hard over dingen nadenkt. Als je begint te spelen op een muziekinstrument, hoe krijg je er dan een melodie uit? Je probeert dit, je probeert dat. Je kijkt eens. Bij wiskunde gaat dat net zo. Je probeert dit en dat, je speelt wat. Je speelt wel met kennis van zaken, natuurlijk. Je kent bepaalde harmonieën. Wat is mooi, wat is niet mooi, dat speelt een rol. De discipline is anders dan de muziek, maar de creatie is hetzelfde.”

“Nog een voorbeeld van het belang van smaak. Furstenberg heeft in zijn boek over recurrente combinatoriek een stelling bewezen van Szemerédi, een Hongaar, over arithmetische progressies. Eigenlijk is het een oud probleem van Roth: je hebt een collectie natuurlijke getallen en je wilt weten of in die collectie een arithmetische progressie van bepaalde lengte voorkomt (10–20–30 of 15–20–25 zijn progressies van lengte 3). De stelling van Roth zegt dat als de collectie van getallen maar groot genoeg is, dan kun je altijd zo'n progressie vinden — groot genoeg betekent hier dat de proporties van die getallen op alle getallen positief is; je hebt het over de dichtheid. Roths stelling blijkt waar voor willekeurige progressies. Szemerédi heeft laten zien dat als je een collectie natuurlijke getallen met positieve dichtheid hebt, dan kun je een arithmetische progressie van willekeurige lengte vinden. Het bewijs is heel ingewikkeld. Furstenberg heeft nu iets heel moois gevonden, dat de hele combinatoriek — de getalthe-

orie die erin zit — vermijdt. Hij heeft een manier gevonden om deze stelling te bewijzen via de min of meer standaard ergodentheorie van dynamische systemen. De ergodenstelling zegt, dat als je een dynamisch systeem hebt en je loopt door, dan kun je functies middelen. Hij heeft een variant op de ergodenstelling bewezen voor dit geval. Dat is nieuw en geeft een oplossing voor die overmaat aan combinatoriek in Szemerédi's stelling. Dat is een openbaring voor de meeste mensen. Het is een voorbeeld van zeer goede smaak. Ik denk dat het Jacobs is geweest die hem op het idee heeft gebracht om dat zo aan te pakken. Ik was erbij toen het begon. Jacobs hield een voordracht waarbij hij het gevoel uitte dat zo iets gedaan zou moeten worden. Jacobs kon het niet verder concreet maken. Furstenberg heeft het wel gevonden.”

“Ergens zie je iets en je denkt ‘het is wel waar, maar de reden waarom ik weet dat het waar is, bevalt me niet’. Ik wil een andere reden zoeken. Te beseffen dat een andere, mooiere reden zou kunnen zijn, dat heeft te maken met smaak. Dat is een voorbeeld met betrekking tot bestaande resultaten. Natuurlijk heb je ook genieën die plotseling vanuit het niets met iets verrassends komen. Kontsevich, een Rus die in Parijs woont, heeft in 1998 de Fields-medaille gewonnen voor zijn classificatie van knopen. Hij schrijft een formule op en niemand weet waar die formule vandaan komt en hij weet dat zelf misschien ook niet. Het begint heel elementair en plotseling heeft hij een heel moeilijk probleem opgelost. Dat is een heel ander voorbeeld van goede smaak.”

Na Yale bent u opnieuw naar Europa gekomen, toen naar Frankrijk. In Rennes hebt u met Guivarc'h gewerkt aan stochastische wandelingen. Was dat ook weer zo'n nieuw terrein of was het meer een kwestie van probleemoplossen? “Dat werk heeft meer het karakter van voortzetting van het werk van Pólya. Pólya heeft als eerste stochastische wandelingen bestudeerd en onder andere bewezen dat het karakter van een stochastische wandeling in een tweedimensionale ruimte heel anders is dan in een driedimensionale ruimte. Hierop heeft het beroemde gezegde van Kakutani betrekking dat een dronken man altijd weer thuiskomt, maar een dronken vogel voor eeuwig verloren kan zijn.”

“Wat wij hebben geprobeerd is het volgende: als je een stochastische wandeling maakt, betekent dat dat je telkens een stap maakt van de ene plaats naar de andere. In twee en drie dimensies zijn dat regelmatige roos-

ters. Bij iedere discrete groep hoort een rooster. De elementen van groep bepalen waar je naar toe kunt springen, op welke manier je kunt springen. Er bestaan andere groepen dan de gewone in twee en drie dimensies, er zijn niet-Abelse groepen. Wij hebben in feite de recurrentie-transitie-theorie behandeld voor groepen in plaats van voor gewone roosters in twee en drie dimensies. Het is niet heel verrassend wat daaruit komt. Een heel interessant resultaat is wel, dat eigenlijk de enige manier om de situatie te hebben van die man die altijd weer thuiskomt, is dat het tweedimensionaal is en dat het Abels is. In alle andere gevallen is het uitgesloten. Een van de eerste stellingen die we bewezen, samen met Brunel, is dat voor een $Ax + B$ groep iedere stochastische wandeling transient is. Dit hele werk was meer voortbouwen dan iets nieuws creëren. Een interessant aspect van dit onderzoek was, dat er geen methoden waren. Men dacht dat je er niet aan kon rekenen. Je kunt meestal niet goed rekenen aan groepen. Als je convoluties op groepen wilt berekenen, dan loopt het mis. Je moet dus andere methoden vinden. We hebben leuke methoden gevonden om er wel aan te rekenen.”

Dus toch nieuw? “Ja, de rekenmethoden waren geheel nieuw. Het was een periode waarin we een heleboel mensen aan het werk hebben gezet.

Hoe kwam het dat u na die twee jaar in Yale naar Frankrijk ging? “Voordat ik naar Kakutani ging, had Brunel mij uitgenodigd, omdat hij gehoord had van die nullen en enen. Ik ben toen in 1967 twee maanden op bezoek geweest en heb in die tijd twee artikelen geschreven samen met Antoine Brunel. Daar heb ik ook Métivier leren kennen en Guivarc’h. Bij mijn vertrek zeiden ze: als je terug wilt komen, laat ons dat dan weten, want we willen je hier graag hebben. Toen ik na een jaar in Amerika zag dat ik liever terug wilde naar Europa, heb ik ze gewoon geschreven. Ik vond het leuk in Rennes en kreeg de gelegenheid weer een nieuw land te leren kennen. Ik heb eigenlijk nooit hoeven solliciteren, behalve hier in Delft.”

Jungle

Waarom ging u weg uit Rennes? “Het was een combinatie van wiskundige en persoonlijke omstandigheden — we wilden graag bij

de familie in Nederland in de buurt zijn. In Rennes was het grote werk af. Ons werk was ook bekend geworden en afgerond met een samenvattend boek. [2] De zuigkracht van Parijs speelt in Frankrijk altijd een rol. Brunel en Métivier zijn naar Parijs gegaan, Jacod is weggegaan. Ze hebben mij ook wel gevraagd naar Parijs te komen, maar ik had kleine kinderen. Het heeft geen zin met kleine kinderen in Parijs te wonen. In Delft (1981) was de kans iets nieuws op te bouwen. In Rennes was absoluut geen ruzie. In Delft is altijd ruzie. Delft is een jungle in zekere zin, althans het was een jungle toen ik er was. Ik was de grootste aap natuurlijk. We hadden een heel goede groep. Dan kun je in een situatie komen dat anderen uit alle macht proberen ongedaan te maken, wat je tot stand hebt gebracht. Dat is actief verzet. Het is niet zo dat er een kleine mug zit waar je geen aandacht aan moet besteden. Het is eerder een stelletje termieten die aan je huis knagen. Als je daar niets aan doet ... daar komt die confrontatie vandaan. Ik heb eenvoudig niet geleerd het geduld te hebben om een evenwichtssituatie met dreigementen in stand te houden. Toen Karel Scheffer met pensioen ging, heeft men de gelegenheid te baat genomen om een leerstoel te schrappen. Dat vond ik niet kosher. Ik heb gezegd, als jullie dat doen ga ik weg. Ze deden het toch en ik ben gegaan. Delft heeft een lange geschiedenis van mensen die komen en gaan. Het is een wonder dat ik daar zo lang ben gebleven.”

Nu bent u ook al weer weg van het CWI. “Dat heeft een andere reden. Ik wil zelf bepalen wanneer ik met pensioen ga.”

Was u anders gebleven? “Ik denk het wel. Het is ook beter voor de wiskunde in Nederland om dergelijk wiskundig werk in stand te houden. Nu hebben ze nog wel de mogelijkheid om dat goed te doen, maar dan moeten ze wel de structuur herstellen. Het beleid van het CWI is op het moment niet goed. Het is moeilijk op het moment om iets moois te doen. Ik bedoel niet een school opbouwen, maar gewoon een stevig wiskundig onderzoek doen, mooie dingen; dat is nu moeilijk. Het CWI zou meer wiskundigen, echte wiskundigen, moeten aantrekken. Ik heb inderdaad geprobeerd Gerard van Oortmerssen op andere ideeën te brengen, maar daar ben ik niet de goede diplomaat voor. Ik vrees dat NWO de verkeerde richting uitgaat. Het is niet dat

ze niet willen of niet de goede mensen zouden hebben. Er heerst nu een sfeer van uniformiteit. Niemand heeft er baat bij wanneer de medici, de natuurkundigen en biologen op dezelfde manier behandeld worden. Onder het mom van eerlijkheid giet men er een uniform sausje over.”

Delft is een jungle in zekere zin, althans het was een jungle toen ik er was. Ik was de grootste aap natuurlijk.

U wilt in Japan en in de VS nog een tijd verder werken. “Voorlopig ben ik erop uit zelf te bepalen wanneer ik ophoud. Dat is niet alleen een kwestie van geld. Ik wil nog met studenten werken. Ik laat vaak andere mensen een zaak afronden. Een van de belangrijkste dingen om met studenten te doen, is te proberen iemands smaak te ontwikkelen. Ik ga je niet een probleem aanreiken of oplossen. Je moet zelf je problemen vinden. Ik wil best over een probleem praten. Heel goed is als studenten naar je toekomen met vragen. Meestal kun je gewoon zeggen waar ze iets op kunnen zoeken. Af en toe komt er een student met een probleem dat verdraaid moeilijk is. Een maand geleden had ik zo iets. Toen heb ik wel iets gevonden, maar we weten nog niet of het goed is. Ik heb een idee. Op deze manier krijg je interactie met studenten. Je moet ideeën niet voor jezelf willen houden. Ideeën moeten niet geheim zijn.”

U zoekt nog steeds nieuwe avonturen. Welke ambitie hebt u nog? “Ik heb twee problemen die ik graag in de komende vijf jaar nog wil oplossen, afgezien van wat kleine vraagstukken. Het eerste is de classificatie van Neumann-algebra's met automorfismen, dat is dus de corresponderende theorie van Ornstein voor niet-commutatieve dynamische systemen. Dat is een volkomen open probleem. Het tweede is de stomme situatie met *reinforced random walk*, waar we helemaal niet uitkomen. We zijn daar heel hard mee bezig en we horen er eigenlijk uit te komen. Iedereen weet dat ik er mee bezig ben.”

Straks bent u terug in Amerika, wanneer stopt die rusteloze rondreis? “*Home is where you hang your hat*, zegt het Texaanse spreekwoord. En we houden een pied à terre in Nederland.”

Noten

¹ *Morse-Folgen mit vorgegebenem rationalem Spektrum*, Dissertation, Erlangen, 1967. Gepubliceerd als ‘Generalized Morse Sequences’,

Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, **10**, 335–353 (1968).

² *Marches aléatoires sur les groupes de Lie*, M. Keane, Y. Guivarc’h, B. Roynette, Springer (LN 624) 1977.

Willem Schaafsma

Instituut voor Wiskunde en Informatica

Rijksuniversiteit Groningen

Postbus 800, 9700 AV Groningen

Boekbespreking Heeft L.E.J. Brouwer ons nog iets te zeggen

Mosterd na de maaltijd

Begin dit jaar is de nederlandstalige biografie van Brouwer van Dirk van Dalen verschenen. Tegelijk verscheen een heruitgave van Brouwers proefschrift over de grondslagen van de wiskunde, aangevuld door Van Dalen met veel biografisch materiaal. In de pers is hier ruime aandacht aan besteed. Willem Schaafsma, hoogleraar statistiek in Groningen, gaat hier in op Brouwers opvatting over de plaats van de natuurwetenschap in de wereld.

Kort nadat de redactie mij had gevraagd de twee Nederlandstalige boeken van Dirk van Dalen over L.E.J. Brouwer [3–4] te recenseren, verscheen op 9 november 2001 een bespreking van deze boeken in de NRC. Deze bespreking door Dirk van Delft eindigt als volgt: “Wat is de balans van dit tumultueuze leven? Brouwer stelde weinig prijs op promovendi en brak met zijn opvolger Heyting. Staat zijn topologische werk nog fier overeind, de vraag naar de invloed van het intuïtionisme is moeilijker te beantwoorden. Iedereen kent het, niemand snapt het — ziedaar het probleem. Grondslagenonderzoek is lastig en het clubje intuïtionisten is dapper maar klein. Tot hen behoort Dirk van Dalen en zijn betrokkenheid en compassie met L.E.J. Brouwer, bij wie leven en werk ineenvloeien heeft een schitterende biografie opgeleverd.” En dus ook, gezien dit

slotbetoog, een schitterende recensie. Valt er voor mij nog iets toe te voegen aan al die prachtige maar ook in velerlei opzicht beschamende verhalen? Ik wil het hebben over de vraag wat Brouwer ons nog steeds te zeggen heeft en over de door Van Delft gestelde vraag naar de invloed van het intuïtionisme.

Evenals in mijn openingsvoordracht *Waarheid, Werkelijkheid, Waarschijnlijkheid* op het Nederlands Mathematisch Congres in Wageningen (1997) zal ik beklemtonen dat Brouwers opvatting van natuurwetenschap strikt empiristisch was. In dat verband wil ik ook iets zeggen over Van Dantzig en, natuurlijk, over de mathematische statistiek.

Wat heeft Brouwer ons nog te zeggen?

Ik richt mij tot personen die, zoals ik, willen nadenken over de vraag wat wetenschap is en hoe die ontstaat door redeneren, observeren, de verbeelding te laten spreken, communiceren. Daarbij komt vanzelf de vraag naar voren hoe we wetenschappelijke kennis dienen te beheren en te beheersen. Vermelde personen, wij dus, hebben als in de persoonlijkheidsleer van Heymans behoefte aan extreme voorbeelden. Dus aan personen, zoals Brouwer, met uitgesproken standpunten ten aanzien van de vier vermelde ingrediënten. (Ik ga voorbij aan andere facetten van Brouwers persoonlijkheid omdat die voor mijn ver-

haal van minder belang zijn.) Als wiskundige was Brouwer een solipsistische rationalist (en idealist). Op 17-jarige leeftijd schreef hij zijn ‘solipsistisch manifest’: “Het enige ware voor mij is mijn eigen ikheid van het ogenblik, omgeven door een schat van voorstellingen, waaraan de ikheid gelooft, en die haar doen leven. Een vraag, of die voorstellingen ‘waar’ zijn, heeft geen zin: voor mijn ikheid bestaan alleen de voorstellingen en die zijn als zodanig reëel; van een tweede, onafhankelijk van mijn ikheid, daaraan beantwoorden de realiteit is geen sprake.” Wat moeten wij hier mee? Er zit iets tautologisch in, een waarheid als een koe. Natuurlijk houd ik op dit moment dát voor waar waaraan ik op dit moment geloof. Maar er zit ook iets moois in, namelijk die “schat van voorstellingen die de ikheid omgeven”, en iets misleidends, namelijk daar waar het gaat om de toevoeging “waaraan de ikheid gelooft en die haar (die ikheid) doen leven”. Daar zit iets beperkends in, iets engs. Bij een strikte definitie van geloven is

“maar ze wisten dat de vooruitgang van het weten nooit de omvang van het onbekende zou verminderen.”

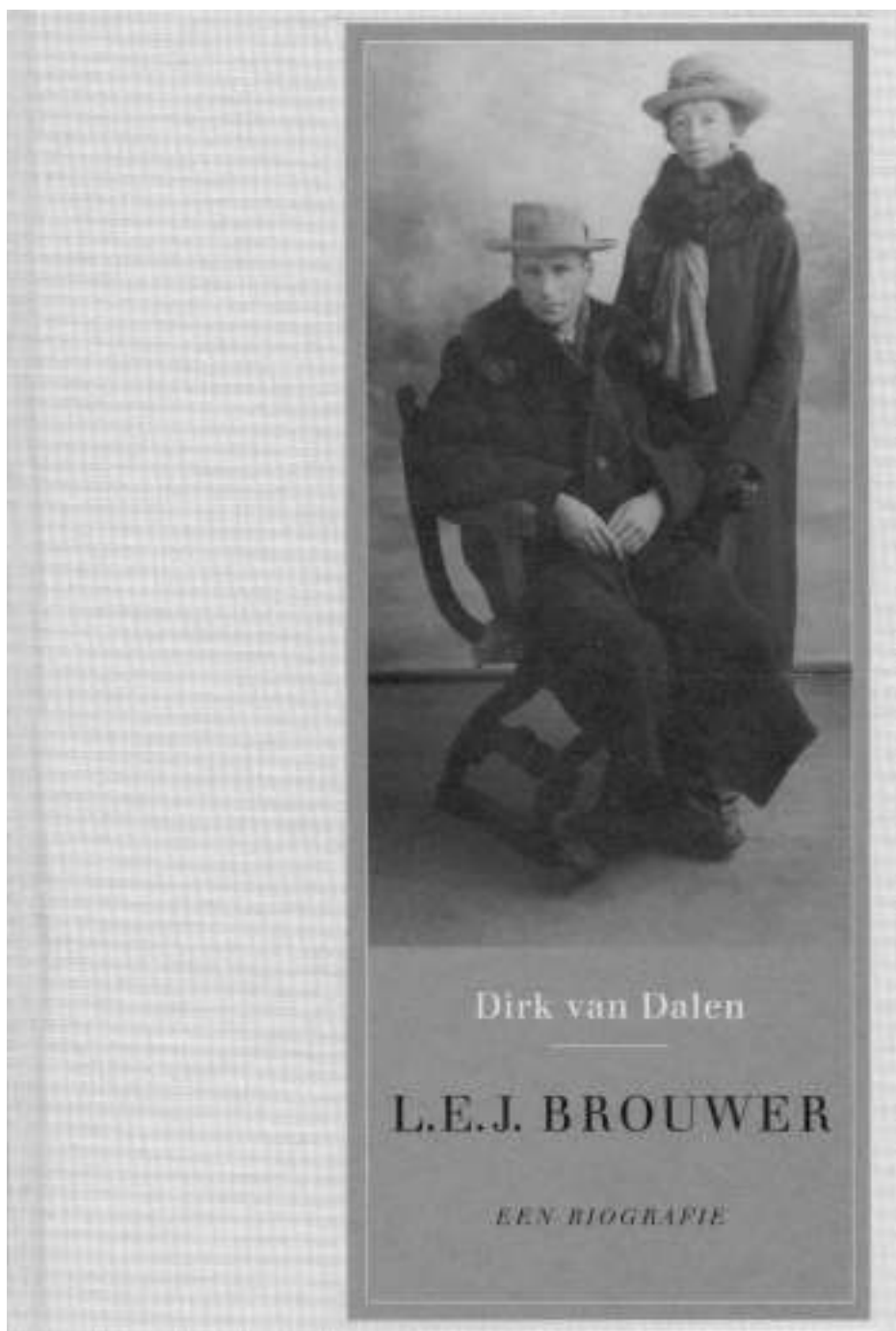
Geert Mak,

uit: *Hoe God verdween uit Jorwerd*

de schat van voorstellingen uiterst beperkt en worden vermoedens, allerlei verbeeldingen en verdichtfels buitengesloten. Het zijn juist deze ongewisse voorstellingen die de ikheid tot leven brengen. Zo kwam Brouwers ikheid helemaal tot leven met betrekking tot het principe van het uitgesloten derde waaraan hij niet wou geloven. Brouwers geloofsbelijdenis mag een nuttig uitgangspunt zijn bij het structureren van denkprocessen binnen de (zuivere) wiskunde, de informatica en bij spelen zoals schaken, zodra het gaat om verbeeldingen en verdichtfels omtrent de ware werkelijkheid, de wereld waarin wij leven, dan heeft ieder voor zich een schat van voorstellingen (verbeeldingen of verhalen) waarin min of meer wordt geloofd en met welke 'wetenschap' men bezig is.

Observatie

Brouwers opvatting van natuurwetenschap was strikt empiristisch. Omdat hij vooral dacht aan de gewone natuurkunde en ik iets breder op het oog heb, ontleen ik een onderscheid tussen Natuur en Milieu aan het eerdergenoemde boek van Geert Mak. Hierbij wordt de natuur gezien als goddelijk en goed; men accepteert de vrijheid ervan en de chaos. Maar met het milieu is het anders. Dit doorvorsen wij met alle rationaliteit van ons menselijke verstand met het doel er allerlei beheerstechnieken op toe te passen. Ik denk hierbij aan Van Dantzig's succesvolle poging om de zeedijken van Nederland met een halve meter te verhogen vanwege de statistische onzekerheden bij de berekening van een en ander. Ik denk hierbij natuurlijk ook aan het eerste hoofdstuk "De droeve wereld" van Brouwers *Leven, kunst en mystiek*, dat als volgt begint: "Nederland ontstond en werd in stand gehouden door het afslibsel der rivieren; ervormde zich een evenwicht van duinen, deltagetijden en afwatering, een evenwicht, waarin mee waren opgenomen tijdelijke overstromingen van gedeelten der delta. En in dat land kon leven en voortleven een krachtig mensengeslacht. Intussen, men was niet tevreden, men bouwde dijken langs de rivieren, om de overstromingen te regelen of te beletten, verlegde de beddingen naar willekeur ter verbetering van de afwatering of scheepvaartverbinding, en hakte intussen de bossen om. Wat wonder, dat hiermee het subtiel evenwicht van Nederland werd ondermijnd, de Zuiderzee werd uitgevreten, en de duinen langzaam doch onverbiddelijk werden weggeslagen? En dat tegenwoordig steeds zwaarder werk nodig is, om het land te behoeden voor gehele ondergang? En doet het niet eigenaar-



dig aan te aanschouwen, hoe in die zelf op de hals gehaalde arbeid niet slechts wordt berust, maar er zelfs een verheven cachet op wordt gedrukt van een in naam van God of Onverbiddelijkheid opgelegde taak?"

Het mag dan zo zijn dat Brouwer negatief dacht over het doorvorsen van het milieu met het doel er beheerstechnieken op toe te passen, hij had wel een empiristische opvatting van natuurwetenschap. Hij schreef bijvoorbeeld: "De mens heeft een vermogen dat al zijn wisselwerkingen met de natuur begeleidt, het vermogen namelijk tot objectivering der wereld, het zien

in de wereld en volgreekken, het zien in van herhalingen de wereld van causale systemen in de tijd." Medische statistici, econometristen en andere statistici herkennen hierin iets van het wezen van het werk dat zij doen.

Verbeelding en communicatie

Theoretische denkprocessen hebben innovaties nodig om niet te verzanden. Die vernieuwingen kunnen worden voortgebracht doordat een uitdaging wordt geformuleerd in de vorm van een wiskundige problematiek, een spelsituatie of van empirische gegevens. Naast zulke invloeden van buiten kan men

Dirk van Dalen

L.E.J. Brouwer

en de grondslagen van de wiskunde



Epsilon Uitgaven, Utrecht

ook denken aan een brainwave. Om te kunnen worden ingebouwd in het denkproces moeten deze invloeden in de vorm van een gedachtenspinsel worden gegoten, een verbeelding als het meetkunde betreft, een verdichtsel als het een verhaal betreft. Men moet zich openstellen voor zulke intuïties. Brouwer verheerlijkte zulke invloeden door het intuïtionisme te stellen boven het formalisme. Hij wou dus als het ware de verbeelding aan de macht. In de wiskundige praktijk is het natuurlijk zo dat intuïties weinig invloed hebben als zij niet op een of ander manier worden geoperationaliseerd en worden ingebed in de formalismen

die de denkprocessen begeleiden. Brouwers preoccupatie met de voorstellingen die zijn ikheid omgaven en die door zijn ikheid voor waar werden gehouden, maakte dat hij zich niet gemakkelijk openstelde voor inzichten van anderen. Om bij Brouwer een gevoelige snaar te treffen moest men niet minder 'edel' zijn dan hijzelf. Met Adama van Scheltema en met Van Eeden wilde hij wel van gedachten wisselen maar met anderen had hij moeilijkheden. Hiermee zitten wij middenin de problematiek hoe een individu zijn weten moet beheren. Voor een wiskundige is het niet ongebruikelijk om zich af te sluiten voor de in-

zichten van anderen, tenzij, natuurlijk, deze inzichten van belang zijn voor het denkproces waar men mee bezig is.

De invloed van het intuïtionisme

Brouwer heeft ons dus nog steeds iets te zeggen vanwege zijn uitgesproken standpunten ten aanzien van de vier gememoreerde ingrediënten van een discussie. Wij richten onze aandacht nu op de vraag naar de invloed van het intuïtionisme. Hierbij onderscheid ik twee ontwikkelingslijnen, de eerste heel dicht bij de wiskunde en de tweede enerzijds behept met door toeval en onzekerheid ontstane ongewisheid en anderzijds voorzien van additionele informatie in de vorm van statistisch waarnemingsmateriaal.

De eerste lijn loopt van Brouwers hevige aanvallen op misbruik van het principe van het uitgesloten derde, via Heytings axiomatische opbouw van de intuïtionistische logica en Van Dalen, naar Barendregts λ -calculus. Het gaat hierbij om een verregaande formalisering en precisering van logica's met als doel elke mogelijkheid tot verwarring uit te sluiten zodat de computer weet waarom het gaat. In deze lijn heeft men weinig of niets te maken met ethische principes. Barendregt heeft dit eens ergens verwoord door te schrijven dat 'goed' is dat wat ons dichterbij brengt bij de wiskundige Waarheid en Schoonheid. Het doel bij deze eerste lijn is dus primair het grondslagenonderzoek voor de wiskunde, niet dat van de mathematische statistiek die bij de tweede lijn centraal zal staan. Ik besluit deze eerste lijn nu door von Mises aan het woord te laten [6]: "None of the three forms of the foundation of mathematics, the intuitionist, the formalistic, or the logicistic, is capable of completely rationalizing the relation between tautological systems and (extramathematical) experiences, which is its very purpose, i.e., to make this relation a part of the mathematical system itself."

De tweede lijn loopt van Brouwers empiristische opvatting van natuurwetenschap via Van Dantzig naar de mathematische statistiek. Het primaire doel is hier het bevorderen van het weten omtrent de wereld waarin wij leven door er waarnemingen aan te doen en door deze te bewerken tot zinvolle uitspraken omtrent aspecten van die wereld. Het primaire doel is dus anders dan dat waar von Mises het over had. Bij de uitwerking laten wij ons echter graag door de min of meer gemeenschappelijk gedachte ratio leiden.

Brouwer bewees slechts lippendienst aan zijn empiristische wetenschapsopvatting. Hij gebruikte, bijvoorbeeld, zijn geloof in de ge-

kromdheid van de ruimte waarin wij leven om kritiek uit te oefenen op Kants bewering dat synthetische oordelen a priori, zoals het Euclidisch zijn van de ruimte waarin wij leven, zowel aangeboren als onfeilbaar zijn. Terwijl Brouwer de Waarheid in zichzelf zocht ontstond bij Van Dantzig de overtuiging dat de wiskunde zich uit haar isolement moest bevrijden door buiten zichzelf te treden en als het ware de boer op te gaan. Hij bekeerde zich tot de mathematische statistiek en had al in 1940 een scherp oog voor de grondslagen hiervan. Enerzijds kun je die benaderen vanuit de waarschijnlijkheidstheoretische idealisaties die je hebt in de vorm van theorieën van Kolmogorov en Reichenbach, anderzijds zou je die empiristisch willen benaderen door het Bericht door de Natuur gegeven als uitgangspunt te nemen. Met die empiristische aanpak had Van Dantzig het in 1940 al even moeilijk als wij het er thans ook nog mee hebben. Hij verwoordde een en ander in zijn voordracht [5] op het gezamenlijke symposium van het Wiskundig Genootschap en de Natuurkundige Vereeniging in Delft. Van Dantzig had veel gevoel voor de geest van zijn tijd. Nadat de oorlog voorbij was sprak hij vol vuur over de crisis der zekerheden die was ontstaan en die hij veel breder zag dan Brouwers gedoe over de formele logica of die hij ontwaarde in de niet-dogmatische aanpak van de statistiek door Neyman, Wald en anderen. Van Dantzig had een voorgevoel van de verhalen die later aan de postmodernisten zouden worden toegeschreven. In het volgende wil ik proberen een visie te schetsen door naar voren te halen dat grote statistici zoals K. Pearson, R.A. Fisher, H. Cramér en vele anderen hebben gesteld dat het primaire doel van de statistiek is predictie, het doen van uitspraken over de concrete werkelijkheid die eens zullen kunnen worden geverifieerd of gefalsificeerd, althans in principe.

