

Inhoud | Contents

2	Colofon
3	Van de voorzitter <i>Eduard Looijenga</i>
4	Agenda
6	Nieuws
11	Van het WG

Evenementen | Events

18	Verzegelde formules <i>Harrie Willems</i>
21	De Itô-formule zonder stochastische integralen <i>Peter Spreij</i>

Oratie | Inaugural lecture

24	Wiskunde aan de grenzen van de natuurkunde <i>Klaas Landsman</i>
----	--

Onderzoek | Research

34	Visuele perceptie en digitale beeldverwerking <i>Luc Florack</i>
42	Rekenen aan hypotheke <i>Frans Boshuizen, Peter Spreij</i>

Opinie | Opinion

49	The business of scientific communication <i>John D. Gilbert</i>
----	---

Interview |

52	De geometer, interview met W.T. van Est <i>Gerard Alberts, Ieke Moerdijk</i>
----	--

Cultuur | Culture

60	Snellius versneld <i>Frits Beukers, Weia Reinboud</i>
----	---

Onderwijs | Education

64	Reken-wiskundeonderwijs voor de 21ste eeuw <i>Koeno Gravemeijer</i>
70	Blij met de vernieuwde Tweede Fase? <i>Jacob Perrenet, Hans Sterk</i>

Boeken | Books

74	High level vulgarization of mathematics <i>T.A. Springer</i>
77	Boekbesprekingen

Problemen | Problem section

92	Universitaire Wiskunde Competitie
96	Problemen

Rubrieken | Departments

23	Oud Archief <i>Danny Beckers</i>
33	Column: From Nottingham Forest <i>Jan Bouwe van den Berg</i>
57	TeX <i>Michael van Hartskamp</i>

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder. **ISSN 0028-9825**

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
<http://www.math.leidenuniv.nl/~naw>

Hoofredactie

Ger Koole (koole@cs.vu.nl)
Chris Zaal (zaal@math.leidenuniv.nl)

Eindredactie

Derk Pik (drpik@math.leidenuniv.nl)

Redactie

Gerard Alberts (G.Alberts@bw.kun.nl)
Hans Melissen (j.b.m.melissen@its.tudelft.nl)
Jaap Molenaar (J.Molenaar1@tue.nl)
André Ran (ran@cs.vu.nl)
Bert Zwaneveld (Bert.Zwaneveld@ou.nl)

Bureau redactie

Jos Brakenhoff (naw@math.leidenuniv.nl)
Annelies Hafkenscheid (naw@math.leidenuniv.nl)

Medewerkers

Wieb Bosma (bosma@sci.kun.nl)
J.A.W. van Casteren (vcaster@wins.uia.ac.be)
Jan van de Craats (jcr@euronet.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@its.tudelft.nl)
Michael van Hartskamp (m.a.hartskamp@tue.nl)
Geertje Hek (ghek@science.uva.nl)
Teun Koetsier (teun@cs.vu.nl)
Joop Kolk (kolk@math.uu.nl)
Pieter Moree (moree@science.uva.nl)
Jan van Neerven (J.vanNeerven@its.tudelft.nl)
Mark Peletier (mark.peletier@cw.nl)
Hans Sterk (sterk@win.tue.nl)
Roel Stroeker (stroeker@few.eur.nl)
Jaap Top (J.Top@math.rug.nl)

TeX-ondersteuning

Marco Boon (m.a.a.boon@tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@its.tudelft.nl)

Abonnementstarieven 2001/Subscription rates 2001

Nederland 90 Euro (4 nummers)
Buitenland 105 Euro (4 issues)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Corrie van Os (wg-admin@math.uu.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
tel. 030-2531430, fax 030-2518394

Exchange subscriptions

Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam

Advertenties

Christiaan van de Woestijne (cvdwoest@math.leidenuniv.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101

Vormgeving

Kitty Molenaar, Amsterdam

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEX)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Op de omslag

Hoe reageert een enkele cel op een gecontroleerde netvliesstimulus? Zie 'Visuele perceptie en digitale beeldverwerking' op pagina 34. From EYE, BRAIN, AND VISION by D.H. Hubel, copyright 1988, 1995 by Scientific American Library. Reprinted by permission of Henry Holt & Co., LLC.

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient u elektronisch aan te bieden aan de hoofredactie, i.e. aan: koole@cs.vu.nl
Uitgebreidere informatie en auteursinstructies kunt u vinden op:

<http://www.math.leidenuniv.nl/~naw/html/auteurs.html>

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

<i>nummer</i>	<i>verschijningsdatum</i>	<i>uiterste inleverdatum kopij</i>
2	09-06-2002	07-03-2002
3	05-09-2002	06-06-2002
4	06-12-2002	06-09-2002
1	10-03-2003	06-12-2003

Wiskundig Genootschap

Het Wiskundig Genootschap is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. Het genootschap werd in 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Het is 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap.

Leden van het Wiskundig Genootschap ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor het Wiskundig Genootschap bedraagt € 70 per jaar en gepensioneerden betalen € 35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of HBO-opleiding, AiO's en OiO's kunnen lid worden tegen het gereduceerde tarief van € 25 per jaar.

Leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO kunnen aanspraak maken op een gereduceerd tarief van € 50.

Members of the Société Mathématique de France, and of the American, Australian, Belgian, Indian, London and South-African Mathematical Societies pay € 50 instead of the full membership fee of € 70 a year.

Homepage

<http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Corrie van Os (wg-admin@math.uu.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
tel. 030-2531430, fax 030-2518394

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Eduard Looijenga (UU, *voorzitter*), Mark Peletier (CWI, *secretaris*), Luc Florack (TUE, *penningmeester*), Harm Bakker (RUG), Anette Kik (CWI), Mariette Knaap (Shell), Jan Karel Lenstra (TUE), Jaap Molenaar (TUE), Peter Stevenhagen (UL), Michel Vellekoop (UT).

Onvermoeid verder!

Onder leiding van mijn voorganger Jan Karel Lenstra is een proces van revitalisatie van het Genootschap ingezet. Dat is misschien het meest zichtbaar aan de twee jaar geleden begonnen vijfde reeks van dit blad, maar daartoe heeft het zich zeker niet beperkt: ik noem het evenement *Pi in de Pieterskerk* (2000), de lezingenserie *Wiskunde en Kunst* (2001) en de vernieuwing van onze website die het afgelopen najaar zijn beslag heeft gekregen. Van deze activiteiten was hij niet de uitvoerder, maar wel degene die initieerde of er op toezag dat het gebeurde. Hij wist de juiste mensen bij elkaar te brengen om dingen gedaan te krijgen en effende hen daarbij de weg door het aanbrengen van een doorzichtige organisatie. Hiertoe reken ik ook de instelling van de Publicatiecommissie, waarvan hij nu zelf de voorzitter is. Dat onze leden de vruchten van dit proces op waarde schatten bleek bij de Algemene Ledenvergadering van 2001, toen bij een bestuursvoorstel tot contributieverhoging de vergadering uit eigener beweging besloot daar nog een schepje bovenop te doen.

Het ledental van het genootschap groeit. Dat blijkt uit de gegevens van onze ledenadministratie, maar ik wordt daarmee ook op een directere wijze geconfronteerd: ieder nieuw lid krijgt van de voorzitter een welkomstbrief en de afgelopen maanden heb ik iedere week gemiddeld drie tot vier van zulke brieven onderkend. Deze groei is toe te schrijven aan de ledenwerfacties (met name onder studenten en pas afgestudeerden), maar het bestuur realiseert zich terdege dat het succes hiervan op zijn beurt berust op de kwaliteiten van dit blad. Die kwaliteiten maken ook dat er onder onze leden meer animo dan voorheen is om in het NAW te publiceren. Met recht, want naar mijn indruk worden de bijdragen door velen gelezen. Het is juist zulk een uitwisseling van meningen en informatie tussen onze leden die van een beroepsvereniging een genootschap maakt en daarom neem ik deze gelegenheid te baat mijn grote waardering uit te spreken voor het werk van redactie en bureauredactie.

Ondanks de groei van het ledental en de contributieverhoging geeft de financiële toestand van het genootschap reden tot zorg. Een onevenredig groot deel van de contributies is bestemd voor onze publicaties en op dit moment teren wij in op onze reserves. Gelukkig worden we nu gesteund door een aantal wiskunde-instituten, zoals die van de VU, de UL, de UvA, de RUG en het CWI. Met andere instellingen zijn besprekingen gaande of worden binnenkort geïnitieerd. We geven dit de vorm van een institutioneel

lidmaatschap. Daarnaast zullen we een bedrijfslidmaatschap in het leven roepen. Als beide gerealiseerd zijn verwachten we in financieel opzicht wat meer lucht te hebben.

Ik noem nog wat andere zaken die de aandacht van het genootschap hebben of binnenkort gaan krijgen. Door de uitgave van het tijdschrift *Pythagoras* bedient het genootschap ook de vwo-leerlingen met belangstelling voor wiskunde. Een organisatie die zich op dezelfde groep richt, maar met andere instrumenten, is de stichting *Vierkant voor Wiskunde*. In oprichting is een stichting waarin beide als partners zullen deelnemen en die zich — hoe anders? — *Driehoek* zal noemen. Het voordeel van deze constructie is de grotere werfkracht bij geldgevers, maar mijn hoop is dat hiermee ook de contacten met het vwo structureler en intensiever zullen worden.

Het bestuur heeft onlangs besloten de *Wiskundepersdienst* te ondersteunen. Dit beoogt de eerste toegangspoort te worden voor ieder die zich op de hoogte wil stellen van wat er (vooral) in Nederland aan wiskundig nieuws gegenereerd wordt. Deze elektronische ‘persdienst’ is een initiatief van de landelijke vergadering van wiskundewebmasters. Binnenkort meer hierover.

Zoals bekend is L.E.J. Brouwer (1881–1966) één van de grootste wiskundigen die Nederland heeft voortgebracht. Zijn graf en dat van zijn vrouw bevindt zich in verwaarloosde staat en dreigde zelfs geruimd te worden. Door tussenkomst van het genootschap is dit afgewend en nu zijn we samen met de UvA van plan om nabij dit graf een plaquette aan te brengen die in het kort vertelt wie Brouwer was. Dit zal vergezeld gaan van enige publiciteit.

Tot slot: het laatste Internationaal Mathematisch Congres van 1954 te Amsterdam was het laatste grote wiskundig congres dat in Nederland plaatsvond. Het genootschap, menende dat dit nu wel lang genoeg geleden is, heeft de twee Amsterdamse instellingen en het CWI gevraagd of zij komend jaar samen een *bid* willen uitbrengen voor de organisatie van het vijfde European Mathematical Congress in 2008. Tot ons genoegen hebben zij daar positief op gereageerd.

Eduard Looijenga
voorzitter van het Wiskundig Genootschap

Disciplinegroep Wiskunde Universiteit Utrecht

Postbus 80.010, 3508 TA Utrecht

looijeng@math.uu.nl

Agenda

maart 2002

11–15 maart

☐ **Numeriek oplossen van multiprocess-multiscale differentiaalvergelijkingen**

plaats Lorentz Centrum, Leiden

info <http://www.science.uva.nl/~walter/nommd.html>

18–23 maart

☐ **Nonlinear phenomena in science**

Workshop in honour of Bert Peletier

plaats Lorentz Center, Leiden

info <http://www.cs.vu.nl/~jhulshof/bert65/>

19 maart

☐ **Lezingendag ter ere van Mike Keane**

plaats CWI, Amsterdam

info <http://www.cwi.nl/events>

19–21 maart

☐ **21st Benelux meeting on systems and control**

plaats Veldhoven

info <http://www.wfw.wtb.tue.nl/benelux2002>

21 en 22 maart

☐ **Nationale Rekendagen 2002**

plaats Leeuwenhorst Congrescentrum, Noordwijkerhout

info <http://www.fi.uu.nl/rekenweb/rekendagen>

22 maart

☐ **Europese Kangoeroe Wiskundewedstrijd**

plaats op alle deelnemende scholen

info <http://www-math.sci.kun.nl/math/kangoeroe>

22 en 23 maart

☐ **Finale Wiskunde A-lympiade**

plaats Talma Hoeve, Garderen

info <http://www.fi.uu.nl/Alympiade>

25 maart

☐ **Statistische Dag 2002**

plaats Jaarbeurs, Utrecht

info <http://www.vvs-or.nl>

april 2002

4 en 5 april

☐ **38^e Nederlands Mathematisch Congres**

Zie ook de nieuwsrubriek van dit Nieuw Archief.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info <http://www.win.tue.nl/nmc2002>

15–19 april

☐ **Computational theories in algebra**

Eidma mini-course door prof. John J. Cannon, University of Sydney, Australia.

plaats Université Libre de Bruxelles, Belgium

info <http://www.win.tue.nl/math/eidma>

16 april

☐ **PDE Problems from the life sciences**

Crossroads of mathematics, informatics and the life sciences

plaats CWI, Amsterdam

info www.cwi.nl/~peletier/crossroads.gen.shtml

21–24 april

☐ **2002 International conference on computational science**

Uitgenodigde sprekers: Francine Berman, Geoffrey Fox, Wolfgang Gentzsch, Bob Hertzberger, Tony Hey, Michiel Sprink, Henk van der Vorst.

plaats Universiteit van Amsterdam

info <http://www.science.uva.nl/events/ICCS2002>

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

22–26 april

Graphs, eigenvalues and geometric representations

Eidma mini-course door prof. László Lovász, Microsoft Research, Redmond, Washington, USA.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info <http://www.win.tue.nl/math/eidma>

25 april

Conferentie ICT in de wiskundeles

plaats Utrecht

info <http://www.aps.nl/wiskunde/X3.htm>

28 april–2 mei

Eurocrypt 2002

21st Annual international conference on the theory and applications of cryptographic techniques.

plaats Okura hotel, Amsterdam

info <http://www.ec2002.tue.nl>

mei 2002

16 mei

Advanced decision making — de rol van kwantitatieve modellen in de praktijk

Lezingen door o.a. dr. A.H.G. Rinnooy Kan en dr. F.J.H. Don. Discussieforum o.l.v. prof.dr.ir. D. den Hertog. Organisatie: Wim Bogers Stichting.

plaats Katholieke Universiteit Brabant

info <http://www.wbscongres.nl>

21 mei

The wizzards of Wall Street: did mathematics change finance?

Johann Bernoulli lezing. Spreker: Prof. Paul Embrechts (E.T.H., Zurich)

plaats Academie gebouw, Groningen

info <http://www.math.rug.nl>

23 mei

Optimization in public transport

COPT 2002 Conference

plaats Erasmus Universiteit, Rotterdam

info <http://www.few.eur.nl/few/research/ecopt>

23–24 mei

Symposium on nonlinear systems

plaats Conference Hotel Drienerburght, Utrecht

info <http://www.utwente.nl/icsc/>

25 mei

De roerige jaren zestig

Symposium VIII van de HKRWO. Lezingen door Jan van Maanen, Edu Wijdeveld, Henk Schuring en Lieven Verschaffel. Zie ook pagina 4.

plaats Hogeschool Domstad, Utrecht

info e.demoor@fi.uu.nl

27–29 mei

Frobenius manifolds in mathematical physics

Organisatoren: E. Looijenga, J. van de Leur, J. Stienstra, G. Heckman, R. Martini, G. Helminck en P. Kersten. Over hetzelfde onderwerp is er in mei ook een drieweekse MRI Spring School.

plaats Universiteit Twente

info <http://www.math.utwente.nl/fa/springschool>

28–31 mei

ACOMEN 2002

Second international conference on Advanced Computational Methods in Engineering.

plaats Katholieke Universiteit Nijmegen

info <http://cage.rug.ac.be/~acomen>

29–31 mei

Information theory in the Benelux

plaats Universite catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve

info <http://uclcrypto.org/benelux2002>

juni – augustus 2002

17–20 juni

Discrete probability

This workshop will focus on discrete probability and related areas, including combinatorics, randomized algorithms and scaling limits of discrete random structures.

plaats Eurandom, TUE

info <http://www.eurandom.tue.nl>

17–21 juni

7th international conference on p-Adic functional analysis

Organisatie: W. Schikhof (KUN), A. Escassut (Clermont Ferrand), C. Perez-Garcia (Santander).

plaats Universiteit Nijmegen

info <http://www.sci.kun.nl/math/p-adic2002>

23–28 juni

SCEE-2002

Fourth International Workshop SCEE-2002 on Scientific Computing in the Electronics Industry. Aimed at mathematicians and electrical engineers.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info <http://www.win.tue.nl/scee2002>

27 en 28 juni

High performance optimization techniques 2002

plaats Universiteit Tilburg

info <http://ssor.twi.tudelft.nl/~hpopt/hpopt2002>

1–3 juli 2002

23e Society for multivariate analysis in the behavioral sciences

Congres bedoeld als discussiepodium voor onderzoekers op het gebied van de kwantitatieve methodologie in de sociale wetenschappen.

plaats Tilburg

info <http://www.kub.nl/SMABS2002>

5–11 juli

7de Computer Olympiade

plaats Maastricht

info <http://www.cs.unimaas.nl/Olympiad2002>

12–17 juli

Orthogonal polynomials and special functions

Euro Summer School

plaats Leuven, België

info aw.twi.tudelft.nl/~koelink/opsf2002.html

21 juli – 2 augustus

String theory and quantum gravity

plaats UvA, Amsterdam

info <http://www.science.uva.nl/math/research>

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur dan uw bijdrage ($\pm$ 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar naw@math.leidenuniv.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

De roerige jaren zestig

Symposium VIII van de Historische Kring Reken- en Wiskunde Onderwijs heeft als thema *De roerige jaren zestig – van moderne wiskunde naar realistisch wiskundeonderwijs*. Het symposium wordt gehouden op 25 mei 2002 in de Hogeschool Domstad te Utrecht (Koningsbergerstraat 9) van 10.15 tot 16.00 uur. Sprekers zijn:

- Jan van Maanen, die Adri Treffers interviewt over *Het didactische gedachtegoed van Hans Freudenthal*
- Edu Wijdeveld, *Ontstaan, werkwijze en effecten van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde en het Instituut Ontwikkeling WiskundeOnderwijs (de jaren 60–70)*
- Henk Schuring, *Reflectie op 25 jaar vernieuwingen in het Voortgezet Onderwijs*
- Lieven Verschaffel, *Reflectie op 25 jaar vernieuwingen in het Basis Onderwijs*

Deelname door overmaking van €20 op giro 4657326 tnv HKRWO te Amsterdam (koffie, thee en lunch inbegrepen). Inlichtingen bij Ed de Moor; 020-6121382, 030-2611611 of e.demoor@fi.uu.nl

Advanced Decision Making

De Wim Bogers Stichting organiseert op donderdag 16 mei 2002 *Advanced Decision Making*, een congres dat is gewijd aan de rol van kwantitatieve modellen in de praktijk, en dat plaatsvindt op de Katholieke Universiteit Brabant te Tilburg.

Doel van het congres is een kritische blik te werpen op het gebruik van kwantitatieve modellen binnen de econometrie en operations research. Daarbij zal worden ingegaan op het ontstaan van modellen. De rol die modellen in de praktijk spelen zal worden toegelicht en daarnaast zal besproken worden welke factoren modellen tot een succes maken en welke juist niet. Ook zal het toekomstperspectief van het gebruik van modellen worden behandeld.

In het ochtendprogramma zal in een viertal lezingen een wat algemenere kijk worden gegeven op het thema door de volgende sprekers: dr. G. Alberts, coördinator Wetenschap en Samenleving-programma aan de Katholieke Universiteit Nijmegen, dr. F.J.H. Don, directeur van het Centraal Planbureau, prof.dr. F.A. van der Duyn Schouten, Rector Magnificus aan de Katholieke Universiteit Brabant en dr. A.H.G. Rinnooy Kan, lid van de Raad van Bestuur van ING Groep N.V.

In het middagprogramma zullen tijdens parallelsessies sprekers van bedrijven de rol toelichten van kwantitatieve modellen die bij het betreffende bedrijf spelen. Ter afsluiting van de dag zal er een forum-discussie plaatsvinden onder leiding van de dagvoorzitter prof.dr.ir. D. den Hertog, hoogleraar besliskunde aan de Katholieke Universiteit Brabant. Meer informatie: <http://www.wbscongres.nl> *Peter Hulshof*

Nederlands Mathematisch Congres 2002

Op 4 en 5 april 2002 zal in Eindhoven het 38ste Nederlands Mathematisch Congres plaatsvinden. De vier hoofdsprekers zijn L.A. Peletier (Leiden), M. Aizenman (Princeton), G.J. Woeginger (Twente) en A. Blokhuys (Eindhoven).

Slechts een keer per zes jaar worden zowel een Beeger-lezing als een Brouwer-lezing gehouden. In Eindhoven zullen Poonen en Aizenman de respectievelijke eer hebben. Maar het congres wordt ook om andere redenen bijzonder. Zo zullen we aio's vragen een presentatie te geven voor een groter publiek dan gebruikelijk in een tijd die korter is dan

gebruikelijk. Een papieren versie van het aanmeldingformulier zat bij het vorige nummer. Voor actuele informatie en aanmelding kunt u op internet terecht: <http://www.win.tue.nl/nmc2002> *Arjeh Cohen*

Museum voor Escher in Den Haag

Op 5 oktober 2002 zou op initiatief van het Gemeentemuseum Den Haag een Fotomuseum en een Escher Museum worden geopend. De gemeente Den Haag en het Gemeentemuseum hebben hun plannen gewijzigd en gisteren bekendgemaakt dat er een museum geheel gewijd aan het werk van Escher zal worden gevestigd in Het Paleis, Lange Voorhout 74. Dit gebouw was tot voor kort het werkpaleis van koningin Beatrix en is op dit moment in gebruik voor de expositie van werk van Escher (tot 24 maart). Om het werk van de graficus M.C. Escher naar behoren te kunnen conserveren, betaalt de gemeente een klimaatinstallatie van €450.000.

De anderhalf jaar geleden aangetreden directeur Wim van Krimpen en de gemeente Den Haag geven echter de voorkeur aan een centrale locatie voor de publiekstrekker Escher. De vorige directeur van het Gemeentemuseum, Hans Locher, was in 1968 de eerste die het werk van Escher als 'kunst' aan het publiek presenteerde. Daarop besloot Escher zijn collectie in bruikleen te geven aan het museum. Een deel daarvan is later aangekocht. *bron: Gemeentemuseum Den Haag/NRC Handelsblad*



Onderwijsvisitatie wiskunde

Afgelopen najaar en winter hebben de bezoeken in het kader van de onderwijsvisitatie wiskunde plaatsgevonden. De negen universiteiten en tien opleidingen (aan de VU naast wiskunde en statistiek ook bedrijfs-wiskunde en -informatica) zijn beurtelings bezocht.

Universiteit Utrecht beet het spits af op 4 en 5 oktober, als laatste werd de Universiteit Twente bezocht op 14 en 15 februari. Ieder bezoek aan een opleiding werd ingevuld met gesprekken met groepen studenten, afgestudeerden, studenten en stafleden die actief zijn bij de kwaliteitsbewaking van het onderwijs, docenten, studieadviseurs en opleidingsmanagement. Daarnaast bekeek de commissie onderwijsmateriaal, las ze afstudeerscripties en bezocht ze faciliteiten. Tijdens een diner met gezaghebbers bij de opleiding en aan de universiteit kon de commissie zich op informele wijze nog een extra beeld vormen.

De visitatiecommissie bestaat uit prof.dr. J.H. van Lint (emeritus TUE, voorzitter), prof.dr. F. Takens (emeritus RUG, vice-voorzitter), prof.dr. H. Kwakernaak (UT), prof.dr. A. van Streun (RUG, didactiek wiskunde en natuurwetenschappen), prof.dr. J. Wessels (TUE) en mw. A.L.M. de Theije (student wiskunde UL). Zij heeft op basis van zelfstudies van de opleidingen en de bezoeken een eerste mondeling verslag gegeven aan iedere universiteit, en zal voor de zomer komen met een openbaar schriftelijk verslag en conclusies. *Geertje Hek*

Wiskunde Scholen Prijs 2002

De Wiskunde Scholen Prijs is ingesteld om scholen te stimuleren met hun sterke punten op het gebied van wiskundeonderwijs naar buiten te treden.

Alle scholen voor voortgezet onderwijs kunnen meedingen naar deze prijs. Er zijn drie categorieën waarin een school een prijs kan winnen: de categorie basisvorming (klas 1 en 2), bovenbouw vmbo (klas 3 en 4) en havo/vwo (de klassen 3 t/m 6). Scholen die meedoen dingen mee naar de hoofdprijs van €2000. Daarnaast is er voor elke categorie een eerste prijs van €1000 te winnen. Doel van deze prijs is om goede initiatieven binnen wiskundeonderwijs zichtbaar te maken voor iedereen. De prijsuitreiking vindt plaats op 5 april tijdens het Mathematisch Congres in Eindhoven.

De Wiskunde Scholen Prijs is een onderdeel van het WisKids project, een gezamenlijk initiatief van wiskundig Nederland. Doel van WisKids is het bevorderen van enthousiasme voor wiskunde bij jongeren, het imago van wiskunde verbeteren en belangstelling voor de exacte vakken bevorderen. Partners in WisKids zijn Ratio (KUN), STW/NWO, NVvW, Vierkant voor Wiskunde, Pythagoras, Wiskunde Olympiade, Freudenthal Instituut. WisKids werkt samen met APS en SLO. Financieel is WisKids mogelijk gemaakt door OC&W, Axis, FME-CWM. De Wiskunde Scholen Prijs wordt mede gesponsord door de NOCW. Meer informatie: <http://www.fi.uu.nl/wiskids> *Heleen Verhage*

Eurodiffusie-experiment

Duitsland produceert met 35,4% verreweg de meeste euromunten. Zijn in de loop van volgend jaar de muntjes in onze portemonnees voor een derde deel van Duitse oorsprong? Het wetenschapsmagazine Natuur & Techniek en de Studiegroep Wiskunde met de Industrie beginnen op 1 januari 2002 een uniek experiment om de wiskunde van de verspreiding van euromunten te toetsen, in samenwerking met Nederlandse en Vlaamse scholen. Leerlingen gaan maandelijks inventariseren hoeveel buitenlandse munten zij op zak hebben.

De verspreiding van de nieuwe euromunten in twaalf EU-landen en drie Europese dwergstaatjes biedt kansen voor een bijzonder experiment, dat nooit meer herhaald kan worden. Is het mogelijk om aan de hand van peilingen het komende jaar conclusies trekken over het Europese geldverkeer? Natuur & Techniek zal komend jaar hierover regelmatig publiceren.

De Studiegroep Wiskunde met de Industrie wordt in 2002 georganiseerd door het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) en de Universiteit van Amsterdam. In februari 2002 buigen zo'n zestig wiskundigen uit heel Nederland zich een week lang over praktische problemen uit het bedrijfsleven en de industrie. Meer informatie: <http://www.wiskgenoot.nl/eurodiffusie>

bron: Natuur & Techniek/Studiegroep Wiskunde met de Industrie



Euler Society

Op 15 april 2007 wordt de driehonderdste geboortedag gevierd van Leonard Euler (1707–1783). Deze verjaardag zal niet onopgemerkt voorbijgaan, want onlangs is de Euler Society opgericht. Dit genootschap stimuleert wetenschappelijke onderzoek naar leven, werk en invloed van Euler. Deels betreft dit geschiedkundig onderzoek naar de ontwikkeling van de wiskunde in de setting van de Verlichting, de opkomst van Rusland en Pruisen als Europese grootmachten en de groei van koninklijke wetenschappelijke academies. De Euler Society stimuleert verder modern onderzoek dat voortbouwt op Eulers gedachtengoed. Er zullen Engelse vertalingen uitgebracht worden van selecties van zijn geschriften, waaronder brieven en aantekeningen.

Een van de eerste activiteiten is de Euler 2K+2 conferentie, van 4 tot en met 7 augustus 2002, in Rumford, Maine (USA).

bron: <http://www.eulersociety.org>

Math in the Movies I

De *Hollywood Foreign Press Association* heeft vier 'Golden Globe awards' toegekend aan de film *A Beautiful Mind* van Ron Howard, voor de beste film, de beste acteur (Russell Crowe), de beste vrouwelijke bijrol (Jennifer Connelly) en het beste scenario (Akiva Goldsman). De film is genomineerd voor acht Oscars.

A Beautiful Mind is een menselijk drama geïnspireerd op het leven van wiskundige en Nobelprijswinnaar John Forbes Nash jr. en gedeeltelijk gebaseerd op de biografie *A Beautiful Mind* van Sylvia Nasar.

John Forbes Nash jr. heeft het allemaal meegemaakt: van de geugten van het leven als beroemdheid tot de depressie van een roemloos bestaan. John Nash is een wiskundig genie die aan het begin van zijn carrière ongelooflijke ontdekkingen doet. Hij staat op het punt om internationaal door te breken, maar de knappe en arrogante Nash valt diep als zijn geestelijke gezondheid het laat afweten. Nash wordt gedwongen zichzelf terug te vinden. Die weg is hard, pijnlijk en enorm aangrijpend. Na vele jaren van strijd overwint hij zijn ziekte en wint uiteindelijk zelfs de Nobelprijs.

bron: United International Pictures



Keuze voor profielen stabiliseert

In de vierde klas van het vwo is er net als op het havo sprake van een stabiliserend keuzepatroon: 53% kiest voor een maatschappijprofiel en 47% voor een natuurprofiel. Deze cijfers en cijfers betreffende vakkeuze, zittenblijven, en slagen/zakken zijn te vinden in het verslag

van de eerste peiling van schooljaar 2001-2002 in het kader van de monitoring tweede fase, dat staatssecretaris Adelmund onlangs naar de Tweede Kamer heeft gezonden.

De maatschappijprofielen blijven iets meer dan de helft van de leerlingen trekken (53%), de natuurprofielen iets minder dan de helft (47%). Ook kan geconstateerd worden dat op scholen die het onderwijs in de 4e klas in stromen organiseren een hoger percentage leerlingen voor de natuurprofielen kiest dan op scholen die leerlingen meteen hun profiel laten kiezen. Er is enige verschuiving zichtbaar van Natuur en techniek (NT) naar Natuur en Gezondheid (NG): in kleine stapjes loopt NT iets terug (van 21% twee jaar geleden naar 17% nu) en neemt NG iets toe (van 28% twee jaar terug, via 29% vorig jaar naar 30% nu). De verklaring wordt gezocht in de veranderde instroomeisen van het hoger onderwijs. Economie en Maatschappij blijft het populairst: 35% van de leerlingen kiest dit profiel. Cultuur en Maatschappij wordt net zoals in vorige jaren door zo'n 20% van de leerlingen gekozen.

De vroege starters met de tweede fase structuur op het vwo brachten in 2001 hun eerste lichting nieuwe stijlers naar het tweede fase-examen. Die eerste lichting deed het buitengewoon goed: het slagingspercentage was gemiddeld 92,9%, terwijl deze scholen vorig jaar (oude stijl) een slagingspercentage van 90,0% kenden. De late starters hadden met hun laatste lichting een slaagpercentage van 90,8%. Bijna een procent hoger dan vorig jaar. Van deze gezakten oude stijl doet 44% volgend jaar opnieuw examen op de eigen school en 46% probeert een diploma op het voortgezet algemeen volwassenen onderwijs (vavo) of het particulier onderwijs te halen. Over een overstap naar het vavo zijn vaak (regionale) afspraken met een ROC gemaakt. De overstap naar het vavo is in veel gevallen door de scholen zelf gestimuleerd.

De scholen zijn zeer tevreden over de slaagpercentages, maar zijn er niet zeker van of dit centraal examen representatief was en ze twijfelen of ze zelf misschien te voorzichtig zijn geweest met de doorstroom. Kortom, zij weten niet of dit slagingspercentage iets zegt voor de toekomst.

bron: Wiskunde-brief

Math in the Movies II

Vanaf 31 januari van dit jaar draait er nóg een film met een wiskundig motief. Het betreft de door Mick Jagger geproduceerde film *Enigma*. In de hoofdrol staat een jonge wiskundige Dougray Scott, die door de Britse geheime dienst in 1943 wordt ingehuurd om de Enigma-code te breken waarmee Duitse U-boten met hun hoofdkwartier communiceren. Dat lukt hem aanvankelijk, maar snel daarna wordt de Enigma-code veranderd. Is er een verrader in het spel? En wat heeft de mysterieuze verdwijning van zijn collega en ex-geliefde Claire (Saffron Burrows) hiermee te maken? Scenarioschrijver Tom Stoppard, die een Oscar won voor *Shakespeare in love*, bewerkte de bestseller van Robert Harris en de regie was in handen van Michael Apted (*Extreme measures*, *The world is not enough*).

bron: de Filmkrant



Eredoctoraat Brezis in Leiden

Op de 427-ste Dies Natalis van de Universiteit Leiden (8 februari) 2002, is aan Haïm Brezis een eredoctoraat verleend.

Professor Haïm Brezis is hoogleraar wiskunde, in het bijzonder op het gebied van de mathematische analyse en de differentiaalvergelijkingen. Hij werd in 1944 geboren in Frankrijk, studeerde en promoveerde aan Paris VI en kreeg er na zijn promotie een positie aangeboden: eerst als Maître de Conférences, daarna in 1976 als hoogleraar. In 1988 werd hij tevens hoogleraar aan Rutgers University in New Jersey, VS. Sinds 1997 is hij lid van het prestigieuze Institut Universitaire de France.