Wiskunde, wetenschap, samenleving

Terwijl het vanuit de wiskunde gezien aantrekkelijk is om zich te beperken tot zo abstract mogelijke theoretische aspecten van de wereld waarin wij leven, zo is het vanuit de samenleving gezien alleen maar nuttig als

concrete uitspraken worden gedaan over voor de praktijk relevante aspecten van die wereld, bijvoorbeeld een patiënt, de inflatie in Nederland volgend jaar bij bepaalde maatregelen, enzovoorts. Het deelnemen aan de wetenschappelijke discussie over zulke concrete onderwerpen, dat is de grootste uitdaging voor de wetenschap en voor de statistiek in het bijzonder. Als mathematisch-statisticus zal ik mij moeten beperken tot de mathematische structurering van het statistische deel van zo'n discussie. Hoewel dit deel een heel erg gezond uitgangspunt heeft, namelijk berichten aan de ware werkelijkheid ontleend, is het toch ook zo dat onze bijdrage tot de discussie slechts beperkt kan zijn omdat empirische gegevens ruimte laten voor onzekerheid. Van ons mag worden verwacht dat wij die onzekerheid op een verantwoorde wijze inschatten en tot uitdrukking brengen. Om deze taak uit te voeren gaan wij echter nogal rücksichtslos te werk door de statistische problematiek uit het verband van de hele discussie te lichten, om deze vervolgens te mathematiseren en, aldus, te verabsoluteren.

Dit is niet de plaats voor een systematische behandeling van een en ander. Ik wil mij beperken tot commentaar van een longarts ten aanzien van de beperktheid van onze eventuele bijdrage tot de discussie over een individueel geval en tot een mogelijke aanpassing aan de werkelijkheid van Brouwers "schat van voorstellingen waarin de ikheid gelooft en die die ikheid doen leven".

Allereerst die longarts. Geconfronteerd met allerlei Groningse pogingen om de statistische onzekerheden in de kansen van individuele patiënten te schatten omdat die in een groepsbespreking van belang zijn (men moet zich niet zekerder of onzekerder voordoen dan men eigenlijk hoort te zijn) zei die longarts dat in de groepsbesprekingen waar hij aan deelnam de wetenschap ten aanzien van de patiënt slechts een ondergeschikte rol speelde. Men wist alles wel zo'n beetje maar het ging dan primair om wie doet dit en wie doet dat, hoe verdelen wij de verantwoordelijkheden. Zo is het natuurlijk ook, en zo moet het ook.

Terug naar Brouwer

Brouwers beschrijving van de voor hem ware kennis als "de schat van voorstellingen die de ikheid omgeven en waarin de ikheid gelooft" is eenzijdig in die zin dat twijfel wordt uitgesloten. Binnen de zuivere wiskunde kan men misschien wel iets met zo'n omschrijving maar erbuiten is ongewisheid in het spel en houdt men niets over als men absolute zekerheden wil. Men zal enige vaagheid moeten tolereren. Maar wat gaat het goed als men Brouwers definitie in postmodernistische zin herformuleert door de kennis van een ikheid te omschrijven als "de schat van voorstellingen (verbeeldingen en verhalen, de postmodernisten hebben het over 'teksten') die de ikheid omgeven en waarvan de ikheid weet heeft en geloof aan hecht". Beperken wij ons tot een concreet object van wetenschap, bijvoorbeeld een patiënt, dan zullen de participanten in de discussie hun kennis omtrent dit object moeten inbrengen in de algemene discussie. Bij die algemene discussie wordt het object van onderzoek wel benoemd maar er treedt toch een soort vervreemding op waarbij de patiënt als 'een geval' wordt beschouwd. Bij het inbrengen van de kennis van de individuele participanten treden allerlei vertekeningen op. Niettemin ontstaat zo iets als een gemeenschappelijke kennis ten aanzien van het object van onderzoek, een schat van elkaar aanvullende en tegensprekende teksten, de ene geloofwaardiger dan de andere, sommige wellicht zelfs opzettelijk misleidend. In het geval van een patiënt is er een gemeenschappelijk doel dat min of meer dicteert hoe in hoofdlijnen moet worden gedacht: het belang van die patiënt. In andere gevallen is zo'n gemeenschappelijk doel niet aanwezig en wordt de discussie heel erg moeizaam. Men heeft dan een soort communistisch manifest nodig. Brouwers solipsistisch manifest schiet hopeloos tekort maar wat is het aantrekkelijk voor diegenen, zoals ik, die een sterke drang voelen tot zelfinkeer. ←

Dankbetuiging

Commentaar van Dr. H.J. Buurema en van Jaap Top leidde tot aanzienlijke verbeteringen.

Referenties

- 1 Adama van Scheltema, C.S. en Brouwer, L.E.J., Droeve snaar, vriend van mij — Brieven. Amsterdam: Arbeiderspers, 1984.
- 2 Brouwer, L.E.J., Wiskunde, Waarheid, Werkelijkheid. Groningen: Noordhoff, 1919.
- 3 Dalen, D. van, L.E.J. Brouwer 1881–1966, een biografie. Amsterdam: Bert Bakker, 2001.
- 4 Dalen, D. van, L.E.J. Brouwer en de grondslagen van de wiskunde. Utrecht: Epsilon, 2001.
- 5 Dantzig, D. van, Mathematische en empiristische grondslagen der waarschijnlijkheidsrekening. Ned. T. Natuurk. **8**, nr. 1 en 2, 1941.
- 6 Mises, R. von, Mathematical Postulates and Human Understanding. In: J.R. Newman (ed.), The

world of Mathematics. Redmond, WA: Tempus books of Microsoft press, 1988.

- 7 Peursen, C.A. van, Na het postmodernisme: van metafysica tot filosofisch surrealisme. Kampen: Angora Kok, 1994.

Wim Veldman

Subfaculteit Wiskunde Katholieke Universiteit

Postbus 9010, 6500 GL Nijmegen

veldman@sci.kun.nl

Boekbespreking De negen hoofdstukken over de wiskunst

Het Chinese begin

China kent een grote wiskundige traditie. Dat blijkt vooral uit vele prominente bijdragen aan bijvoorbeeld de getallentheorie en de analyse. Veel minder bekend is het feit dat de Chinese wiskunde een andere oorsprong heeft dan de westerse. Het Chinese equivalent van de *Elementen* van Euclides is het anonieme *Boek der negen hoofdstukken over de wiskunst* dat honderd jaar voor Christus zijn uiteindelijke vorm vond en een paar eeuwen later door Liu Hui van een commentaar werd voorzien. Dit boek is voor het eerst in het Engels vertaald. Hoe verhoudt het zich tot de westerse literatuur uit dezelfde periode? Behandelt het boek dezelfde stellingen?

Wiskunde is een ambacht en wie dit vak beoefent staat in een traditie. Hij bouwt voort op de wijsheid en de inzichten van grote voorgangers en probeert zich met ijver en geduld de eer van het lidmaatschap van het illustere gilde waardig te betonen. Wij hebben een boek dat onze traditie als het ware definieert: *De Elementen van Euclides*. Dit boek, rond 300 voor Christus geschreven door een verder onbekende hoogleraar aan de toen net opgerichte Universiteit van Alexandrië in Egypte, is een indrukwekkende en richtinggevende uiteenzetting van de diepe resultaten die geniale wiskundigen als Eudoxos en Theaetetos enkele generaties eerder, in de Griekse Gouden Eeuw, hadden weten te bereiken. Met Archimedes en Apollonios zette de bloei van de Griekse wiskunde zich voort in de derde eeuw voor Christus.

In China was 'ons' boek niet bekend. Pas in 1606, toen de jezuïeten pogingen deden

China tot het Christendom te bekeren, werden de eerste zes van de dertien boeken van de *Elementen* in het Chinees vertaald, door Xu Guangqui en pater Matteo Ricci. De jezuïeten hoopten dat de Chinezen, wanneer zij eenmaal de superioriteit van de westerse wetenschap zouden hebben erkend, gemakkelijker de redelijkheid van het Christendom zouden inzien. De Chinezen, trots op hun eigen beschaving waaraan ook wij het papier, het buskruit, de boekdrukkunst en het kompas te danken hebben, vonden de *Elementen* maar een raar boek, en het sloeg niet aan. Pas in 1856 werd de vertaling van de *Elementen* voltooid. De wiskunde ging in China haar eigen gang en pas de laatste honderd jaar wordt die geschiedenis langzamerhand ontsloten voor de belangstellenden in het Westen. De niet aflatende inspanningen van Sir Joseph Needham (1900–1995) en zijn medewerkers leidden tot het monumentale boek *History of Science and Civilization in China*. In 1959 verscheen deel 3, dat ook de wiskunde behandelt. Men kan verrast zijn door het feit dat ook de Chinese wiskunde een boek kent dat wel 'het boek' genoemd wordt. Het heet *De Negen Hoofdstukken over de Wiskunst* (Jiuzhang Shuanshu). Het boek is, als vele Chinese klassieken, anoniem en heeft ongeveer 100 jaar voor Christus zijn huidige vorm gekregen. In 263 na Christus heeft de belangrijke

Chinese wiskundige Liu Hui het boek voorzien van uitgebreid commentaar. Ook in de eeuwen daarna is het boek blijven inspireren en heeft het zijn lezers ertoe gebracht nieuwe inzichten te ontwikkelen. De beroemde Chinese reststelling, bijvoorbeeld, komt voor in het *Wiskundig Handboek van Meester Sun* dat dateert uit ongeveer 400 na Christus. Ook in de geschiedenis van de wiskunde in Vietnam, Korea en Japan speelt het boek een belangrijke rol.

Van de *Negen Hoofdstukken* verscheen onlangs een Engelse vertaling waarin ook het commentaar van Liu Hui is opgenomen. Het maken van dit boek was geen sinecure, eerder moet het, zoals Shen Kangshen in zijn nawoord schrijft, een 'koek van duizend man' genoemd worden. Het onderzoek naar de *Negen Hoofdstukken* werd in China geleid door Qian Baocong. In 1964 bezorgde hij een klassiek-Chinese uitgave, die de basis vormde voor het nu verschenen boek. Shen Kangshen zette het uiterst compacte klassieke Chinees om in modern Chinees. De moeilijke stap van modern Chinees naar leesbaar en betrouwbaar Engels zette hij met behulp van zijn beide co-auteurs.

De auteurs beginnen hun boek met een uitvoerige inleiding. Hierin vertellen zij iets over Chinese maten. Ook leggen zij uit dat de Chinezen eigenlijk al een positionele notatie voor de natuurlijke getallen hadden en rekenen met stokjes (figuur 1). Zij vergelijken de ontwikkeling van de wiskunde in China met die in Egypte, Babylon, India, Griekenland en Europa. Daarna behandelen zij de 246 vraagstukken van de Jiuzhang Shuanshu hoofdstuk

"Weten wat je begrijpt, en weten wat je niet begrijpt, dat is kennis."
Confucius, uit: *Analecta*, boek I

voor hoofdstuk.

De auteurs geven telkens een samenvatting van de inhoud van het Hoofdstuk, de tekst, het commentaar van Liu Hui, latere Chinese commentaren, en eigen voetnoten. Zij sluiten af met een extra hoofdstuk waarin zij het *Wiskundig Handboek van het Zee-eiland* behandelen. Dit Handboek is ook van de hand van Liu Hui. Het is een voortzetting van zijn commentaar bij het Negende Hoofdstuk en bespreekt landmeetkundige vraagstukken (figuur 3).

De titels van de Hoofdstukken verraden al dat de vraagstukken dikwijls een praktische inslag hebben. Tussen de regels door komen we van alles te weten over het leven in China, bijvoorbeeld over de verschillende soorten gierst en rijst die in de handel waren. Er zijn vragen over de inhoud van voorraadschuren, dijken en stadsmuren in allerlei vormen. Het boek werd gebruikt bij de opleiding van regeringsambtenaren. Ook de commentator Liu Hui lijkt begaan met problemen van bestuurlijke en organisatorische aard.

De stijl van de Jiuzhang Shuanshu is ruwweg als volgt: er wordt een aantal praktische vragen gesteld, daarop wordt het antwoord gegeven, zonder uitleg. Dan wordt een regel geformuleerd waarmee het antwoord op een vraag van de gegeven soort altijd gegeven kan

Getallen in stokjes neerleggen
De stokjes kunnen verticaal

I II III IIII T TT TTT

of horizontaal worden neergelegd.

— = ≡ ≡ I — — —

Notatie in het tientallig stelsel door afwisselen van het verticale en het horizontale neerleggen. Het getal 19083 bijvoorbeeld ziet er zo uit:

I — — — — —



Figuur 1



Figuur 2 Een van de oudste en meest volledige diagrammen van de *Elementen* van Euclides. Het betreft hier een fragment van een papyrusrol, gevonden in de vuilnishopen van Oxyrhynchus. Nu is het in bezit van het museum voor archeologie en antropologie van de Universiteit van Pennsylvania. Het diagram betreft Propositie 5 van Boek twee van de *Elementen*. Het manuscript is gedateerd tussen het jaar 75 en 125 na Christus.

Bron: <http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/papyrus/papyrus.html>

worden. Ook nu geen uitleg of verklaring. Soms valt een didactische lijn in de rij van de opgaven te ontdekken. Maar pas met het commentaar van Liu Hui worden de Negen Hoofdstukken meer dan een receptenboek.

Wederzijds aftrekken

In Hoofdstuk 1, Rechthoekige gebieden, leren we breuken vereenvoudigen en het daarvoor nuttige algoritme om de grootste gemene deler van twee getallen te bepalen. Wij noemen dit algoritme (wederzijds aftrekken) het algoritme van Euclides. Het begrip 'priemgetal' komt in de Chinese wiskunde niet voor.

Uit vraagstuk 23 van Hoofdstuk 1 blijkt dat de verhouding tussen omtrek en middellijn van de cirkel gelijk gesteld werd aan 3. Dit bracht Liu Hui ertoe π te benaderen met behulp van een in de cirkel ingeschreven regelmatige 96-hoek (figuur 4). De auteurs vergelijken zijn resultaat met dat van Archimedes.

Hoofdstuk 2, Gierst en rijst, begint met een tabel waarin staat hoeveel eenheden gierst, graan, of sojabonen geruild kunnen worden tegen hoeveel eenheden van een andere stof, of van dezelfde stof maar van een andere soort of kwaliteit. Het schijnt dat men in China lange tijd niet over geld beschikte, alleen over zulke ruiltabellen. Daarna volgt een rij vragen die beantwoord kunnen worden met de zogenaamde Regel van Drieën: als a eenheden A evenveel waard zijn als b eenheden B , hoeveel eenheden B zijn dan evenveel waard als a' eenheden A ? Antwoord: vermenigvuldig a' met b en deel door a . Hoofdstuk 3, Verdelen in verhouding, bevat vragen van een vergelijkbaar type.

Derdemachts wortel

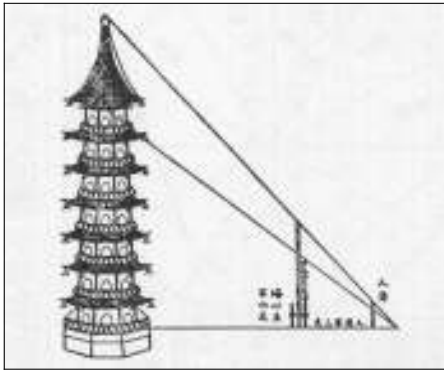
In hoofdstuk 4, Korte breedte, worden algoritmen beschreven om bij een gegeven natuurlijk getal, in tientallige notatie, de wortel en de derdemachtswortel te bepalen of te benaderen. Het hoofdstuk bevat ook de volgende niet-uitgelegde regel om van een bol waarvan de inhoud gegeven is de middellijn te bepalen:

Leg het getal neer (in stokjes).

Vermenigvuldig met 16, deel door 9.

Neem de derdemachtswortel van de uitkomst, dat is de middellijn van de bol.

Deze regel maakt van π ongeveer 3,375. Liu Hui merkt op dat de regel onjuist is. In een poging deze fout te verklaren, zie [5], denkt hij na over de inhoud van de bol en beschouwt hij de doorsnede van twee cilindres die de bol bevatten en aan de bol raken en loodrecht op elkaar staan. Deze figuur noemt hij 'mouhefanggai' ('gecombineerde vierkanter paraplu's') (figuur 5). Een latere commentator merkt op dat de inhoud van de mouhefanggai $2/3$ is van de inhoud van de omgeschreven kubus van de bol. Een aardig feit is dat ook Archimedes, in 'de Methode', deze figuur bekijkt en tot dezelfde conclusie komt. Helaas is het deel van 'de Methode' dat Archimedes' bewijs hiervan zou moeten bevatten, verloren gegaan. Net als Archimedes in 'de Methode' lijkt men in China iets als Cavalieri's principe te gebruiken. De auteurs geven dit principe daarom de naam 'principe van Hui-Zu'. Zij vermelden niet dat Archimedes dit principe alleen heuristische waarde toekent, zie [1].



Figuur 3

Hoofdstuk 5, Constructie-adviezen, behandelt inhoudsbepalingen. Een *yangma* is een pyramide met een rechthoekig grondvlak waarvan de top boven een van de hoekpunten van het grondvlak ligt. Hoofdstuk 5 bevat het volgende voorschrift:

Regel voor een yangma:
Vermenigvuldig de breedte met de lengte,
vermenigvuldig dan met de hoogte, deel door 3.

Liu Hui legt uit waarom deze regel juist is. Hij merkt eerst op dat het geval dat lengte, breedte en hoogte van de yangma gelijk zijn eenvoudig te begrijpen is: een kubus kan in drie van zulke yangma's verdeeld worden (figuur 6). In het algemene geval volgt hij een gedachtengang die doet denken aan de manier waarop de inhoud van het viervlak behandeld wordt in het twaalfde Element van Euclides.

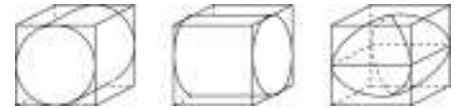
We beginnen (figuur 7) met een rechthoekig blok $ABCDEFGH$ en verdelen dat in twee zogenaamde 'qiandu's': $ABCDGH$ en $ABFEHG$. De qiandu $ABCDGH$ verdelen we in de yangma $ABCDH$ en een rest-

figuur $BCGH$ die 'bie'nao' genoemd wordt. Ons doel is nu aan te tonen dat de inhoud van de yangma $ABCDH$ het dubbele is van de inhoud van de bie'nao $BCGH$. Want dan kunnen we concluderen dat de inhoud van de yangma $ABCDH$ een derde is van de inhoud van het in het begin gegeven blok $ABCDEFGH$. We noemen de middens van AB , BC , CD , DA , HA , HB , HC en HD achtereenvolgens P , Q , R , S , U , V , W , X . Het snijpunt van PR en QS noemen we Z . De yangma $ABCDH$ is nu verdeeld in vijf stukken, namelijk een blok $SZRDUVWX$, twee qiandu's: $APZSUV$ en $ZQCRWV$, en twee kleine yangma's: $UVWXH$ en $PBQZV$. We kunnen begrijpen dat de inhoud van de eerste drie stukken samen een vierde is van de inhoud van het in het begin gegeven blok. Nu gaan we ook de bie'nao $BCGH$ in stukken verdelen. De middens van HB , HC , BG , CG , BC en GH noemen we achtereenvolgens V , W , M , N , Q en O . De bie'nao $BCGH$ is nu in vier stukken verdeeld, namelijk twee qiandu's, $VMNWGO$ en $VMNWQC$ en twee kleine bie'nao's: $VWOH$ en $BQMV$. We kunnen begrijpen dat de inhoud van de eerste twee stukken samen een achtste is van de inhoud van het in het begin gegeven blok. De volgende stap bestaat erin dat we de twee kleine yangma's, overgehouden bij het verdelen van de yangma, en de twee kleine bie'nao's, overgehouden bij het verdelen van de bie'nao, nog eens aan dezelfde behandeling onderwerpen als de yangma, respectievelijk de bie'nao zelf. De yangma valt dan uiteen in een combinatie van blokken en qiandu's waarvan de inhoud $3/8$ is van de inhoud van het in het begin gegeven blok en vier heel kleine yangma's, en de bie'nao valt uiteen in een combinatie van qiandu's waarvan de inhoud $3/16$ is van de inhoud van het in het begin gegeven blok en vier heel kleine bie'nao's. In enigszins vage termen suggereert Liu Hui dat we, door dit proces van benaderen voort te zetten, gedwongen worden tot de conclusie dat de inhoud van de yangma het dubbele is van de inhoud van de bie'nao.

De vragen in hoofdstuk 6, Eerlijke lasten, borduren voort op de problematiek van de hoofdstukken 1, 2 en 3. Hier is vraagstuk 20:

Een wilde eend vliegt in zeven dagen van de zuidzee naar de noordzee, en een wilde gans vliegt van de noordzee naar de zuidzee in negen dagen. Neem aan aan dat de vogels op hetzelfde ogenblik vertrekken. Wanneer komen zij elkaar tegen?

In hoofdstuk 7, Tekort en overschot, is sprake van de Regel van de Dubbele Foute Uit-



Figuur 5 De mouhefanggai, een doorsnede van twee loodrecht op elkaar staande in de kubus ingeschreven cilindrs



Figuur 6 Een kubus is op te delen in drie yangma's

komst. Deze regel berust op het feit dat we, indien we van een onbekende lineaire functie f in twee punten de waarde weten, in staat zijn het punt te bepalen waar f een gewenste waarde, bijvoorbeeld 0, aanneemt. Hier volgt vraagstuk 19:

Een goed paard en een minder goed paard vertrekken van Chang'an naar Qi. Qi ligt 3000 li van Chang'an af. Het goede paard legt op de eerste dag 193 li af en verder elke dag 13 li meer dan de vorige dag; het minder goede paard legt op de eerste dag 97 li af en verder elke dag $1/2$ li minder dan de vorige. Het goede paard komt als eerste aan in Qi en keert dan om, het minder goede paard tegemoet. Zeg nu na hoeveel dagen zij elkaar ontmoeten en welke afstand elk van beide dan heeft afgelegd.

Vijf schapen, vier honden

In het zeer verrassende hoofdstuk 8, Rechthoekige opstellingen, worden stelsels lineaire vergelijkingen bestudeerd. De coëfficiënten worden in een matrix gezet en deze matrix wordt door elementaire bewerkingen in driehoeksvorm gebracht. Deze in China al duizenden jaren bekende procedure heet bij ons 'eliminatie volgens Gauss'. Ook wordt in dit hoofdstuk gewerkt met negatieve getallen. In zijn commentaar bij vraagstuk 3 beschrijft Liu Hui de gewoonte positieve getallen in rode staafjes neer te leggen en negatieve getallen in zwarte. Hier is vraagstuk 17:

Neem aan: 5 schapen, 4 honden, 3 kippen en 2 konijnen kosten samen 1496 munten; 4 schapen, 2 honden, 6 kippen en 3 konijnen kosten 1175 munten; 3 schapen, 1 hond, 7 kippen en 5 konijnen kosten 958 munten; 2 schapen, 3 honden, 5 kippen en 1 konijn kosten 861 munten. Zeg nu wat de prijs is van een schaap, een hond, een kip en een konijn.

Hoofdstuk 9, Rechthoekige driehoeken, behandelt de stelling van Pythagoras (De Gougu Regel) als (onbewezen) rekenregel, bij-



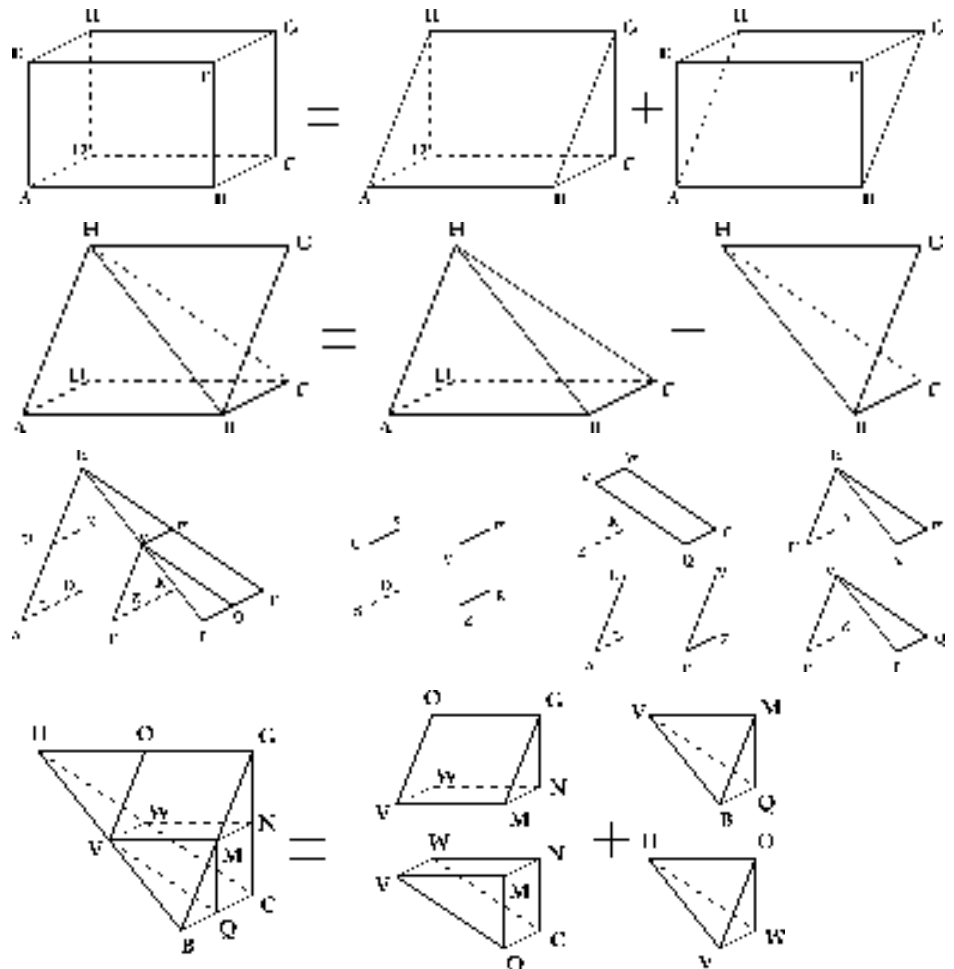
Figuur 4

voorbeeld om, wanneer twee zijden van een rechthoekige driehoek gegeven zijn, de derde te bepalen. Liu Hui doet een raadselachtige uitspraak die misschien suggereert dat de stelling kan worden bewezen door de vierkanten op de rechthoekszijden te verdelen en de stukken zo bij elkaar te leggen dat het vierkant op de schuine zijde ontstaat. Helaas is de bijbehorende figuur verloren gegaan.

Onderwaardering

Het verschijnen van dit boek is een belangrijke gebeurtenis en wij moeten de auteurs diep dankbaar zijn voor al hun moeite. Het boek is onontkoombaar voor wie zich een beeld wil vormen van de ontwikkeling van de wiskunde in de wereld als geheel.

Het moet mij wel van het hart dat de auteurs in hun geestdrift voor de Negen Hoofdstukken te weinig oog lijken te hebben voor de diepe inzichten die de Griekse wiskunde bereikten. Zo noemen zij (op bladzijde 85) de behandeling van de oppervlakte van veelhoeken met behulp van het 'In-Uit Complementariteitsbeginsel' typisch Chinees terwijl het eerste Element van Euclides het begrip 'verdelings- en aanvullingsgelijk' zonder het zo te noemen voorbeeldig behandelt. Zij verwijten Archimedes (op bladzijde 104) dat hij niet-constructief redeneert. Dit verwijt is misplaatst. Dat de auteurs ertoe komen het te maken hangt samen met het feit dat zij Eudoxos' diepzinnige theorie van het begrip verhouding, zoals uiteengezet in het vijfde Element van Euclides, en het daarbij behorende axioma van Eudoxos-Archimedes, misschien niet goed begrijpen en in ieder geval onderwaarden. Op bladzijde 61 beweren zij dat het vijfde element alleen spreekt over verhoudingen van lijnstukken terwijl het boek op een welhaast moderne manier abstracte 'grootheden' bespreekt. Zij zeggen ook, op bladzijde 277, dat Euclides' behandeling van de inhoud van het viervlak die volgens Archimedes aan Eudoxos moet worden toegeschreven eigenlijk minder goed is dan de behandeling van de inhoud van de yangma door Liu Hui. Opnieuw luidt het misplaatste bezwaar dat Euclides/Eudoxos uit het ongerijmde zou redeneren. En zij beweren dat Liu Hui beter aangeeft hoe je de inhoud en



Figuur 7 Opdeling van een rechthoekig blok steeds kleinere delen. Regel 1: Eén blok is twee qiandu's. Regel 2: Eén qiandu is één yangma en één bie'nao. Regel 3: Eén yangma is één klein blok, twee kleine qiandu's en twee kleine yangma's. Regel 4: Eén bie'nao is twee kleine qiandu's en twee kleine bie'nao's.

in ieder geval 'in de praktijk' zou moeten bepalen. Deze opmerking lijkt mij onzinnig. Wel geven zij toe dat Euclides' resultaat algemener is, omdat het niet alleen over yangma's gaat maar over viervlakken en pyramides in het algemeen.