Het onderzoek van Brezis bevindt zich op het grensgebied van de abstracte analyse en de studie van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen. Daarbij gaat het veelal om vergelijkingen die hun oorsprong hebben in de fysica, de mechanica of de meetkunde. Doel van zijn onderzoek is het ontwikkelen van nieuwe wiskundige methoden, vaak geworteld in abstracte wiskunde zoals functionaalanalyse en topologie, om inzicht te krijgen in deze niet-lineaire vergelijkingen en zo, indirect, in deze concrete problemen.

In de tweede helft van de vorige eeuw heeft er een stormachtige ontwikkeling plaats gevonden in het ontwerpen van wiskundige begrippen en methoden voor de analyse van niet-lineaire problemen. In deze ontwikkeling heeft Brezis een sleutelrol gespeeld. Het ging daarbij zowel om de theorievorming, in het bijzonder het formuleren van de juiste, nieuwe wiskundige problemen, als om het oplossen van deze problemen. Aan beide aspecten heeft hij baanbrekende bijdragen geleverd. Als voorbeeld noemen we zijn werk aan de niet-lineaire *Ginzburg-Landau* vergelijking, die onder meer centraal staat in de studie van vloeibaar Helium, dat heeft geleid tot een omvangrijk stuk nieuwe wiskunde.

Het werk van Brezis heeft overal ter wereld erkenning gekregen, door prijzen, eredoctoraten en lidmaatschappen van Akademies, waaronder de Académie des Sciences in Parijs en de American Academy of Arts and Sciences. Voorts is hij honorair hoogleraar aan de Academia Sinica en de Universiteit van Fudan. Sinds de oprichting in 1997 is Brezis lid van de Wetenschappelijke Adviesraad van het Lorentz Center, het centrum voor wiskunde, natuurkunde, sterrenkunde en informatica gevestigd te Leiden.

Bert Peletier

Nationale Wiskunde Dagen 2002

Op 1 en 2 februari 2002 vonden de Nationale Wiskunde Dagen plaats, net als vorige jaren in het Leeuwenhorst Congres Centrum in Noordwijkerhout. Het was de achtste keer dat dit sterke evenement georganiseerd werd. Het aantal deelnemers overtrof dit jaar voor het eerst ruim de 500, waarvan het grootste deel leraren in het middelbaar onderwijs. De NWD dragen op een essentiële wijze bij aan het versterken van de banden tussen het middelbaar en het hogere onderwijs, iets waaraan de wiskunde grote behoefte heeft.

De NWD worden georganiseerd door het Freudenthal Instituut. De organisatie van de NWD is elk jaar weer een grote uitdaging omdat het programma beoogt tegelijkertijd informatief, inspirerend en onderhoudend te zijn. Ook dit jaar is dat weer ruimschoots gelukt. De vier plenaire lezingen werden dit jaar verzorgd door Rineke Verbrugge, Aad Goddijn, Robin Wilson en Hugo Brandt Corstius.

Rineke Verbrugge (Groningen) vertelde over de epistemische logica, een tak van de logica die zich bezighoudt met redeneren over kennis. Aan de hand van een reeks van voorbeelden liet zij haar publiek met dit gebied kennismaken. Deze voorbeelden hadden een speltheoreti-

sche component, hetgeen tot soms verrassende argumenten aanleiding geeft.

Aad Goddijn (Utrecht) bracht een ode aan de cirkel door te verhalen over de centrale rol die cirkels spelen bijvoorbeeld in de Griekse sterrenkunde, in de gedichten van Dante, in satellietbanen en in de berekening van de daglengte. Een en ander werd met prachtige plaatjes en met een computerprogramma toegelicht.

Robin Wilson (Oxford) belichtte vele aspecten van Lewis Carroll (Charles Dodgson), zijn leven in Oxford, zijn fotografisch pionierwerk, zijn zeer uitgebreide correspondentie, maar ook zijn wiskundig werk, dat naast de algebraïsche meetkunde en de logica ook de studie van bijvoorbeeld 'stemstrategieën' betrof. De presentatie was typisch engels, dus geestig.

Hugo Brandt Corstius (Parijs) is van mening dat beunhazerij in de wiskunde niet mogelijk is, wat haar uniek maakt onder de wetenschappen, en dat wiskunde op haar best is wanneer ze nergens toe dient. Een rij van gemakkelijke meetkundige en literaire puzzels passeerden de revue, wat voor een ontspannen slotakkoord voor de NWD zorgde.

De parallelle sessies waren dit jaar gewijd aan de thema's meetkunde, kans en cultuur, wiskunde in een kritische maatschappij, economie, speelgoed, techniek en de praktijk in het VMBO. Daarnaast was er een parallelle sessie gereserveerd voor enkele losse bijdragen, waaronder twee workshops van (dit jaar Vlaamse) docenten. In deze sessies vonden vele prachtige lezingen plaats. De geïnteresseerde lezer wordt verwezen naar de website van de NWD: <http://www.fi.uu.nl/nwd>

De negende editie van NWD is gepland op 31 januari en 1 februari 2003. U bent van harte uitgenodigd. *Joop Doorman, Frank den Hollander*



Deelnemers van een parallelsessie op zaterdag

OR-Conferentie Lunteren

Voor veel mensen zijn Woudschoten en Lunteren niet meer dan kleine plaatsjes op de hei. Voor een aantal Nederlandse wiskundigen zijn het bedevaartsoorden, waar de jaarlijkse conferentie op hun vakgebied wordt gehouden. Zo convergeren de Nederlandse numerici jaarlijks naar Woudschoten, terwijl de stochastici zich elk jaar in Lunteren verzamelen. Ook de Nederlandse besliskundigen confereerden dit jaar, alweer voor de 27e keer, in conferentiecentrum De Blijde Werelt in Lunteren. De conferentie werd georganiseerd door het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde (LNMB) en telde in totaal zo'n 170 bezoekers, waaronder een vijftigtal promovendi.

Met name de buitenlandse gasten verleenden kleur aan de eerste twee dagen van de conferentie. Zo was er Philippe Toint (Universiteit van Namen) met een overzichtsverhaal over afgeleidevrije optimaliseringsmethoden, William Cook (Princeton University) gaf een overzicht en de laatste records op het gebied van het handelsreizigersprobleem en Ted Hill (Georgia Institute of Technology) lichtte het publiek in over de geschiedenis en de achtergronden van de wet van Benford, met toepassingen bij het opsporen van belastingfraude. Daarnaast waren

er parallelle lezingen van een tiental promovendi en een sessie met vijf-minutenpresentaties van Nederlandse onderzoekers.

De derde dag van de conferentie werd traditiegetrouw georganiseerd in samenwerking met het Nederlands Genootschap voor Besliskunde (NGB) en had als thema 'Capacity Management: How Operations Research models support decision makers'. Daarin werden allerhande verhalen gepresenteerd: hoe Rijkswaterstaat het capaciteitsprobleem op de Nederlandse wegen probeert op te lossen (Henk van Zuylen), hoe de Politie Gelderland omgaat met inzet van personeel bij urgente vragen (telefoontjes aan 112) en calamiteiten (Jos van Deursen), wat de Nederlandse Spoorwegen doet aan hun capaciteitsproblemen (Leo Kroon), hoe Connexxion het vervoer van gehandicapten en bejaarden regelt (Henk Post) en hoe de gemeente Rotterdam omgaat met de planning van de tweede Maasvlakte (Maurits van Schuylenburg).

Hans Melissen

Afscheid van Spinoza

Het was een hele gebeurtenis toen NWO in 1996 de Spinozapremie toekende aan Johan van Benthem, voor zijn programma *Logic in Action*. De opwinding bij de start van zulke grote programma's staat in geen verhouding tot de dikwijls zwijgzame afsluiting. Dat wilde Van Benthem anders doen.

Op 20 december 2001, 5 jaar en twee miljoen gulden later, luidde hij het programma uit met een symposium in de Amsterdamse Agnietenkapel. Drie wijze mannen van buiten schetsten het veld waarbinnen participanten in het programma hun resultaten goed konden laten uitkomen. Hans Kamp (Stuttgart), Joseph Halpern (Cornell) en Peter Gärdenfors (Lund) gaven gedreven inleidingen in de domeinen van logica en taal, logica en rekenen en logica en cognitie. Vooral Hans Kamp, aan wie je goed kunt horen en zien dat hij jarenlang in Leeds heeft gedoceerd, hield een prachtige voordracht: een schijnbaar elementaire behandeling van de taalfilosofie, die een diepgaand inzicht verschafte in de huidige stand van het vak (pragmatics; bestuderen van structure of discourse).

Van de indrukwekkende lijst van deelprojecten die in vijf jaar tijd 186 rapporten en 23 boeken opleverden gaf het middagprogramma een bescheiden doorsnede te zien. Het was flitsend genoeg om een indruk te geven van bruisende activiteit en er ging genoeg mis om er geen gelijke show van te maken. Het programma varieerde van spectaculaire rekenaars met contextuele-informatie-zoek-algorithmes in de tak van computational logic tot kamergeleerden in de modale logica, die met nieuwe benaderingen nieuwe thema's aan de orde stellen (logic in communication). Niet iedereen wist dat even sprankelend over het voetlicht te brengen.

Mijn favoriet was Jan van Eijck die zich heeft toegelegd op de verbreding van de logica, speciaal gericht op de middelbare school. Ik heb een zwak voor de historische benaderingswijze in het boekje *Denkende machines: Computers, Rekenen, Redeneren* over logica en computers dat Jan van Eijck, Jan Jaspers, Jan Ketting en Mac Pauly dit voorjaar publiceren bij de AUP. Voor het hele project *Logic in Action* surfe men naar <http://www.illc.uva.nl/lia>

In zijn slotwoord gaf Johan van Benthem een bijbelse diepgang aan zijn behoefte tot verantwoording: "Gij zult uw talenten niet verspillen". Hij richtte zich in feite heel direct tot NWO-voorzitter Reinder van Duinen. De logica en taalfilosofie die hier wordt bedreven staat in een goede Amsterdamse traditie van Brouwer, Beth en Barth. Een project als dit brengt de traditie in een stroomversnelling. De logica heeft volgens Van Benthem een ontwikkeling doorgemaakt van het analyseren van wat

één wiskundige doet die een stelling bewijst, naar een 'multi-agent perspective'. Logici bestuderen tegenwoordig communicatie geleid door de vraag naar de betekenis van boodschappen tussen meerdere actoren. Het Spinoza-programma heeft een gemeenschap van onderzoekers gecreëerd, van logici die zich durven te storten op analyse van communicatie en social software. Het werk is veel meer dan vroeger interdisciplinair. Een project van deze omvang schept bovendien een eigen dynamiek waaruit weer nieuwe succesvolle projectaanvragen voortkomen.

Gerard Alberts



Foto: Gerard Alberts

Reinder van Duinen (voorgond) en Johan van Benthem tijdens het Spinoza-farewell-symposium

Eredoctoraat Ian Macdonald

De Universiteit van Amsterdam heeft op 8 januari 2002, tijdens de viering van haar 370-ste Dies Natalis, eredoctoraten verleend aan de Engelse wiskundige Ian Macdonald, aan de Nederlandse kunsthistoricus Eddy de Jongh en aan Arthur Chaskalson, president van de Constitutional Court van Zuid-Afrika.

Ian Macdonald (1928) is werkzaam in de zuivere wiskunde, in het bijzonder de groepentheorie, de algebraïsche combinatoriek en de theorie van de speciale functies. Zijn werk wordt gekenmerkt door een hoge mate van oorspronkelijkheid en een welhaast onfeilbare intuïtie voor het stellen van fundamentele onderzoeksvragen. Macdonald is in kringen van wiskundigen beroemd geworden door onder andere zijn boek *Symmetric functions and Hall polynomials* en door de invoering van de Macdonald-polynomen. De impact van deze polynomen, zowel in de wiskunde als in de theoretische natuurkunde, is enorm gebleken.

Ian G. Macdonald begon zijn wetenschappelijke loopbaan in 1957 als docent wiskunde aan de University of Manchester. Tot aan zijn emeritaat in 1987 is Macdonald vele jaren professor geweest aan het Queen Mary College in Londen. Sinds zijn emeritaat is hij wetenschappelijk actief gebleven met publicaties en voordrachten.

bron: website KdV Instituut

Errata decembernummer 2001

Als auteur van de boekbespreking: *Symmetry Analysis of Differential Equations with Mathematica*, Nieuw Archief, september 2001, pagina 296 staat 'Peter J. Olver' vermeld. Dit moet 'Jan Sanders' zijn.

De introductie die voorafgaat aan de afscheidsrede van Floris Takens, *From chaos to early warnings*, Nieuw Archief, december 2001, pagina 317, bevat een storende drukfout. Er staat vermeld dat de workshop 'Global analysis of dynamical systems', gehouden van 25 tot 29 juni 2001 in Groningen plaatsvond. Dit moet het Lorentz-centrum te Leiden zijn.

De eindredactie

van het WG

| WG activiteiten

Algemene Ledenvergadering van het Wiskundig Genootschap

De 225ste Algemene Ledenvergadering van het Wiskundig Genootschap zal gehouden worden te Eindhoven tijdens het Nederlands Mathematisch Congres 2002 op vrijdag 5 april 2002.

1 Agenda

- 1 Opening
- 2 Verslag van de 224ste Algemene Ledenvergadering van het Wiskundig Genootschap
- 3 Mededelingen
- 4 Besprekingen van de jaarverslagen over 2001
 - a. Verslag van de Secretaris
 - b. Verslag van de Penningmeester
 - c. Verslag van de Kascommissie
 - d. Verslag van de Inspecteur der Boekerij
 - e. Verslag van de Publicatiecommissie
 - f. Verslag van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde (NOCW)
 - g. Verslag van de Archivaris
 - h. Verslag van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen (CPAW)
 - i. Verslag van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde
- 5 Begroting 2002
- 6 Vaststelling contributie voor 2003
Het Bestuur stelt voor de contributiebedragen voor 2003 ongewijzigd vast te stellen (gewone leden €70, reciprociteitsleden €50, AIO/OIO's en studenten €25, en gepensioneerden €35).
- 7 Samenstelling Kascommissie 2001
- 8 Samenstelling van het Bestuur
Gedurende de loop van 2001 is A.C. Kik toegetreden tot het bestuur om de PR-portefeuille te versterken. Prof.dr. J.K. Lenstra en dr. M.C. Knaap treden af als bestuurslid; het bestuur stelt prof.dr.ir. O.J. Vrieze voor als nieuw bestuurslid. In dit voorstel is de samenstelling van het bestuur:
 - drs. H. Bakker (RUG/HBO Friesland), contacten met leraren
 - dr. L. Florack (UU), penningmeester
 - prof.dr. E. Looijenga (UU), voorzitter en inspecteur der boekerij
 - prof.dr. J. Molenaar (TUE/UT), industriële wiskunde
 - dr. M.A. Peletier (CWI/TUE), secretaris
 - prof.dr. P. Steenhagen (UL), publicaties
 - dr. M. Vellekoop (UT), contacten met studenten
 - prof.dr.ir. O.J. Vrieze (UM), lid.
- 9 Rondvraag
- 10 Sluiting

2 Ad punt 2 van de Agenda

Hieronder volgen de notulen van de vorige Algemene Ledenvergadering, tezamen met de bijbehorende verslagen die niet eerder gepubliceerd zijn: het financieel verslag over 2000 en het verslag van de kascommissie over 2000.

2.1 Notulen van de 224ste Algemene Ledenvergadering van het Wiskundig Genootschap gehouden tijdens het NMC te Amsterdam op 20 april 2001.

De vergadering werd bijgewoond door 25 leden.

- 1 De voorzitter opent de vergadering om 12.35 uur.
- 2 Het verslag van de 223ste Algemene Ledenvergadering wordt zonder vragen of opmerkingen goedgekeurd.
- 3 De voorzitter deelt mede dat gedurende het jaar 2000 Dirk Struik, erelid van het WG, is overleden. Karma Dajani is gedurende het jaar afgetreden

Deze rubriek is een kroniek van de activiteiten van het Wiskundig Genootschap. Van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan en toekomstige activiteiten worden aankondigd.

als penningmeester; Luc Florack is bereid gevonden haar op te volgen, en het bestuur heeft hem als penningmeester benoemd. Tenslotte heeft de Brouwercommissie een kandidaat voorgesteld voor de Brouwerlezing en -medaille in het vakgebied Mathematische Fysica.

- 4 De verslagen over 2000 worden besproken (de verslagen van de secretaris, de Publicatiecommissie, de inspecteur der boekery, de redactie van de Mededelingen, de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, de archivaris, de Commissie voor Persoonlijke Archiven van Wiskundigen, en van de Commissie Industriële en Toegepaste Wiskunde zijn gepubliceerd in het Nieuw Archief voor Wiskunde (vijfde serie, jaargang 2, nummer 1); de verslagen van de penningmeester en de Kascommissie zijn hieronder opgenomen).

- Het verslag van de Kascommissie is niet ter vergadering uitgereikt. De heer Barning vraagt naar de oorzaak hiervan; de secretaris legt uit dat dit het gevolg is van een misverstand binnen het bestuur. De voorzitter vraagt de heer Barning of hij het oordeel van de Kascommissie mondeling wil toelichten; de heer Barning legt uit dat de wisseling van penningmeesters extra werk voor alle betrokkenen met zich mee heeft gebracht; de commissie keurt het verslag over 2000 goed [noot van de notulist: het schriftelijke verslag is hieronder opgenomen].
- De voorzitter legt uit dat de Publicatiecommissie is opgericht [noot van de notulist: zie het verslag van de Publicatiecommissie, dat hieronder in gecorrigeerde vorm is opgenomen, voor een uitgebreide toelichting].
- Naar aanleiding van het verslag van de NOCW vult de voorzitter aan dat het Wiskids-voorstel inmiddels 450.000 gulden heeft opgehaald uit verschillende bronnen.
- De heer Van Emde Boas suggereert naar aanleiding van het verslag van de CPAW dat deze commissie meer initiatief zou kunnen tonen in het verwerven van collecties. Het bestuur neemt deze suggestie mee.

- 5 De voorzitter meldt dat het boekjaar 2000 is afgesloten met een negatief saldo van 51.640,17 gulden. Voor het komende boekjaar is een verlies begroot van 65.000 gulden. Dit kan men opsplitsen in een deel van 16.500 voor eenmalige investeringen, en een deel van 48.500 in structurele uitgaven.

Het bestuur stelt zich ten doel om voor het boekjaar 2002 een verlies te begroten van maximaal 20.000, en in 2003 een sluitende begroting te presenteren. Voor 2002 wil het bestuur dit bereiken door de investeringen in het Nieuw Archief voor Wiskunde (NAW) sterk te beteugelen, sponsoring te verwerven voor de verhoogde IMU-contributie, verlaging na te streven van de salariskosten die faculteiten ons in rekening brengen voor voor secretariële werkzaamheden en dergelijke, en de ledencontributie in 2002 te verhogen (zie punt 6). Daarnaast is een aantal andere activiteiten te bedenken die op korte of lange termijn financieel voordeel brengen, zoals bedrijfssponsoring, bedrijfslidmaatschappen, en verdere ledenwerving.

Tenslotte meldt de voorzitter dat het plan bestaat om de reservering die gemaakt is voor een adresboek aan te wenden voor het creëren van een website met dezelfde functionaliteit. De heer Van Emde Boas vraagt of dit mogelijk is binnen de privacywetgeving; de secretaris antwoordt dat dit inderdaad mogelijk is door het aantal per keer afgegeven adressen te limiteren.

- 6 De contributie voor 2001 wordt vastgesteld conform het bestuursvoorstel: gewone leden f 120, reciprociteitsleden f 85, AIO/OIO's f 75, en studenten en gepensioneerden f 45.

Voor 2002 stelt het bestuur de volgende bedragen voor: gewone leden € 65, reciprociteitsleden € 45, gepensioneerden € 35, en AIO/OIO's en studenten € 25.

De heer Stegeman suggereert om verschillende tarieven te hanteren voor gepensioneerden van verschillende 'activiteit'. De voorzitter bedankt hem voor de suggestie, maar vraagt zich af hoe zo'n maatregel geïmplementeerd zou kunnen worden. De heer Baaijen merkt op dat de American Mathematical Society (AMS) voor gepensioneerden de contributie vrijwillig maakt. De heer Van Emde Boas suggereert om de contributie vrijwillig te maken na een bepaald aantal jaren van lidmaatschap.

De heer Coster suggereert om het tarief voor gewone leden nog hoger te leggen, op € 70. De voorzitter peilt de steun voor een tarief van € 70 voor gewone leden en € 50 voor reciprociteitsleden; hier lijkt ruime steun voor te

bestaan. Bij het ter stemming gaan van dit voorstel legt de heer Stegeman een stemverklaring af: hij stemt tegen dit voorstel omdat de leden expliciet op de hoogte van voorgestelde bedragen moeten worden gesteld. De secretaris meldt dat de Statuten hierin geen beperking vormen. De stemming wordt opgeschort zolang de discussie nog loopt.

De heer Jansen vraagt zich af of 'slapende leden' door een zo forse verhoging niet in groten getale zullen opzeggen; de voorzitter vraagt hierop aan de heer Stegeman naar diens ervaring bij de verhoging, in het verleden, van 75 tot 120 gulden; de heer Stegeman verklaart dat het aantal opzeggingen toentertijd meeviel.

De heer Van Beckum vindt het bedrag van € 70 te hoog, en noemt het zelfs 'levensgevaarlijk'.

Er wordt gestemd over het volgende voorstel:

gewone leden	€ 70
reciprociteitsleden	€ 50
gepensioneerden	€ 35
AIO/OIO's en studenten	€ 25

Het wordt met een ruime meerderheid (twee stemmen tegen, drie onthoudingen) aangenomen.

- 7 De penningmeester wordt gedechargeerd; de voorzitter bedankt de heren Barning en Beukers voor hun inspanningen, en benoemt beide heren tot de Kascommissie 2001.

- 8 De voorzitter deelt mede dat Ger Koole als mede-hoofdredacteur van het NAW is benoemd en dat Derk Pik is aangesteld als eindredacteur. Chris Zaal heeft zijn ontslag ingediend als hoofdredacteur van Pythagoras; er is een commissie ingesteld die op zoek is naar een hoofdredacteur en een eindredacteur.

De heer Van Emde Boas vindt dat het Nieuw Archief er enorm op vooruit is gegaan en complimenteert hiermee het bestuur. De vergadering valt bij met applaus.

De heer Barning vraagt in welke vorm de UvA Pythagoras sponsort; dit staat namelijk vermeld in het colofon. De voorzitter meldt dat deze sponsoring de vorm heeft van salariskosten van Chris Zaal en mogelijk andere medewerkers.

- 9 De voorzitter legt uit dat er een WG-werkgroep Industriële en Toegepaste Wiskunde bestaat, en dat er tevens een stichting is met dezelfde naam en met dezelfde bestuurders. Het bestuur van het WG stelt voor om een Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde (ITW) in te stellen; het initiële ledenbestand hiervan zal bestaan uit die leden van het WG die tevens contribuanten zijn van de Stichting.

De voorzitter merkt voor de volledigheid op dat er geen sprake is van een volledige opsplitsing van het WG in secties; de oprichting van de Sectie ITW heeft geen consequenties voor leden van het WG die geen contribuanten zijn van de Stichting ITW. Het ITW-Nieuws blijft bestaan; de Sectie ITW zal de verantwoordelijkheid op zich nemen voor het Najaarssymposium, zal zich sterk maken voor de voortzetting van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie, en zal lidmaatschap nastreven van ICIAM.

De heer Alberts vraagt of hij na instelling van deze sectie zal blijven betalen voor ITW-Nieuws; de voorzitter bevestigt dat dit het geval is. Daarnaast merkt de heer Alberts op dat er geruime tijd gesproken is over een mogelijke fusie van de redacties van ITW-Nieuws en het NAW; hij vraagt wat de status is van deze fusie. De voorzitter antwoordt dat het gepast bedienen van de 'buitenleden' van de Stichting ITW (de contribuanten die niet tevens lid zijn van het WG) op dit moment een onoverkomelijk bezwaar lijkt te zijn. Het bestuur staat echter open voor alle voorstellen op dit vlak. De Sectie ITW wordt met algehele instemming opgericht.

- 10 De voorzitter legt uit dat er geen bestuursleden als zodanig aftreden; hij is echter als voorzitter aan het einde van zijn zittingstermijn gekomen. Het bestuur stelt voor om Eduard Looijenga te benoemen als voorzitter. Dit voorstel wordt bij acclamatie aangenomen. Hiermee is de samenstelling van het bestuur:

- drs. H. Bakker (RUG/HBO Friesland), contacten met leraren
- dr. L. Florack (TUE), penningmeester

- drs. A.C. Kik (CWI), PR
- prof.dr. E. Looijenga (UU), voorzitter
- prof.dr. J. Molenaar (TUE/UT), industriële wiskunde
- dr. M.A. Peletier (CWI/TUE), secretaris en inspecteur der boekerij
- prof.dr. P. Stevenhagen (UL), publicaties
- dr. M. Vellekoop (UT), contacten met studenten
- prof.dr.ir. O.J. Vrieze (UM), lid.

Het bestuur zal bij de volgende bestuursvergadering een vice-voorzitter uit zijn midden kiezen.

Op dit moment wordt de vergadering kort onderbroken; Mariette Knaap spreekt Jan Karel Lenstra toe en bedankt hem voor al zijn inspanningen als voorzitter.

- 11 De heer Barning vraagt naar de status van Luc Florack als penningmeester: hij is immers niet door de vergadering benoemd. De voorzitter antwoordt dat het bestuur de mogelijkheid heeft om, in gevallen waarin de Statuten niet voorzien, naar eigen goeddunken te handelen. Voor het handelen in geval van tussentijds wegvallen van een bestuurslid wordt in de Statuten geen werkwijze gesteld, en het bestuur heeft daarom op eigen gezag Luc Florack als penningmeester benoemd.
- 12 De voorzitter sluit de vergadering om 13.20 uur.

2.2 Financieel verslag 2000 en Begroting 2001

Het WG heeft 1292 leden, waarvan 1231 betalend en 61 gratis (peildatum: 1 april 2000). Alle vermelde bedragen zijn in guldens tenzij uitdrukkelijk anders vermeld. De omrekenfactor euro/gulden is 2.20371.

Toelichting op de balans en verlies- en winstrekening 2000

- 1 De effectenportefeuille is per ultimo 2000 als volgt samengesteld: 41,1528 aandelen Rolinco à €122,00: €5020,64, d.i. 11.064,03 gulden.
- 2 Deposito's per ultimo 2000: ABN-AMRO bankbrief 94/01, 7.25%, koerswaarde 101%, (25.246,30 gulden).
- 3 Epsilon Uitgaven betaalde in 2000 1280,00 aan aflossing. De deelname van het WG in Epsilon Uitgaven is hierdoor gedaald van 20.020,00 naar 18.740,00.
- 4 Er is in voorgaande jaren 20.000,00 gereserveerd ten bate van het adresboekje. Deze reserve is in 2000 niet verhoogd, omdat de kosten van toekomstige productie dit bedrag naar alle waarschijnlijkheid niet zullen overstijgen.
- 5 Het WG heeft namens Pythagoras een aantal rekeningen betaald tot een totaalbedrag van 12.810,31. Het WG heeft namens Pythagoras een aantal rekeningen geïnd tot een totaalbedrag van 5020,00. Het verschil à 7790,31 is eenmalig verdisconteerd met de subsidie van 5000,00 over het boekjaar 2000, waardoor de overbrugging per saldo is toegenomen met 2790,31 van 20.595,62 tot 23.385,93.
- 6 Een aantal uitgaven ten laste van 2000 met een totaal van 10.228,38 heeft betrekking op het voorafgaande boekjaar (zie tabel). Deze keren dan ook in de begroting voor 2001 niet terug. Een aantal uitgavenposten ten laste van 2000 met een totaal van 21.861,86 is niet in de begroting van het voorgaande jaarverslag opgenomen. Daarnaast is de investering in de Vijfde Serie van het NAW 8.753,35 hoger uitgevallen dan het in 1999 daarvoor gereserveerde bedrag van 25.000,00. Hiertegenover staan hogere inkomsten uit contributies, NAW-abonnementen en advertenties (15.112,88 hoger dan begroot). Al deze constatering verklaren voor een belangrijk deel de discrepantie tussen de begroting voor 2000 en de werkelijke uitgaven.

Toelichting op de begroting voor 2001

De begroting voor 2001 is een raming gebaseerd op feitelijke inkomsten en uitgaven over het boekjaar 2000. De contributietarieven blijven in 2001 ongewijzigd. Waar significante verschillen optreden tussen geraamde inkomsten en uitgaven voor 2001 en de feitelijke zoals die betrekking hebben op het huidige boekjaar wordt hieronder enige toelichting gegeven.

1. Inkomsten uit contributies (incl. donaties SDF) voor 2001 zijn behoorlijk geraamd op basis van een ongewijzigd ledental. Hetzelfde geldt voor inkomsten uit NAW-abonnementen.

BALANS EIND 2000

BATEN		LASTEN	
betaalrekeningen	61.013,09	openstaande rekeningen	146.509,00
spaarrekeningen	326.099,51	reservering adresboek	20.000,00
deposito's	25.246,30	bijzondere reserve	24.000,00
effekten	11.064,03		
NAW adverteerders	5.902,65		
Pi sponsors	41.892,20		
deelname			
Epsilon Uitgeverij	18.740,00		
overbrugging			
Pythagoras	23.385,93		
		kapitaal eind 2000	322.834,71
	513.343,71		513.343,71

Het eigen vermogen is over het boekjaar 2000 (na koerswinstcorrectie) met 51.640,17 afgenomen:

WINST- EN VERLIESREKENING 2000

kapitaal eind 1999	375.335,97
koerswinst	-861,09
	374.474,88
saldo	-51.640,17
kapitaal eind 2000	322.834,71

ONTVANGSTEN 2000 EN BEGROTING 2001

	begroot 2000	werkelijk	begroot 2001
contributies en donaties SDF	110.000,00	117.655,45	117.000,00
abonnementen Indag. Math.	3.000,00	2.080	2.000,00
renten en legaten	17.000,00	16.395,71	15.000,00
KNAW subsidie IMU	6.500,00	6.848,69	7.000,00
recensies	300,00	0,00	0,00
leden EMS	1200,00	1085,00	1300,00
abonnementen NAW	12.000,00	16.818,38	16.700,00
advertenties NAW	13.000,00	15.639,05	16.000,00
uit bijzondere reserve tbv. Pi	10.000,00	10.000,00	0,00
<i>subtotaal</i>	173.000,00	186.522,28	175.000,00
externe subsidies tbv. Pi		121.892,20	
totaal		308.414,48	

2. Door de afname van het eigen vermogen moet rekening gehouden worden met een lagere renteopbrengst. Koerswinst uit effekten is begroot op nul.
3. De inkomsten uit de KNAW subsidie tbv. het lidmaatschap van de IMU is geraamd op basis van feitelijke subsidiëring in voorgaande jaren.
4. De begroting à 12.000,00 voor NAW-investeringen heeft betrekking op implementatie van ConTeXt macro's (7.000,00) en ondersteuning (5.000,00) en is eenmalig. De begroting à 4.500,00 voor de opzet van de WG website is eveneens eenmalig.
5. De raming voor salariskosten voor het secretariaat boekbesprekingen heeft betrekking op een heel jaar. Over het boekjaar 2000 is slechts salaris over

UITGAVEN 2000 EN BEGROTING 2001

	begroot 2000	werkelijk	begroot 2001
MWG/NAW 1999	0,00	608,06	0,00
restitutie foutieve boekingen 1999	0,00	790,31	0,00
MWG, druk	9.000,00	4.797,42	5.000,00
MWG, porti	10.000,00	7.056,21	7.500,00
MWG, DTP en agenda	5.000,00	5.462,31	5.500,00
NAW, druk en DTP	38.000,00	46.044,69	47.000,00
NAW, porti	20.000,00	13.041,73	13.500,00
NAW, ontwerp en illustraties	0,00	8.361,40	8.500,00
NAW, promotie	0,00	4.871,11	5.000,00
NAW, investering	0,00	8.753,35	12.000,00
NAW, salaris red./secr. 1999	0,00	6684,96	0,00
NAW, salaris red./secr.	47.700,00	47.884,98	50.000,00
NAW, kosten red./secr.	5.000,00	3.794,54	4.000,00
NAW, salaris/kosten boekbespr.	5.900,00	6.774,50	13.500,00
WG, secretariaat	12.000,00	12.547,00	13.000,00
website	2.000,00	0,00	4.500,00
abonnementen Indag. Math.	3.000,00	3.000,00	3.000,00
WG, bestuurskosten	2.000,00	3.042,68	3.000,00
WG, promotie	0,00	1.206,00	0,00
WG, logo	0,00	3.518,30	0,00
WG, bestuursverzekering	0,00	0,00	600,00
WG, diversen	0,00	1.301,50	2.250,00
afdracht SDF	2.000,00	1958,69	2.000,00
najaarssymposium	1.500,00	1964,46	2.000,00
wintersymposium 1999	0,00	2.145,05	0,00
wintersymposium	3.500,00	3.550,45	3.500,00
subsidies	20.000,00	15.000,00	15.000,00
Brouwercommissie	0,00	166,00	500,00
IMU, contributie	6.500,00	6.848,69	12.150,00
IMU, council meetings	0,00	980,23	1.000,00
EMS, contributie	3.300,00	3.437,79	3.500,00
EMS, council meetings	0,00	1.362,42	1.000,00
kaleidoscoopdag	1.000,00	0,00	0,00
betalingsverkeer	500,00	1112,72	1.500,00
Kamer van Koophandel	0,00	94,90	0,00
lidmaatschappen	400,00	0,00	0,00
subtotaal	198.300,00	228.168,45	240.000,00
uitgaven tbv. Pi		131.892,20	
totaal		360.054,65	

een half jaar in rekening gebracht.