Een fascinerende ervaring

De horzel die met zijn steek de zucht tot axiomatisch redeneren wekt, heeft in China weinig slachtoffers gemaakt. Een lang volgehouden betoog dat zich kan meten met bijvoorbeeld het eerste Element van Euclides treffen we er niet aan. Tegenhangers van Eudoxos en Archimedes zijn er niet. Het is een fascinerende

ervaring kennis te nemen van de geschiedenis van een 'andere' wiskunde, een andere stijl van denken en formuleren, die meer concreet en meer op de praktijk van het rekenen en construeren gericht is dan de onze, en misschien juist daardoor in sommige opzichten eerder succesvol was. Het zal nog lang duren voor wij de deugden van die andere wiskunde ten volle beseffen, maar we zijn op weg en met dit boek een hele stap verder.

The Nine Chapters on the Mathematical Art, Companion and Commentary, edited by Shen Kangshen, John N. Crossley and Antony W.-C. Lun, Oxford University Press and Science Press, Beijing, 1999, xiv + 596 pages, £120.00, ISBN 019 854936 3

Referenties

- 1 E.J. Dijksterhuis, Archimedes, translated by C. Dikshoorn, with a new bibliographic essay by Wilbur R. Knorr, Princeton University Press, 1987.
- 2 J.-C. Martzloff, A history of Chinese Mathematics, Springer, Berlin etc., 1997.
- 3 J. Needham, with the collaboration of Wang Ling, Science and Civilization in China, Volume 3: Mathematics and the sciences of the heaven and the earth, Cambridge University Press, 1959.
- 4 The thirteen books of Euclid's Elements, translated from the text of Heiberg, with introduction and commentary, by Sir Thomas L. Heath, Second Edition, revised with additions, in three volumes, Dover Publications, New York, 1956.

Michael van Hartskamp

Venuslaan 405, 5632 HM Eindhoven

michael@vanhartskamp.com

T_EX-rubriek

Windows en T_EX

Het professioneel drukken van een wiskundige tekst is een gecompliceerde en kostbare aangelegenheid. Bovendien is de oplage vaak klein, bijvoorbeeld wanneer het een proefschrift betreft. Vroeger werd zo'n tekst getypt, waarna er met de hand de formules in werden geschreven. Het programma T_EX heeft een grote omwenteling in het zetten van wiskundeteksten veroorzaakt. Michael van Hartskamp, aan de Vrije Universiteit gepromoveerd als topoloog, legt uit hoe T_EX als typisch Unix programma uiteindelijk toch op Windows beschikbaar is gemaakt.

In het vorige nummer kwamen we tot de conclusie dat T_EX nog altijd bruikbaar is. Het is nog steeds een prettig programma voor het schrijven van wiskunde. Dat laatste is een taak die hoort bij het werk van een wiskundige en vandaar dat we T_EX willen gebruiken. Dat is het onderwerp van deze keer: wat moeten we doen om T_EX (thuis) te kunnen gebruiken?

Op vrijwel iedere wiskundige werkplek (en vele andere werkpleken) zijn T_EX en zijn verwanten aanwezig. Vaak wordt de computer op de werkplek beheerd door speciaal daarvoor aangestelde personen. Op het moment dat we thuis ook willen werken, zijn we meestal zelf verantwoordelijk voor het verzorgen van de computer en moeten we dus ook zelf T_EX installeren.

Het plezierigst is meestal een zelfde werkplek zowel thuis als op het werk. Traditioneel zijn de wiskundefaculteiten van de universiteiten uitgerust met Unix computers, al zien we Windows steeds meer oprukken. De thuiscomputer komt vrijwel altijd geleverd met Windows. Dat verschil maakt het al vrij lastig om dezelfde werkplek in te richten. Méér dan een enkele enthousiasteling gebruikt thuis ook Unix, en veelal is dat de bekende gratis variant Linux. Omdat deze mensen zichzelf meestal wel kunnen behelpen, zullen we ons hier concentreren op T_EX voor Windows. Trouwens ook voor andere thuiscomputers, zoals de Apple computer, zijn er T_EX versies, maar ook deze zullen we hier niet behandelen.

Voor Windows hebben we de keuze uit een aantal T_EX-varianten. De varianten verschillen in de wijze van installeren en de hoeveelheid meegeleverde programma's. T_EX zelf is bij alle versies natuurlijk aanwezig en zoals we vorige keer meldden wordt T_EX eigenlijk zelden meer veranderd. Toch is er verschil tussen de varianten. De meest onderscheidende factor is hoe het zich aan de gebruiker presenteert: de gebruikersvriendelijkheid. Maar ook dat is relatief, want het blijft T_EX.

De vier meest voorkomende varianten zijn: MikT_EX, emT_EX, 4allT_EX, en Y&Y-T_EX. Voor de laatste, Y&Y-T_EX [1], moet betaald worden. De andere drie zijn gratis. Voor het betaalde geld geeft Y&Y ondersteuning en speciale programma's voor de printer. Extra's dus die leuk zijn, maar niet strikt noodzakelijk. Het programma emT_EX is oorspronkelijk voor MS-DOS gemaakt en heeft eigenlijk de overstap naar Windows nooit gemaakt. Het programma 4allT_EX [2], aanvankelijk een schil om emT_EX, was voor MS-DOS ook vrij succesvol. De omschakeling naar Windows was, vanwege de verbondenheid met emT_EX, minder een succes. We zullen hier kijken naar MikT_EX. MikT_EX [3] ontstond toen Windows er al was en is speciaal voor de Windows omgeving geschreven.

Wie de Windows programma's kent en nu een eenvoudige T_EX verwacht, waarin alles klik-klak-klaar is, zal teleurgesteld worden. Ook voor Windows is T_EX nog steeds het zelfde programma. MikT_EX zal hier niet bij helpen. Want MikT_EX is gewoon T_EX met diverse T_EX-files. Het is daarom aan te raden om de editor *WinEdt* te installeren [4]. Dit is een shareware programma om T_EX-tekst in te tikken. Deze mag een maand gratis uitgeprobeerd worden, daarna verwacht/hoopt de maker op een financiële vergoeding. Deze editor maakt het werken met T_EX redelijk aangenaam. MikT_EX en *WinEdt* zijn namelijk zeer goed op elkaar afgestemd.

Naast MikT_EX is het verstandig om *Ghostscript/Ghostview* en de *Acrobat Reader* te installeren. Daarmee kunnen we respectievelijk postscriptfiles en portable document format-files (pdf) bekijken. Beide types, *postscript* en *acrobat*, zijn door het Amerikaanse bedrijf *Adobe* ontwikkeld om pagina's voor de computer te beschrijven. *Postscript* wordt veel gebruikt door printers en drukkers. *pdf/Acrobat* is een veel gebruikte methode om tekst op Internet te zetten. We komen hier een andere keer op terug. *Ghostscript* en *Ghostview* zijn te vinden bij [5] en de *Acrobat Reader* op [6].

Hoewel de volgorde van installeren niet echt uitmaakt is het een goed idee met *Acrobat Reader* en *Ghostscript/Ghostview* te beginnen. De installatie wijst zich vrijwel geheel vanzelf.

We keren terug naar MikT_EX. Vermoedelijk hebben we geen CD-ROM en dus moeten we het programma van Internet plukken. De eerste stap is het (kleine) setup-programma downloaden. Deze leidt ons door de rest van de installatie heen. Na het opstarten van het setup-programma vraagt MikT_EX of we de rest willen downloaden, of dat we willen installeren. We kiezen voor downloaden. Dan blijkt dat MikT_EX er in drie smaken is en de eerste stap is een keuze te maken uit deze drie. De

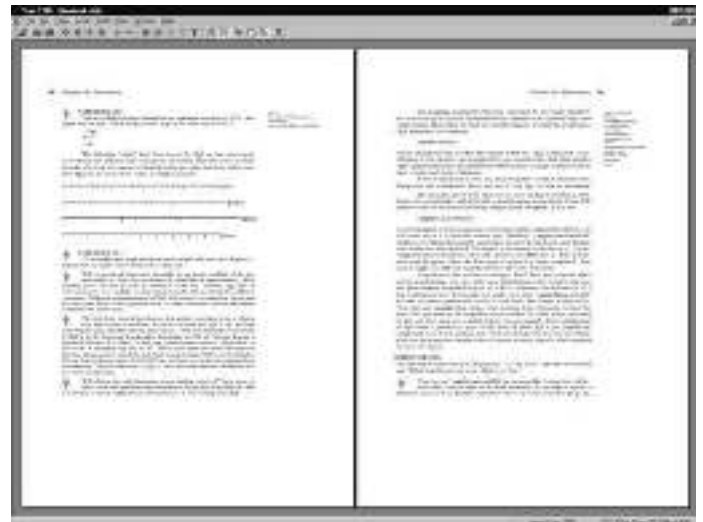
drie zijn gerangschikt naar hun omvang: *Small*, *Large* en *Total*. Bij het kiezen helpt MikT_EX ons hier niet veel verder en we zijn al gauw geneigd voor de grootste versie *Total* te kiezen. Deze neemt echter ook de meeste ruimte op de harddisk in beslag en zo vaak hebben we de Chinese lettertypen niet nodig.

Enigszins weggestopt is een lijst te vinden met een overzicht van de onderdelen die deel uit maken van de varianten. Om zelf een afgewogen keuze te kunnen maken, is het van belang te weten wat al deze onderdelen inhouden. Daarom valt het kiezen nog niet echt mee. Echter de middelste versie *Large* blijkt al vrij veel te bevatten, terwijl de kleinste versie *Small* toch wel erg klein is. De middelste versie *Large* zal voor de meeste gebruikers geschikt zijn en we raden deze dan ook aan.

Het downloaden kan afhankelijk van de keuze van de MikT_EX-variant en de snelheid van de verbinding kort of lang duren. Na het downloaden stopt MikT_EX's setup-programma. Nu kunnen we de MikT_EX-files eventueel bewaren op bijvoorbeeld een CD. Om door te gaan moeten we het setup-programma opnieuw opstarten.

MikT_EX stelt ons nu een paar vragen. De meeste kunnen we ongezien met *OK* beantwoorden. MikT_EX vraagt ook waar alle T_EX-files kunnen worden opgeslagen. Het voorstel van MikT_EX is *c:\texmf*. Hoewel dit kan worden veranderd is dat niet aan te raden. Op deze plek zoekt WinEdt namelijk en zolang we alle voorstellen van MikT_EX accepteren zullen we niet in de problemen komen omdat de losse onderdelen niet samen blijken te werken.

In principe hebben we na het downloaden en de daaropvolgende installatie een volledig werkend MikT_EX systeem. We kunnen T_EX en L^AT_EX draaien. Met *yap* kunnen we de resulterende dvi-file bekijken en



Figuur 2 Met *yap* kan de resulterende dvi-file bekeken worden.

met *dvips* een postscriptfile genereren. Zoals aangekondigd is het echter handig om nu *WinEdt* te gaan gebruiken.

Als de MikT_EX installatie vlekkeloos is verlopen en we hebben de voorstellen van MikT_EX overgenomen dan blijkt ook WinEdt aan de praat krijgen een fluitje van een cent. Alles wijst zich weer vrijwel vanzelf.

Als *WinEdt* eenmaal geïnstalleerd is, blijkt waarom het zo handig is. In de menubalken bevinden zich speciale knoppen om T_EX of L^AT_EX op te starten. Ook is het mogelijk om het resultaat, de dvi-file, met een druk op de knop te bekijken, er een postscript file van te maken om te printen of om pdf-files te maken.

WinEdt heeft nog een voordeel. Bij het tikken van T_EXfiles herkent *WinEdt* de T_EX en L^AT_EX commando's. Alle belangrijke delen krijgen een herkenbare kleur. Voor wie hieraan gewend is, werkt het heel plezierig.

Met de combinatie van het viertal: T_EX, *WinEdt*, *ghostscript*, en de *acrobat reader* zijn we compleet.

De bovenstaande beschrijving is vooral bedoeld om een indruk te geven wat er moet gebeuren om MikT_EX te installeren. De precieze details van het installeren kunnen we wegens plaatsgebrek hier niet kwijt. Het is vaak ook niet nodig omdat het zich allemaal zelf wel wijst. Een paar jaar geleden was dat nog heel anders. T_EX goed installeren vereiste destijds veel werk en kennis en ervaring met de computer. Inmiddels is T_EX installeren een voor iedereen doenbare klus geworden. Aanvullende informatie is te vinden in de 'helpfiles' die met de programma's meegeleverd worden.

Tot slot een kleine waarschuwing. We hebben hier het programma *WinEdt* besproken. Toen ik ter voorbereiding op deze rubriek *WinEdt* opnieuw van het Internet wilde halen, maakte ik een voor de handliggende vergissing en kwam uit bij een programma met bijna dezelfde naam dat *WinEdit* heet (met 'i' dus). Dit is echter een heel ander programma!

Referenties

- 1 <http://www.yandy.com>
- 2 <http://4tex.ntg.nl>
- 3 <http://www.miktex.org>
- 4 <http://www.winedt.com>
- 5 <http://www.cs.wisc.edu/~ghost>
- 6 <http://www.adobe.com>



Figuur 1 Een screenshot van het programma *WinEdt*. Hier kan een T_EX of L^AT_EX file worden ingevoerd. Bovenaan is een menubalk. Vanuit de editor is het mogelijk om T_EX of L^AT_EX op te starten en het resultaat, de dvi-file, met een druk op de knop te bekijken, er een postscript file van te maken om te printen of om pdf-files te maken.

Jan Bouwe van den Berg

Division of Theoretical Mechanics, University of Nottingham

Nottingham NG7 2RD, United Kingdom

Jan.Bouwe@nottingham.ac.uk

Column Wiskundigen in den vreemde

From Nottingham Forest

December 2000 promoveerde Jan Bouwe van den Berg aan de Universiteit Leiden. In januari 2001 werd hij voor de tijdsduur van twee jaar EPSRC-research fellow (Engineering and Physical Sciences Research Council) aan the University of Nottingham (UK). Een jaar lang heeft hij ons op de hoogte gehouden van zijn avonturen in Nottingham Forest. Dit is zijn laatste stukje.

Mijn twee jaar in Nottingham zitten er al weer bijna op. Althans dat gevoel heb ik met nog negen maanden voor de boeg. Ik moet al weer een volgend onderzoeksvoorstel schrijven terwijl ik aan het uitvoeren van het vorige nog maar nauwelijks begonnen ben. Ze zeggen dat dat nou eenmaal het leven van een postdoc is.

Ik heb zelf een wat romantischer beeld van het postdocschap. Je krijgt de kans om eens in een land met andere gewoontes en een andere wiskundige traditie rond te kijken. Je kunt wat rondreizen en mensen bezoeken om mee samen te werken. Want dat is voor mij toch het leukste aan wiskunde: samen met vrienden een probleem proberen te doorgronden.

In Engeland wonen is op zich niet erg bijzonder. In het dagelijks leven is het verschil tussen Engeland en Nederland eigenlijk buitengewoon klein. Daarbij komt dat het qua reistijd naar bijvoorbeeld Amsterdam nauwelijks uitmaakt of je in Nottingham of in Groningen woont. Dus kom ik bijna elke maand wel een week naar Nederland om drop te kopen, bij vrienden en familie langs te gaan en een conferentie of workshop bij te wonen. Mensen beginnen zelfs te vragen of ik eigenlijk wel in Nottingham woon. Ze realiseren zich blijkbaar niet dat ze mij zien omdat ik de moeite neem om naar hen toe te komen, en niet andersom; Groningers zullen soms wel hetzelfde gevoel hebben.

Een van de dingen die in Engeland wel opvalt is hoeveel waarde mensen hechten aan traditie. Ik begrijp ondertussen beter 'what it means to be British' dan wat het betekent om Nederlander te zijn. Engels zijn, zo lijkt het, betekent trots zijn dat je voetbal, rugby, cricket en darts hebt uitgevonden en vervolgens lijdzaam toezien hoe je daarin verliest van Nederlanders, Duitsers en met name Australiërs.

Wat daarnaast centraal staat is de gedachte dat er een manier is waarop je je hoort te gedragen en dat alle andere manieren in zekere zin verkeerd zijn. Dat botst nogal eens met mijn eigen opvattingen; het is natuurlijk ook typisch Nederlands om te vinden dat je tolerant moet zijn. Ik heb in het begin wel even geprobeerd om me aan de Engelse standaard aan te passen. Een van de problemen is dat het nogal moeilijk is om er achter te komen wat nou die juiste manier is; het zijn een soort geheime spelregels. Ik heb die poging dus maar opgegeven en hoop nu dat mensen er vanzelf wel achter komen dat

achter die Nederlandse directheid geen kwaadaardige bedoelingen schuilgaan.

Ik merk ook dat ik eigenlijk als vanzelf Nederlandse dingen zoals legalisering van softdrugs ga verdedigen. De Engelsen gaan wel allemaal naar Amsterdam om het daar te proberen, dus zo moreel verwerpelijk is het blijkbaar ook weer niet. Maar de kranten staan op hun achterste benen als een subcommissie van een adviesorgaan van de regering voorstelt om wat meer ontspannen met softdrugsgebruik om te gaan. En dat terwijl de inname van grote hoeveelheden alcohol tot nationale sport is verheven.

Zo is het jaarlijkse British Applied Mathematics Colloquium vóórnamelijk een excuus om eens in een andere stad te veel te drinken. Vorig jaar had een van mijn collega's zich het bier zo goed laten smaken dat hij, zonder dat hij zich daar iets van kon herinneren, in zijn hotelkamer de prullenbak als w.c. had gebruikt. Daar kwam hij pas achter toen hij de volgende dag een briefje van de schoonmaakster vond met het verzoek of hij zijn eigen afval even wilde weggooien. Dat vertelde hij vervolgens in geuren en kleuren aan iedereen die het horen wilde (en wie wil dat nou niet horen?). Dus dan kunnen ze mij wel een beetje een rare Nederlander vinden, maar wie is hier nou eigenlijk gek?

Toch zijn er ook dingen in Engeland die zo slecht nog niet zijn. Zo hebben ze in Nottingham ongeveer net zo veel wiskundestudenten als in heel Nederland. De oorzaak voor dat verschil blijft een beetje mysterieus. Een van de redenen is waarschijnlijk dat op de middelbare school meer tijd aan wiskunde wordt besteed, simpelweg omdat talen veel minder aandacht krijgen dan in Nederland. Men lijkt in Engeland ook minder op de wetenschap neer te kijken. Er heerst meer het besef dat wiskunde aan de basis van technische vooruitgang ligt.

Dat zou in Nederland door wiskundigen, en door β -wetenschappers in het algemeen, ook veel meer kunnen worden uitgedragen. Buitenstaanders kunnen dan wel denken dat de wiskunde af is, maar zorg ervoor dat ze ook bedenken dat vrijwel niets in hun huis er zou zijn zonder wetenschap en techniek. En wiskunde is de taal van de techniek en natuurwetenschappen.

Wat bovendien in Engeland een belangrijke rol speelt is dat het begrip wiskunde heel ruim wordt opgevat. Het beeld is hier geenszins dat toegepaste wiskunde minder wordt gewaardeerd dan zuivere wiskunde (misschien zelfs eerder andersom). Het klinkt een beetje triviaal, maar alle wiskunde is wiskunde.

Al met al heb ik als postdoc in Engeland heel wat wiskunde bijgeleerd. Maar het leerzaamst is toch wel om te zien dat dingen ook anders kunnen; misschien niet altijd beter maar wel anders. 

Jaap Top*Instituut voor wiskunde en informatica**Postbus 800, Groningen**top@math.rug.nl***Boekbespreking** Zebra-boekjes besproken door vwo-ers

Niveau gevraagd

Vanaf 1998 zijn middelbare scholen begonnen met de Tweede Fase. Een opvallend aspect daarvan is de invoering van het keuzeonderwerp, het zogenaamde Zebra-blok. Het Nieuw Archief heeft ruime aandacht besteed aan de komst van de Zebra-boekjes, die bedoeld zijn voor de invulling van de keuzeonderwerpen in het vwo-onderwijs. Vakdidactici, leraren en onderzoekers gaven hun mening. Maar wat vinden de scholieren?

In de wiskundeprogramma's van elk van de vier vwo profielen is een gedeelte met een omvang van 40 studielasturen gereserveerd voor keuzeonderwerpen, de zogenoemde Zebra-ruimte. In deze ruimte wordt de leerlingen de gelegenheid geboden om zelfstandig of in groepsverband een bij het profiel passend onderwerp te bestuderen.

Voor dit doel zijn diverse Zebra-boekjes geschreven. Zoals de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren schrijft, verruimt de Zebra-ruimte de beperkte blik van de schoolwiskunde met al haar verplichte stof en opgaven. Op die manier kunnen de Zebra-boekjes bijdragen aan positieve beeldvorming van het vak wiskunde. Er zijn inmiddels twaalf boekjes verschenen bij Epsilon uitgaven (geschreven onder auspiciën van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren), vier bij Wolters-Noordhoff en twee bij EPN (in de methode Getal & Ruimte).

Wordt die positieve beeldvorming in de praktijk ook bereikt? In een artikel van Wim Groen (NAW 5/2, juni 2001) krijgen vier wiskundeleraren het woord; zij reageren gematigd positief. Diverse besprekingen van Zebra-boekjes geschreven door vakdidactici, leraren en wiskundigen (NAW 5/1 p. 103, 5/1 p. 440, 5/2 p. 86 en 5/2 p. 374) laten zich lovend over de boekjes uit en spreken van een geslaagd initiatief. We geven hier enkele opinies vanuit de doelgroep zelf. De onderstaande besprekingen zijn geschreven door 16 eindexamenkandidaten van het *Willem Lodewijk gymnasium* te Groningen. Geen van hen blijkt zich overigens in te willen schrijven voor de studie wiskunde. In een volgend nummer zullen we een even groot aantal vijfdeklassers aan het woord laten.

Op een goudschaal

Dit boekje is bestemd voor leerlingen in de bovenbouw van het vwo. Het is geschikt voor alle profielen en je kunt alle opdrachten met de kennis die je in de onderbouw opgedaan hebt maken. Het bespreekt

de wiskundige aspecten van de gulden snede, maar behandelt ook de geschiedenis. Ook laat men toepassingen van de gulden snede in de architectuur en de kunst zien en wordt er gekeken of de gulden snede ook in de natuur voorkomt. Maar natuurlijk wordt eerst uitgelegd wat de gulden snede is. Het blijkt een verhouding te zijn tussen twee lijnstukken. Bij deze verhouding geldt dat $AB : BC = AC : AB \approx 1,62 : 1$.

Met behulp van opdrachten probeert men de leerlingen inzicht te laten verkrijgen in alle aspecten van de gulden snede. Zo worden verschillende manieren geleerd hoe een gulden snede geconstrueerd kan worden, of de gulden snede nu wel of niet in bepaalde gevallen aanwezig is en hoe met gegeven stellingen bewezen kan worden of er sprake is van de gulden snede. Achter in het boekje staan voorbeelden van verschillende onderzoekjes die met betrekking tot de gulden snede uitgevoerd kunnen worden.

Helaas zijn deze opdrachten behoorlijk pittig en volgens ons te moeilijk voor bijvoorbeeld C&M-ers (Cultuur en Maatschappij). Met name het bewijsgedeelte, dat je alleen bij wiskunde B2 krijgt, zal voor hen erg moeilijk zijn. De opdrachten zijn ook veel van hetzelfde. Aan de onderwerpen die in het boekje worden behandeld is te zien dat de schrijfster heeft geprobeerd het onderwerp voor iedereen toegankelijk te maken.

Maar dit is op zo'n manier gedaan, dat het voor niemand echt interessant is. Voor leerlingen die bijvoorbeeld geïnteresseerd zijn in architectuur en kunst, is het boekje te exact. Voor leerlingen die wel geïnteresseerd zijn in de wiskundige achtergrond van de gulden snede, is het verhaal te eenzijdig. Volgens ons heeft zijn er teveel compromissen gesloten om het boekje voor iedereen toegankelijk te maken. Het lijkt ons dan ook beter als men zich per boekje op één doelgroep richt.

Oskar Jäckel, Michiel Hoexum,
Anne-Lot Lanting en Corien Potze





Corien Potze, Oskar Jäckel, Michiel Hoexum, Anne-Lot Lanting

Poisson, de Pruisen en de Lotto

Voor een Zebrablok wiskunde B begonnen we met goede hoop aan het lezen van dit boekje. De titel klonk veelomvattend en de Poissonverdeling was een onderwerp waar we nog niets van wisten. We dachten met zes jaar wiskunde en een aantal jaren onderwijs in de kansrekening voldoende achtergrond te hebben om dit te kunnen begrijpen.

In de inleiding lezen wij het volgende: “Het Zebraboekje bevat een aantal uit het leven gegrepen toepassingen van de Poissonverdeling. [...] Het is bedoeld voor zelfstandig gebruik in het studiehuis en sluit direct aan bij de stof zoals die op het vwo in het domein kansrekening en combinatoriek behandeld is.” Wij weten niet welk idee de auteurs van de doelgroep hebben, maar de Pruisische cavalerie uit de negentiende eeuw is niet echt uit ons leven gegrepen — de connectie met onze beleavingswereld is ver te zoeken. Dit geldt ook voor bombardementen op Londen in de Tweede Wereldoorlog. Wrang is dat ‘succes’ van een experiment gedefinieerd wordt door de dood van een cavale-rist als gevolg van een trap met een paardenhoef of door het getroffen worden van een wijk in Londen door een Duitse bom.

Meteen aan het begin van het eerste hoofdstuk wordt het Poisson-model gedeponerd. Pas later (in het tweede hoofdstuk) volgt de afleiding van dit model. Naar ons idee was de omgekeerde volgorde beter geweest: van bestaande kennis naar nieuwe stof. Met een goede opbouw en een stap-voor-stap uitleg was het beter te begrijpen geweest. Deze goede opbouw was iets dat we ook in de rest van het boekje moesten missen. Vaak waren we gedwongen tussenliggende stappen in de uitleg zelf te achterhalen. Na de eerste twee hoofdstukken werd er vrijwel geen nieuwe informatie met betrekking tot het Poissonmodel besproken.

De stof sloot niet direct aan op de kennis van wiskunde B1-leerlingen. Zo werden limieten en dekpunten bekend verondersteld, terwijl dit in de examenstof van wiskunde B1-leerlingen niet voorkomt. Vaak was de stof die behandeld werd óf te simpel, óf onbegrijpelijk. Een ‘tussenvorm’ hebben de auteurs klaarblijkelijk niet kunnen vinden. Men verviel dikwijls in herhaling. Zo hebben wij de zin “De poissonverdeling is van toepassing op een situatie waar-



Annelous Bron, Rianne Wijbenga, Wietske Visser, Anja Mokhova

in sprake is van een zeer groot aantal onafhankelijke uitvoeringen van een kansexperiment met een zeer kleine succeskans” naar onze mening veel te vaak onder ogen gekregen.

In de eindopdracht (hoofdstuk 6: ‘de Lotto’) kwam de Poissonverdeling, in tegenstelling tot wat je zou verwachten, nauwelijks ter sprake. Jammer genoeg waren de uitwerkingen van de opgaven niet volledig of ontbraken zij geheel. Voor zelfstudie is het noodzakelijk dat naast opgaven ook de uitwerkingen hiervan in het boekje zijn opgenomen.

Het boekje was niet alleen saai, maar zat ook vol onvolledigheden, taalfouten en achterhaalde informatie. Ook de opmaak is niet erg aantrekkelijk. Meer illustraties en kleuren zouden hier verandering in kunnen brengen. De overeenkomsten in opmaak tussen bijvoorbeeld opgaven, bijschriften bij afbeeldingen en lestekst waren erg verwarrend. De pogingen de stof te begrijpen en er door geboeid te raken waren talrijk, maar dit boekje bood maar weinig kans op succes.

Eva Greiner, Anja Mokhova, Wietske Visser en Rianne Wijbenga

Over zeeën van tijd. Hollandse navigatie in de 16e en 17e eeuw

Een boekje, u hoort het goed, een boekje over de Hollandse navigatie in vroeger tijden. Op het eerste gezicht een aardig onderwerp, maar toch niet zo geslaagd als verwacht. Het gaat allemaal over de slag om het beste navigatiemiddel in de 16e en 17e eeuw. De geschiedenis is in het boekje verweven. Men wijdt uit over verschillende historische gebeurtenissen. Hierover worden opdrachten gegeven, waarna er enig besef dient te worden gekweekt over hoe het er wel allemaal niet toe ging destijds. Vervolgens komen er twee hoofdstukjes die uitleggen hoe een onderzoek dient te worden gedaan, hierbij zijn enkele onderwerpen gegeven. Het andere hoofdstukje gaat over de eventuele presentatie van het onderzoek. Als laatste zijn de antwoorden van de opdrachten gegeven.