6. Er is een bestuursverzekering afgesloten, jaarpremie: 600,00.
7. De IMU contributie is verhoogd van 4800 CHF naar 8400 CHF, d.i. ca. 12.150,00 bij de huidige wisselkoers.
8. Werkzaamheden tbv. de website worden in 2001 in rekening gebracht. Er is voor 2001 een extra begroting van 2.500,00 bovenop de voor 2000 geraamde 2000,00 opgenomen.
9. In de begroting à 1.500,00 voor betalingsverkeer is rekening gehouden met iets hogere kosten tgv. de invoering van de euro.

Het verschil tussen inkomsten en uitgaven zoals begroot voor 2001 bedraagt 65.000 negatief.

Tot slot van het financieel verslag

Het saldotekort over het boekjaar 2000 bedraagt (na koerswinstcorrectie) 51.640,17. Dit is deels het gevolg van van eenmalige investeringen in de vernieuwde, Vijfde Serie van het Nieuw Archief voor Wiskunde (eenmalige uitgave 8.753,35) en het nieuwe WG logo (eenmalige uitgave 3.518,30) en van extra uitgaven betrekking hebbend op het voorafgaande boekjaar (10.228,38). Het totaal van deze eenmalige uitgaven bedraagt 22.500,03. De overige uitgavenposten zijn min of meer structureel van aard. Na verrekening voor deze eenmalige uitgaven toont het boekjaar 2000 dus een structureel tekort van 29.140,14.

Het tekort op de begroting voor 2001 bedraagt 65.000,00. Dit is deels ($\pm 45\%$) het gevolg van bovengenoemd structureel verschil in feitelijke inkomsten en uitgaven over het huidige boekjaar, welk als maatstaf is gehanteerd voor de begroting, en deels het gevolg van de verhoogde IMU contributie ($\pm 10\%$). Voorts drukken de voor 2001 geraamde eenmalige investeringen in het NAW en de WG website (samen $\pm 25\%$) op de begroting. Het resterende deel ($\pm 20\%$) is deels het gevolg van behoedzame ramingen van inkomsten en uitgaven en dus onzeker, maar wel grotendeels structureel van aard. *L.M.J. Florack, penningmeester*

Bijlage: Pi in de Pieterskerk

Het WG heeft het financieel beheer van het evenement 'Pi in de Pieterskerk' op zich genomen. Alle inkomsten en uitgaven zijn geboekt in het huidige boekjaar. Het WG draagt zelf 10.000,00 bij uit de bijzondere reserve. Dit bedrag tezamen met de externe subsidies (121.812,20) is in balans met de voor dit evenement gepleegde uitgaven (131.812,20). De financiële afwikkeling van het evenement heeft dus per saldo geen invloed op de balans anders dan door afname van de bijzondere reserve (en dus van het eigen vermogen) met de eigen bijdrage.

2.3 Verslag van de Kascommissie

De Kascommissie verklaart hierbij het financiële verslag van de penningmeester over het boekjaar 2000 te hebben gecontroleerd. Na inzage van de boeken, en bestudering van de gevoerde boekhouding, kon worden geconstateerd dat het verslag een getrouw beeld geeft van de financiële situatie van het Wiskundig Genootschap.

Wel dient nog te worden aangetekend dat de controle voldoende van aard en omvang is geweest. Dit niettegenstaande het feit dat deze in een vrij korte tijdspanne heeft moeten plaatsvinden door de latere gereedheid van de cijfers, als gevolg van uitbreiding van de financiële administratie en daar bovenop de wisselingen van het penningmeesterschap in de loop van het boekjaar. *F.J.M. Barning, F. Beukers*

3 Ad punt 4 van de Agenda**3.1 Verslag van de Secretaris**

3.1.1 Verslag van het 37ste Nederlands Mathematisch Congres Het 37ste Nederlands Mathematisch Congres werd op 19 en 20 april 2001 gehouden aan de Vrije Universiteit Amsterdam. Het congres werd gezamenlijk georganiseerd door het CWI en de Divisie Wiskunde en Informatica van de Faculteit der Exacte Wetenschappen van de Vrije Universiteit.

Congresorganisatie: Herman te Riele, André Ran, Rien van Veldhuizen, Nada Mitrovic, Wilmy van Ojik, Mark Peletier, Maryke Titawano en Marcel van de Vel.

Hoofdvoordrachten: Eric Verheul (Recente ontwikkelingen in publieke sleutel cryptografie), Lex Schrijver (Eigenvalues and embeddings of graphs), Joost Hulshof (Travelling wave solutions of a combustion-radiation model) en Aad van der Vaart (Bayesiaanse statistiek, zonder emoties).

Speciale voordrachten: Jacob Korevaar (A century of complex Tauberian theory), Donald Saari (Using symmetry to resolve old decision paradoxes) en Mark van Hoey (Factoring polynomials and 0-1 vectors).

Minisymposia: Cryptografie, Discrete Wiskunde, Analyse en Toepassingen, Computer Algebra, Numerieke Analyse, Financiële Wiskunde, Systeem- en Regeltheorie met algebra, Bedrijfs-wiskunde, Wiskunde Toegepast, Wiskunde in de Tweede

ONTVANGSTEN PI IN DE PIETERSKERK

sponsor	bedrag
Prins Bernhard Cultuurfonds	2.000,00
EIDMA	5.000,00
MRI	5.000,00
KNAW	5.000,00
CWI	5.000,00
Stieltjes Instituut	5.000,00
Leiden Bedrijfsbureau	5.000,00
Leids Universiteits Fonds	5.000,00
Universiteit Leiden, Fac. WN	5.000,00
ANTS	7.000,00
H.M. Vaderlands Fonds	10.000,00
VSB	10.000,00
WTN	20.000,00
NWO	25.000,00
Spinoza-premie H.W. Lenstra	7.892,20
<i>subtotaal</i>	<i>121.892,20</i>
Wiskundig Genootschap	10.000,00
totaal	131.892,20

UITGAVEN PI IN DE PIETERSKERK

uitgaven	bedrag
kleine uitgaven	703,59
π -diner Beukenhof	3.883,00
C. Bakkum (beeldhouwster)	55.938,90
K. Molenaar (vormgeefster)	1.165,15
Pieterskerk	22.912,38
onthulling π -steen	1.074,00
Party Support Leyde (catering)	34.556,15
K. Molenaar (vormgeving programmaboekje π -dag)	4.022,90
Drukkerij Bevrijding (druk programmaboekje π -dag)	4.700,00
Drukkerij Bevrijding (uitnodigingskaarten π -dag)	891,61
F. Katscher (biograaf, onkostenvergoeding)	1.174,27
fotoreportages	870,25
totaal	131.892,20

muziekweergave

- T. Althuis, *Wiskundige structuren in atonale muziek*

3.1.3 Verslag van de Kaleidoscoopdag De Kaleidoscoopdag is in 2001 niet gehouden.

3.1.4 Verslag van het Wintersymposium Het Wintersymposium werd gehouden op 5 januari 2002, en was gewijd aan het thema 'Winnen met Wiskunde'. De sprekers waren

- Dr. H. Monsuur (KIM), *Van sociale tot strategische netwerken*
- Prof.dr. G. Sierksma (RUG), *Teamsamenstelling als Logistiek Fenomeen*
- Drs. R. Bosch (KMA), *Win-Win procedures voor verdelingen*.

3.1.5 Vernieuwing van de website In 2001 is de website van het Wiskundig Genootschap, <http://www.wiskgenoot.nl>, opnieuw vormgegeven, en zal in de loop van 2002 bij het CWI worden gehuisvest, als onderdeel van een sponsorovereenkomst met het CWI.

3.1.6 Leden Per 1 januari 2002 heeft het WG in totaal 1381 leden, waarvan 91 gratis. Op 8 mei 2001 is het erelid Jaap Seidel overleden. Ereleden zijn Van der Blij, De Bruin, Coxeter, Korevaar, en Zaanen.

3.2 Verslag van de Penningmeester**3.3 Verslag van de Kascommissie****3.4 Verslag van de Inspecteur der Boekerij**

In 2001 is een totaal van 130 nieuwe werken aan de boekencollectie toegevoegd, voornamelijk bestaande series monografieën, dissertaties en rapporten. Deze werken werden als geschenk of in het kader van ruil ontvangen.

Aan de tijdschriftencollectie zijn de volgende titels toegevoegd:

1. Boletín Asociación Matemática Venezolana
Ruïl met: Asociación Matemática Venezolana, Caracas, Venezuela.
2. Bulletin of the Faculty of Science and Technology, Hirotsaki University
Ruïl met: Faculty of Science and Technology, Hirotsaki University, Japan.
3. Cadernos de Matematica
Ruïl met: Biblioteca 'Prof. Achille Bassi', ICMC-Universidade de São Paulo, São Paulo, Brazilie.
4. Nonlinear Functional Analysis and Applications (NFAA)
Ruïl met: Department of Mathematics, Kyungnam University, Korea.

Mark Peletier

3.5 Verslag van de Publicatiecommissie

De publicatiecommissie werd in de herfst van 2000 ingesteld. Zij adviseert het bestuur inzake het publicatiebeleid en de aanstelling van hoofdredacties, en zij adviseert de hoofdredacties inzake alle organisatorische, financiële en technische aspecten betreffende de totstandkoming van de publicaties. De hoofdredacties zijn verantwoordelijk voor de inhoud van de publicaties; het bestuur draagt de algehele en in het bijzonder financiële verantwoordelijkheid.

De commissie bestond op 1 januari 2001 uit Luc Florack, Nicky Hekster, Jan Karel Lenstra (voorzitter), Peter Steenhagen, Ferdinand Verhulst en Michiel Vermeulen. In de loop van het jaar trad Ferdinand Verhulst uit de commissie en trad Arjen Vestjens toe. De commissie vergaderde vijf maal. Zij hield zich vooral bezig met het scheppen van voorwaarden die nodig zijn voor het voortbestaan van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* in de nieuwe opzet en van *Pythagoras*, sinds enkele jaren een uitgave van het WG.

Van het NAW verscheen in 2001 deel 2 van de vijfde serie, bestaande uit vier nummers en 384 bladzijden. De hoofdredactie bestaat uit Ger Koole en Chris Zaal; eindredacteur is Derk Pik. In 2002 is de opvolging van Chris Zaal aan de orde; na zijn terugtreden als hoofdredacteur zal hij in de rol van uitgever bij de WG-publicaties betrokken blijven. Het NAW is in de huidige opzet een te kostbare operatie.

Van *Pythagoras* verschenen in 2001 zes nummers van elk 32 bladzijden.

Fase vwo/havo en Geschiedenis en Maatschappelijke Functie van de Wiskunde (naar aanleiding van het overlijden van Dirk Struik).

Aantal voordrachten tijdens de Minisymposia: 51.

Aantal aangemelde voordrachten: 18.

Aantal deelnemers: ca. 250. Herman te Riele, voorzitter organisatiecommissie

3.1.2 Verslag van het Najaarssymposium Op 20 december 2001 vond het najaarssymposium van het Wiskundig Genootschap plaats aan de TU Eindhoven. Thema was dit jaar 'Wiskunde en Muziek'. De organisatie van het symposium was in handen van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde (ITW).

De sprekers waren

- C. Nederveen, *Akoestische berekeningen aan houtblaasinstrumenten*
- S. Polak, *Praktisch nut en twijfels*
- A. Goddijn, *Hoe klinkt $5^{1/4}$*
- R. Aarts, *Signaalbewerkingsalgoritmes voor de verbetering van*

Hoofd- en eindredacteur Chris Zaal werd opgevolgd door hoofdredacteur Marco Swaen en eindredacteur Alex van den Brandhof. *Pythagoras* is financieel gezond, mits derden (in concreto universitaire wiskunde-instituten) bereid blijven substantieel bij te dragen in de kosten van hoofd- en eindredactie.

Op verzoek van de publicatiecommissie bracht Sieb Kemme eind 2000 een 'Organisatieadvies NAW' uit. De commissie heeft op basis daarvan een notitie over de publicatieorganisatie en -processen opgesteld en de uitvoering van maatregelen ter ondersteuning van de financiële positie van het NAW ter hand genomen. Naast maatregelen die eerder op bestuursniveau liggen, zoals de ledenwerving en de (inmiddels gerealiseerde) contributieverhoging, gaat het hierbij om:

- verlening van een institutioneel lidmaatschap aan instellingen die het NAW, *Pythagoras* of het WG anderszins in materiële zin ondersteunen (waaronder UL, RUG, UvA, VU en CWI),
- werving van bedrijfsleden,
- werving van advertenties,
- beperking van het aantal pagina's van het NAW, en
- een efficiënter abonneebeheer.

Uitvoering van deze maatregelen zal, naar overtuiging van de commissie, volgens plan binnen een jaar het NAW een stevige financiële grondslag geven.

Tenslotte vermelden we het overleg tussen het NAW en het *ITW Nieuws* over een vergaande redactionele samenwerking. Dit lijkt een goed middel om met een minimale inspanning de huidige abonnees op *ITW Nieuws* die (nog) geen lid van het WG zijn te blijven bereiken.

Jan Karel Lenstra

3.6 Verslag van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde

3.6.1 Samenstelling Commissie In de samenstelling van de NOCW is eind 2001 verandering gekomen. J. van Lint zal als vertegenwoordiger van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars (NVvW) worden opgevolgd door M. Kollenveld, de huidige voorzitter van de NVvW. R. Bosch, die het bestuur van het WG vertegenwoordigde, zal worden opgevolgd door een ander bestuurslid. H. Broer zal de kamer wiskunde van de Vereniging van Universiteiten gaan vertegenwoordigen. A. van Streun gaat de didactiek van het wiskundeonderwijs in de NOCW inbrengen. In 2002 is de samenstelling van de commissie als volgt: R. van Asselt, F. Bosman (secretaris), H. Broer, J. v.d. Craats, J.G.M. Donkers, F. Goffree, T. Goris, C.P. Hoogland, W. Kleijne, M. Kollenveld, J.M. Notenboom (penningmeester), D. Siersma (voorzitter), A. van Streun, H. Verhage en een nog te benoemen bestuurslid van het WG.

3.6.2 Activiteiten in het algemeen De voorzitter heeft (in samenwerking met praktisch alle instituten en organisaties die in Nederland iets met onderwijs in wiskunde te maken hebben) in 2001 wederom veel tijd gestoken in het project Wiskids. Na aanvankelijk afwijzing door AXIS is met financiering uit andere hoek het project in 2001 van start gegaan. Het bestaat uit een samenhangend geheel van deelprojecten die in samenwerking worden uitgevoerd door de volgende partners: Ratio (KUN); Stichting Toegepaste Wiskunde (STW), Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO) en NVvW met de internetsite Wiskunde in Perspectief; Stichting Vierkant voor Wiskunde, Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade; Pythagoras en het Freudenthal Instituut (FI). De lange termijn doelstelling van Wiskids is de belangstelling voor wiskunde onder middelbare scholieren te vergroten. Het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen (OC&W) levert aan het geheel een financiële bijdrage. De NOCW heeft in 2001 wederom veel aandacht besteed aan de bevoegdheidseisen voor de zijinstroom van wiskunde docenten. Over deze materie zijn rapporten verschenen en aanbevelingen gedaan. De beleidsnotitie uit 2000 van de NVvW: "Wiskunde in het nieuwe Hoger Beroepsonderwijs" heeft in 2001 geleid tot het indienen van een projectvoorstel met de titel Wisnet-HBO bij de Stichting SURF. Dat projectvoorstel werd niet gehonoreerd. Binnen de NOCW is intensief overlegd over de gang van zaken rond de eisen die gesteld worden aan de inhoud van de wiskunde in de verschillende profielen. In het veld ontstaat een groeiende onvrede over de omvang en het niveau. De commissie ziet het als één van haar taken om de discussie over 'het niveau' concreter en zinvoller te maken.

3.6.3 Werkgroep Recreatieve Wiskunde De werkgroep heeft als zodanig dit jaar niet gefunctioneerd. De leden hebben dit jaar weer veel tijd geïnvesteerd in de in punt 2 genoemde activiteiten.

3.6.4 Nederlandse Wiskunde Olympiade Het Ministerie van OC&W heeft zich in 2001 verder teruggetrokken uit de activiteiten van de gezamenlijke Olympiades. Het subsidiebedrag voor die activiteiten is wel verhoogd, ook de Aardrijkskunde Olympiade is toegevoegd. Specifiek voor de Wiskunde Olympiade zijn er verder bijdragen geleverd door Akzo Nobel, Educatieve Partners Nederland, Natuur en Techniek, Shell, het WG, de TUE en de Citogroep. Aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade in 2001 hebben bijna 1800 leerlingen meegedaan van ruim 160 scholen. Dat is een flinke daling in de belangstelling. Een zelfde verschijnsel doet zich voor bij de andere Olympiades. Als één van de belangrijkste oorzaken wordt de hoge werkdruk door de tweede fase, zowel voor leerlingen als docenten, genoemd. De scholenprijs is gewonnen door de Scholengemeenschap Pantarijn in Wageningen. Ruim 110 leerlingen hebben meegedaan aan de tweede ronde die, zoals gebruikelijk, in september in Eindhoven is gespeeld. Ook dit jaar werden leerlingen, die een hoge score in de Kangoeroe wedstrijd behaalden, uitgenodigd. De prijsuitreiking heeft op 2 november 2001 plaatsgevonden in Eindhoven.

3.6.5 Internationale Wiskunde Olympiade In 2001 zijn er, net als in 2000, twee bronzen medailles gewonnen bij de Internationale Wiskunde Olympiade in Washington DC. Er werd dit jaar één eervolle vermelding verdiend. Aan elk van de twee medaillewinnaars is een prijs van fl. 500,- uitgereikt. De NOCW houdt daarmee de traditie van een geldprijs voor elke winnaar van een medaille bij de Internationale Wiskunde Olympiade, in stand.

3.6.6 Wiskunde A-lympiade en Wiskunde-B-dag De A-lympiade vond in 2001 voor de 13e keer plaats. Bijna 100 scholen deden met een team mee, vaak in het kader van een praktische opdracht. De belangstelling uit het buitenland nam toe. Er deden teams mee uit de Antillen en Aruba, Denemarken (al weer voor het 5e jaar) en Duitsland. In dezelfde geest als de A-lympiade is de wiskunde-B-dag opgezet: een wedstrijd tussen schoolteams door middel van internet. Deze vond in 2001 voor de tweede keer plaats. De begeleiding van beide activiteiten is in handen van H. v.d. Kooij van het FI.

3.6.7 Kangoeroe Wedstrijd In 2001 bedroeg het aantal deelnemers bijna 35.000. De wedstrijd wordt georganiseerd voor de lagere klassen van het voortgezet onderwijs met drie verschillende versies opgaven. De logistieke organisatie en administratie is in handen van de Citogroep. De proef die dit jaar is genomen met de hoogste klassen van het primair onderwijs heeft weinig resultaten opgeleverd. De deelname had een zo kleine omvang dat er in 2002 geen aparte versie voor het primair onderwijs zal worden ontwikkeld. De pensionering van J. Donkers heeft geleid tot de verhuizing van de Kangoeroe van Eindhoven naar Nijmegen. Leon van de Broek is bij de KUN aangesteld als projectleider Kangoeroe.

3.6.8 Vierkant Het secretariaat van de Stichting Vierkant is per 1 januari 2001 verhuisd naar het Mathematisch Instituut van de Universiteit Leiden. De zomerkampen, beide in augustus, telden 91 deelnemers in totaal, dat is een stijging van 20%. In 2001 werden twee nieuwe Doeboeken uitgegeven. Verder werd er gestart met de uitgave van een nieuwe reeks werkboeken voor de groepen 6 t/m 8 van de basisschool onder de titel Wiskidschriften. Daarvan zijn er inmiddels vier verschenen. Als onderdeel van Wiskids is het project Wiskundeclubs van start gegaan.

3.6.9 Nationale Wiskunde Dagen Deze hebben begin februari plaats gevonden, als vanouds in Noordwijkerhout. 500 deelnemers, merendeels docenten uit het voortgezet onderwijs, hebben beide dagen bijgewoond. De thema's waren: wiskunde om de wiskunde, wiskunde en geschiedenis, wiskunde en kunst, wiskunde en biologie, wiskunde en elektronisch rekenen en wiskunde onder handbereik. Het volledige programma is te vinden op de internetsite van het Freudenthal Instituut. Docenten uit de onderbouw en het VMBO blijken ondervertegenwoordigd.

In 2002 zal geprobeerd worden meer docenten uit deze groep aan te trekken door een extra thema aan te bieden.

3.6.10 Pythagoras Ook in 2001 is de belangstelling voor Pythagoras weer gestegen. Dit is de verdienste van de enthousiaste redactie. Oud-Olympiadewinnaars blijven daarin een belangrijke rol spelen.

3.6.11 Universitaire Wiskunde Competitie Deze ladderwedstrijd telt jaarlijks vier edities, die verschijnen in het Nieuw Archief voor Wiskunde en op een internetsite. De wedstrijd staat open voor Nederlandse en Vlaamse studenten. De beste inzending per editie krijgt de editieprijs ter waarde van 100 Euro. Degene die aan het eind van een editie boven aan de ladder staat krijgt de ladderprijs, eveneens 100 Euro. Aan de eerste drie edities deden 16 studenten mee, de vierde editie van 2001 loopt nog. *F. Bosman, secretaris NOCW*

3.7 Verslag van de Archivaris

Het archief van het Wiskundig Genootschap was in 2001 in goede handen bij het Rijksarchief in de Provincie Noord-Holland, Kleine Houtweg 18, 2012 CH Haarlem.

Het archief is ontsloten via de uitgebreide "Inventaris van de archieven van het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven', opgericht te Amsterdam in 1778, (1782) 1798 - 1968 (1991)" door S. Neugebauer (Haarlem, 1995). *M. A. Peletier, archivaris WG*

3.8 Verslag van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen

De archieven onder beheer bij de CPAW, zijn, met uitzondering van Arch. 1 en Arch. 13, geplaatst bij het Rijksarchief in de Provincie Noord-Holland, Kleine Houtweg 18, 2012 CH Haarlem. Aldaar zijn zij voor onderzoek beschikbaar.

Het betreft de volgende archieven: Arch. 2 (H.B.A. Bockwinkel (1881–1960)), Arch. 3 (R. Lijsman), Arch. 4 (G. Röhrman), Arch. 5 (W.H.J. van der Stok), Arch. 6 (H. Nyon), Arch. 7 (L.W. Nieland (1901–1945)), Arch. 8 (T. van Aardenne-Ehrenfest (1905–1984)), Arch. 8(vervolg) (C.C.J. de Ridder en P. Ehrenfest jr. (1880–1933)), Arch. 9 (D.N. van der Neut (1904–1985)), Arch. 10 (een 60-tal foto's van wiskundigen), Arch. 11 (C.G.G. van Herk (1900–1982)), Arch. 12 (J.H. Wansink (1894–1985)), Arch. 14 (H. Freudenthal (1905–1990)), Arch. 15 (D. van Dantzig (1900–1959)). Arch. 1 W. Kapteyn (1849–1927), berust bij de bibliotheek van het Museum Boerhaave in Leiden (onder nr. Arch. 371). Arch. 13 M.J. van Uven (1878–1959) berust nog bij het CWI.

Het promotieonderzoek van S. la Bastide-van Gemert over het didactisch werk van H. Freudenthal, mede gebaseerd op diens persoonlijk archief, vordert gestaag.

In 2001 is het persoonlijk archief van D. van Dantzig aan het Rijksarchief Noord-Holland overgedragen (zie ook het Jaarverslag 2000).

Met de erven N.H. Kuiper zijn de onderhandelingen m.b.t. overdracht van diens persoonlijk archief in een vergevorderd stadium. De overdracht wordt in 2002 verwacht.

In het verslagjaar heeft de commissie één keer vergaderd en wel op 20 november 2001. Tijdens deze vergadering traden Prof. dr. F. van der Blij en Prof. dr. H.J.M. Bos af als lid. Dr. G. Alberts en Dr.ir. T. Koetsier traden toe als lid.

De samenstelling van de CPAW per 31 december 2001 was als volgt: Dr. G. Alberts, Mw.drs. G.J.A.M. Bolten, Dr.ir. T. Koetsier, Prof.dr. D. van Dalen, Prof.dr. A.W. Grootendorst, voorzitter, Dr. M. Bakker, secretaris.

3.9 Verslag van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde

3.9.1 Samenstelling bestuur Arie Langeveld, Wil Schilders, Hans Schumacher, Cor Kraaikamp, Rob Bisseling, Bob Mattheij (voorzitter), Herbert Tulleken (penningmeester), Frits van Beckum (secretaris). Rob Bisseling is in januari toegetreden tot het ITW-bestuur.

3.9.2 Structuur ITW heeft ruim tien jaar gewerkt als een werkgroep binnen het WG — maar tevens als een afzonderlijke stichting — om iets extra's te doen voor ieder die, op welke manier ook, bezig is met industriële en toegepaste wiskunde. Zij heeft enkele honderden belangstellenden — abonnees van ITW-Nieuws —

rond zich verzameld, waarvan evenwel velen geen WG-lid zijn. De status van deze groep binnen wiskundig Nederland is derhalve een voortdurend aandachtspunt in de verhouding tussen WG en ITW. Begin 2001 hebben gesprekken plaatsgehad tussen de besturen van ITW en WG, leidende tot het voorstel, ITW als een sectie in het WG te beschouwen. In de jaarvergadering in april heeft dit zijn beslag gekregen.

3.9.3 ITW-Nieuws ITW-Nieuws is een blad van circa 28 pagina's A4, dat eens per drie maanden verschijnt. De redactieleden zijn Barbera van de Fliert, Frits van Beckum, Wil Schilders, Hans Melissen, Sjoerd Rienstra. De eindredactie is in april overgegaan van Jaap-Harm Westhuis naar Ed van Daalen. Illustrator is Niels Lous.

In de gesprekken tussen het WG- en het ITW-bestuur over de plaats van ITW (zie boven) is het vaak en vooral gegaan over de relatie van het blad ITW-Nieuws tot het Nieuw Archief. Over redactionele samenwerking werden, ook vanuit beide redacties, diverse scenario's ontwikkeld. Eind van het jaar heeft het ITW-bestuur besloten na de lopende jaargang, de 11de, de uitgave van ITW-Nieuws stop te zetten. Enkele redacteuren zullen gaan meewerken aan het Nieuw Archief. Deze stap is in lijn met het beleid van het NAW tot verbreding in de toepassingen. ITW ziet in deze beleidskeuze bij het NAW een deel van haar missie vervuld. Aan de niet-NAW-lezers in de doelgroep van ITW zal nu op andere wijze nadrukkelijk aandacht gegeven worden.

3.9.4 SWI De Studiegroep Wiskunde met de Industrie (een week werken aan problemen uit het Nederlandse bedrijfsleven) is in voorbereiding aan CWI en UvA, en zal plaatshebben van 18 tot 22 februari 2002.

3.9.5 Symposia Dit jaar is één symposium georganiseerd, namelijk het Na-jaarssymposium van het WG (dat traditioneel in het teken staat van toepassingen). Dit jaar met het thema Muziek, gehouden op 20 december aan de TUE. Een gevarieerd symposium, met uiteraard muzikale intermez-zo's. *Frits van Beckum, secretaris*

Harrie Willems

Binnenkadijk 355

1018 AX Amsterdam

hawe@worldonline.nl

Het werk van Wolfgang Doeblin na 60 jaar ontsloten

Verzegelde formules

Enkele maanden geleden besteedde de VPRO aandacht aan de ontsluiting van een manuscript geschreven in 1939-40 door de wiskundige Wolfgang Doeblin. Het onderwerp van het handschrift betrof stochastische differentiaalvergelijkingen en de auteur was de zoon van de schrijver Alfred Döblin. Harrie Willems is free-lance journalist en presenteerde voor de VPRO dit onderwerp.

Op 18 mei 2000 opende de voorzitter van de 'commission de pli cacheté' van de Académie des Sciences in Parijs een verzegelde enveloppe, geregistreerd onder het nr. 11.668. Het is de brief van Wolfgang Doeblin, soldaat eerste klas in het Franse leger, verstuurd in februari 1940 vanuit Athienville, een klein dorpje in de Vogezes, vlak achter het front. In de enveloppe zit een manuscript, *Over de vergelijking van Kolmogoroff*, en het verzoek dit manuscript als *pli cacheté* te registreren. Dan volgt een post scriptum: "Het ingesloten manuscript is geschreven tussen november 1939 en februari 1940 tijdens mijn militaire dienst. Het is niet af en aan het uiterlijk kunt u zien onder welke omstandigheden het geschreven is. W. Doeblin".

Vanaf het moment dat Bernard Bru, hoogleraar waarschijnlijkheidsrekening aan de Universiteit van Parijs, in 1990 het bestaan ontdekte van Wolfgang Doeblins verzegelde brief, heeft hij bij diens familie op aange drongen de brief te openen. Tien jaar lang bleef de familie weigeren. Bru onderzocht intussen het leven en het werk van de wiskundige Wolfgang Doeblin. In april 2000 gaf de broer, Claude Doblin, eindelijk toestemming. Bernard Bru en zijn collega Marc Yor ontleedden de wiskundige kronkels van het manuscript en gaandeweg kwamen ze tot de con-

clusie dat ze iets bijzonders onder ogen hadden.

Doeblin presenteert in zijn manuscript formules die equivalent zijn met wat we nu kennen als de Itô-formule uit de stochastische calculus. De Japanse wiskundige Kiyosi Itô publiceerde zijn formule eerst in de vroege jaren vijftig. Bru is gefascineerd door Wolfgang Doeblin: "Het is een heel bijzonder manuscript. En dan te bedenken onder welke omstandigheden hij het geschreven heeft! Hij was gewoon soldaat, in oorlog, midden in de winter, zonder enig comfort. Het is ongelooflijk dat hij de concentratie op kon brengen. Bovendien, hij wist dat hij ging sterven; dat had hij al aangekondigd!"

Kiyosi Itô is op grond van zijn verdiensten voor de wiskunde benoemd tot lid van de Académie des Sciences. In de kelders van diezelfde Académie huisde 60 jaar lang een verzegelde enveloppe met een wetenschappelijke ontdekking van gelijke strekking.

Verzegelde brieven

De Académie des Sciences in Parijs is een van de vijf pijlers van het Institut de France. Het instituut zetelt in een zeventiende-eeuws paleis aan de Seine, recht tegenover het Louvre. Hier verkeert de Franse literaire en wetenschappelijke elite, hier resideert prestige, macht en *histoire*. In de Académie des Sciences zijn de bèta-wetenschappen ondergebracht en in de archieven van de Académie liggen de verzegelde brieven, de plis cachetés. Florence Grève, een chique Parisienne, is de conservatrice van de archieven. Ze legt de procedure van de verzegelde brief, ingesteld in de tijd van Lodewijk XIV, uit.

"Het is bestemd voor de wetenschapper die een ontdekking doet, en deze nog niet

openbaar kan of wil maken. De wetenschapper stelt de ontdekking in een enveloppe bij de Académie. De enveloppe wordt geregistreerd op naam, nummer en datum, verzegeld en opgeborgen in de catacomben van het paleis. Zo waarborgt de Académie het prioriteitsbeginsel. Alleen de auteur of diens erfgenamen kunnen de brief opvragen. Maken die geen gebruik van dit recht, dan wordt de brief honderd jaar na inlevering geopend."

Op Grève's bureau liggen twee grote registers met de verzegelde brieven van de afgelopen 300 jaar. Ze slaat de bladzijden om en noemt namen als Poincaré, Buffon en Pasteur. Naast de registers ligt een bruine enveloppe. Uit de enveloppe haalt Florence Grève een groen schoolschrift uit de serie 'villes et paysages de France', op de kaft een plaatje met heuvels en een dorpje. Het is het manuscript van Wolfgang Doeblin. Ze bladert er in en haar stem hapert: "Het feit dat het een schoolschrift is, dat hij het niet in het net heeft kunnen schrijven. Hij heeft het snel, achter elkaar opgeschreven, dat kun je zien. Dat maakt het allemaal zo bijzonder, dat geeft het een 'touche d'humanité'." Ik mag het schrift in handen houden en doorbladeren, en zie een stroom van cijfers, symbolen, strepen en verbeteringen, in zwarte inkt; een magisch moment.