Eerst de opdrachten. Hier speelt geschiedenis een grotere rol dan wiskunde. Over geschiedenis wordt naar onze smaak teveel uitgeweid. Allerlei opdrachten worden gegeven die voor de zichzelf respecterende, hard lerende, van inzicht getuigende en intelligente vragen stellende wiskunde-leerling toch echt enkele treden te laag zijn. De-





Annelous Bron, Henk Marijn, Wouter Blokland



Andreas Dijkman, Nick van Beest, Marloes Feitsma, Annejet Nijland, Lotte de Groot

ze opdrachten lijken eerder thuis te horen bij het vak aardrijkskunde. Schaamteloos hoe men nog vraagt om een hoek op te meten, of hoe hoog men het salaris van een matroos in deze tijd verwacht. Wiskunde heeft hier niets mee te maken.

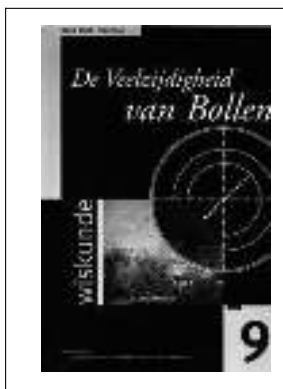
Vervolgens het onderzoek. In het hoofdstuk onderzoek wordt eerst uitgelegd hoe het onderzoek in te richten. Dat houdt in dat je een logboek moet bijhouden, je informatie goed moet documenteren en uiteindelijk een goed lopend, voor de buitenstaander begrijpelijk verhaal moet opstellen. Dit mag naar onze mening bekend verondersteld worden. Vervolgens worden er thema's voor onderzoeken gegeven. Deze thema's zijn geschikt voor aardrijkskunde, geschiedenis of, nog beter, algemene natuurwetenschappen (ANW). Voor wiskunde zijn ze beslist minder geschikt. Zelfs met slechts basiskennis van de wiskunde moeten deze 'onderzoekjes' te doen zijn. Tot slot geeft het boekje nog uitleg over het nut van presenteren en hoe te presenteren. Dat is een onderdeel van het vak Nederlands, niet van wiskunde.

Onze conclusie is dat het onderwerp leuk bedacht is. De uitwerking vinden we echter ronduit miserabel. Geen behoorlijk wiskundelesboek durft zulke onnozele en niet op wiskunde van toepassing zijnde vragen te stellen. Men had moeten proberen de wiskundige elementen, die overigens best bestaan, de nadruk te geven. Nu zijn ze slechts terzijde genoemd, wat erg jammer is. Dit boekje is beter te gebruiken voor de al eerder genoemde vakken geschiedenis, aardrijkskunde en vooral ANW.

Wouter Blokland, Henk Marijn de Jonge en Bart Schanssema

De veelzijdigheid van bollen

Dit Zebra-boekje begint eenvoudig met enkele standaard veelvlakken. Als je nog weinig weet over vlakken, bollen of andere lichamen zijn de eerste hoofdstukken een handige opstap naar de rest van het boek. Deze hoofdstukken werken toe naar de formule van Euler. Het begin kan zelfs door een brugklasser makkelijk worden gevolgd. Van vwo-niveau is niet echt sprake. "Deze grote Zwitserse wiskundige Euler was bezig met het systematisch onderzoek van convexe veelvlakken." En: "een veelvlak is convex als iedere lichaamsdiagonaal in het binnengebied



van het veelvlak ligt." Euler ontdekte een verrassend mooie formule voor het verband tussen het aantal hoekpunten H , het aantal zijvlakken Z en het aantal ribben R : $H - R + Z = 2$. Deze formule gaat op voor alle convexe veelvlakken en ook voor de meeste niet-convexe veelvlakken. Hierop gaat het boek goed in. De formule van Euler vormt een belangrijk deel van de inleiding op de veelzijdigheid van bollen.

Nadat de formule van Euler in een paar simpele opdrachten is behandeld, gaat het boek over op complexere veelvlakken. Er wordt aandacht besteed aan de vijf platonische veelvlakken. Zoals aan het begin van het boek is aangegeven, is dit ook te begrijpen voor mensen die wat minder exact zijn aangelegd. De opgaven na elk (kort) hoofdstuk verduidelijken het begrip zodanig dat er geen vragen overblijven. Het boek werkt toe naar geodesen en fullerenen. Ook deze hoofdstukken zijn door het voorbereidende werk goed te volgen. Een geodetische koepel is een koepel, bestaande uit alleen maar driehoeken, waarbij de orde van de hoekpunten 5 of 6 is. Onder de orde van een hoekpunt verstaat men het aantal ribben wat samenkomt in het hoekpunt. Dit wordt heel goed beschreven. Daarentegen worden de fullerenen nogal globaal uitgelegd en er wordt niet te diep ingegaan op de stof.

In het voorwoord van het boek worden een aantal internetsites genoemd betreffende dit onderwerp. Deze sites geven goede animaties en zijn daarom een leuke en informatieve uitbreiding van het boek. De verwijzingen na elk hoofdstuk naar de website verduidelijken nog eens extra de stof en opgaven, mede door de bijgevoegde animaties.

Aangezien het voor vwo-leerlingen geschreven is, zou men verwachten dat het niveau zou stijgen bij het vorderen van het boek. Dit is niet het geval. Het hele boek door blijft het niveau van dusdanige hoogte dat het door menig alfa goed te lezen is. Aan de andere kant is dit misschien wel de kracht van het boek. Het boek beschrijft de basiskennis die nodig is om een bol te kunnen bestuderen. Het boekje komt over als één grote inleiding, waardoor de kern van het verhaal niet duidelijk naar voren komt. Kortom, dit Zebra-boekje is nogal oppervlakkig en mag wel wat pittiger voor bovenbouw-leerlingen.

Nick van Beest, Andreas Dijkman, Marloes Feitsma, Lotte de Groot en Annejet Nijland

Op een goudschaal, Jelske Kuijper, 50 p., prijs € 7,60, Groningen: Wolters Noordhoff, 1999, ISBN 3-7643-6280-4. **Poisson, de Pruisen en de lotto**, Henk Tijms, Frank Heierman en Rein Nobel, 48 p., prijs € 7,60, Utrecht: Epsilon, 2000, ISBN 9-5041-059-6. **Over zeeën van tijd. Hollandse navigatie in de 16e en 17e eeuw**, Vincent van Leijen, 48 p., prijs € 7,60, Groningen: Wolters Noordhoff, 1999, ISBN 90-01-83302-0. **De veelzijdigheid van bollen**, Martin Kindt en Peter Boon, 50 p., € 6,70, Utrecht: Epsilon, 2000, ISBN 90-5041-066-9.

Jack van Lint

*Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
J.H.v.Lint@tue.nl*

Onderwijsvisitatie Wiskunde 2001–2002

Rendement versus niveau

De visitatie wiskunde voor het universitaire onderwijs is in februari 2002 afgerond. De commissie, bestaande uit prof.dr. J.H. van Lint (voorzitter), prof.dr. F. Takens (vice-voorzitter), prof.dr.ir. H. Kwakernaak, prof.dr. A. van Streun, drs. A.L.M. de Theije (studentlid), prof.dr. J. Wessels en drs. J.C.X. Wijters (secretaris) van de Vereniging van Universiteiten (VSNU) bezocht in een periode van een half jaar de wiskundefaculteiten van de Nederlandse universiteiten. Hoewel het eindrapport nog niet gereed is, doet Jack van Lint voor het Nieuw Archief verslag van de voorlopige bevindingen.

Van september 2001 tot en met februari 2002 vond de visitatie wiskunde (onderwijs) aan de Nederlandse universiteiten plaats. De commissie zal pas lang na het schrijven van dit artikel bijeen komen om het eindrapport vast te stellen. Hieronder volgen dus slechts voorlopige conclusies en wellicht een persoonlijk oordeel van de voorzitter. Vooraf kan gesteld worden dat de commissie de bezoeken als zeer plezierig heeft ervaren. De gesprekken vonden plaats in een positieve sfeer en de kritische kanttekeningen van de commissie werden doorgaans als herkenbaar ervaren en aanvaard als pogingen om de faculteiten te helpen om de opleidingen verder te versterken.

We constateren dat in Nederland weliswaar te weinig wiskundigen worden opgeleid maar nog steeds wel goede wiskundigen die ook een internationale vergelijking goed kunnen doorstaan. Er is een duidelijke kentering in de opvatting over “Wat willen we dat de studenten kunnen aan het eind van de opleiding?”. De technische universiteiten beantwoorden die vraag (nog steeds) helder door te kiezen voor het opleiden van ingenieurs met omschrijvingen van vereiste kennis die passen bij die keuze. Daarentegen willen de wiskunde-opleidingen aan de algemene universiteiten enerzijds onderzoekers opleiden voor een (vaak te) breed gamma van wiskundige richtingen en anderzijds toegepast wiskundigen afleveren die goed inzetbaar zijn in het bedrijfsleven. Bij deze laatste categorie blijkt in het algemeen de richting Statistiek/Operations Research aanmerkelijk meer studenten te trekken dan andere richtingen van toepasbare wiskunde. Op grond van onze waarnemingen komen we tot de conclusie dat globaal gesproken de toekomstige wiskundige onderzoekers behoorlijk aan hun trekken komen en aan het eind van hun studie een goede uitgangspositie hebben voor promotie-onderzoek.

Wat de toekomstige toegepast wiskundigen aan de algemene universiteiten betreft is de situatie in het algemeen verre van rooskleurig.

In de eerste jaren van de studie zien we te weinig onderwerpen en onderwijsvormen die toegespitst zijn op de praktische afstudeerrichtingen. We dienen ons daarbij te realiseren dat het hier aan bijna alle algemene universiteiten om een relatief groot deel van de afstudeerden gaat; aan sommige universiteiten betreft het een ruime meerderheid. Wat hun programma's betreft zullen de algemene universiteiten duidelijker moeten kiezen wat ze willen.

Rendement

Veel van de problemen bij de opzet van het programma voor de algemene universiteiten zijn het gevolg van het convenant over de vijfjarige studieduur aan deze universiteiten. Daarin zijn beroepsgerichte opleidingen genoemd en daarnaast zijn volkomen onrealistische doelen gesteld betreffende het rendement van de opleidingen. Pogingen om die rendementen te halen leiden tot conflicten met het streven om het niveau van de Nederlandse opleidingen te handhaven. Verder is het duidelijk dat de nog steeds dalende kwaliteit van de instroom en de eis dat het propedeutisch examen selecterend moet zijn voor de rest van de studie niet te verenigen zijn met een hoog rendement voor dat examen.

Het was teleurstellend om te constateren dat veel universiteiten ondanks een goed selecterende propedeuse er niet in slagen een hoog percentage van de instroom in de doctorale fase aan de eindstreep te brengen. Het was moeilijk om hiervoor een verklaring te vinden. Er wordt namelijk steeds meer begeleid en geadviseerd en de studenten zijn overal erg te spreken over de toegankelijkheid van de staf. Dat de studenten die wel afstuderen er vaak veel te lang over doen is wel te verklaren. Ze zien zelf weinig reden om snel hun studie te voltooien en de opvattingen van de oudere generatie over de hoeveelheid tijd die aan studie moet worden besteed worden niet gedeeld door de jongere generatie. Het verschil is groot. Bovendien is de studiefinanciering inmiddels zo bedroevend laag dat veel studenten gedwongen zijn om relatief veel tijd te besteden aan bijbaantjes. Aan diverse universiteiten waren te weinig student-assistent plaatsen om aan dit bijverdienen een zinvolle invulling te geven. Overal hebben we de studenten gevraagd of zij wiskunde studeren leuk vonden en of ze hun eigen universiteit waardeerden. Bijna allen antwoordden met een krachtig "ja". Zoals verwacht kon worden was de eindfase leuker dan het begin.

Bij het bestuderen van rendementen duikt ook het afschuwelijke woord 'studeerbaarheid' op. Een overgrote meerderheid van de studenten die wij gesproken hebben was van oordeel dat als ze wel hard zouden werken het geboden programma binnen de vijf jaar kon worden afgerond. Algemeen werd wel gevreesd dat een periode van studie in het buitenland voor vertraging zou zorgen. Het was opvallend dat van de ruime mogelijkheden die worden geboden om inderdaad een tijd aan een buitenlandse universiteit door te brengen vrijwel geen gebruik wordt gemaakt. De Universiteit Twente was hierop de uitzondering; daar gaat meer dan de helft van de wiskundestudenten drie tot zes maanden naar het buitenland.

Instroom

In het onderwijs zien we een aantal elementen die een tijd geleden niet of nauwelijks voor kwamen. Om te beginnen zijn bij de binnenkomende studenten allerlei vaardigheden niet aanwezig. Het is al geruime tijd zo dat bewijzen een bezigheid is waar de studenten nog geen kennis mee gemaakt hebben (hoewel dit met de invoering van het nieuwe wiskundeprogramma misschien wel beter wordt), maar nu blijken aankomende studenten soms zelfs de stof, waarover nog wel geëxamineerd wordt, niet (meer) in voldoende mate te beheersen. Dit

vergt extra cursussen en maakt het nodig zeer voorzichtig te beginnen. Vakken als fundamentele analyse komen pas aan het eind van het eerste jaar. Toch komen er nog steeds heel goede studenten aan.

Op veel plaatsen bestaat al enige tijd de mogelijkheid om een zogenaamde dubbele propedeuse te doen: wiskunde en informatica of wiskunde en natuurkunde. De studiebelasting is ongeveer 125% van een normaal propedeutisch examen. De ervaringen zijn gunstig. De studenten blijken het ook na het eerste jaar heel goed te doen. Helaas gaat een groot deel verder in de andere richting. Wellicht moeten we wat meer boeiende en uitdagende elementen in deze variant inbouwen.

Vaardigheden

Er is in de programma's aandacht voor computervaardigheden, mondeling en schriftelijk rapporteren (vrijwel overal met behulp van $\text{\LaTeX}$) en modelleren (sterker bij de technische wiskunde). Dat de verslagen ook in goed Nederlands (of redelijk Engels) moeten worden geschreven werd vaak te weinig benadrukt. Op veel universiteiten worden sommige onderdelen ingevuld via projecten, soms in groepjes uit te voeren. Het was opvallend dat boeken en de bibliotheek een geringe rol spelen bij de studie.

Een andere trend is de opdeling van het jaar in zeer kleine blokken. Het onderwijs wordt telkens afgesloten met een tentamen waarin noodgedwongen weinig stof wordt getoetst. De commissie was hier niet gelukkig mee. We zagen ook vaak dat de tentamens lang niet het niveau van de collegestof haalden. Alweer die rendementseisen?

Afstuderen

De rol van het afstudeerproject varieerde sterk, zowel in omvang als in aard en zwaarte. De studenten die zich voorbereiden op een positie in het bedrijfsleven voeren hun afstudeerproject vaak uit bij een bedrijf. Voor de Technische Universiteiten is dat bijna regel. Daarbij vielen twee zaken op. Ten eerste dat de bedrijven meestal erg tevreden zijn over het door de afstudeerder geleverde werk. Ten tweede dat het bij een aantal algemene universiteiten vaak opdrachten betreft waarvan het wiskundig niveau tamelijk laag is. Hier is een betere selectie van de projecten wenselijk.

De meer 'zuivere' afstudeerrichtingen nemen doorgaans genoeg met een veel kortere afstudeerperiode en het werk is in veel gevallen voornamelijk literatuurstudie. Desondanks leidt zo'n 10 tot 15% van de afstudeerscripties (later) tot een publicatie in een wetenschappelijk tijdschrift. Dit betekent dat veel afstudeerders een niveau bereiken dat in de meeste landen niet wordt bereikt. Meer dan de helft van de afstudeerscripties die wij onder ogen kregen was in het Engels geschreven. De commissie heeft als algemene aanbeveling gesteld dat de studenten veel eerder in de studie de gelegenheid moeten krijgen om hun schrijfvaardigheid in het Engels te oefenen bijvoorbeeld via een miniscriptie als afsluiting van een klein project.

Keuzemogelijkheden

De opvattingen van de opleidingen over keuzemogelijkheden verschillen sterk. Er waren plaatsen waar slechts sprake was van enkele keuzemomenten (zoals de keuze van afstudeerrichting) terwijl in andere plaatsen een grote vrijheid bestond voor studenten om uit een veelheid van colleges individuele programma's samen te stellen. Het eerste werkte soms demotiverend op de studenten en het tweede gaf aanleiding tot studievertraging, onder andere door uitstelgedrag. Bovendien bleek dat een te groot aanbod van vakken ertoe leidde dat sommige van die vakken niet werden gegeven omdat slechts enkele studenten zich

er voor hadden aangemeld. Onverwacht was ook dat de opvattingen over het belang van algebra zo verschillend zouden zijn. In sommige opleidingen was behalve lineaire algebra bijna geen algebra te vinden; bij andere vonden wij de aandacht overdreven en ten koste van in onze ogen onmisbare vakken.

Aanbevelingen van de vorige commissie

Uiteraard komt een visitatiecommissie ook allerlei zaken tegen waar maatregelen ter verbetering van de situatie geboden zijn. Het was teleurstellend om te constateren dat diverse aanbevelingen van dit type letterlijk kunnen worden overgeschreven uit het visitatierapport van maart 1996. In het volgende deel van dit verslag volgen we een aantal paragrafen uit dat vorige rapport. De vorige commissie wees erop dat men voorzichtig moet zijn met het optuigen van allerlei nieuwe opleidingen en varianten. Toch zagen wij nu dat de helft van de universiteiten denkt zich in de toekomst te kunnen 'profilieren' (sic) met een opleiding Financiële Wiskunde.

Bij de inrichting van de nieuwe Masters opleidingen zal men zich eerder moeten beperken dan een zeer divers aanbod te maken. Wat wel een goed idee lijkt zijn de plannen van veel opleidingen om een deel (soms 100%) van de opleiding tot leraar te laten 'indalen' in de Masters opleiding. De belangstelling voor het ambt van leraar is groeiend. Het is zinvol om die trend te bevorderen door de weg er naar toe niet te lang te maken.

Ook dit keer kan men van de instroomcijfers niet vrolijk worden. In het jaar '88/'89 was de totale instroom bij de Nederlandse wiskunde-opleidingen 427; vijf jaar later was dit gedaald tot 277 en weer vijf jaar later waren het er nog slechts 191. Het lijkt erop dat we het dieptepunt voorbij zijn.

Verademing

Terecht is in het verleden de universiteiten verweten dat zij zich nauwelijks met het vwo bemoeiden. De kloof tussen wetenschappelijk onderwijs en vwo werd steeds groter. Daar is nu een enorme verbetering in opgetreden. Veel universiteiten hebben regelmatig en gestructureerd contact met scholen in hun regio. Bij veel opleidingen zijn er nu leraren van het vwo in deeltijd in dienst om eerstejaars te begeleiden bij de overgang naar wetenschappelijk onderwijs. Die overgang heeft soms merkwaardige aspecten: een eerstejaars (produkt van het studiehuis) vertelde ons dat de universiteit voor haar een verademing was omdat ze eindelijk weer les kreeg!

Op veel plaatsen worden regelmatig masterclasses voor scholieren gehouden om de belangstelling voor wiskunde te bevorderen. Zij worden goed bezocht en door de leerlingen positief beoordeeld. Diverse faculteiten zijn zeer verdienstelijk in het steunen van zaken als de Wiskunde Olympiade, de Kangoeroe wedstrijd, het tijdschrift Pythagoras en de Stichting Vierkant voor Wiskunde. In dit verband ook lof voor het Ratio project van de KUN.

In het rapport van 1996 wordt er op gewezen dat onderwijs in de wiskunde voor andere studierichtingen dient te worden gegeven door gekwalificeerde docenten, dat wil zeggen, mensen die ook onderzoek in wiskunde doen. Er werd (terecht) gesteld dat het een taak is van de colleges van bestuur om hierover een duidelijk standpunt uit te spreken. Uiteraard is de kwaliteit van het onderwijs aan de universiteit het belangrijkste argument. Daarnaast spelen ook financiële belangen van de wiskundefaculteiten een rol. De toestand is inmiddels verergerd in plaats van verbeterd en er zijn universiteiten waar het de spuigaten uit loopt. Alweer om financiële redenen worden stukken wiskunde verwerkt in andere colleges en gegeven door docenten die niet gekwa-

lificeerd zijn om die wiskunde op het voor een universiteit gewenste niveau te geven. Er zit niets anders op dan dat wij nog eens krachtig aan de bel trekken.

Kwaliteitszorg

We eindigen met een positieve noot. Overall is hard gewerkt om het systeem van interne kwaliteitszorg goed van de grond te krijgen. Er zijn diverse methoden bedacht om studenten invloed te geven. Vaak kunnen klachten over colleges, tentamens en dergelijke open besproken worden met de docenten, een zaak die een compliment waard is. De studenten waren van oordeel dat weliswaar niet altijd, maar toch heel vaak hun kritiek ook aanleiding was tot aanpassingen en verbeteringen. De visitatiecommissie hoopt dat onze goed bedoelde kritiek en aanbevelingen ook heel vaak een nuttig effect zullen hebben. 

Reinie Erné

Universit  de Rennes 1, Campus de Beaulieu

35042 Rennes Cedex, France

Reinie.Erne@univ-rennes1.fr

Online publishing

Grothendiecks erfenis

In het maartnummer van het Nieuw Archief sloot de serie *Serials Crises* af, waarin de veranderde situatie van het uitgeven van wetenschappelijke tijdschriften vanuit verschillende standpunten werd belicht. In de nieuwe serie 'Online Publishing' willen we aandacht schenken aan academische publicatie via nieuwe media. Reinie Erné, gepromoveerd in de algebraïsche meetkunde en docent wiskunde aan de Universiteit van Rennes, beschrijft het project om de dertiendelige serie 'Séminaire de Géométrie Algébrique' van Grothendieck en zijn groep online beschikbaar te maken.

Een duidelijk verschil tussen wetenschappelijke artikelen en boeken is dat auteurs van boeken over het algemeen delen in de winst, terwijl auteurs van artikelen geen betaling verwachten. Dit lijkt de hoofdreden te zijn waarom het Budapest Open Access Initiative [1] waarvan het doel

'open access' (gratis en onbeperkte beschikbaarheid op het web) voor artikelen uit 'peer-reviewed' tijdschriften is, boeken uitsluit.

Er zijn echter wel voorbeelden te geven van auteurs die hun boek online beschikbaar stellen, bijvoorbeeld in pdf-formaat, met toestemming van de uitgever. Wij raden dan ook iedereen aan om bij (of na) het schrijven van een boek na te denken over het contract met de uitgever, en niet zonder meer een contract te tekenen waarin niet over online beschikbaarheid gerept wordt. Wij noemen twee voorbeelden.

Al in 1996 heeft de uitgever A. K. Peters het boek $A=B$ van Doron Zeilberger uitgegeven terwijl de auteur het recht behield om een pdf-versie van zijn boek online beschikbaar te stellen. Het copyright van A. K. Peters, vermeld op de webpagina [2] waar de elektronische versie opgehaald kan worden, zegt dat deze versie afgedrukt mag worden voor educatieve doeleinden van een onderwijsinstelling en dat in dat geval alleen redelijke kosten voor het reproduceren in rekening gebracht mogen worden. Meer recent (7 februari 2002) heeft Cambridge University Press het boek *Algebraic Topology* van Allen Hatcher uitgegeven terwijl daarvan ook een pdf-versie online beschikbaar blijft met de vermelding dat alleen voor eigen gebruik een uitdraai mag worden gemaakt.

Mede doordat auteurs tegenwoordig hun boeken vaak in (La)TeX typen, hebben zij zonder inbreng van een uitgever al een leesbare (elektronische) versie tot hun beschikking. Hierdoor zijn de verhoudingen tussen auteurs en uitgevers de laatste jaren aan het veranderen. Waar voorheen de uitgever veel tijd kwijt was aan het typesetten van een boek kan een deskundige auteur nu een bestand leveren waar de uitgever weinig aan hoeft te veranderen, op wat stijl aanpassingen na.

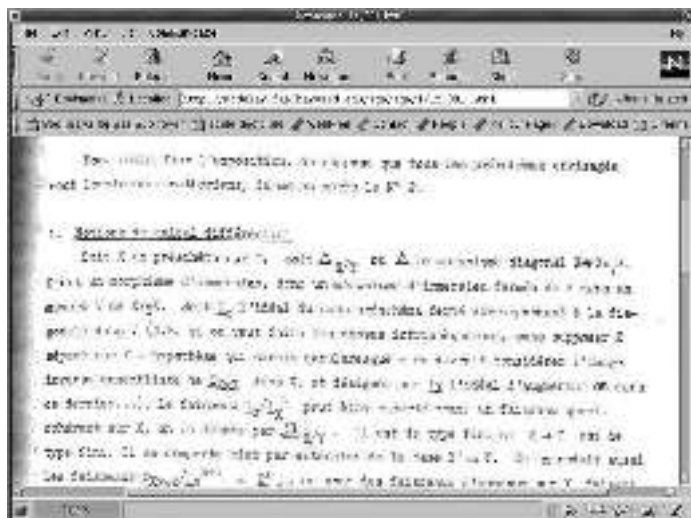
Een gedrukte versie van een boek heeft (nog steeds) voordelen boven een elektronische. Zo is er bijvoorbeeld (nog) een merkbaar verschil in leescomfort tussen een elektronische versie van een boek en een gedrukte versie. Het plezier van een boek in handen hebben en het erin kunnen bladeren is iets wat eigen is aan een 'papieren' boek. Papier is op de lange duur ook minder vermoeiend voor de ogen. Aantekeningen zijn makkelijker te maken in een gedrukt boek, tenzij men over een annotateerbare elektronische versie beschikt (bijvoorbeeld de LaTeX-source). Verder zijn er ook situaties waarin het eenvoudig onmogelijk (of erg onverstandig) is om een (laptop) computer te gebruiken, zoals op een (afgelegen) vakantiebestemming zonder elektriciteit (ja, die bestaan nog) of thuis, in bad.

Daarentegen brengt het gratis elektronisch beschikbaar zijn van boeken ook veel voordelen met zich mee. Een eerste sluit aan bij het artikel van Apt [3], namelijk het feit dat de beschikbaarheid geen geografische of inkomensgrenzen kent. Als referentiemateriaal voor een



bron: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Grothendieck.html>

Alexander Grothendieck, geboren in 1928 in Berlijn, tijdens een congres in Montreal in de jaren zeventig



Een als jpeg beschikbaar gemaakte fotokopie van het origineel

groter gezelschap beschikbaar is, zullen ook meer mensen de benodigde kennis op kunnen bouwen om zich aan interessante wiskundige problemen te wagen, wat de ontwikkeling van de wiskunde ten goede komt. Een ander voordeel is het gemak waarmee een boek meegenomen kan worden op reis, bijvoorbeeld naar een congres of op (werk-)vakantie. Wie nu rugklachten riskeert of net dat ene resultaat mist wat thuisgelaten is kan in de ideale situatie de boeken die hij nodig heeft op zijn laptop meenemen, of ter plekke via internet raadplegen. Voor de lezer zou de ideale situatie natuurlijk zijn om van ieder boek twee versies te hebben, een geprinte en een elektronische.

De beschikbaarheid waar wij het hier over hebben kent, mits goed aangepakt, niet alleen geen geografische of inkomensgrenzen, maar blijft ook in de toekomst in stand. Een tekst die elektronisch bij de arXiv archieven (voorheen de Los Alamos archieven) [4] ingediend is zal ook in de toekomst (voor zover dat nu te voorzien valt) beschikbaar blijven. Hoe vaak komt het niet voor dat een boek uitverkocht is en (voorlopig) niet heruitgegeven wordt? Dit betreft zowel recente als oudere boeken.

Séminaire de Géométrie Algébrique

Een voorbeeld van een uitverkochte boekenreeks waar wel vraag naar bestaat, is de serie *Séminaire de Géométrie Algébrique* (SGA) van Alexander Grothendieck et al. Deze verzameling van dertien boeken werd tussen 1968 en 1977 uitgegeven door Springer-Verlag en North Holland, en was oorspronkelijk bedoeld als een voorlopige versie van de *Éléments de Géométrie Algébrique* (EGA), die de meest fundamentele noties en technieken van de algebraïsche meetkunde uiteenzetten [5]. Van de voorspelde dertien hoofdstukken van EGA zijn er maar vier afgekomen. Ze zijn tussen 1960 en 1967 uitgebracht en vormen de basis van de algebraïsche meetkunde. De SGA's gaan verder en behandelen meer geavanceerde onderwerpen, zoals de fundamenteelgroep, Riemann-Roch stellingen en étale cohomologie.