Alfred Döblin

Wolfgang Doeblin was een van de vier zonen van Alfred Döblin en Erna Reiss. Het gezin woonde in de jaren twintig in Berlijn, aan de deftige Kaiserdamm. Vader Alfred was zenuwarts en had een praktijk voor ziekenfonds-patiënten; hij was een armendokter. Alfred en Erna waren beiden sociaaldemocraat, de familie Döblin was seculier joods, de zonen



Het post scriptum bij de verzegelde brief in de archieven van de Académie des Sciences in Parijs

hadden Duitse namen, Peter, Wolfgang, Klaus en Stefan. Daarnaast was Alfred Döblin in Duitsland een gewaardeerd schrijver. Hij was lid van de Pruisische akademie voor de kunst. In 1929 verscheen zijn boek *Berlin Alexanderplatz*, de eerste grotestadsroman in Duitsland. Twee jaar later werd het boek verfilmd en Alfred Döblin was een beroemdheid. Een dag na de Rijksdagbrand op 28 februari 1933 werd Alfred Döblin door een bevriende politieagent getipt dat hij op de zwarte lijst van de nazi's stond. Nog diezelfde dag vluchtten hij, zijn vrouw en jongste zoon via Zurich naar Parijs. Wolfgang maakte het gymnasium af en volgde een paar maanden later met zijn broers. De familie had het moeilijk in Parijs. Vader Alfred was er onbekend, geïsoleerd en hij sprak gebrekkig Frans. In Duitsland gingen zijn boeken de brandstapel op en in Parijs kon hij zijn beroep als zenuwarts niet uitoefenen. Het gezin Döblin kreeg het financieel krap en de oudste zoon Peter vertrok naar de VS, als drukker.

Om beter te integreren veranderde de familie van naam. Döblin (uitgesproken deublien) werd Doblin (doblain), Klaus werd Claude, Stefan Stéphane en Wolfgang Vincent. Wolfgang was 18 toen hij wiskunde ging studeren aan de Sorbonne, bij het Institut Henri Poincaré, waar Paul Lévy en Maurice Fréchet doceerden. Fréchet en Lévy hadden regelmatig contact met Andrej Kolmogoroff, de briljante Russische wiskundige. Begin jaren dertig waren deze drie mensen intensief bezig met de waarschijnlijkheidstheorie en ze bezochten elkaar over en weer. Parijs en Moskou stonden in het centrum van de ontwikkeling van de waarschijnlijkheidsrekening. In deze ambiance ging Wolfgang Doeblin studeren en Fréchet werd zijn leermeester. Wolfgang studeerde na drie jaar af en promoveerde nog eens twee jaar later op een thema uit de waarschijnlijkheidsrekening. In de twee jaar van

zijn promotie schreef hij dertien wiskundige artikelen en was, 23 jaar oud, een van de sterren van het instituut. Een aantal van deze artikelen verscheen in de *Comptes Rendus* van de Académie des Sciences.

Gewoon soldaat

De familie Döblin was inmiddels genaturaliseerd tot Frans staatsburger en Wolfgang stond geregistreerd als Wolfgang, zich noemende Vincent, Doeblin. In 1938 moest hij in militaire dienst. Wolfgang weigerde de opleiding tot reserve-officier. Hij wilde, net als alle anderen, gewoon soldaat zijn. Op 3 november 1938 stapte Wolfgang Doeblin, voor de Fransen Vincent Doblin, de kazernepoort binnen van Givet, in het uiterste noorden van de Franse Ardennen. Hij behoorde tot het 91-ste regiment en werd daar telegrafist. Paul Beaujot zat samen met Doeblin in Givet in het leger. Trots laat de nu tachtigjarige Beaujot een krantenknipsel zien met de kop 'Geniale wiskundige herontdekt'. Bij het artikel staat een foto van Wolfgang Doeblin en Beaujot heeft daarin zijn medesoldaat Vincent Doblin herkend. "Zijn accent verklaarde hij", aldus Beaujot, "door te zeggen dat hij uit de Elzas kwam. Vincent hield zich wat afzijdig, net als ik, en daarin vonden we elkaar. Hij was een rustige, serieuze, wat trieste soldaat, die altijd zat te rekenen." Uit zijn portefeuille haalt Beaujot een foto, met daarop het regiment dat aardappelen schilt.

Voor Doeblin was het leger een gruwel. In

briefen aan vrienden en aan Maurice Fréchet klaagde hij over langdurige depressies. In de zomer van 1939 trok hij met het 91-ste regiment naar Sécheval, een dorpje 150 km zuidelijker. Janine Canot was acht jaar toen het bataljon Sécheval binnenmarcheerde. "De soldaten oefenden overdag rondom het dorp en sliepen in groepen van twintig in schuren bij de boeren", vertelt ze. Vincent Doblin sliep in de boerderij van haar ouders en Janine kan zich hem nog goed herinneren. "'s Avonds kwam hij altijd een kom melk halen, want mijn ouders hadden een paar koeien. Dan bleef hij even zitten en praatte wat met mijn ouders. Hij sprak goed Frans, maar je kon toch horen dat hij geen Fransman was." In deze periode spoorde Maurice Fréchet Wolfgang aan om zijn wiskundige werk weer serieus op te pakken. Dat deed Wolfgang. "Het is goed tegen mijn depressies", schreef hij aan Fréchet, "en alcohol is niets voor mij; ik heb het geld niet eens om me te bedrinken." Janine wijst naar het einde van de straat: "Hij had een eigen werkplek, aan de rand van het dorp, hij was telegrafist." In zijn telegraafhokje en in de schuur bij de familie Canot werkte Wolfgang Doeblin in de stille uurtjes aan het manuscript *De vergelijking van Kolmogoroff*.

Vanaf 3 september 1939 waren Frankrijk en Duitsland officieel in oorlog, maar Doeblin en zijn medesoldaten gingen ervan uit dat het zo'n vaart niet zou lopen. Het was immers winter en dat is geen geschikte tijd voor oorlog. Janine weet nog hoe gemoedelijk en gezell-



De soldaten in Givet schillen aardappels. Staand meest links Wolfgang Doeblin/Vincent Doblin.



foto: collectie Paul Beaujot

De boerderij van de familie Canot

lig het was met al die soldaten in het dorp. Maar de situatie spitste zich toe en op één van de avonden bij de familie Canot vertelde Wolfgang dat hij jood was, dat hij voor geen prijs in handen van de nazi's wilde vallen en altijd één kogel bewaarde voor zichzelf. In januari 1940 stak Wolfgang Doeblin met zijn bataljon, met zijn manuscript bij zich, de Maas over naar de Vogezen, richting front. Het was steenkoud. De soldaten sliepen in schuren en barakken en bereidden zich voor op de oorlog. En toch werkte Wolfgang verder aan zijn manuscript. Het moest immers af. De oorlog kwam eraan en hij wist dat de kans groot was dat hij zou sterven. Eind februari stuurde hij het manuscript in een enveloppe per militaire post naar de Académie des Sciences in Parijs. In een brief van 12 maart 1940 stelde hij Maurice Fréchet hiervan op de hoogte. Korte tijd later brak de Duitse Wehrmacht door de Maginotlinie en de commandant van het regiment besloot zich over te geven. Wolfgang Doeblin vluchtte 's nachts, bereikte in de vroege ochtend het dorpje Housseras en zocht zich een veilig heenkomen in een schuur. Een paar uur later bezette de Wehrmacht het dorp Housseras. Wolfgang Doeblin zag geen uitweg meer, verbrandde al zijn aantekeningen en schoot zich een kogel door het hoofd: 21 juni 1940.

Op het bericht van het bezwijken van de Maginotlinie vluchtten Alfred en Erna Döblin met hun jongste zoon weg uit Parijs, naar het zuiden. De reis bracht hen uiteindelijk via Portugal naar Amerika. Claude bleef achter in het zuiden van Frankrijk, waar hij actief zou worden in de ondergrondse. Alfred Döblin werkte op zijn tweeënzestigste een jaar in Hollywood als scenarioschrijver voor Metro Goldwyn Mayer. Daarna leefde het gezin van de giften van andere Duitse literaire ballingen in de Verenigde Staten. Ze hadden geen contact meer gehad met Wolfgang en gingen ervan uit dat hij gevangengenomen was. Pas begin 1945 vernamen ze door een brief van een vriendin van Wolfgang van zijn dood. Alfred en Erna Döblin keerden terug naar Europa. Na een slopende ziekte stierf Alfred Döblin

op 26 juni 1957 in Emmerdingen in Duitsland. Een paar maanden later pleegde Erna in Parijs zelfmoord. De zonen Doeblin schonken alle manuscripten en brieven van hun vader en later ook die van hun broer aan het Duitse literatuurarchief in Marbach, alle ... op één na.

Fréchets zwijgen

In het najaar van 1991 vond in het Instituut Heinrich Fabri in Blaubeuren in Duitsland een conferentie plaats, gewijd aan het werk van Wolfgang Doeblin: 'Fifty years after Doeblin, the development of Markov Chains'. Bij de voorbereiding vroeg professor Bernard Bru, die ook geschiedenis van de wiskunde doceert, zich af of Doeblin nog iets geschreven had na november 1938, nadat hij in dienst gegaan was. Bru raadpleegde het archief van Maurice Fréchet, de leermeester van Doeblin, een enorm archief dat ook weer in de Académie des Sciences ligt.

Fréchet was iemand die alles bewaarde, van manuscripten tot hotelrekeningen, van zijn schoolschriften tot vliegtickets — 30 dozen zonder inventaris. Bru doorzocht de chaos en stuitte op een twintigtal brieven die Wolfgang Doeblin vanaf het front aan Fréchet had gestuurd. Daar was ook de brief van 12 maart 1940 bij. Bru ging naar het register van de plis cachetés in de Académie des Sciences en ontdekte dat de verzegelde brief van Wolfgang Doeblin werkelijk bestond. De brief was nog ongeopend.

Waarom heeft Maurice Fréchet geen bekendheid gegeven aan het bestaan van de verzegelde brief met manuscript van zijn beste leerling, hij wist het immers? De hoogleraren Bru en Yor houden het op vergeetachtigheid. De bejaarde bibliothecaresse van het Institut Henri Poincaré noemt Fréchet een briljant wiskundige, maar een ramp voor zijn collega's, 'méchant', kwaadaardig. En waarom heeft het nu nog tien jaar geduurd eer de brief geopend kon worden?

Bernard Bru had onmiddellijk na zijn ontdekking contact opgenomen met Claude Doeblin. Hij vroeg toestemming de brief te openen. De broers, Claude en Stéphane, die in Frankrijk zijn blijven wonen, en Peter weigerden. De redenen waren niet al te duidelijk. "De brief is geheim, Wolfgang heeft altijd gezegd dat hij niet wil dat andere wiskundigen er met zijn ideeën vandoor gaan en het is een familieverplichting zich aan de wil van Wolfgang te houden", zei Claude Doeblin. Bernard Bru heeft volgehouden. Zijn nieuwsgierigheid en intuïtie wonnen het. Uiteindelijk gaven de broers toestemming de

brief te openen. De Académie des Sciences bracht in december 2000 een speciale editie van de *Comptes Rendus* uit getiteld 'Sur l'équation de Kolmogoroff, par Wolfgang Doeblin'. Uniek, want nog nooit had de Académie een *Comptes Rendus* uitgegeven van een wetenschappelijke ontdekking uit het verleden. Ook de universiteit van Nancy organiseerde een eerbetoon, waar een collegezaal de naam 'Wolfgang Doeblin' kreeg en professor Marc Yor een gedreven voordracht hield over het manuscript. Zijn gehoor is gefascineerd, de sfeer is *électrique*. De volgende dag bracht een schare wiskundigen een bezoek aan het dorp Housseras. Overal in het dorp hing de aankondiging van de plechtigheid op de begraafplaats rond de kerk, waar Wolfgang Doeblin begraven is als 'Vincent Döblin, mort pour la France', met aan weerszijden zijn vader en moeder. Er worden kransen gelegd, de burgemeester houdt een toespraak, de vrijwillige brandweer brengt een saluut. De broers Claude (83) en Stéphane (74) Doeblin zijn ontroerd door de aanwezigheid van zo veel mensen uit het dorp. Ze weten nog goed hoe alleen ze waren in 1957, toen ze eerst hun vader en drie maanden later hun moeder in Housseras begroeven. De mensen uit het dorp kennen Wolfgang Doeblin alleen als de tragische zelfmoordenaar Vincent Doeblin. Nu zijn ze trots op de eens zo vertwijfelde soldaat.

Na de plechtigheid komt iedereen samen in de Mairie, met rosé, jus d'orange en zoutjes, en de dorpingen vertellen het verhaal van hun Vincent Doeblin. Zoals de bejaarde Paulette Belair, ze was er bij, 61 jaar geleden: "Er kwamen eerst twee Duitse motorrijders het dorp binnenrijden. De voorste vliegt de bocht uit, tegen een muurtje aan en is op slag dood. Precies op hetzelfde moment hoor ik uit de schuur het schot van Vincent." Ze blijft het herhalen, met ongeloof in stem en ogen; hoe kunnen de grillige wegen van toeval en dood elkaar zo kruisen? En dan te bedenken dat één van de twee doden, Wolfgang Doeblin, de man was, die een paar maanden daarvoor als eerste een wiskundig instrument had bedacht om het toeval te ontsluiten. Claude en Stéphane Doeblin zijn onder de indruk van de gebeurtenissen. Ze hebben er spijt van dat ze zolang met de opening van de brief gewacht hebben. Het lijkt erop of ze nu pas inzien hoe in het korte leven van hun broer de geschiedenis van samenleving en wetenschap met elkaar verbonden is.



Peter Spreij

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam
spreij@science.uva.nl

De Ito-formule zonder stochastische integralen

De verzegelde brief die Wolfgang Doeblin in februari 1940 van het front naar de Académie des Sciences in Parijs zond bevatte een wiskundig manuscript waarin ondermeer een versie van de Itô-integraalvergelijking te herkennen valt. Doeblin was zijn tijd ver vooruit. Peter Spreij geeft een korte toelichting op de wiskundige inhoud en gaat ook in op de verschillen tussen de benaderingen van Doeblin en van Itô.

Het wonderbaarlijke aan het manuscript van Wolfgang Doeblin, dat jarenlang als verzegelde envelop (*pli cacheté*) bij de Académie des sciences aan de belangstelling van de buitenwereld onttrokken was, is de rijkdom van de inhoud. Is verreweg het grootste deel van de aldaar gedeponeerde verzegelde enveloppen de moeite van het openen nauwelijks waard, in het geval van Doeblins manuscript bleken er tal van wiskundige resultaten in te staan waaruit bleek dat de auteur zich ook aan het wetenschappelijke front van zijn tijd bevond. In het korte bestek van deze bijdrage is het ondoenlijk om op alle aspecten in te gaan, maar beperken we ons tot een van de meest spectaculaire vondsten, te weten een versie van de Itô-formule. Opmerkelijk hieraan is dat we deze formule nu kennen in de taal van de stochastische calculus, in het bijzonder in termen van stochastische integralen. Deze zijn door de Japanse wiskundige Itô in de jaren veertig van de vorige eeuw geïntroduceerd, dus na het verscheiden van Doeblin, terwijl wat nu bekend staat als de Itô-formule pas in het begin van de jaren vijftig werd gepubliceerd.

We gaan eerst in op de titel van zijn manuscript, *Sur l'équation de Kolmogoroff*. Eerder had Doeblin al twee bijdragen in de *Comptes rendus* onder dezelfde titel gepubliceerd, alleen is het niet direct duidelijk op welke vergelijking de titel van de verzegelde envelop slaat. Eén mogelijkheid, de eerste vergelijking in het manuscript van Doeblin, is (we permitteren ons hier en ook verder notatie die soms afwijkt van de originele versie)

$$F(x, y, s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z, y, u, t) F(x, dz, s, u), \quad s < u < t. \quad (1)$$

Geven we nu met $X(t)$ de plaats op tijdstip t aan van een deeltje dat zich in $\mathbf{R}$ stochastisch als een Markov-proces beweegt, dan is interpretatie van $F(x, y, s, t)$ de voorwaardelijke kans $P(X(t) \leq y \mid X(s) = x)$. Vergelijking (1) heet ook wel de Chapman- of Chapman-Kolmogorov-vergelijking. In het artikel van Doeblin wordt op F een aantal condities gelegd, waarvan we alleen het bestaan van de limieten, voor geschikte functies a en σ ,

$$\lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|<1} (y-x) F(x, dy, s, t) = a(x, s),$$

$$\lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|<1} (y-x)^2 F(x, dy, s, t) = \sigma^2(x, s)$$

reproduceren. Deze functies noemen we in het vervolg de lokale karakteristieken. We veronderstellen voorts dat X continu verandert.

Behalve dat F voldoet aan vergelijking (1) geldt tevens dat F een oplossing is van de partiële differentiaalvergelijking (met s en x als variabelen, y en t als vaste parameters)

$$Lu := u_s + au_x + \frac{1}{2}\sigma^2 u_{xx} = 0. \quad (2)$$

Vergelijking (2) staat bekend als Kolmogorovs (achterwaartse) partiële differentiaalvergelijking, kortweg ook aangeduid als Kolmogorovs vergelijking. De titel lijkt op deze vergelijking, die overigens in het artikel niet te vinden is, betrekking te hebben. Voor het vervolg is het niet van belang of de titel slaat op (1) dan wel (2), gezien het verband tussen beide vergelijkingen.