Sinds 1977 is er geen SGA meer uitgegeven of herdrukt. Toen hij in de jaren zeventig zijn banden met de wiskundige gemeenschap verbrak, trok Alexander Grothendieck zijn toestemming aan de uitgevers om de SGA's uit te geven in. Bestaande exemplaren van deze boeken tonen tekenen van veelvuldig gebruik. Bovendien zijn deze allemaal het bezit van een aantal bevoorrechte, veelal oudere wiskundigen of bibliotheken. Zo kunnen studenten en veel onderzoekers alleen met geleende exemplaren werken.

Bas Edixhoven, hoogleraar algebraïsche meetkunde in Rennes, liep



De tekst wordt overgezet in LaTeX

al jaren rond met het idee om de SGA's gratis, elektronisch beschikbaar te maken. Dat idee is uitgegroeid tot het 'SGA-project' (zie [6]). Dit project moet leiden tot een LaTeX2ε-versie van alle SGA's die bij de arXiv archieven ingediend zal worden.

Alle SGA's — behalve SGA5 waarvan er op dat moment geen beschikbaar was — zijn door fotokopiëren en scannen al als jpeg bestanden beschikbaar gemaakt door Frank Calegari, Jim Borger, en William Stein [7], maar een degelijke LaTeX2ε-versie heeft veel voordelen boven formaten die enkel 'plaatjes' geven, zoals jpeg, gif, dvi. Bijvoorbeeld kan door het veranderen van een aantal commando's in de kop de stijl van de uitkomst (dvi, ps of pdf) naar eigen smaak aangepast worden, is het mogelijk om er een zoekopdracht voor bepaalde woorden op los te laten, of kan het tot hypertext gemaakt worden, met links binnen de tekst. De LaTeX-versie kan ook op een dag gebruikt worden om een boek te printen. Zo is Pierre Colmez, uitgever van de serie *Documents Mathématiques* van de Société Mathématique de France, van plan de SGA's in deze serie opnieuw uit te geven. In de serie zijn reeds de seminarium voordrachten van Jean-Pierre Serre en de correspondentie tussen Grothendieck en Serre verschenen. Verder kan er makkelijk een andere versie van de tekst gemaakt worden waarin een lijst met errata verwerkt wordt. Dat wordt nu voor SGA1 al gedaan, waar errata als commentaar in het LaTeX-bestand opgenomen worden. Bij een gedrukte versie moet daarvoor de volgende druk afgewacht worden. Hierbij is het belangrijk te vermelden dat begonnen wordt met een 'oer-versie' (nul-versie) die de tekst van de boeken letterlijk overneemt, met fouten en al.

Copyright

Nu kan men natuurlijk niet zomaar een willekeurig boek overtypen en gratis elektronisch beschikbaar maken, daar zorgen auteursrechten wel voor. Wat betreft de delen van SGA die bij Springer-Verlag verschenen zijn zegt de Senior Editor of Mathematics van Springer Verlag, Dr. Catriona M. Byrne, hierover het volgende [6]:

"The various volumes of the *Seminaire de Geometrie Algebrique* of Alexandre Grothendieck, published by Springer in the Lecture Notes in Mathematics more than 20 years ago are sold out and no longer available. We were not able to reprint the volumes, because Professor Grothendieck withheld his permission. Given the time that has elapsed, the copyright for the content of the volumes has reverted to the authors and volume editors involved. Thus, for any projects that you might



Het eindresultaat

initiate to make this material available again, you will need to obtain the permission of each author concerned. Springer requests only that you indicate in full the source of the original publication.”

Edixhoven vermeldt op de webpagina van het project dat het onmogelijk lijkt Grothendieck zelf te bereiken, maar dat hij niet verwacht dat deze tegen het project is. De enige andere auteur van SGA1, Michèle Raynaud, heeft haar toestemming gegeven voor het project.

Lappendeken

De SGA's bestaan samen uit zo'n 7000 pagina's, veel te veel voor één persoon om over te typen. Het idee van het SGA-project is om, per deel, vrijwilligers te vragen ieder een klein aantal pagina's te typen, en alle getypte stukken vervolgens tot een hoofdbestand te combineren. Voor de zekerheid wordt dit bestand ook nog eens in stukken door vrijwilligers doorgelezen om fouten te verbeteren.

Het werk aan het eerste deel, SGA 1, is alweer ver gevorderd. Hoe is het daar tot nu toe mee gegaan? Een deelnemer meldt zich aan met een bericht waarin hij zegt hoeveel stukken hij wenst te typen en hoeveel hij er wenst door te lezen. Daarna krijgt hij een email terug met de nummers van de toegekende stukken. Deze worden binnen drie weken terug verwacht. Op de webpagina van het project staan links naar de jpeg versie van de SGA's, naar een bestand dat het 'skelet' genoemd wordt en naar een pagina met instructies.

De eerste link zorgt ervoor dat deelnemers geen beschikking hoeven te hebben over een gedrukte versie van het boek. Daarmee wordt een grotere deelname aan het project mogelijk.

Het skelet en de instructies zijn er om de kwaliteit en homogeniteit van het resulterend LaTeX-bestand zoveel mogelijk te waarborgen. Een ieder die wel eens proceedings van een conferentie heeft uitgegeven kan ervan getuigen dat iedereen bij het schrijven zijn eigen stijl heeft, niet alleen in het taalgebruik maar ook in het gebruik van LaTeX. In het geval van SGA1, met zijn 86 stukken, zou dit tot een werkelijke lappendeken kunnen leiden, waarin bijvoorbeeld geen enkele referentie correct werkt. Om dit laatste te vermijden is het skelet gemaakt. Dit is een LaTeX2e-bestand dat een versie van SGA1 oplevert waarin alleen de structuur aanwezig is. In het bijzonder bevat het alle benodigde labels voor interne verwijzingen. Verder bevat het een opdeling van de oorspronkelijke tekst in stukken van ongeveer vijf pagina's.

De webpagina met instructies geeft redelijk duidelijke aanwijzingen hoe de oorspronkelijke tekst (met typemachine en hand geschreven)

overgezet moet worden in LaTeX. Hierbij heeft de deelnemer wel enige kennis van algebraïsche meetkunde nodig.

Dankzij het skelet en de gegeven instructies wordt er verwacht dat de getypte stukken wat LaTeX-stijl betreft veel op elkaar zullen lijken, en dat is in de praktijk ook gebleken. Wij merken op dat de gewenste homogeniteit een reden is om de SGA's niet naar het Engels te vertalen. Zo'n vertaling zou de SGA's voor een groter publiek beschikbaar maken, maar het lijkt bijna onmogelijk om met meerdere mensen een homogene vertaling te verkrijgen. Aan de andere kant is het niet redelijk om één persoon het vertalen van een boek van meer dan 400 pagina's zoals SGA1 als vrijwilligerswerk te laten doen.

Voorlopige resultaten

Wij gaan terug naar de deelnemer. Nadat deze zijn stukken toegewezen heeft gekregen pakt een deelnemer het skelet en typt daarin zijn stukken. Op ieder moment kan de latex output bekeken worden (en op fouten gecontroleerd worden).

Veel mensen hebben belangstelling getoond in dit project, en een aantal heeft met raad en daad geholpen bij het opzetten ervan [6]. Op 27 november 2001 is het project gelanceerd door een boodschap te sturen naar zo'n 70 wiskundigen die actief zijn in de algebraïsche meetkunde met de vraag “het nieuws van het project” te verspreiden. De meeste hiervan zijn in een positie waarin ze veel mensen in hun omgeving kennen die mee zouden kunnen doen. Verder zijn ze zo uitgekozen dat ze samen een zo groot mogelijk geografisch gebied vertegenwoordigen.

Op 17 december waren alle stukken toegekend en op 4 februari waren alle getypte stukken weer binnen. Vervolgens zijn deze aan elkaar gekoppeld en is het verkregen bestand zo homogeen mogelijk gemaakt. Op 4 maart kon het proeflezen beginnen. Als dit gebeurd is worden de gemelde (typ)fouten verbeterd waarna het bestand klaar zal zijn voor de arXiv archieven. Er hebben dan uiteindelijk 45 vrijwilligers bijgedragen aan het typen, 31 aan het proeflezen, plus nog alle anderen die een bijdrage geleverd hebben aan het opzetten van het project. Het resultaat is een bestand van ongeveer 23000 regels en 1Mb.

Wat nu? Nu is er een discussie mogelijk over hoe het verder moet. De initiatiefnemer van het SGA project is van mening dat het ongezonder is dat één persoon alle beslissingen neemt, en vindt dat dit op een democratischer manier zou moeten gaan. Als SGA1 eenmaal af is moet bijvoorbeeld gekozen worden welk deel van de SGA's daarna aangepakt zal worden (dat hoeft niet automatisch SGA2 te zijn). Verder is gesuggereerd dat optische karakterherkenning nuttig zou kunnen zijn. In ieder geval is de basis gelegd voor de andere delen. En wie weet, ook voor soortgelijke projecten. 

Dankwoord

Met dank aan Bas Edixhoven voor zijn aanwijzingen bij het schrijven van dit artikel.

Referenties

- 1 <http://www.soros.org/openaccess/>
- 2 <http://www.cis.upenn.edu/~wilf/Downld.html>
- 3 Nieuw Archief voor Wiskunde, 5/2 nr. 3 september 2001
- 4 <http://arxiv.org/>
- 5 Séminaire de Géométrie Algébrique 1 (SGA1)
- 6 <http://www.math.univ-rennes1.fr/~edix/sgahtml/index.html>
- 7 <http://modular.fas.harvard.edu/sga/sga/index.html>

Bert Zwaneveld

afdeling Natuur- en Technische Wetenschappen

Open Universiteit Nederland

Postbus 2960, 6401 DL Heerlen

bert.zwaneveld@ou.nl

Het Wiskunde A1,2 examen

Dinsdag 28 mei werd het vwo-examen Wiskunde A1,2 afgenomen. Vorig jaar is op deze plaats aandacht besteed aan het eindexamen Wiskunde B1,2 bestemd voor de vwo-ers met het profiel natuur en techniek. Het A1,2 examen wordt afgenomen aan vwo-ers met het profiel economie en maatschappij. Bert Zwaneveld legt uit wat de verschillen zijn.

Met de invoering van de mammoetwet in 1968 is er veel veranderd in het voortgezet onderwijs: de oude hbs en het oude gymnasium gingen over in (het havo en) het vwo. Er kwamen op het vwo twee wiskundevakken, wiskunde I en II. Wiskunde I was verplicht voor alle leerlingen die wiskunde nodig hadden voor hun vervolgopleiding op de universiteit op de terreinen van de economische, sociale, technische en natuurwetenschappen. Wiskunde II was bedoeld als keuzevak voor met name de wiskundig betere leerlingen.

Wiskunde I, II, A en B

De inhoud van wiskunde I bestond uit onderwerpen uit de analyse, de kansrekening en statistiek, wiskunde II had meetkunde en lineaire algebra tot onderwerp. In de loop van de jaren tachtig zijn wiskunde I en II vervangen door wiskunde A en B. Voor die vervanging zijn de volgende oorzaken aan te wijzen. Onder invloed van Freudenthal koos men ervoor om wiskunde in een context aan te bieden. Ook wilde men de vwo-wiskunde beter laten aansluiten op de economische en sociaal-wetenschappelijke opleidingen, die structureel deficiëntiecurcussen wiskunde moesten verzorgen voor studenten die geen wiskunde I in hun pakket hadden, omdat met name het analysedeel een groot struikelblok vormde.

De herverkaveling van wiskunde I en II tot wiskunde A en B betekende het volgende. Wiskunde A was verplicht voor aankomen-

de studenten economische en sociale wetenschappen, wiskunde B voor aankomende studenten natuur- en technische wetenschappen. Wiskunde A bestond uit het toepassen van de analyse, kansrekening en statistiek, grafen en matrices en lineair programmeren; wiskunde B uit analyse en ruimtemeetkunde. Wiskunde A was contextrijk, wiskunde B niet.

De recente veranderingen, bekend onder naam 'studiehuis', komen op het volgende neer. Er zijn vier profielen gedefinieerd; *cultuur en maatschappij*, *economie en maatschappij*, *natuur en gezondheid* en *natuur en techniek*. Bij elk profiel hoort een eigen wiskunde programma: respectievelijk A1, A1,2, B1 en B1,2. Inmiddels zijn alle vier de programma's contextrijk.

Het examenprogramma wiskunde A1,2

De domeinen en subdomeinen die door alle vwo-leerlingen (A en B) gedaan moeten worden zijn *Functies en grafieken*: machtsfuncties, exponentiële en logaritmische functies, vergelijkingen en ongelijkheden, *Discrete analyse*: veranderingen, differenties en differentiequotienten, rijen, *Meetkunde*: lineair programmeren met twee variabelen, *Kansrekening*: combinatoriek, kansen, rekenen met kansen, uniforme discrete verdelingen en de binomiale verdeling.

De specifieke A1,2-domeinen en subdomeinen zijn: *Differentiaalrekening en toepassing* afgeleide (inclusief de rekenregels) en optimaliseren *Discrete dynamische modellen*: rijen zowel impliciet als expliciet gegeven, rekenkundige en meetkundige rijen, hun somrijen, convergentie hierbij, stelsels van impliciet gegeven rijen, webgrafieken *Lineair programmeren* *Statistiek en kansrekening*: populatie en steekproef, ordenen, verwerken en samenvatten van gegevens, kansverdelingen met name de normale verdeling en toet-

sen van hypothesen.

Voor de volledigheid moet worden opgemerkt dat het domein grafen en matrices wel tot het programma hoort maar niet behandeld hoeft te worden en dus niet geëxamineerd wordt, omdat het totale vwo-programma te omvangrijk wordt gevonden. Op het eindexamen zijn de kandidaten verplicht een grafische rekenmachine gebruiken.

Discrete dynamische modellen

De belangrijkste verandering bij de overgang van wiskunde A naar wiskunde A1,2 is de invoering van het domein discrete dynamische modellen. De inhoud van dit domein is vastgesteld nadat het een aantal jaren in twee scholen is uitgetest. Bij dit domein is de grafische rekenmachine onontbeerlijk. Om de lezer een indruk te geven van dit onderdeel geven we de, hier in wiskundige termen geformuleerde, opgave over dit domein van het vorig jaar.

De voorraad van een wijnboer verandert in de loop van de jaren onder invloed van nieuwe oogst en verkoop. De voorraad $G(t)$ in het jaar t is bepaald door

$$G(t) = (1 - p/100)G(t-1) + 400 - 4p, \quad t \geq 3$$

met beginwaarden $G(0) = G(1) = G(2) = 0$. Hier is p het percentage van de voorraad dat jaarlijks verkocht wordt. De eerste twee vragen van de opgave gaan over het berekenen van $G(6)$ bij $p = 15$ en het afleiden van de evenwichtswaarde voor de voorraad. Vervolgens wordt gevraagd bij welke p de opslagcapaciteit van 280.000 flessen van 0,75 liter op den duur niet meer voldoende is en in welk jaar voor het eerst de tot 2400 hl vergrote opslagcapaciteit niet meer voldoende is bij $p = 10$.



Examen VWO

Wiskunde A1,2 (nieuwe stijl)

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 02

Tijdvak 1
Dinsdag 28 mei
13.30–16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 90 punten te behalen; het examen bestaat uit 20 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 2, 3, 5 en 18 is een bijlage toegevoegd.

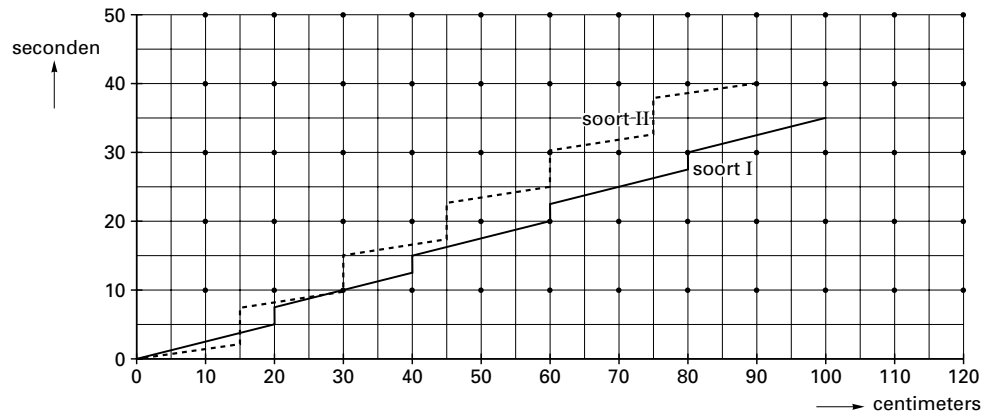
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg, of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Vogels die voedsel zoeken

Vogels die voedsel zoeken op de grond vertonen vaak een karakteristiek patroon van lopen en stilstaan. In figuur 1 is dit patroon voor twee vogelsoorten schematisch weergegeven.

figuur 1



Het patroon van soort I heeft de volgende drie kenmerken:

- het stilstaan duurt telkens $2\frac{1}{2}$ seconden;
- tussen twee stops legt de vogel telkens 20 cm af;
- tussen twee stops loopt de vogel met een snelheid van 4 cm per seconde.

4p 1 ☐ Lees uit figuur 1 af wat deze drie kenmerken zijn van het patroon van soort II.

Om van een andere vogel (soort III) dit patroon te bepalen, is zo'n vogel gedurende een reeks van 24 keer lopen-en-stilstaan geobserveerd.

De vogel stond in totaal 180 seconden stil.

De afgelegde afstand was in totaal 480 cm.

Het geheel duurde 420 seconden.

5p 2 ☐ Teken in het assenstelsel op de bijlage een grafiek zoals figuur 1 van het patroon van deze vogel voor ten minste 45 seconden. Geef een toelichting.

Vogels die hun voedsel in bomen en struiken zoeken, doen dat vaak bij voorkeur op een specifieke hoogte.

Gedurende een winter zijn in een bos voedselzoekende vogels geobserveerd. In tabel 1 staat de verdeling over verschillende hoogtes van 400 waarnemingen bij pimpelmezen.

tabel 1

400 waarnemingen bij pimpelmezen

hoogte in meters	<1,5	1,5–3	3–5	5–7	7–10	10–15	>15
aantal waarnemingen	24	26	51	72	122	92	13

8p 3 ☐ Toon aan dat de waargenomen hoogtes bij benadering normaal verdeeld zijn; maak gebruik van het normaal waarschijnlijkheidspapier op je bijlage. Lees uit je tekening af hoe groot het gemiddelde en de standaardafwijking van deze verdeling zijn. Geef beide antwoorden in dm nauwkeurig. Licht je werkwijze toe.

De hoogtes waarop boomklevers en glanskoppen werden waargenomen, waren ook bij benadering normaal verdeeld. Per soort staan het gemiddelde en de standaardafwijking van deze waargenomen hoogtes in tabel 2 in meters vermeld.

tabel 2	soort	gemiddelde hoogte	standaardafwijking
	boomklevers	10,0	4,0
	glanskoppen	4,5	1,5

Een onderzoeker let bij elk van beide vogelsoorten op de relatieve frequentie van de waarnemingen tussen 6,0 en 8,0 meter.

4p **4** ☐ Onderzoek met een berekening of deze twee relatieve frequenties even groot zijn.

Energiebronnen

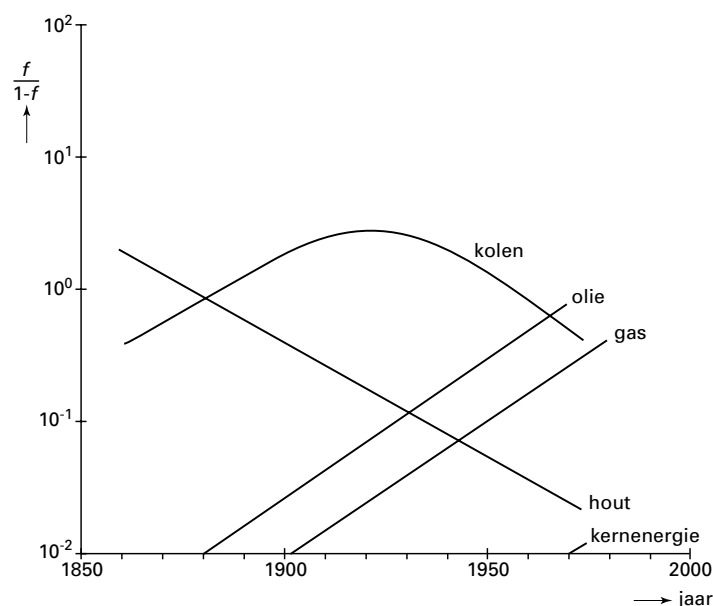
Hout was vroeger de belangrijkste energiebron. In het begin van de negentiende eeuw werd de rol van de belangrijkste energiebron overgenomen door kolen. De laatste jaren is het aandeel van olie en gas in het totale energieverbruik steeds groter geworden.

In het boek 'Energie, een economisch perspectief' besteden de schrijvers Th. v.d. Klundert en H. Peer aandacht aan de ontwikkeling van energiebronnen. Zij gebruiken daarbij de variabele f voor het aandeel van een energiebron zoals dat zich in de loop van de tijd ontwikkeld heeft ten opzichte van het totale energieverbruik. Dit aandeel f is een getal waarvoor geldt dat $0 \leq f \leq 1$. Hierbij betekent $f = 0$ dat deze energiebron helemaal niet gebruikt wordt en $f = 1$ dat uitsluitend van deze energiebron gebruik gemaakt wordt.

In het boek staat een afbeelding zoals in figuur 2. Door niet f maar $\frac{f}{1-f}$ uit te zetten en

bovendien op de verticale as een aangepaste schaalverdeling te gebruiken, worden de meeste grafieken rechte lijnen. Figuur 2 staat ook op de bijlage.

figuur 2



- 3p **5** □ In welk jaar leverde hout 50% van het totale energieverbruik? Licht je antwoord toe.

Met figuur 2 hebben de auteurs informatie willen geven over het belang van verschillende

energiebronnen door de jaren heen. Opvallend is dat daarbij niet f maar $\frac{f}{1-f}$ wordt

gebruikt. Dat kan omdat bij elke waarde van $\frac{f}{1-f}$ precies één waarde van f hoort. Immers,

als f toeneemt van 0 tot 1, dan stijgt $\frac{f}{1-f}$ voortdurend.

- 4p **6** □ Toon die laatste bewering aan met behulp van de afgeleide van $\frac{f}{1-f}$.

Aan de hand van figuur 2 kunnen we voor f_{hout} , het aandeel van hout in het totale energieverbruik, de volgende formule afleiden:

$$\frac{f_{\text{hout}}}{1-f_{\text{hout}}} = 3,03 \cdot 0,96^t$$

In deze formule is t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 1850.

Het verband tussen f_{hout} en t kan ook in een directe vorm worden weergegeven: $f_{\text{hout}} = \dots$

- 5p **7** ☐ Stel met behulp van de gegeven formule voor $\frac{f_{\text{hout}}}{1-f_{\text{hout}}}$ een formule in een directe vorm voor f_{hout} op.

Dergelijke formules in directe vorm zijn ook op te stellen voor f_{olie} en f_{gas} , het aandeel van olie respectievelijk van gas in de totale energievoorziening. Deze formules zien er als volgt uit:

$$f_{\text{olie}} = \frac{0,0023 \cdot 1,05^t}{1 + 0,0023 \cdot 1,05^t} \quad \text{en} \quad f_{\text{gas}} = \frac{0,0008 \cdot 1,05^t}{1 + 0,0008 \cdot 1,05^t}$$

Op zeker moment leverden, volgens deze formules, olie en gas samen 25% van het totale energieverbruik.

- 5p **8** ☐ Onderzoek in welk jaar dat het geval is.

De olievoorraden raken uitgeput en het kolenverbruik heeft veel milieuproblemen tot gevolg. Daarom verwacht men dat het gasverbruik in de komende tijd zal blijven toenemen. Al jaren stijgt het gasverbruik jaarlijks met 3,5% en men gaat ervan uit dat dit in de komende tijd niet zal veranderen.

Deze stijging betekent dat de huidige gasreserves toereikend zijn tot het jaar 2050. Om er voor te zorgen dat de wereld na 2050 nog voldoende gas kan blijven gebruiken, moeten nieuwe voorraden worden ontdekt. Om een indruk te geven van wat dat laatste betekent, is in het boek 'De grenzen voorbij' de volgende figuur opgenomen. In deze figuur 3 geeft elk vierkant en elke rechthoek de verbruikte of benodigde hoeveelheid gas voor een bepaalde periode aan.

figuur 3

vóór 1950	1950- 1970	1990-2010	2030-2050
1970-1990			
2010-2030			
De hoeveelheid gas die nog ontdekt moet worden om ook in de periode 2050-2070 de wereld van gas te kunnen voorzien.			

- 5p **9** ☐ Leg met behulp van een berekening uit hoe een jaarlijkse stijging van het gasverbruik met 3,5% in figuur 3 is te herkennen.

Jongen of meisje

In 1988 vond het Onderzoek Gezinsvorming plaats. Hierbij werd onder andere de gezinssamenstelling onderzocht (hoeveel kinderen, hoeveel meisjes, enzovoort). Men waagde zich vervolgens ook aan voorspellingen hoe gezinnen in de toekomst samengesteld zullen zijn. Daarbij beperkten de onderzoekers zich tot een voorspelling over de gezinnen van vrouwen die geboren zijn in 1960. De resultaten staan in tabel 3.

tabel 3

Verwachte uiteindelijke gezinssamenstelling van vrouwen geboren in 1960

	% van alle vrouwen	% van vrouwen met kinderen
<u>geen kinderen</u>	18,5	
<u>1 kind (totaal)</u>	15,2	18,7
1 jongen	7,9	9,7
1 meisje	7,3	9,0
<u>2 kinderen (totaal)</u>	40,1	49,2
2 jongens	10,1	12,4
1 jongen en 1 meisje	20,9	25,6
2 meisjes	9,1	11,2
<u>3 kinderen (totaal)</u>	18,2	22,3
3 jongens	2,5	3,0
2 jongens en 1 meisje	7,3	9,0
1 jongen en 2 meisjes	6,3	7,7
3 meisjes	2,1	2,6
<u>4 of meer kinderen (totaal)</u>	8,0	9,8
uitsluitend jongens	0,5	0,6
uitsluitend meisjes	0,5	0,6

- 3p **10** ☐ Een gezin met zowel jongens als meisjes noemt men een gemengd gezin. Hoeveel procent van alle in 1960 geboren vrouwen zal volgens tabel 3 uiteindelijk een gemengd gezin hebben? Licht je antwoord toe.

- In tabel 3 staat in de rechterkolom het getal 18,7.
3p **11** ☐ Laat zien hoe dit getal afgeleid kan worden uit de gegevens in de kolom met opschrift '% van alle vrouwen'.

Neem in het vervolg van de opgave aan dat onder geboorte wordt verstaan de geboorte van één kind, dus geen twee- of meerlingen.

Uit bevolkingsstatistieken van Nederland en andere West-Europese landen vanaf de 18e eeuw is duidelijk dat er steeds iets meer jongens dan meisjes geboren worden. Daaruit is gebleken dat de kans op een jongen bij elke geboorte ongeveer 0,51 is.

- In het verleden hebben velen gezocht naar de factoren die het krijgen van een jongen dan wel een meisje zouden kunnen beïnvloeden. Een van de factoren die mogelijk van belang zijn, is de hormoonspiegel in het bloed van de ouders. Een aanwijzing hiervoor vormen de gegevens die men heeft verkregen over geboortes die tot stand kwamen na toediening van hormonen. Bij 900 van dergelijke geboortes kwam 412 keer een jongen ter wereld.
7p **12** ☐ Onderzoek of je op grond hiervan mag concluderen dat bij dergelijke geboortes de kans op een jongen kleiner is dan 0,51. Neem hierbij een significantieniveau van 1%.

Lentevoordeelweken

Een supermarkt houdt elk jaar in de lente een actie onder de naam 'Lentevoordeelweken'. Tijdens die actie ontvangt iedere klant bij ten minste 50 euro aan boodschappen twee krasloten. Op elk kraslot staat één vakje. Als men dat openkrast, wordt de afbeelding van een kievitsei, een lammetje, een narcis of een vogelverschrikker zichtbaar.

De klant moet direct aan de kassa, voordat hij de supermarkt heeft verlaten, de twee opengekraste krasloten inleveren. Wanneer op beide krasloten dezelfde afbeelding staat, wint de klant een tegoedbon.

De kans op een tegoedbon hangt af van de verdeling van de vier afbeeldingen over de krasloten.

Neem aan dat de vogelverschrikker op 10% van de krasloten voorkomt en de andere drie afbeeldingen elk op 30% van de krasloten. De krasloten liggen, in willekeurige volgorde, op een stapel bij de kassa.

Een klant heeft zojuist twee krasloten ontvangen.

- 3p **13** ☐ Bereken de kans dat de klant met deze twee krasloten een tegoedbon wint.

De eigenaar van de supermarkt wil niet te veel tegoedbonnen weggeven. Daarom onderzoekt hij of een andere verdeling van de afbeeldingen over de krasloten gunstiger is. Hij gaat er daarbij van uit dat de vogelverschrikker met een kans k op de krasloten voorkomt en de overige drie afbeeldingen elk met een kans $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}k$. Daarmee kan hij uitrekenen hoe groot de kans is dat een klant met twee krasloten een tegoedbon wint. Die kans is gelijk aan:

$$P(\text{tegoedbon met twee krasloten}) = 1\frac{1}{3}k^2 - \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}$$

- 5p **14** ☐ Toon aan dat de formule voor $P(\text{tegoedbon met twee krasloten})$ juist is.

Met behulp van deze formule kan de eigenaar nu onderzoeken voor welke waarde van k de kans op een tegoedbon zo klein mogelijk is.

- 4p **15** ☐ Voer dit onderzoek uit.

De eigenaar van de supermarkt overweegt de mogelijkheid om elke klant die ten minste 50 euro aan boodschappen besteedt, niet twee, maar drie krasloten te geven. De klant wint dan een tegoedbon wanneer ten minste twee keer de vogelverschrikker op deze drie krasloten voorkomt.

Veronderstel dat de vier afbeeldingen in gelijke mate verdeeld zijn over de krasloten.

- 5p **16** ☐ Bereken de kans dat een klant in deze situatie een tegoedbon wint.

Aardbeien

Seizoensgebonden fruit en groenten zijn maar een beperkt deel van het jaar verkrijgbaar in de winkel. Aardbeien zijn daar een voorbeeld van. De prijs van aardbeien is afhankelijk van vraag en aanbod. Als er weinig aanbod is, zullen liefhebbers van aardbeien meer willen betalen voor aardbeien: de prijs stijgt. Die hogere prijs zet aardbeientelers ertoe aan om een jaar later meer aardbeien op de markt te brengen: het aanbod is dan hoger. Dat leidt ertoe dat de prijs weer zakt. En zo zet dit proces zich voort.

Dit proces kan in een wiskundig model worden weergegeven:

$$Q_t^v = -2P_t + 40 \quad (\text{vraagvergelijking})$$

$$Q_t^a = c \cdot P_{t-1} + d \quad (\text{aanbodvergelijking})$$

$$Q_t^v = Q_t^a \quad (\text{evenwichtsvergelijking})$$

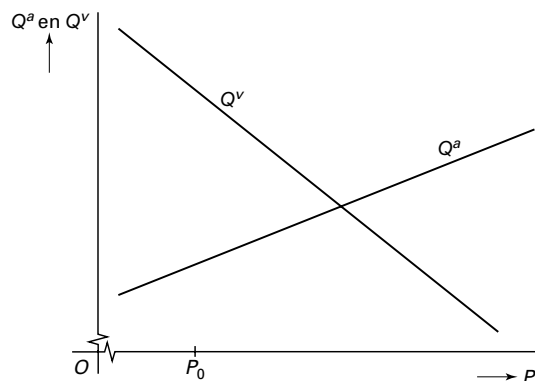
Hierin zijn Q_t^v en Q_t^a de gevraagde, respectievelijk de aangeboden hoeveelheden in het jaar t , uitgedrukt in miljoenen kg. P_t is de prijs per kg in het jaar t , uitgedrukt in euro.

Neem eerst $c = 1$ en $d = 10$. Verder is gegeven dat $P_0 = 4$.

4p 17 □ Bereken P_2 .

In onderstaande figuur 4 zijn de grafieken getekend, die bij het beschreven model horen (met $c = 1$ en $d = 10$). In deze figuur staat de prijs langs de horizontale as en de hoeveelheid langs de verticale as. Deze figuur staat, vergroot, ook op de bijlage.

figuur 4



4p 18 □ Teken in de figuur op de bijlage de webgrafiek in het model van P_0 tot en met P_3 . Geef daarbij P_1 , P_2 en P_3 op de P -as aan.

Het model zal uiteindelijk in de evenwichtsprijs stabiliseren. Bij die evenwichtsprijs hoort een evenwichtshoeveelheid.

4p 19 □ Bereken de evenwichtsprijs en de bijbehorende evenwichtshoeveelheid.

In de Europese Unie wil men maatregelen nemen om het aanbod beter te regelen. Doel van deze maatregelen is dat aardbeientelers op den duur een betere prijs krijgen voor hun product. Men streeft naar een evenwichtsprijs van 12 euro. Dit betekent voor het model dat de vraagvergelijking en de evenwichtsvergelijking niet veranderen. De aanbodvergelijking verandert echter wel: c en d hoeven niet meer gelijk te zijn aan 1 respectievelijk 10.

In het jaar dat de maatregelen van kracht worden is $P = 6$. Dit leidt in het jaar erop tot $Q^a = 13$.

Neem aan dat de evenwichtsprijs van 12 euro inderdaad bereikt gaat worden.

5p **20** ☐ Stel de nieuwe aanbodvergelijking op.

Einde

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Alle in de vijfde serie van het NAW verschenen boekbesprekingen zijn te vinden op onze webpagina.

Tevens staat daar een lijst met ter recensie aangeboden congresverslagen en eventueel andere boeken.

Indien u er prijs op stelt een van deze verslagen te bespreken, meld dit dan binnen een maand na verschijnen van dit nummer (bij voorkeur per e-mail) op onderstaand adres.

Eindredactie: Jaap Top
Redactieadres: Boekbesprekingen WG
Instituut voor wiskunde en informatica
Postbus 800, 9700 AV Groningen
Webpagina: <http://www.math.rug.nl/revwg/>
E-mail: revwg@math.rug.nl

K. Peeva, H.-J. Vogel et al.

Elsevier's dictionary of mathematics in English, German, French and Russian

Amsterdam: Elsevier, 2000

997 p., prijs €181,51

ISBN 0-444-82953-9

Het onderhavige woordenboek geeft de vertalingen van wiskundige termen vanuit iedere in de titel genoemde taal naar de andere talen. Ruim de helft van het boek, geeft de vertaling van Engelse termen: bij iedere uitdrukking, hetzij een woord dan wel een samenstelling, worden de Duitse, Franse en Russische equivalenten genoemd. De uitdrukkingen in deze lijst zijn alfabetisch geordend en doorlopend genummerd tot 11652. In het tweede deel zijn drie lijsten van Duitse woorden, Franse woorden en Russische woorden, en deze geven een verwijzing naar het nummer van het Engelse equivalent. Zo kan men vanuit ieder der vier talen bij iedere term alle drie andere uitdrukkingen vinden. De schrijvers hebben zich blijkens het voorwoord laten leiden door het voorkomen van woorden in encyclopedieën, woordenboeken en leerboeken.

Om een indruk te krijgen van de overdekkingsgraad vergeleek ik voor vijf letters, a , d , k , ℓ en (een deel van) p , corresponderend met ongeveer 3000 trefwoorden, de inhoud van het woordenboek met de index van de *Encyclopaedia of Mathematics* (Kluwer, Dordrecht, 1994). Allerlei samenstellingen, zoals aero-, dis-, para-, pluri- blijken niet te zijn opgenomen. Samenstellingen met α -, β -, δ - en dergelijke ontbreken bijna allemaal, sommige vindt men onder alfa-, beta- enzovoort. Samenstellingen met eigennamen zijn ook lang niet allemaal opgenomen; de bekendste, zoals Lagrange-, Laplace-, Weierstrass-, zijn er wel, maar waarom de 'Airy-function' niet en even later het 'Aitken-scheme' wel is opgenomen, is wat raadselachtig. Het weglaten van al deze uitdrukkingen lijkt mij overigens een verstandige keuze van de redacteurs, die blijkbaar liever naar hanteerbaarheid dan naar volledigheid hebben gestreefd. Tenslotte miste ik enkele tientallen woorden, waarvan vermelding verwacht had mogen worden, zoals bijvoorbeeld annealing, dipole, distal, lambda-calculus. Zo komt men tot het vermoeden dat nog een honderdtal woorden aan het woordenboek had kunnen worden toegevoegd. Dit is natuurlijk nauwelijks een beperking van de bruikbaarheid van het boek. De materiële uitvoering van het boek is hiermee in overeenstemming, met degelijk papier, een overzichtelijke lay-out en een stevige kunstlederen band. Het behoort tenminste in bibliotheken een plaats te vinden, en zal bijvoorbeeld ook aan redacteurs goede diensten kunnen bewijzen.

W. van der Meiden



M. Hazewinkel (ed.) Encyclopaedia of mathematics (Supplement II and III)

Dordrecht: Kluwer, 2000/2002

631 + 557 p., prijs f 495 en f550

ISBN 0-7923-6114-8 en 1-4020-0198-3

Van de destijds aangekondigde drie delen *Supplement* van de *Encyclopaedia* is het eerste deel verschenen in oktober 1997. In het nu

verschenen tweede en derde deel zijn zo'n 800 artikelen opgenomen. De criteria die tot opname in de supplementen leiden, zijn door de redacteur Hazewinkel in het voorwoord verantwoord. In het kort: aanwijzingen van gebruikers van de *Encyclopaedia* en het voorkomen in een elders reeds bestaand groot gegevensbestand. Van de nu gepubliceerde artikelen is een derde deel gewijd aan onderwerpen die behoren tot slechts zeven categorieën van de AMS Mathematics Subject Classification, namelijk getaltheorie, groepentheorie, functionaalanalyse, operatorenrekening, differentiaalmeetkunde, algebraïsche topologie en numerieke wiskunde. Hiervan vormen functionaalanalyse en operatorenrekening samen ook weer een derde. Dit betekent niet noodzakelijk dat in deze onderwerpen een relatief sterke ontwikkeling heeft plaatsgevonden: de stelling van Cayley-Hamilton bijvoorbeeld kwam in de oorspronkelijke uitgave als (samengesteld) trefwoord niet voor en wordt in Supplement I alleen als een verwijzing genoemd in Amitsur-Levitzki theorem. In het tweede supplement is er een artikel over van twee bladzijden, waarin behalve de stelling ook generalisaties uit de periode 1982–1998 worden genoemd. (In dit verband: de oorspronkelijke artikelen dateren van vóór 1977.) Dit voorbeeld is, lijkt mij, illustratief voor de compositie: behalve aanvulling ook updating van de inhoud.

Het terugzoeken met de nu voorhanden drie indexen is er niet eenvoudiger op geworden. Bij het doorbladeren raakt men opnieuw onder de indruk van de grote hoeveelheid in de *Encyclopaedia* opgeslagen materiaal, de werkelijk fraaie vormgeving en de reusachtige redactionele arbeid die ervoor verricht is moeten worden. Toch komt ook de vraag boven, hoelang het nog zal duren voor een digitale uitgave van een dergelijk werk de wel erg kostbare gedrukte versie zal vervangen. *W. van der Meiden*

D.M. Bressoud

Proofs and Confirmations. The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture

(Spectrum Series)

Cambridge: Cambridge university press, 1999

274 p., prijs £17.95

ISBN 0-521-66646-5

An *alternating sign matrix* (ASM) is a square $0, \pm 1$ -matrix for which in every row and in every column the entries sum to 1 and the non-zero entries alternate in sign.

Place n cubes in the corner of a room such that no open space is left between two cubes or between a cube and the wall or the floor, and write on the floor underneath each stack its height. These numbers then form a *plane partition* of n , a ragged triangular array with non-increasing rows and columns.

The discovery (1983) that the conjectured numbers of ASM's equalled those counting a special type of plane partitions started a search resulting in a proof in 1995 and the discovery afterwards of the connection with the 'square ice' studied by physicists. A 'natural' correspondence explaining the equality is still missing.

The author wants to emphasize, describing this quest, that 'real mathematics' is not a series of theorems separated by proofs, but work involving conjectures, evidence from examples, experiments, reconsidering known results and 'inspired guesswork and serendipitous happenstance'. This does not mean that theorems and proofs are missing. On the contrary: five of the seven chap-

ters contain clear expositions of the diverse theories that were used and their origin. So apart from the mathematicians directly involved (too many to mention here) we meet, among others, Euler and Gauss, Schur and Weyl, as well as the military (MacMahon, the first to study plane partitions) and the clergy (Dodgson, whose algorithm for the evaluation of determinants led to the concept of ASM's). We are informed about such various subjects as determinants with q -binomial entries, lattice paths, Schur functions, hypergeometric series, Jacobi's triple product and 'square ice'. For various special types of plane partitions the (generating functions of their) numbers are treated.

This nice and rich book illustrates the interplay between combinatorics and algebra (and also the care with which the author has collected and studied his sources). There are many huge formulas in it (like $\sum \prod \cdots \prod \cdots \prod \cdots$); this is not the only reason for doubt whether indeed "The book is accessible to anyone with a knowledge of linear algebra", as the back cover states. So, alas, the lay(wo)man will stay uninformed about what 'real mathematics' is. The printing is excellent, as is the glue: a plane partition of two opposite sides can be realized only after some heavy use.

R.H. Jeurissen



S. M. Srivastava

A course on Borel sets

(Graduate texts in mathematics; 180)

Berlijn: Springer-Verlag, 1998

261 p., prijs DM 98,-

ISBN 0-387-98412-7

Gedurende vele jaren heeft de wiskundige die wat wilde weten over de klassieke beschrijvende verzamelingenleer zich moeten 'behelpen' met de boeken van Kuratowski. In 1995 kwam daaraan een einde met de verschijning van het boek *Classical Descriptive Set theory* van Kechris (GTM 156). In mijn review daarvan merkte ik op dat het boek voorlopig wel standaardreferentie zou zijn voor het desbetreffende vakgebied. De verschijning van het thans te bespreken boek van Srivastava geeft me geen aanleiding mijn mening te herzien, hoewel het op een aantal punten aanvullend materiaal bevat.

Het boek van Srivastava begint met twee hoofdstukken introductie in de verzamelingenleer en de topologie. Het zijn geen gespecialiseerde inleidingen, gewijd aan de bijzondere verzamelingstheoretische en topologische aspecten van de beschrijvende verzamelingenleer, maar nogal 'gewone' inleidingen in de theorie van kardinaal- en ordinaalgetallen en de algemene (metrische) topologie. Voor beide hoofdstukken geldt: te klein voor laken, te groot voor servet. Te klein voor laken, want de claim dat het boek 'self-contained' is wordt natuurlijk nooit helemaal waargemaakt. En veel te groot voor servet, want de twee hoofdstukken beslaan samen maar liefst een derde van het boek. Het derde hoofdstuk is gewijd aan Borel verzamelingen (Borel isomorfismen, de Borel hiërarchie), het vierde aan analytische en co-analytische verzamelingen (reductie- en separatiestellingen, Poolse groepen), terwijl in het vijfde en laatste hoofdstuk enkele selectie- en uniformizeringsstellingen worden behandeld.

In zijn voorwoord merkt de auteur op dat het boek 'introductory only' is en dat hij daarom veel materiaal niet heeft opgenomen, hoewel hij dat wel zou hebben gewild. Ook op een elementair niveau zijn er echter verschillende omissies. Zo wordt de 'kleine' Borelhiërarchie (binnen de ambigue klassen) helemaal niet genoemd. Iets wat ook volledig ontbreekt is de speltheorie: alleen in het voorwoord wordt Martin's beroemde stelling aangestipt. De speltheorie is echter een zodanig belangrijk onderdeel van de beschrijvende verzamelingenleer, dat een behandeling van enige omvang naar mijn mening zelfs in een inleidende tekst niet mag ontbreken. Dat de auteur geworsteld heeft met de te maken keuzen blijkt ook uit het feit dat hij in de inleiding meldt dat "Silver's theorem on counting the number of equivalence classes of a Borel equivalence relation has not been included" — om vervolgens deze stelling op pagina 231 van het boek op te nemen. Er zijn nog een aantal andere slordigheden te vinden en het Engels is soms enigszins gebrekkig. Al met al en boek waar ik dus niet echt enthousiast over heb kunnen worden.

F. van Engelen



J. McCleary

A user's guide to spectral sequences

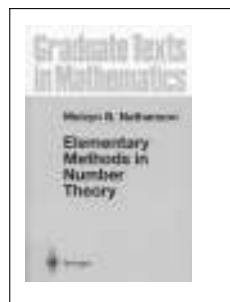
(Cambridge studies in advanced mathematics)

Cambridge: Cambridge university press, 2001

561 p., prijs £21.95

ISBN 0-521-56759-9

This book is written by an algebraic topologist. One learns from it how spectral sequences tend to be used in homotopy theory. (Roughly speaking a spectral sequence is the bookkeeping system that one uses to deal with the homological algebra of a filtered object.) There is a plethora of examples and useful pointers to the literature. In fact I feel the main strength of the book is as a source book. This is the only textbook in my possession that tells what Kudo's transgression theorem is. We learn about many other topics in algebraic topology. The author does not seem to assume prior exposure to spectral sequences, but I would not recommend this book as the place to start. One reason is that the style is too chatty. I will consult this guide a lot, but use it with care. The book makes it easy to find the original sources, and one should always check those to see if there are loose ends. In a user's guide one may expect to find. But this book is in the kind of text that explains it is part of the data of a spectral sequence to have a *specified* isomorphism between the $(r+1)$ th page and the homology of the r th page. All one learns is that there has to be at least one isomorphism, not that one has to fix it. This kind of sloppiness will probably do no harm in this particular instance, as all the spectral sequences in the book are thought of as coming with a construction. But it becomes deadly in places where the pace is swift and only definitions are given, like the 'definition' of hypercohomology. In a user's guide one would also expect standard notation to be explained. The symbol ' $\Rightarrow$ ' in the notation $E_2^{p,q} = H^p(G/N, H^q(N, M)) \Rightarrow H^{p+q}(G, M)$ for the Hochschild-Serre spectral sequence is certainly standard. Apparently the author dislikes it, and thus refuses to explain it. That is a disservice to the reader. Still, this guide is a treasure trove. W. van der Kallen



M.B. Nathanson

Elementary methods in number theory

(Graduate texts in mathematics; 195)

New York: Springer-Verlag, 2000

513 p., prijs €50,11

ISBN 0-387-98912-9

De getaltheorie kent twee betekenissen voor het woord elementair. Meestal betekent elementair gewoon 'eenvoudig', de eerste beginselen betreffende, het tegengestelde dus van geavanceerd of voortgezet. Maar elementair kan ook betekenen 'met slechts elementaire methoden af te leiden', wat wil zeggen dat geen gebruik wordt gemaakt van technieken uit de complexe functietheorie. Dergelijke elementaire methoden zijn doorgaans alderminst eenvoudig. Beide betekenissen worden door het titelwoord 'elementary' gesuggereerd. Veel probleemstellingen uit de getaltheorie kunnen zo worden geformuleerd (natuurlijk zonder aan exactheid in te boeten), dat ze begrepen kunnen worden door personen die over weinig specialistische kennis beschikken. Van dergelijke problemen kan men zich terecht afvragen of ze intrinsiek elementair zijn of niet. In de aantekeningen bij Hoofdstuk 9 is te lezen dat G.H. Hardy tijdens een voordracht in 1921 voor de Mathematical Society of Copenhagen er zijn twijfel over uitsprak of de priemgetalstelling wel elementair bewezen zou kunnen worden, want de priemgetalstelling is immers "roughly equivalent to a theorem about an analytic function, the theorem that Riemann's zeta function has no roots on a certain line".

Het materiaal van Nathanson's boek is verdeeld over drie delen. Het eerste deel *A First Course in Number Theory* is elementair in de zin van eenvoudig. Het beslaat ongeveer 200 bladzijden en bevat standaard onderwerpen zoals deelbaarheid en priemgetallen, congruenties, primitieve wortels en kwadratische reciprociteit, het abc-vermoeden en een hoofdstuk over Fourier analyse op eindige abelse groepen, een onderwerp dat men in deze context niet zou verwachten. Deze, voor een inleiding in de getaltheorie wel wat abstracte theorie, wordt in dit deel aangewend om een bewijs te geven voor de kwadratische reciprociteitswet via Gaussommen. In deel twee komt ze beter tot haar recht in de behandeling van de stelling van Dirichlet over priemgetallen in rekenkundige rijen. Dit eerste deel zou goed gebruikt kunnen worden als algemene inleiding in de getaltheorie ware het niet dat er veel standaardonderwerpen geheel of vrijwel geheel ontbreken, zoals irrationaliteit en transcendentie, kettingbreuken, en eenvoudige diophantische vergelijkingen. In de inleiding lezen we dat dit eerste deel alle resultaten bevat die nodig zijn voor een goed begrip van zijn andere boeken *Additive Number Theory: The Classical Bases* en *Additive Number Theory: Inverse Problems and the Geometry of Sumsets* (beide in 1996 in de Springer GTM serie verschenen). Suggereert de schrijver hiermee wellicht dat dit deel moet worden opgevat als een inleiding in de additieve getaltheorie?

Het tweede deel *Divisors and Primes in Multiplicative Number Theory* telt ongeveer 150 bladzijden en is gewijd aan een elementair bewijs van de priemgetalstelling en de eerder genoemde stelling van Dirichlet. Dit deel bevat weinig verrassingen, wat niet wil zeggen dat de tekst overal gemakkelijk leesbaar zou zijn.

Het derde deel tenslotte *Three Problems in Additive Number Theory* is ook ongeveer 150 pagina's lang. De drie problemen die in dit hoofdstuk worden besproken zijn: het probleem van Waring, de representatie van een gegeven geheel getal als de som van een vast aantal kwadraten, en de asymptotische formule voor de partitiefunctie.

Alles bij elkaar genomen is dit een voortreffelijk geschreven boek, met een aantrekkelijke keuze van onderwerpen en een groot aantal, vaak interessante opgaven. Elk hoofdstuk wordt afgesloten met een (vaak kort) historisch overzicht. Afgezien van het ontbreken van onderwerpen op het gebied van de diophantische approximatie is dit boek zeer geschikt voor een inleiding in de elementaire en analytische getaltheorie op doctoraal niveau.

R.J. Stroeker

I.E. Shparlinski

Finite fields: theory and computation

(Mathematics and its applications; 477)

Dordrecht: Kluwer, 1999

528 p., prijs €179,24

ISBN 0-7923-5662-4

This book gives a comprehensive survey on computational and algorithmic problems related with finite fields. The main topics treated are: polynomial factorization, finding irreducible and primitive polynomials, the distribution of irreducible, primitive and other special polynomials and matrices, bases and computation in finite fields, coding theory and algebraic curves, elliptic curves, recurrence sequences in finite fields and cyclic linear codes, finite fields and discrete mathematics, congruences and some related problems. These problems have applications in various areas of mathematics and computer science, such as coding theory, cryptography, numerical methods, number theory, discrete mathematics.

The book has an impressive bibliography: there are 3075 references. Some of the references are to rather inaccessible proceedings or to articles which appeared only in Russian. The book contains reviews of the results of this vast literature. It reports on many results which seem not to be well-known at least to people outside the former USSR. Since there are only about 400 pages of text excluding the bibliography, the presentation is rather short compared to the huge number of results mentioned. There are brief introductions to each topic and the related results are inspected and compared. New connections between different results are pointed out. Unfortunately the book contains many misprints.

Although the prerequisites are kept to a minimum, the book does not seem to be appropriate for undergraduate students or others who want to learn the subject from the beginning because there are only few proofs and examples. But for specialists and graduate students who want to specialize in one of the mentioned areas, the book will certainly be of great value. It describes the state of the art in the applications of finite fields in a comprehensive way. I have no doubts that it will become an important reference book for people working in discrete mathematics, coding theory, cryptography, computational number theory and certain areas of computer science.

W. Ebeling



H. Cohen

Advanced topics in algorithmic number theory

Berlin: Springer-Verlag, 2000

578 p., prijs €64,95

ISBN 0-387-98727-4

De *algoritmische getaltheorie* is een vakgebied dat in de afgelopen twintig jaar tot grote bloei gekomen is, en het is niet moeilijk daar een aantal oorzaken voor aan te wijzen. Allereerst wordt zogenaamde 'zuivere' getaltheorie de laatste jaren steeds veelvuldiger gebruikt in toegepaste disciplines als coderingstheorie en cryptografie, die in dit internettijdperk een grote populariteit genieten. Belangrijker nog lijkt echter de ruime beschikbaarheid van zowel rekenkracht — bijna iedere wiskundige heeft dezer dagen een redelijk krachtige computer op zijn bureau staan — als eenvoudig te gebruiken standaardpakketten als Maple of Mathematica. Zij hebben ertoe geleid dat de drempel tot het uitvoeren van computerberekeningen in de getaltheorie, net als in de meeste andere wiskundige specialisaties, tegenwoordig ongekend laag is. Het ligt dan ook voor de hand dat er boeken verschijnen waarin de getaltheorie vanuit algoritmisch standpunt wordt bekeken — en dat is soms zeer verschillend van het traditionele zuiver wiskundige standpunt. Immers, sommige 'wiskundig mooie' formules blijken bij computationele beschouwing volstrekt waardeloos te zijn.

Wie wel eens van algebrapakketten gebruik maakt weet dat het vaak onontbeerlijk is om te weten wat het pakket eigenlijk in zijn interne keuken uitspookt, en dat men er een gevoel voor moet ontwikkelen welke vragen men zo'n pakket voor kan leggen zonder jarenlang op een antwoord te hoeven wachten. Wil men tot aan de grenzen van het mogelijke gaan, dan blijkt het maar al te vaak nodig te zijn om zelf de berekening efficiënt te programmeren. Hiermee ontstaat de behoefte aan teksten die niet alleen de gebruikelijke algoritmen in algemene termen beschrijven, maar de programmeur in spe tevens van *pseudo-code* voorzien die met weinig moeite in een werkend computerprogramma kan worden vertaald.

De Fransman Henri Cohen, een initiatiefnemer achter het vanaf de tachtiger jaren in Bordeaux ontwikkelde getaltheoriepakket PARI, is één van de eersten die zich op dit gat in de markt gestort heeft. Samen met *A course in computational algebraic number theory*, dat in 1993 in dezelfde reeks verscheen en al even volumineus is, vormt *Advanced topics in algorithmic number theory* de bijbel van het vakgebied. Het eerdere boek gaf naast een aantal al wat oudere standaardalgoritmen ook een aantal zeer recente algoritmen voor het rekenen met getallenlichamen en elliptische krommen en voor het factoriseren van gehele getallen. Het nu verschenen boek bevat vrijwel uitsluitend na 1990 ontwikkelde algoritmen. Anders dan het eerste boek, dat getallenlichamen 'absoluut' over de rationale getallen beschouwde, richt dit boek zich vanaf het begin op willekeurige ('relatieve') uitbreidingen van getallenlichamen. Die vrijheid is noodzakelijk voor de *computationele klas-senlichamentheorie*, die het leeuwendeel van het boek vult.

Cohen zelf huldigt het standpunt dat men uit zijn boeken ook de getaltheorie kan *leren*, omdat een algoritme om iets te doen

vaak en passant een bewijs geeft dat dit daadwerkelijk mogelijk is. Ik wil niet uitsluiten dat zulks tot de mogelijkheden behoort, maar mijn eigen hoofd zit daarvoor niet op de goede manier in elkaar. Persoonlijk vind ik het lezen van pseudo-code een onaangename bezigheid, en niet een manier om een menselijk wezen de grondgedachte van een algoritme bij te brengen. Dat Cohen's boeken de neiging hebben veel grondgedachten in expliciete formules en pseudo-code te verwoorden is mijn hoofdbezwaar tegen deze algoritmische bijbel van de getaltheorie. De veelheid aan algoritmen die in detail in deze twee delen aan de orde komt is echter indrukwekkend, en weinig anderen dan Cohen bezitten de expertise en de energie die nodig zijn om zo'n monumentaal project te voltooien.

P. Stevenhagen



H. Völklein et al. (eds.)

Aspects of Galois theory

(LMS lecture notes series; 256)

Cambridge: Cambridge university press, 1999

290 p., prijs £27.95

ISBN 0-521-63747-3

In October 1996 the conference *UF Galois Theory Week* was held at the University of Florida. The present volume, dedicated to the Inverse Galois Problem, originated in that conference.

In the volume we find quite a variety of ideas, methods and results, ranging from explicit examples, giving useful surveys, to general methods. Geometric ideas, and explicit algebraic computations are both to be found.

Here are some topics we find in these papers (we can only mention a few, the list is much longer): *the Abhyankar conjecture*, techniques used in solving it, and related topics; one of the startling conclusions is that we still are not able to describe completely the fundamental group of the affine line in positive characteristic, see the contribution by Harbater; *the absolute Galois group* $\text{Gal}_{\mathbb{Q}}$ (one should like to know its structure precisely!), and the Grothendieck Teichmüller group GT ; we still have no idea whether the embedding $\text{Gal}_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \text{GT}$ is an equality. The contribution by Ihara hints that these two groups might not be as closely related as we might hope or expect; *several aspects of Hurwitz schemes*, and the use in constructing arithmetic situations; for example, Couveignes discusses beautiful explicit examples, while Wewers describes the tame situation in mixed characteristics; *the Grothendieck-Deligne-Anderson & Ihara approach of tangential base points* is discussed by Nakamura; *the technique of patching*, essential in some geometric approaches to arithmetic results is amply discussed.

To authors (and to referees) of such contributions I advice to be strict in maintaining standards. Let me give one example. On page 88, the authors refer to class field theory for algebraic curves, as can be found in the reference [Se] to Serre's book *Groupes algébriques et corps de classes* without further specifications. I think references should be complete with page number, specific section or chapter. The proof of Proposition 2.3 on page 89, for example, based on the mere reference [Se] I cannot follow, and the authors have not yet been able to convince me their result is correct. Such confusions can be avoided by being precise in references.

We see the advantage of such proceedings: there is space for discussing interesting examples explicitly; even if a theory is not yet fully developed. In such a volume, ideas contributing to further development can be given. Seminal ideas can be brought together, which perhaps in a research journal is not done in this way. Here is a volume with interesting methods, examples, attempts and seminal ideas around the Inverse Galois Theory; full of ideas, and nice to read.

F. Oort



J.-B. Bost, F. Loeser en M. Raynaud

Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique

(Progress in mathematics; 187)

Boston: Birkhäuser Verlag, 2000

289 p., prijs €70,20

ISBN 3-7643-6308-8

De titel doet vermoeden dat hier een serie vermoedelijk onbegrijpelijke voordrachten over moeilijke algebraïsche meetkunde zijn opgeslagen in een boek. Bij het lezen van de inleiding komt men tot de verrassende conclusie dat de voordrachten een nauwkeurig gecomponeerde systematische ontsluiting leveren van een weinig toegankelijk onderdeel van de aritmetische algebraïsche meetkunde. Een korte analyse van de diverse voordrachten en hun samenhang gaan aan de voordrachten vooraf. Blijkbaar hebben de redacteurs een goed omschreven werkplan laten uitvoeren door een welgekozen groep sprekers en schrijvers, zoals men dat ook kent van de vroegere Geyer-Harder Tagungen te Oberwolfach.

Het centrale thema is de algebraïsche fundamentealgroep $\pi_1(X)$ van een (gladde, absoluut irreducibele) algebraïsche kromme X over een lichaam k . Grothendieck is de pionier van dit onderwerp. Als k het lichaam van de complexe getallen is dan heeft X de structuur van een complex Riemann oppervlak. De topologische fundamentealgroep $\pi_1^{\text{top}}(X)$ is een oude bekende. De samenhangende eindige topologische overdekkingen van X worden gegeven door de ondergroepen van $\pi_1^{\text{top}}(X)$ met eindige index. De algebraïsche fundamentealgroep $\pi_1(X)$ blijkt (nog steeds met $k = \mathbb{C}$) gelijk te zijn aan de projectieve limiet van de quotiënten $\pi_1^{\text{top}}(X)/N$, waarbij N de verzameling van de normaaldelers met eindige index van $\pi_1^{\text{top}}(X)$ doorloopt. Die projectieve limiet is een compacte groep waarvan de structuur bekend is.

In de algemene situatie wordt $\pi_1(X)$ (ongeveer) gedefinieerd als de projectieve limiet van alle eindige groepen G , waarvoor er een samenhangende étale overdekking $Y \rightarrow X$ met automorfisme groep G bestaat. Als k algebraïsch gesloten is en karakteristiek 0 heeft dan is $\pi_1(X)$ 'hetzelfde' als voor $k = \mathbb{C}$. Als de karakteristiek p van k positief is en/of k niet algebraïsch gesloten is, dan verandert het beeld volledig.

In dit verband (en met het oog op toepassingen in de getaltheorie) bestudeert men ook krommen over een complete discrete valuatie R en over zijn breukenlichaam K . Het centrale resultaat is de nogal subtiële 'stabele reductie' stelling. Deze zegt dat een kromme X over K , na een eindige separabele uitbreiding van K , aangevuld kan worden tot een kromme X over R zodat de reductie van X modulo het maximale ideaal van R 'mooie' singu-

lariteiten heeft. In het door Ahmed Abbes geschreven hoofdstuk hierover wordt de zaak helder uit de doeken gedaan. Meerdere bewijzen worden gepresenteerd, inclusief een overzicht van de literatuur.

Rigide en formele meetkunde komen in andere hoofdstukken aan bod evenals uniformisatie van algebraïsche krommen. De twee belangrijkste thema's van dit boek wil ik graag nog wat toelichten.

Het eerste thema is de vraag naar de structuur van de groep $\pi_1(\mathbf{A}_k^1)$ waarbij $\mathbf{A}_k^1$ de affine rechte is over een algebraïsch gesloten lichaam k met karakteristiek $p > 0$. Raynaud heeft het vermoeden van Abhyankar daarover bewezen, namelijk dat iedere eindige groep G die voortgebracht is door zijn elementen met orde een p -macht een (continu) quotient van $\pi_1(\mathbf{A}_k^1)$ is. In drie hoofdstukken (en met de al ontwikkelde rigide meetkunde) wordt Raynauds bewijs gepresenteerd. D. Harbaters stelling die een analoge uitspraak doet voor de algebraïsche fundamentealgroep van willekeurige affine krommen, wordt eveneens bewezen, maar met een wonderlijk kort bewijs afkomstig van F. Pop.

Twintig jaar later, in zijn afzondering te Montpellier, keert Grothendieck terug naar zijn jeugdliefde, de π_1 . Zijn visioen is dat zekere algebraïsche variëteiten X , die hij 'anabelian' noemt, over zekere lichamen k , vastgelegd zijn door de structuur van de $\pi_1(X)$. Recente resultaten in die richting zijn verkregen door F. Pop, S. Mochizuki en A. Tamagawa. In twee hoofdstukken wordt Tamagawa's stelling bewezen. De formulering daarvan is ongeveer: Laat k een eindig voortgebrachte lichaamsuitbreiding van $\mathbf{Q}$ zijn en X een affine kromme ($\neq \mathbf{A}_k^1, \mathbf{A}_k^1 \setminus \{0\}$), dan is X vastgelegd door het surjectieve homomorphism $\pi_1(X) \rightarrow G_k$, waarbij G_k de absolute Galois groep van k is.

Misschien geeft dit een indruk van de inhoud van het boek. Zeker is het dat de voordrachten van deze Luminy conferentie de beste toegang leveren tot dit boeiende vak.

M. van der Put



A.J. Scholl and R.L. Taylor
Galois representations in arithmetic algebraic geometry

(LMS lecture notes series; 254)

Cambridge: Cambridge university press, 1999

512 p., prijs £29.95

ISBN 0-521-64419-4

Aritmetische algebraïsche meetkunde is een tak van wiskunde waar een kruisbestuiving plaatsvindt tussen getaltheorie en meetkunde. Een sleutelrol is daarbij weggelegd voor de zogeheten Galoisrepresentaties.

Het succes van deze theorie was evident vanaf Grothendiecks constructie van zulke representaties ruim 30 jaar geleden. Het leidde van bewijzen voor de Weil vermoedens (Deligne) en de Tate- en Mordellvermoedens (Faltings) tot zelfs een bewijs voor het Shimura-Taniyama-Weil vermoeden en daarmee tot een bewijs voor de laatste stelling van Fermat (Wiles). Optimisten verwachten nog veel meer uit deze middelen en uitbreidingen ervan. Het vermoeden van Birch & Swinnerton-Dyer en wellicht zelfs het *abc*-vermoeden zijn mogelijk langs deze weg op te lossen.

De redacteurs van dit boek melden, dat ze zich niet door het

onderwerp van de titel hebben laten beperken. Dit klopt, en het leidt tot een indrukwekkend boek dat voor een groot deel bestaat uit overzichtsartikelen geschreven door grote namen in het vakgebied. Gezien het technische karakter van de meeste bijdragen gaan we hier niet in op de precieze inhoud. Fraaie voorbeelden zijn Ben Moonens overzicht over (modellen van) Shimura-variëteiten en de bijdragen van Karl Rubin en van Tony Scholl over Euler systemen; een onderwerp waarover Rubin inmiddels bij Princeton University Press een heel boek heeft doen verschijnen. Helaas is niet alles van dit kaliber: als inleiding in de rigide meetkunde bestaan volgens mij heel wat betere teksten dan wat men erover in dit boek vindt.

J. Top



V. Voevodsky, A. Suslin and E.M. Friedlander

Cycles, transfers, and motivic homology theories

(Annals of mathematics studies; 143)

Princeton: Princeton university press, 2000

254 p., prijs \$ 24.95

ISBN 0-691-04814-2

Motieven gaan terug op Grothendieck. Zijn motivatie waren de Weil-vermoedens. Heel algemeen kan men zeggen dat de bedoeling is voor algebraïsche variëteiten algebraïsche topologie te doen op algebraïsche wijze.

De onderhavige bundel van vijf artikelen had oorspronkelijk alleen als doel een motivische cohomologietheorie te definiëren, die zou moeten bestaan volgens vermoedens van A. Beilinson en S. Lichtenbaum. Deze staan geformuleerd op de eerste bladzijde van de inleiding, maar zijn te technisch voor deze bespreking. De ontwikkelde theorie is gebaseerd op algebraïsche cycli en generaliseert op die manier de theorie van Chow groepen. Als referentie daarvoor wordt het boek van Samuel uit 1955 genoemd, voor een heel klassieke benadering, of voor een heel moderne het eerste artikel uit de bundel. Zo blijkt weer eens dat moderne abstracte theorie wel degelijk voortbouwt op klassieke constructies, zelfs als dat zoals hier heel moeilijk te herkennen is. Tussen de abstracte algemeenheden gaan de auteurs trefzeker op hun doel af. De moeilijkheden worden regelmatig belicht met voorbeelden van afwijkend gedrag in karakteristiek p . Aangezien pletten via resolutie een belangrijk technisch hulpmiddel is, gelden veel resultaten trouwens alleen over lichamen die resolutie van singulariteiten toelaten.

Van de meeste artikelen is Voevodsky (mede)-auteur. Dit resulteert soms in typisch Russisch Engels. Een andere eigenaardigheid is dat 'flattening' hier 'platification' genoemd wordt.

De artikelen worden voorafgegaan door een inleiding, die ook een hoofdstuknummer heeft, waardoor je bij alle daar genoemde hoofdstuknummers een moet optellen. Ik vermeld nu de titels: Relative cycles and Chow schemes [S, V], Cohomological Theory of Presheaves with Transfers [V], Bivariant Cycle Cohomology [F, V], Triangulated Categories of Motives Over a Field [V], Higher Chow Groups and Etale Cohomology [S].

Al met al betreft het hier een goed geschreven bundel specialistische artikelen, die een belangrijke bijdrage levert aan de theorie van algebraïsche cycli en motivische cohomologie.

J. Stevens



T. Peterfalvi
Character theory for the odd order theorem

(LMS lecture notes series; 272)
 Cambridge university press, 2000
 154 p., prijs £25.95
 ISBN 0-521-64660-X

The book under review consists of two parts. The first and longer one is devoted to a revision of the character-theoretic part of the proof of the celebrated Odd Order Theorem of W. Feit and J.G. Thompson (Pacific J. Math. 13 (1963)). The Odd Order Theorem states that every finite group of odd order is solvable, as was conjectured by Burnside. It is the most important among the initial results in the classification of finite simple groups. Its impressive proof is divided into three parts.

In the first part (corresponding to Chapter IV of the Feit-Thompson paper) the structure and interrelationship of the maximal subgroups of a minimal counterexample to the theorem are studied, leading to several possible configurations. A revision of this part of the proof has been published as a book by H. Bender and G. Glauberman (Cambridge university press, 1994).

When the possibilities of purely group-theoretic methods are exhausted, character theory comes into play and produces arithmetic estimates for the order of the group which allow to rule out the various configurations of maximal subgroups (with one exception). This second part (Chapter V of the Feit-Thompson paper) is revised in the book under review.

The exceptional configuration which survives the character-theoretic analysis is ruled out in the third part of the proof (Chapter VI of the Feit-Thompson paper) by a tour de force calculation with generators and relations. This part has also been greatly simplified by the author of the book under review, and appears as an appendix in the book of Bender and Glauberman.

Even after the revision, the proof of the Feit-Thompson theorem necessarily remains rather technical. We only mention a couple of the ideas involved in the character-theoretic part. One of the basic tools is the existence of isometries between subsets of the character rings of maximal subgroups of the group and subset of the character ring of the group itself. A particular isometry, constructed in the Feit-Thompson paper, and then simplified and generalized by Dade in 1964, plays a central role. Another key concept is coherence, and refers, roughly speaking, to a situation where an isometry can be extended to a larger set. Substantial simplifications here are due to a coherence theorem of D. Sibley (1976).

The second part of the book is based on an earlier article of the author and gives a simplified proof of a theorem of M. Suzuki (1964) which plays an important role in the classification of finite simple groups. This theorem characterizes the 2-transitive permutation groups G on a set X of odd cardinality, such that the stabilizer in G of a point x of X has a normal subgroup acting regularly on $X - \{x\}$, and such that subgroups of G fixing two points have odd order. In case G is simple, the theorem concludes that G is a group of Lie type of rank 1 in characteristic 2. One of the simplifications with respect to Suzuki's proof is the use of Sibley's coherence theorem.

As this book is written for the specialist, no effort has been put into explaining the strategy beyond the long and technical arguments of the character-theoretic part of the proof of the Odd Order Theorem. (The part of the book on Suzuki's theorem is a much easier reading, perhaps unavoidably.) However, the book does satisfy its purpose to provide, together with the book of Bender and Glauberman, a complete revised proof of a fundamental theorem in finite group theory.

S. Mattarei

R.P. Burns

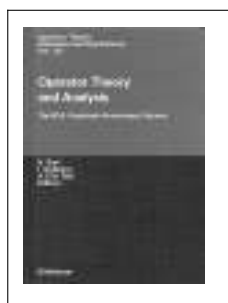
Numbers and functions, steps into analysis (2nd ed.)

Cambridge: Cambridge university press, 2000
 356 p., prijs £19.95
 ISBN 0-521-78836-6

Dit is een tweede editie van het boek, de eerste verscheen in 1992 (zie recensie mededelingen WG maart 1993). Het is nu een paperback-uitgave geworden voor de helft van de oude prijs. Hiermee zijn eigenlijk de grootste veranderingen al aangegeven, hoewel er summier ook inhoudelijke aanpassingen zijn. De aanleiding voor deze heruitgave is "a transformation of the way in which students begin to study analysis", een verandering waarbij er minder tijd voor 'lectures' en meer tijd voor 'problem-solving' wordt ingeruimd. In dat opzicht is het boek dan ook goed toegesneden op de moderne student. Helaas vraagt het van hem om ruim 750 opgaven op te lossen om dit beperkte deel van de reële analyse (rijen en functies, vrij elementair) eigen te maken.

Het boek is opgedeeld in twee delen, het eerste gaat over getallen en rijen (inclusief machtreeksen) en het tweede deel behandelt functies, alles in een reële setting. De weg tot een stelling leidt via een reeks van opgaven welke van antwoorden en commentaar zijn voorzien. De historische noot bij elk hoofdstuk is encyclopedisch van aard. (in de notatie $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ is het pijltje afkomstig van J.G. Leathem in 1905!). De literatuurlijst is aanvullend bedoeld in die zin, dat zij boeken opsomt in het kader van 'concurrent reading', 'further reading' en 'preliminary reading'. Bij een verantwoorde selectie van opgaven is dit boek zeker geschikt voor een studiehuis-wiskundestudent.

G. Jeurnink



H. Bart, I. Gohberg et al. (eds.)
Operator theory and analysis

(Operator theory: advances and applications; 122)
 Basel: Birkhäuser Verlag, 2001
 433 p., prijs € 130,-
 ISBN 3-7643-6499-8

From November 12 through November 14, 1997, an operator theory and analysis workshop was organized at the Vrije Universiteit in Amsterdam to honor Prof. dr. M.A. Kaashoek on the occasion of his 60th birthday. Marinus Kaashoek is an international leader in operator theory and its applications and has created a research school at the VU which attracts many visitors. Volume 122 in the series *Operator theory: advances and applications* is the outcome of this workshop. It contains 16 papers, refereed as if published in

the international journal *Integral Equations and Operator Theory* and covering a wide range of topics: Spectral theory for block operators, factorization results for various classes of matrix functions, commutant lifting and Nevanlinna-Pick interpolation, operators on spaces with an indefinite metric, nonstationary systems and coisometric realizations, the effects of small delays on stability and control of differential equations with delays, canonical differential systems and the inverse monodromy problem, et cetera. Rien Kaashoek has contributed to many of these topics. The field is still very much alive and I am sure that more and just as interesting volumes in this series will appear. It is a pity that not all university libraries can afford them anymore.

A. Dijkma

gives an expansive and detailed account of the state of the art in the area. The theory it describes is a rich one and has many links with global analysis, harmonic analysis, and representation theory, as well as the area of mathematical physics known as 'quantum chaos'. The book will be of interest to researchers in these areas, as well as dynamicists.

R. Sharp

B.P. Rynne and M.A. Youngson

Linear functional analysis

(Springer undergraduate mathematics series)

London: Springer-Verlag, 2000

273 p., prijs € 30,17

ISBN 1-85233-257-3

Een inleiding in *linear functional analysis* voor eerste-fasestudenten van een Engelse universiteit kan door haar onderwerp en haar doelstelling slechts een bescheiden variant zijn tussen de vele bestaande en denkbare soortgenoten; het oogmerk van deze schrijvers is om studenten voor te bereiden op het bestuderen van hogere eisen stellende literatuur. Ze noemen in dit verband Rudin's *Functional analysis* met name. De vereiste voorkennis bestaat uit de gebruikelijke lagerejaars lineaire algebra en analyse, inclusief metrische ruimten en Lebesgue-integratie. Deze onderwerpen worden in het eerste hoofdstuk summier beschreven, inclusief de categorie-stelling van Baire, terwijl aan Lebesgue-integratie, in zulke omstandigheden altijd een twijfelachtig gegeven, een korte spoedcursus van 10 bladzijden wordt besteed. Het boek volgt dan een voor de hand liggende weg met hoofdstukken over genormeerde ruimten, inwendig-productruimten, lineaire operatoren met inbegrip van de stelling van de open afbeelding, lineaire operatoren op Hilbertruimten, en compacte operatoren. Het zesde hoofdstuk bevat het hoofdresultaat van het boek, het Fredholm-alternatief voor compacte, en de spectraalstelling voor compacte symmetrische operatoren. Aan duale ruimten wordt slechts aandacht geschonken in de context van Hilbertruimten. In het zevende hoofdstuk staan toepassingen op Fredholm- en Volterra-integraalvergelijkingen en op Sturm-Liouville randwaardeproblemen. Het boek is dus beknopt maar duidelijk en verzorgd, met een passend aantal geschikte, in moeilijkheid wisselende opgaven waarvan de uitgewerkte oplossingen het laatste hoofdstuk beslaan (de bladzijden 221-263). Het is zeer geschikt voor zelfstudie en het verdient belangstelling van docenten die in de gelegenheid zijn om een dergelijke cursus te geven.

W. van der Meiden



A. Juhl

Cohomological theory of dynamical zeta functions

(Progress in mathematics)

Berlin: Birkhäuser-verlag, 2000

720 p., prijs € 121,69

ISBN 3-7643-6405-X

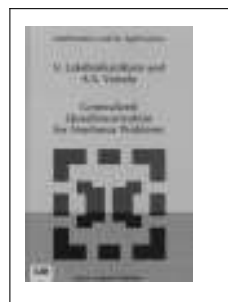
In the 1950s, Selberg introduced a zeta function associated to a discrete group Γ of isometries of the hyperbolic plane $\mathbb{H}^2$. This is defined, for $\Re s > 1$, by the formula

$$Z_{\Gamma}(s) = \prod_{\gamma} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - e^{-(s+k)l(\gamma)}\right),$$

where the product is taken over all prime closed geodesics γ on $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ of length $l(\gamma)$. A key feature of $Z_{\Gamma}(s)$ is that it has an analytic extension to $\mathbb{C}$ with its non-trivial zeros described in terms of the spectrum of the Laplace-Beltrami operator on $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$.

Since closed geodesics correspond to periodic orbits for the geodesic flow on the unit-tangent bundle over $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$, $Z_{\Gamma}(s)$ also has a dynamical interpretation. In fact, an analogous zeta function can be defined for any flow $\phi_t : X \rightarrow X$ which has countably many periodic orbits. In particular, Smale suggested studying the zeta functions associated to hyperbolic flows (of which the above geodesic flows are prototypical examples). In this context, it has become usual to study the modified function $\zeta_{\phi}(s) = \prod_{\gamma} (1 - e^{-sl(\gamma)})^{-1}$, where γ now denotes a prime periodic orbit of period $l(\gamma)$. A more general definition, proposed by Ruelle, allows for the inclusion of a weighting determined by a function $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Here it is harder to describe the analytic domain, with results depending on precise properties of the flow, but substantial progress has been made by relating $\zeta_{\phi}(s)$ to a family of so-called transfer operators, an approach introduced by Ruelle.

Another line of research is to understand the divisors and singularities of these zeta functions in a more systematic way. A particular question, raised by Patterson, is to find a cohomological interpretation and provide an analogue of the Lefschetz fixed point formula valid for hyperbolic flows. This programme is motivated by analogy with the Weil conjectures of algebraic geometry and gives a link between the two approaches mentioned above. The volume under review is devoted to this topic, in which Juhl is one of the leading figures. It does not aim to be introductory but rather



Generalized quasilinearization for nonlinear problems

(Mathematics and its applications; 440)

Dordrecht: Kluwer, 1998

276 p., prijs f 260,-

ISBN 0-7923-5038-3

Het onderhavige boek is het zevende deel in een serie boeken over algemene differentiaalvergelijkingen geschreven door de eerste

auteur met diverse coauteurs. In vier hoofdstukken wordt een abstracte theorie opgebouwd die het mogelijk maakt benaderingen van oplossingen van niet-lineaire gewone differentiaalvergelijkingen te construeren. Het centrale idee is onder- en bovenoplossingen te construeren via oplossingen van eenvoudiger vergelijkingen.

Een systematische methode is de zogenaamde quasi-linearisatie, een methode afkomstig uit de theorie van dynamisch programmeren. Stel dat men oplossingen van de differentiaalvergelijking $u' = f(t, u)$, $u(0) = u_0$, waarbij $u = u(t)$ een scalaire functie is, u' de afgeleide van de functie u aangeeft en u_0 een gegeven beginconditie is, wil benaderen. Als de niet-lineariteit f convex in u is, en men de functie $g(t, u, v) = f(t, v) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, v)(u - v)$ invoert, dan geldt $f(t, u) = \max_v g(t, u, v)$. Met als gevolg dat voor iedere scalaire functie v de oplossing van de differentiaalvergelijking $w' = g(t, w, v)$, $w(0) = u_0$ kleiner of gelijk is aan de oplossing u van de originele vergelijking. Dus de 'quasi-linearisatie' van een convexe functie f levert op een natuurlijke manier onderoplossingen voor de oplossing van de originele vergelijking. Samen met standaard (monotone) iteratieve technieken kan men op deze manier een monotone rij onderoplossingen construeren die naar de oplossing van de originele vergelijking convergeert.

Het doel van de auteurs is om deze techniek te generaliseren naar algemenere klassen van niet-lineariteiten. De vraagstelling is om uitgaande van de gegeven methoden en technieken de minimale voorwaarden te bepalen waaronder deze technieken doeltreffend kunnen worden toegepast. Dit levert een algemene theorie zonder concrete motivatie of gericht doel. Kortom, een aardig boek voor de bibliotheek, maar niet geschikt voor thuis op de plank.

S.M. Verduyn-Lunel

of omitting a topic, they rather present a short summary with the basic definitions and references. The style of writing is slightly informal in the text parts, but rather rigorous in the proofs of the theorems, which are in a smaller print than the main text. When proofs are lacking, references are given.

Each of the thirteen chapters (apart from the two in *Getting Started*) ends with an illustration of the methods in applications or research contexts. This attempt to show the relevance of the topic I consider to be very valuable. I downloaded the Matlab programs from the author's webpage and was pleasantly surprised by the performance.

Of course there are errors in this book. To give an example: the Arnoldi Method for unsymmetric linear systems (also called FOM) is treated. Then a numerical experiment is given to illustrate it. First surprise is, that the method is tested on an equation $Ax = b$ where A is a *symmetric* matrix (the tridiagonal $(-1, 2, -1)$ matrix of dimension 100) for which FOM reduces to Conjugate Gradients. The convergence of this method applied to this particular example is shown to stagnate until iteration 49, and takes place almost completely in the one iteration afterwards. This strongly suggests that the system has dimension 50 instead of 100. However, the text that comments on the convergence is the following: "Notice the sudden, dramatic reduction of the residual, which is a typical warning that the last generated subspace is sufficiently rich to contain the exact solution of the system". This "sufficiently rich" suggests that the authors never suspected that accidentally, they might have worked with a 50 times 50 matrix. To support my claim that they did indeed work with the wrong matrix: the same numerical example $Ax = b$ with the same A and b and the same initial vector for the iteration is used in the paper O. Axelsson, *Optimal preconditioners based on rate of convergence estimates for the conjugate gradient method* by Axelsson, 1999.

It is a disappointment that the authors do not mention the Arnoldi algorithm for approximating eigenvalues — even though for large and sparse matrices, its implicitly restarted version has been the method of choice in the past decade. The linear algebra part (Part II) of the book merely treats the power method, the QR algorithm and the Lanczos method for symmetric matrices, and only mentions that there exists something like unsymmetric (bi-orthogonal) Lanczos. Together with the fact that there are many references to the standard work *Matrix Computations* of Golub and Van Loan (1996). I have some doubts about Part II: personally, I will continue to use Golub and Van Loan as a standard reference for Linear Algebra, and when it comes to teaching this topic, I would be hesitant to use a textbook that does not even mention the Arnoldi method for eigenvalue computation.

In Parts III and IV, we find topics like rootfinding, polynomial interpolation and numerical integration. There are also more advanced chapters on nonlinear systems and numerical optimization and on orthogonal polynomials and approximation theory, with applications to more advanced numerical integration schemes. In surprising contrast, only very little attention is paid to numerical differentiation, and without taking into account the effects of finite precision arithmetic. As an example of a topic that might have better been omitted instead of rushing through it: section 10.11 introduces the Fourier-, Laplace-, Z-, and wavelet transform; the authors even find space to apply them within the thirteen pages they reserved for them. Finally, there are chapters on two-point boundary value problems and advection-diffusion



A. Quarteroni, R. Sacco and F. Saleri
Numerical mathematics

(*Texts in applied mathematics*; 37)

New York: Springer-Verlag, 2000

654 p., prijs \$ 59.95

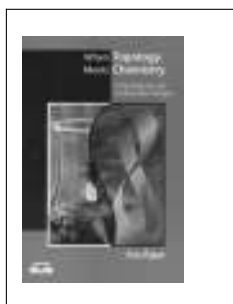
ISBN 0-387-98959-5

According to the Series Preface this textbook is suitable for use in advanced undergraduate and beginning graduate courses. Its contents are divided into four parts, covering a wide range of topics in Numerical Mathematics: (I) *Getting Started*, (II) *Numerical Linear Algebra*, (III) *Around Functions and Functionals*, and (IV) *Transforms, Differentiation and Problem Discretization*. My global impression of the book is very pleasant. The quality of print, paper, lay-out is high. Text, figures, tabulars, examples, algorithms and exercises are well-spread over the entire length and their respective amounts appear well-balanced. Many of the algorithms are implemented in the form of short Matlab programs, so that everyone can do some experimenting without significant programming effort. A very wide range of topics is treated; in fact, many more than a standard package in undergraduate teaching could ever manage. But even though almost all topics can be considered relevant and up-to-date in today's numerical analysis culture, it seems that the authors do not always know when to stop. Instead

problems and on parabolic and hyperbolic initial boundary value problems, including up-to-date methods for their numerical solution.

In my opinion, the book is more suited as a reference work for researchers than as a textbook for students. Many topics are only briefly touched, whereas other topics are analyzed in too much depth. This gives the whole an ambivalent character. I found Part II rather weak, whereas, in contrast, I found Parts III and IV much more appealing. Nevertheless, with all Matlab programs and the pleasant lay-out, I will most probably look into the book again from time to time.

J. Brandts



E. Flapan

**When topology meets chemistry,
a topological look at molecular
chirality**

(Outlooks series)

Cambridge: Cambridge university press, 2000

241 p., prijs £45

ISBN 0-521-66254-0

De Outlooks serie is een gezamenlijke onderneming van Cambridge university press en the mathematical association of America. De serie is bedoeld om het samenspel tussen wiskunde en andere wetenschappen te verkennen. De samenstelling van de redactie staat garant voor interessante en verantwoorde teksten.

De auteur is een specialist in 3-dimensionale variëteiten, knopentheorie en toepassingen van grafentheorie op moleculaire structuren. Zij schrijft in het voorwoord dat het haar bedoeling is geweest om een leerboek te schrijven voor wiskundestudenten en wetenschappers in scheikunde en moleculaire biologie over de topologie die nodig is om deze verbanden te beschrijven.

Uit het voorgaande zal duidelijk zijn dat het op de eerste plaats een boek is over knopentheorie en grafentheorie. Hoofdstuk 1 (Stereochemical Topology) biedt in 31 pagina's een overzicht van wat er zoal te beleven valt in de volgende hoofdstukken. Het belangrijkste en steeds terugkerende thema is de chiraliteit. Het gaat om de vraag of een in de 3-dimensionale Euclidische ruimte ingebedde structuur (een graaf of een molecuul) kan worden gedeformeerd (met de nodige beperkingen) naar zijn spiegelbeeld. Kan dat wel, dan heet die structuur achiraal, anders chiraal. Er zit een hele wereld van verschil in de toevoeging "met de nodige beperkingen". Bij moleculen heeft men te maken met eisen van starheid.

Verder is er de vraag of een achirale structuur een symmetrische representatie heeft. Is dat niet het geval, dan heet die structuur (naar mijn gevoel toch een beetje onnadenkend) een 'rubber glove': een rechter handschoen kan, door hem binnenstebuiten te keren, met zekere rigiditeit worden gedeformeerd in een linker handschoen, maar er is geen symmetrische vorm met dezelfde eisen aan rigiditeit.

Bij grafen is er nog het begrip *intrinsiek chiraal*, wat wil zeggen dat iedere inbedding chiraal is. Flapan heeft een belangrijke rol gespeeld in het karakteriseren van intrinsiek chirale grafen met behulp van het bestaan van zekere automorfismen. Dit wordt behandeld in hoofdstuk 6.

Er worden veel voorbeelden gegeven van chemisch chirale

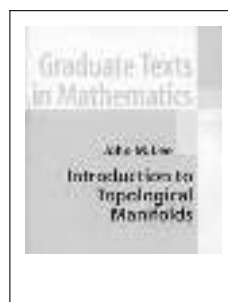
moleculen en van topologisch chirale grafen en knopen. Zo wordt in hoofdstuk 5 aangetoond dat de complete graaf op $4n + 3$ ($n \geq 1$) punten intrinsiek chiraal is, en in hoofdstuk 3 wordt dat gedaan voor de Möbius ladder met een oneven aantal (≥ 3) treden. Rubber gloves zijn het belangrijkste onderwerp van hoofdstuk 4.

Het boek is doorspekt met opmerkingen (inclusief verwijzingen) over resultaten en ontwikkelingen in knopentheorie, grafentheorie, moleculaire biologie en scheikunde. Het laatste hoofdstuk is gewijd aan DNA.

De index is heel bruikbaar, en de literatuurlijst is uitgebreid. Zowel moderne als oudere klassieke publicaties zijn erin opgenomen. Verder komen er ook relevante (meestal moderne) werken op scheikundig en moleculair biologisch gebied in voor.

Ik betwijfel of Erica Flapan erin geslaagd is om een begrijpelijk verhaal te schrijven voor de betrokken biologen en chemici. Ik acht het wiskundig tamelijk hoog en de instap vergt toch wel redelijk veel kennis over homotopie, groepentheorie, polynomen. Dat neemt niet weg dat het een schitterend boek is met veel uitzichten. Het zou ook kunnen dienen als een leidraad voor een cursus knopentheorie. Elk hoofdstuk is voorzien van een uitgebreide serie vraagstukken. Er zijn geen uitwerkingen of antwoorden.

P.W.H. Lemmens



J.M. Lee

Introduction to topological manifolds

(Graduate texts in mathematics; 202)

New York: Springer-Verlag, 2000

385 p., prijs \$34.95

ISBN 0-387-995026-5

In zijn voorwoord geeft de auteur een waarheidsgetrouwe beschrijving van wat dit boek wel en niet is. Het is de, naar zijn smaak, ideale topologische voorkennis voor een student die later differentieerbare variëteiten en differentiaalmeetkunde wil bestuderen. Er wordt dan ook speciale aandacht besteed aan groepacties, oriëntatie en afbeeldingsgraad. Tevens heeft hij getracht het boek een voorbereiding te laten zijn op algebraïsche topologie.

Dit heeft tot gevolg (en dat erkent de auteur ook ten volle) dat dit boek lastig te classificeren is. Het is geen leerboek voor algemene topologie en zeker niet voor topologische variëteiten. Belangrijke onderwerpen die wegens de speciale opzet ontbreken zijn metriseerbaarheidsstellingen, de stelling van Tychonoff voor oneindige producten, aftelbaarheidszaken, functieruimten, PL-theorie, bundels, karakteristieke klassen, laag-dimensionale meetkundige topologie.

Van de andere kant zijn er genoeg onderwerpen die wel worden behandeld en die dit boek mogelijk interessant maken voor een cursus topologie die past in een analytisch gericht studiepad.

Ik vind het bijzonder jammer dat de 'eindige' versie van Tychonoffs stelling geen gevoel ontwikkelt voor het oneindige geval. Ook is er te weinig systematische aandacht voor de geschiedenis. Zo komen bijvoorbeeld de begrippen 'Brouwer fixed point theorem' en 'Euler's formula' ter sprake zonder zelfs maar een jaartal te noemen. Een ander punt dat ik vaker signaleer in moderne

boeken is het niet meer nauwkeurig afbakenen van definities. Er zijn geen aparte kopjes *Definition*. Een begrip wordt gedefinieerd in een lopende zin met alleen dat begrip cursief gezet. Zonder onderbreking gaat de tekst verder met eigenschappen of commentaren. Zo men deze opzet al wil volgen, zou het mij toch zeer nuttig lijken om dan alles wat tot de definitie behoort cursief weer te geven.

Door het opnemen van oefenopgaven in de tekst wordt de student verplicht om zelf eenvoudige verificaties of bewijzen te leveren. Daarnaast zijn aan het eind van elk hoofdstuk problemen opgenomen die wat moeilijker zijn en waarvoor meer dan lokale kennis vereist is. Er zijn geen uitwerkingen of enigszins uitgebreide aanwijzingen.

Binnen de bovengenoemde beperkingen worden vele onderwerpen grondig en zonder compromissen behandeld, en is dit boek een aanbeveling waard.

P.W.H. Lemmens



S.M. Ross

An introduction to mathematical finance: options and other topics

Cambridge: Cambridge university press, 1999

84 p., prijs £21.95

ISBN 0-521-77043-2

Nowadays, financial derivatives enjoy an enormous popularity. Options belong to this category; they give the owner the right, but not the obligation, to buy or sell a security under specified conditions. Two types of options exist: a call option is one that gives the right to buy, a put option gives the right to sell. As for the specified conditions: both have an exercise price and an exercise time. Furthermore, one distinguishes European options (only to be utilized at the exercise time) and American options (used to buy or sell at any time up to the exercise time). In order to establish and maintain a strong market in options, it is important to have available a computationally effective way to determine their (approximate) value. For call options of European type this was done by F. Black and M. Scholes in 1973. In 1998 they received the Nobel Prize in economics for their pioneering work, together with R.C. Merton, who published a closely related paper in the same year as Black and Scholes; he showed, among other things, that the Black-Scholes formula also holds for American options.

Ross' book aims to give an elementary introduction to the theory of options pricing. No prior knowledge of probability is assumed; this material is dealt with in the first three chapters. The concept of interest rates and present values are the subject of chapter 4. Chapters 5 and 6 deal with arbitrage, a key concept underlying the Black-Scholes formula. The arbitrage theorem is derived and it is used to find the cost of a call option in the multiperiod binomial model. Based on this result, together with the approximations to geometric Brownian motion as presented in chapter 3, a simple derivation of the famous Black-Scholes formula is given in chapter 7. Various properties of the formula are pointed out, and a method is given to estimate the important volatility parameter. A simple relation exists between the risk-neutral prices (those given by the Black-Scholes formula) of call options and put

options of European type, assuming both options have the same exercise conditions. This so-called put-call option parity formula does not hold for options of American type. Part of chapter 7 is devoted to determine an approximation to the risk-neutral price of an American put option. Valuing by expected utility is the subject of chapter 8. Utility functions are introduced for that purpose. Specific attention is given to the portfolio selection problem: how to invest a given amount of money into a number of different securities such that the expected utility at the end of a prescribed period is maximal. Exotic options, as opposed to the ordinary, 'vanilla', ones dealt with so far, are the topic of chapter 9. In the last two chapters, more general models than the geometric Brownian motion model are discussed. Chapter 10 examines the price of crude oil during a period of approximately three years and it is shown that its behaviour is not consistent with the geometric Brownian motion model. A number of new models are presented that better fit the data. A sketch is given of how one of them may be used to obtain a risk-neutral option valuation. In the final eleventh chapter, an autoregressive model is studied and is employed to estimate the price flow of commodities.

Throughout the text, theoretical results and formulae are supplemented by numerical examples; moreover, each chapter includes a number of appropriate exercises and a few references to related literature. On the cover, it is claimed that the book will appeal to professional traders as well as undergraduates studying the basics of finance. This remains to be seen; at least for the first category the mathematics involved is probably too advanced. However, the book is written in a pleasant style and serves as a good introduction to the subject of mathematical finance.

F. Schurer



C.R. Traas et al.

Splines en wavelets

Utrecht: Epsilon, 2000

230 p., prijs f 37,50

ISBN 90-5041-057-X

Deze uitgave geeft een inleiding in de theorie en toepassingen van splines en wavelets, waarbij beoogd wordt ook niet-wiskundigen te bereiken. Enige kennis van analyse, complexe functies en numerieke wiskunde wordt verondersteld.

Het boek valt uiteen in twee delen, die min of meer onafhankelijk van elkaar gelezen kunnen worden. Het eerste deel behandelt splines in één en twee variabelen, het tweede deel is gewijd aan wavelets. Het verband tussen de twee onderwerpen wordt gegeven door de zogeheten spline-wavelets die uitgebreid aan bod komen. De wijze van presentatie is helder, en heeft een beschrijvende vorm, dat wil zeggen er is vrijwel geheel afgezien van het geven van stellingen en bewijzen. Het nadeel hiervan is dat resultaten niet eenvoudig zijn terug te vinden, met name in het deel over wavelets waar heel wat wordt gerekend.

Het eerste hoofdstuk geeft een beknopte inleiding in functieruimten, Fourier-analyse en filterbanken. Het laatste hoofdstuk is gewijd aan toepassingen van wavelets in de numerieke wis-

kunde. De eerste drie paragrafen van dit hoofdstuk geven in uiterst eenvoudige bewoordingen een duidelijke motivatie voor het gebruik van wavelets. Een dergelijke inleiding in de motieven voor het gebruik van splines en wavelets zou niet misstaan hebben aan het begin van het boek om de lezer op weg te helpen.

J.B.T.M. Roerdink

F.I. Dretske

Knowledge and the flow of information

(The David Hume series)

Leland Stanford Junior university, USA, 1999

273 p., prijs £14.95

ISBN 1-57586-195-X

Het voorliggende boek is opgenomen in The David Hume series of philosophy and cognitive science reissues, welke bestaat uit herdrukken van belangrijke werken, bestemd voor diegenen die actief zijn op het gebied van de filosofie en de cognitieve wetenschappen. Het boek is eerder verschenen bij MIT press, 1981. Het CSLI is het *Center for the Study of Language and Information* van MIT. Zoals de titel en het hierboven genoemde wellicht al doen vermoeden, is dit boek, in vergelijking met andere in dit tijdschrift besproken boeken, een buitenbeentje. Het handelt over wijsgerige achtergronden van begrippen als *informatie*, *kennis* en *perceptie*: behalve misschien ten aanzien van 'informatie' bepaald geen directe wiskundige onderwerpen. Dat het niettemin aan een wiskundetijdschrift ter bespreking is aangeboden, heeft wellicht te maken met het feit dat de informatie-theoretische noties zoals ontwikkeld door Claude Shannon als onderliggende basisconcepten zijn gekozen voor de in dit boek ontwikkelde theorie. Het enige wiskundige dat in dit boek verder valt te ontdekken is de welbekende logaritmische notie van een maat voor hoeveelheid van informatie, gecombineerd met vrij elementaire begrippen uit de waarschijnlijkheidsrekening. Maar dit alles geeft eigenlijk niets nieuws. Wel is de inbedding in wijsgerige overwegingen tamelijk opmerkelijk. In deze zin vormt het boek wel een waardevol geheel. Het werk is verdeeld in drie delen. In het eerste deel werkt de schrijver de notie van 'informatie' uit. Hij maakt daarbij gebruik van de hiervoor genoemde elementaire wiskundige hulpmiddelen. Belangrijk is dat het behandelde met betrekking tot 'informatie' niet duidelijk maakt wat informatie is, maar uitsluitend ingaat op een maat voor hoeveelheid informatie. Wel wordt op basis hiervan een begin gemaakt met een semantische theorie van informatie. In het tweede deel worden de in het eerste deel ontwikkelde concepten toegepast op vraagstukken uit de kennistheorie. In het derde deel analyseert de schrijver de noties *geloof*, *concept* en *betekenis*. De schrijver verstaat de kunst om moeilijke wijsgerige kwesties duidelijk te beschrijven. Met vele voorbeelden adstrueert hij de standpunten die hij ten opzichte van deze kwesties heeft ingenomen. Een uitvoerig notenapparaat, inclusief bibliografische referenties, en een nauwkeurige index sluiten het boek af. Samengevat, een belangwekkend boek dat meer vragen opwerpt dan het beantwoordt, zoals een goede wijsgerige tekst betaamt. Het geeft echter in het geheel geen bijdrage aan de wetkunde, noch aan de wijsbegeerte van de wetkunde. Het boek lijkt me dan ook niet tot de eerste interessesferen van de lezers van ons Nieuw Archief te behoren.

W. Kleijne



J. Outrata, M. Kocvara and J. Zowe
Nonsmooth approach to optimization problems with equilibrium constraints.

(Nonconvex optimization and its applications; 28)

Dordrecht: Kluwer, 1998 273 p., prijs f 240,-
ISBN 0-7923-5170-3

This book grew out of a series of papers on mathematical program with equilibrium constraints (MPECs) in the years 1993–1997, written by the authors of the book; it presents the theoretical and applied results of these papers in a unifying way.

An MPEC consists in minimizing a function $f(x, z)$ subject to $z \in S(x)$, where $S(x)$ denotes the solution set of the perturbed generalized equation $0 \in C(x, z) + N_Q(z)$, C is a continuous function in both variables x and z , Q is a nonempty closed convex set and $N_Q(z)$ denotes the normal cone to Q at z in the sense of convex analysis. In general, an MPEC is a hard, and nonconvex nonsmooth mathematical optimization problem. In this monograph the authors advocate the use of tools of nonsmooth analysis: the so-called *nonsmooth approach* to MPEC. This is the actual subject of the book. Successively the authors study MPECs with equilibria described by variational inequalities, nonlinear complementarity problems and so-called implicit complementarity problems (a subclass of quasi-variational inequalities). The efficiency of the nonsmooth approach proposed by the authors is illustrated in the second part of the book, which is devoted to several interesting applications from mechanics and economic modelling. The applications that are dealt in the final chapters are clear from the corresponding chapter titles: membrane with obstacle, elasticity problems with internal obstacles, contact problem with Coulomb friction and economic applications.

The book is well written and well suited for its purpose. All theorems in the book are proved, and many motivating and illustrative examples are given. The book is a valuable resource in applied mathematics, especially in the fields of continuum mechanics, operations research and economic modelling, as well as to all interested in mathematical programming.

C. Roos



Universitaire Wiskunde Competitie

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina <http://academics.its.tudelft.nl/uwc>

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Met ingang van Editie 2002/1 zullen per nummer drie editieprijsen worden toegekend, van 100, 50, en 25 Euro. De puntentotalen van winnaars tellen voor 0, 50, en 75 procent mee in de laddercompetitie. De aanvoerder van de ladder ontvangt een prijs van 100 Euro en begint daarna weer onderaan. Daarnaast wordt twee maal per jaar een ster-opgave aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend. Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in $\text{\LaTeX}$ wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 augustus 2002. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

Eindredactie: Jan van Neerven
Redactieadres: Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
J.vanNeerven@its.tudelft.nl

De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.



Opgave A

Zij p een oneven priemgetal en zij $a \geq 2$ en $m \geq 1$ geheel. Toon aan: als $a^m \equiv 1 \pmod{p}$ en $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$, dan is $a^m \equiv 1 \pmod{p^2}$.

Opgave B

Zij $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Voor alle paren natuurlijke getallen (i, j) met $1 \leq i < j \leq n$ kiezen we een getal $q_{i,j} \in \mathbf{Q}$. Veronderstel dat er reële n -tallen $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ bestaan die voldoen aan het stelsel vergelijkingen

$$x_i y_j - x_j y_i = q_{i,j} \quad (1 \leq i < j \leq n). \quad (1)$$

Toon aan dat er dan eveneens twee rationale n -tallen bestaan die voldoen aan het stelsel vergelijkingen (1).

Opgave C

Voor gehele $m \geq 1$ en reële $x \in (-1, 1)$ definiëren we

$$G_m(x) := \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{mn}).$$

Ga na dat de $G_m(x)$ goed gedefinieerd is, toon aan dat de limiet $\lim_{x \uparrow 1} (1-x) \ln G_m(x)$ bestaat en bepaal zijn waarde.

Editie 2001/4

Op de ronde 2001/4 van de Universitaire Wiskunde Competitie ontvingen we in totaal 13 inzendingen.

Opgave 2001/4-A

Zij $a > 0$ een positief reëel getal. Een *maximaal termproduct* van a is een product van reële getallen $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ zo dat

$$\begin{cases} a_i > 0 \text{ voor alle } i = 1, \dots, n \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = a \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \text{ is zo groot mogelijk.} \end{cases}$$

Welke $a > 0$ hebben meer dan één maximaal termproduct?

Oplossing We geven de oplossing van Filip de Smet. Aangezien alle a_i 's strikt positief zijn en aangezien steeds geldt dat

$$\left(\frac{a_i + a_j}{2} \right)^2 \geq a_i a_j \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$$

zal voor een maximaal termproduct steeds moeten gelden:

$$a_i = a_j = \frac{a}{n} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Bijgevolg wordt het maximaal termproduct $\left(\frac{a}{n}\right)^n$. Aangezien voor $f(x) = \left(\frac{a}{x}\right)^x$ voor alle $x \in \mathbf{R}_+$ geldt dat $f'(x) = f(x)(\ln(a) - \ln(x) - 1)$ zien we dat $f(x)$ in het interval $(0, \infty)$ eerst strikt stijgend is, een maximum bereikt en daarna strikt dalend is.

UWC

oplossingen

Als een $a > 0$ meer dan één maximaal termproduct heeft, dan zal het er dus precies twee hebben, met opeenvolgende n -waarden, zodat moet gelden:

$$\left(\frac{a}{n}\right)^n = \left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1},$$

waaruit volgt:

$$a = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Uit het verloop van $f(x)$ volgt onmiddellijk dat we de redenering kunnen omkeren, zodat alle a -waarden, gegenereerd door deze uitdrukking twee maximale termproducten zullen hebben.

Opgave 2000/4-B

Zij $x_1 = 1$ en definieer inductief

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n} \quad (n \geq 1).$$

Ga na voor welke reële $p > 0$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^p}$ convergeert.

Oplossing We geven de oplossing van Mark Veraar. Met volledige inductie is eenvoudig na te gaan dat $\frac{1}{16}n^2 \leq x_n \leq n^2$, waaruit volgt dat

$$\frac{1}{n^{2p}} \leq \frac{1}{x_n^p} \leq \frac{16^p}{n^{2p}}.$$

Nu convergeert de reeks $\sum_n \frac{1}{n^{2p}}$ dan en slechts dan als $p > \frac{1}{2}$. Hieruit volgt dat de reeks $\sum_n \frac{1}{x_n^p}$ convergeert dan en slechts dan als $p > \frac{1}{2}$.

Algemener kunnen we $x_{n+1} = x_n + cx_n^\theta$ beschouwen, met $c > 0$ en $0 \leq \theta \leq 1$ en vinden dat de reeks $\sum_n \frac{1}{x_n^p}$ convergeert voor $p > 1 - \theta$.

Opgave 2001/4-C

Zij p een oneven priemgetal. Een polynoom f met geheeltallige coëfficiënten heeft graad kleiner dan $p - 1$ en heeft de eigenschap dat

$$\{f(1), f(2), \dots, f(p-1)\} = \{1, \dots, p-1\}.$$

Toon aan dat $f(0)$ een geheel veelvoud is van p .

Oplossing We geven een generalisatie, waarbij we de eis dat de coëfficiënten geheel zijn laten vallen.

Zij g het interpolatopolynoom van Lagrange gegeven door $g(k) = f(k)$ voor $k = 1, 2, \dots, p-1$. Expliciet:

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p-1} f(j) \frac{p_j(x)}{p_j(j)} \quad \text{met} \quad p_j(x) = \prod_{k \in \{1, \dots, p-1\} \setminus \{j\}} (x - k).$$

Dan is g , net als f , van graad $< p - 1$ en $f - g$ is dus 0, want anders heeft $f - g$ meer wortels dan zijn graad. In het bijzonder zijn dus alle coëfficiënten van f rationaal en

$$f(0) = g(0) = \sum_{j=1}^{p-1} f(j) \frac{p_j(0)}{p_j(j)}.$$

Nu is p oneven. Dus $jp_j(0) = (-1)^{p-2}(p-1)! = -(p-1)!$ en $jp_j(j) = (-1)^j j!(p-1-j)!$, zodat

$$f(0) = \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{j-1} f(j) \binom{p-1}{j}.$$

UWC

oplossingen

Dit is een geheeltallige uitdrukking, zodat $f(0) \in \mathbb{Z}$. Modulo p geldt verder dat $jp_j(j) \equiv j! \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot \dots \cdot (j+1) \equiv (p-1)!$, en dus

$$f(0) \equiv - \sum_{j=1}^{p-1} f(j) \equiv - \sum_{k=1}^{p-1} k \equiv -\frac{1}{2}p(p-1) \equiv 0,$$

want p is oneven. Conclusie: $p|f(0)$ in $\mathbb{Z}$.

Het feit dat de coëfficiënten niet geheeltallig hoeven te zijn werd expliciet opgemerkt door het team van Gerben Stavenga, die ook een voorbeeld gaven:

$$f(x) = 5 - \frac{47}{6}x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3$$

De grafiek van f gaat door de punten $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 4)$ en $(4, 3)$.

Een andere generalisatie, die is gebaseerd op de oplossing van Jan Maas, krijgt men door $\mathbb{Z}_p$ te vervangen door een willekeurig eindig lichaam F van orde $p > 2$. Zij z een voortbrenger van de multiplicatieve groep F^* . Dan geldt $z^k - 1 = 0 \Leftrightarrow k \equiv 0 \pmod{p-1}$ en dus

$$\sum_{j=0}^{p-2} (z^j)^k = \sum_{j=0}^{p-2} (z^k)^j = \begin{cases} p-1, & \text{als } k \equiv 0 \pmod{p-1}, \\ (z^{k(p-1)} - 1)(z^k - 1)^{-1}, & \text{als } k \not\equiv 0 \pmod{p-1}. \end{cases}$$

Stel nu dat $f : F \rightarrow F$ voldoet aan $\sum_{x \in F^*} f(x) = 0$ (dit is in het bijzonder het geval als f de elementen van F^* permuteert). Zij

$$g(x) = a_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_1x + a_0$$

het Lagrange polynoom met $f(k) = g(k)$ voor alle $k \in F$. Daar F een lichaam is, ligt g in $F[x]$ en herhaaldelijk toepassen van (2) leert dat

$$0 = \sum_{x \in F^*} f(x) = \sum_{x \in F^*} g(x) = (p-1)a_{p-1} + 0 + \dots + 0 + (p-1)a_0.$$

Dus is $f(0) = g(0) = a_0 = -a_{p-1}$. Als nu de graad van f kleiner is dan $p-1$, dan is $a_{p-1} = 0$ en $f(0) = 0$ in F .

Uitslag Editie 2001/4

De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

Naam	A	B	C	Totaal
1. Gerben Stavenga e.a. (Utrecht)	8	9	10	110
2. Mark Veraar (Delft)	9	10	8	107
3. Filip De Smet (Gent)	8	10	8	104
4. Sybren Botma (Utrecht)	8	8	9	101
Jan Maas (Delft)	8	8	9	101

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie

We vermelden alleen de top 5 van deelnemers die in de laatste vier edities tenminste eenmaal hebben meegedaan. Voor de complete ladderstand verwijzen we naar de UWC-website.

Naam	Punten
1. Herbert Beltman	289
2. Jan Tuitman	261
3. Filip De Smet	211
Roelof Oosterhuis	211
5. Hendrik Hubrechts e.a.	156

Problemen

| Problem Section

Problem 30 (H.J.A. Duparc)

In general, if you interchange the hands of a clock you don't get a valid time. How many times a day can you interchange the hands of a clock and still get a valid time?

Problem 31 (Sander Dahmen)

Define for each positive integer n the regular $(n + 1)$ -dimensional solid $R_n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} |x_i| \leq 2\}$ and the n -dimensional hyperplane $V_n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0\}$. Compute the n -dimensional volume of $R_n \cap V_n$.

The following three problems are proposed by Wlodek Kuperberg.

Problem 32

Show that you can cover a square by three smaller squares, but not by two smaller squares.

Problem 33

Show that you can cover an n -dimensional cube by $n + 1$ smaller cubes.

Problem 34 (Open problem)

Can you cover an n -dimensional cube by n smaller cubes?

Solutions to volume 2, number 4 (December 2001)

Problem 24

Suppose that T is a triangular billiard table with sharp angles. Show that you can put a billiard ball on the table and shoot it in such a way that its (infinite) trajectory is a triangle.

Solutions by Frits Beukers, L. Bleijenga, Ruud Jeurissen, Floor van Lamoën, Jack van Lint. Most contributors mention that the solution is the orthic triangle. The inside out solution below is given by Frits Beukers.

Let T be the triangle corresponding to the billiard table. Let S be the triangle which is the orbit of the ball. Then the sides of T consist of the exterior angle bisectors of S . Suppose that the vertex angles of S are α, β, γ . Then an easy computation shows that the vertex angles of T are $(\pi - \alpha)/2, (\pi - \beta)/2, (\pi - \gamma)/2$. These are all sharp angles, which can be chosen arbitrarily by a suitable choice of α, β, γ . Hence any sharp angled triangle T occurs.

Problem 25 (Ruud Jeurissen)

Let V and W be finite disjoint sets of cardinality m and n , respectively, with $m \leq n$. Let Q be a set of quadruples each containing 2 elements from V and 2 elements from W , such that no two of its quadruples have 3 elements in common.

- Prove that $|Q| \leq \binom{m}{2} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- Prove that the bound in a) is sharp.

Solutions by Sybren Botma, Ruud Jeurissen and Jack van Lint. Two pairs in W that form a quadruple with the same pair in V must be disjoint. So each of the $\binom{m}{2}$ pairs in V can be combined with at most $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ pairs in W , which proves (a). The problem is to show

Solutions to the problems in this section can be sent to the editor — preferably by e-mail. The most elegant solutions will be published in a later issue. Readers are invited to submit general mathematical problems. Unless the problem is still open, a valid solution should be included.

Editor:

R.J. Fokkink

Technische Universiteit Delft

Faculteit Wiskunde

P.O. Box 5031

2600 GA Delft

The Netherlands

r.j.fokkink@its.tudelft.nl

that the bound is sharp. Jeurissen's solution uses Latin squares. Botma's solution is by a direct construction. Below is Van Lint's solution, which uses Baranyai's theorem.

Let k be even. By Baranyai's theorem (cf. Van Lint and Wilson, *A Course in Combinatorics*, Theorem 38.1) the set of $\binom{k}{2}$ pairs from a k -set can be split into $k - 1$ disjoint parallel classes. Here, a parallel class is a set of $k/2$ pairs which form a partition of the set. First assume that both m and n are even. Apply Baranyai's theorem to V and W to obtain $m - 1$, respectively $n - 1$ parallel classes of pairs. Since $m \leq n$, there is a one-to-one mapping from the set of parallel classes from V to a subset of the set of parallel classes from W . Now, let Q consist of all fourtuples $\{a, b, c, d\}$ where $\{a, b\}$ runs through all pairs from V and for a fixed pair $\{a, b\}$, the pair $\{c, d\}$ runs through the pairs in the parallel class from W corresponding to the parallel class from V to which $\{a, b\}$ belongs. We find $\binom{m}{2} \cdot \frac{n}{2}$ fourtuples which clearly satisfy the conditions for the set Q . If n is odd, add an extra element ∞ to W to make it even and the argument runs through. So we may assume that n is even. If m is odd, pick an element of W and add a copy of it to V and again the argument runs through.

Problem 26 (F. Roos)

Does there exist a triangle with sides of integral lengths such that its area is equal to the square of the length of one of its sides?

Solution This problem has been solved by Frits Beukers, Jaap Spies and Christiaan van de Woestijne. The solution shall appear in the next issue of *Nieuw Archief*.