Wat bekend staat als het probleem van Kolmogorov is het bij gegeven lokale karakteristieken construeren van een stochastisch proces X waarvan de bijbehorende functie F voldoet aan (1), en het analyseren van dit proces. Aan dit probleem is in de jaren dertig door vele wiskundigen gewerkt via een analytische aanpak (methoden uit de theorie der partiële differentiaalvergelijkingen).

Doeblin volgde daarentegen (ook al in eerdere publicaties) een probabilistische aanpak door zich te richten op het onderliggende proces X en daar ook expliciet mee te werken. Voor processen X met continue paden en $X(0) = 0$ bewees hij onder meer dat het proces Z gedefinieerd door $Z(t) = X(t) - \int_0^t a(X(s), s) ds$

evenals het proces gegeven door $Z(t)^2 - H(t)$ met $H(t) = \int_0^t \sigma^2(X(s), s) ds$ een *martingaal* is, hoewel deze terminologie in het manuscript niet voorkomt en het martingaalbegrip in die tijd nog nauwelijks ontwikkeld was. Doebelin bewees, wat meer in detail, de representatie $Z(t) = \beta(H(t))$, waarbij β een Brownse beweging voorstelt. Of liever, hij laat zien dat $Z(\theta(\cdot))$ een Brownse beweging is, waarbij θ de inverse afbeelding is van H . Dit resultaat staat sinds 1965 in algemenere vorm bekend als de Dubins-Schwarz-Dambis representatie: elke continue martingaal is op te vatten als een Brownse beweging geïndiceerd door een zekere stochastische klok. Samenvattend kunnen we nu schrijven

$$X(t) = \beta(H(t)) + \int_0^t a(X(s), s) ds. \quad (3)$$

Een van de volgende problemen die Doebelin zich stelde, was het vinden van de lokale karakteristieken van een proces Y dat gedefinieerd wordt door $Y(t) = \phi(X(t), t)$ voor een functie $\phi \in C^{2,1}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^+)$, die monotoon is in de eerste variabele. De meest verrassende ontdekking in het artikel van Doebelin is dat de lokale karakteristieken van Y , $\bar{a}$ en $\bar{\sigma}$, kunnen worden geschreven als

$$\begin{aligned} \bar{a}(x, s) &= L\phi(x, s) \\ \bar{\sigma}(x, s) &= \sigma(x, s)\phi_x(x, s). \end{aligned}$$

Als gevolg hiervan kunnen we het proces Y beschrijven door

$$Y(t) = Y(0) + \delta(\bar{H}(t)) + \int_0^t \bar{a}(X(s), s) ds, \quad (4)$$

met $\bar{H}(t) = \int_0^t \bar{\sigma}^2(X(s), s) ds$ en δ een Brownse beweging.

We beschouwen nu de aanpak en de resultaten van Itô. Hij representeerde het proces X dat we hierboven tegenkwamen als oplossing van de *stochastische integraalvergelijking*

$$X(t) = \int_0^t \sigma(X(s), s) dB(s) + \int_0^t a(X(s), s) ds, \quad (5)$$

waarin B een Brownse beweging voorstelt. In deze vergelijking is de eerste integraal een *stochastische integraal*, een concept, zoals hierboven reeds genoemd, dat Itô in de veertiger jaren introduceerde en verder ontwikkelde. Met een functie $\phi \in C^{2,1}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^+)$ verkreeg Itô voor het proces Y de representatie

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \bar{\sigma}(X(s), s) dB(s) + \int_0^t \bar{a}(X(s), s) ds. \quad (6)$$

Hiermee zien we dus de overeenkomsten en verschillen tussen de resultaten van Doebelin en van Itô. De representaties zijn equivalent (vergelijk (3) met (5) en (4) met (6)), maar terwijl Itô zijn bevin-



Wolfgang Doeblin, telegrafist in Sécheval

dingen publiceerde in termen van stochastische integralen, gebruikte Doebelin Brownse bewegingen met een stochastische tijdsparameter. De importantie van de Itô-formule werd pas in de loop van de jaren zestig algemeen geaccepteerd, onder meer als onmisbaar technisch gereedschap bij de ontwikkeling van de stochastische analyse en het toepassen van stochastische differentiaalvergelijkingen, bijvoorbeeld in de technische wetenschappen vanaf de jaren zestig en de financiële wiskunde vanaf de jaren tachtig.

Referenties

- 1 B. Bru, M. Yor, Some comments on the Pli cacheté n°11.668 by W. Doeblin: Sur l'équation de Kolmoroff, *Prépublication du Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires* n°672 (2001)
- 2 *Comptes rendus de l'Académie des sciences, Série I*, tome 331 (2000).

Danny Beckers

Universiteit Nijmegen, Mathematisch Instituut
Postbus 9010, 6500 GL Nijmegen
dbeckers@sci.kun.nl

Oud Archief

De sensatie een oud tijdschrift of een oude brief op te slaan kennen de meesten van ons wel. 'Deden ze dat toen zo? Maakten ze zich daar toen druk over?' En dan realiseren we ons dat onze hedendaagse gewoontes ook maar toevallig zijn. Danny Beckers, aio in de geschiedenis van de wiskunde aan de KUN, zal in deze rubriek geregeld een titelblad, een mooi plaatje, een raar symbool, een bizarre ruzie uit de geschiedenis van het Wiskundig Genootschap aangrijpen terwille van de historische verlustiging.

In 1925 werd Wimecos opgericht: de vereniging voor leraren in Wiskunde, MEchanica en COSmografie, de huidige NVvW. Wimecos was een vereniging voor leraren van de HBS. In het programma van de 5-jarige HBS stonden de vakken mechanica en cosmografie op het rooster. In 1920 werd mechanica facultatief. Sommige wiskundeleraren betreurden dat, aangezien de evenwichtsopgaven aanleiding waren om de goniometrie te oefenen en zwaartepuntsberekeningen een mooie gelegenheid boden om de inhoudsformules te gebruiken.

Vóór de oprichting van de vereniging bestond er reeds een tijdschrift voor wiskundeleraren: *Euclides*. De naam van het tijdschrift stond tevens voor een (ideaal) onderwijsprogramma: leerlingen werden van de eerste klas HBS af geconfronteerd met axioma's, definities, stellingen en bewijzen. Met name in het vlakke-meetkundeprogramma werd door de redactie van *Euclides* een stijl gepropageerd die *De Elementen* van Euclides nabootste. Ook bij de andere onderdelen werd die stijl als ideaal beschouwd. Voor de mechanica werd in *Euclides* bijvoorbeeld het zeer formeel (aan de hand van axioma's en definities) opgebouwde leerboek van (redacteur) J.H. Schogt de hemel in geprezen. De mechanica werd door wiskundigen als een onderdeel van de wiskunde beschouwd en ook zodanig gepresenteerd.

De leraren natuurkunde hadden zich verenigd binnen de *Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging*. De natuurkundelessen op de HBS beperkten zich hoofdzakelijk tot de meer experimentele hoek. De wiskundige beschrijving van de fenomenen was daar een afgeleide van. In hun lessen merkten de natuurkundigen dat de afstemming tussen de behandeling van de mechanica en de onderwerpen die zij wilden aansnijden (zoals lichtbreking, golven) erg moeizaam was. In 1927 stelde een commissie uit de vereniging daarom aan Wimecos voor om een deel van de uren die voor mechanica waren gereserveerd bij natuurkunde in te roosteren. Wimecos ging in overleg en er kwam een compromis waarin beide partijen zich konden vinden: de mechanica zou in eerste instantie door de fysici empirisch ter hand worden genomen en in de hogere klassen door de theoretische mechanica worden overgenomen.

Op 19 mei 1928 richtte de Natuurkundige Vereeniging zich zonder overleg tot de Minister van Onderwijs waarin ze bepleitten de mechanica voortaan bij natuurkunde onder te brengen: natuurkunde moest onderwezen worden als (empirische) natuurwetenschap — niet als wiskunde.

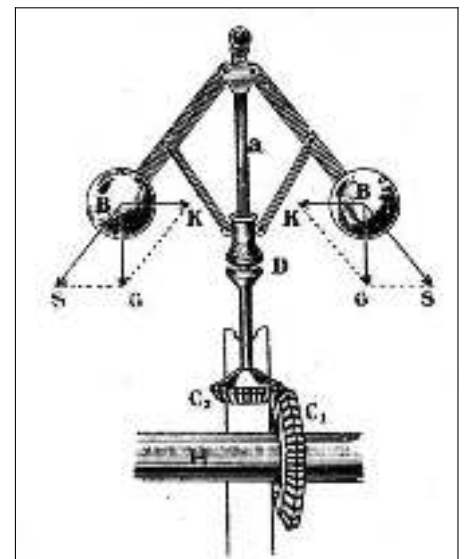
De wiskundigen reageerden geschokt: "de doodstraf voor de rationele mechanica" noemde H.J.E. Beth de actie van de fysici; E.J. Dijksterhuis sprak van een "aanslag op de mechanica". Het tweede nummer van Jaargang 5 van *Euclides* was in z'n geheel aan de kwestie gewijd. David van Dantzig en Beth schreven dat mechanica alleen maar gebaat was bij formalistisch taalgebruik, en dat de fysicus wat zijn streven naar exactheid betrof ook geen ander doel voor ogen mocht staan dan de wiskundige. Dijksterhuis betoogde op historische gronden dat de mechanica ook een wiskundig bouwwerk was, waarin de empirie slechts diende ter toetsing van de verkregen resultaten. Allemaal waren ze het er overigens over eens dat een empirische on-

dergrond uit didactisch oogpunt gunstig kon zijn, en zij onderschreven dan ook de oude overeenkomst.

Wimecos slaagde er met een sterke lobby in om de Minister van hun gelijk te overtuigen. De mechanica was voorlopig veilig gesteld. Pas na de oorlog werd het vak bij natuurkunde ondergebracht en tot een onderdeel gemaakt waar Beth, Dijksterhuis en Van Dantzig van zouden hebben gegruid. De sfeer tussen experimenteel fysici en wiskundigen was voor goed bedorven. Zo sprak Dijksterhuis in een recensie van een mechanicaboek zijn ergernis uit over het feit dat er werd gesproken over de 'juistheid' van een definitie. Een wiskundige definitie was immers altijd juist. Hij kraakte het boek totaal af en eindigde zijn recensie met de woorden: "Zij [de auteurs] hebben vergeten dat het schrijven van een leerboek over [...] mechanica slechts het werk kan zijn van de allerbesten onder ons". Het was duidelijk wie hij met 'ons' bedoelde. 

Literatuur

Fred Goffree e.a. (red.), *100 jaar wiskunde-onderwijs*, Leusden, NVvW, 2000.



Klaas Landsman

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde

Universiteit van Amsterdam

Plantage Muidersgracht 24, 1018 TV Amsterdam

npl@science.uva.nl

Inaugurale rede

Wiskunde aan de grenzen

Kort na de ontdekking van de quantummechanica in 1925 door Heisenberg en Schrödinger voorzag Von Neumann haar van een wiskundige structuur. Vervolgens ontwikkelde hij hier een verregaande generalisatie van: de theorie van operator-algebra's. Deze blijkt afdoende om het mysterieuze verband tussen de klassieke en de quantummechanica te beschrijven. Een klassieke fysische theorie kan singulariteiten hebben, zoals de oerknal, terwijl dit voor een quantumtheorie niet zo is. Niet-commutatieve meetkunde speelt hierbij een belangrijke rol. Hieronder volgt de tekst van de oratie uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar in de Mathematische Fysica aan de Universiteit van Amsterdam op maandag 15 oktober 2001.

Vorig jaar werd Albert Einstein door *Time Magazine* gekozen tot *Person of the 20th Century*.¹ De redactie ging daarmee voorbij aan de voorkeur van hun lezers, die Elvis Presley hadden gekozen, met daarna Yitzhak Rabin, Adolf Hitler, en Billy Graham, en pas op de vijfde plaats Einstein. Ook in de keuze van hun nummers twee en drie trokken de redacteurs zich niets van hun lezers aan, want daar plaatsten ze, zeer politiek correct, Franklin Roosevelt en Mohandas Gandhi.

Een interessant en voor zijn uitverkiezing zonder twijfel beslissend aspect van Einstein is dat hij enerzijds, als de grootste geleerde sinds Newton en meer in het algemeen als nobel denker, als een parel van de mensheid in de 20e eeuw geldt, maar anderzijds ook direct met het leed van die eeuw wordt geassocieerd. Want de atoombom had niet kunnen worden gebouwd zonder zowel Einsteins beroemde formule $E = mc^2$, als zijn cruciale

bijdragen aan de quantummechanica. Bovendien wordt er dikwijls op gewezen dat hij in 1939 een brief aan Roosevelt schreef, waarin hij aandrong op onderzoek naar de mogelijkheid van atoomwapens. Dit zou nodig zijn vanwege de Duitse bedreiging in dezen. Deze brief had lang niet de invloed die hem vaak wordt toegemeten en speelde in feite nauwelijks een rol bij de besluitvorming die tot het Manhattan Project leidde.² Maartoch: *Der Pazifist und die Bombe*.³

John von Neumann

Mijn keuze als *Person of the 20th Century* is iemand die bij *Time Magazine* niet eens voorkomt op de lijst van 100 kandidaten, maar die zonder twijfel nóg meer invloed op de twintigste eeuw heeft gehad dan Einstein of wie dan ook in de speciale categorie *Scientists and Thinkers*. Het meest overtuigende argument om mijn kandidaat te verkopen is de

opmerking dat we overal om ons heen computers zien, dat vrijwel geen enkel aspect van ons leven, tot en met het bakken van brood, plaatsvindt zonder tussenkomst van computers en dat bijna al deze machines zijn gebouwd volgens de zogenaamde *Von Neumann architectuur*.⁴ Het minst overtuigende argument is om te zeggen dat John von Neumann (1903–1957) als vader van de mathematische fysica van de 20e eeuw en meer in het algemeen als een van de grootste en meest veelzijdige wiskundigen van die eeuw de uitverkiezing uiteraard verdient. Dat is overigens wel de reden dat hij in deze oratie optreedt. Een tussenliggend argument is dat Von Neumann als een van de eersten de gevaren van het roken inzag.

Naast zijn beslissende rol in de bouw van de eerste moderne computers was Von Neumann vermoedelijk de meest invloedrijke adviseur op militair gebied die de achtereenvolgende presidenten Roosevelt, Truman, en Eisenhower hadden.⁵ In eerste instantie trad Von Neumann op als consulent in Los Alamos, waar hij het implasiemechanisme van plutoniumbommen bedacht. Dit werd niet alleen gebruikt in de bom die boven Nagasaki werd afgeworpen, maar zit vermoedelijk tot de dag van vandaag achter alle latere atoomwapens. Als lid van het *target committee* bepaalde Von Neumann mede waar en met hoeveel slacht-



Klaas Landsman

van de natuurkunde

offers de twee in augustus 1945 afgeworpen atoombomben hun verwoestingen aan zouden richten. Hij leverde belangrijke bijdragen aan de ontwikkeling van de waterstofbom, en tenslotte was hij in hoge mate verantwoordelijk voor het concept van de wederzijdse nucleaire afschrikking, waarop veertig jaar lang de wereldpolitiek gebaseerd is geweest.

Maar vandaag wil ik Von Neumann verder alleen nog als wiskundige en mathematisch fysicus zien. Tot die gebieden leverde hij prachtige en beslissende bijdragen, die net als Einsteins relativiteitstheorie parels van de menselijke beschaving zijn.⁶ Zoals uit de bovenstaande opsomming blijkt, is het contrast tussen Von Neumanns bijdragen aan het Goede en aan het Kwade dan ook veel geprononceerder dan bij Einstein, wat hem in mijn ogen dan ook tot een nóg interessantere figuur maakt. Overigens is lang niet iedereen het er over eens dat Von Neumanns werk aan kernwapens en zijn extreem havikachtige, op militaire oplossingen gerichte politieke ideeën überhaupt negatief beoordeeld moeten worden.⁷ Waarschijnlijk is wel dat hij hiervoor met zijn leven moest boeten; hij overleed op 53-jarige leeftijd aan botkanker, vermoedelijk opgedaan door het veelvuldig bijwonen van nucleaire tests.

Vanwege zijn vele andere activiteiten bestreek de zuiver wiskundige loopbaan van

Von Neumann eigenlijk alleen de jaren 1920–1940. Na 1940 vond hij tussen zijn politieke activiteiten door ook nog wel tijd voor de wiskunde, maar die was vaak van zeer toegepaste aard, bijvoorbeeld op het gebied van de numerieke wiskunde en de weersvoorspelling. In directe samenhang daarmee valt ook Von Neumanns werk aan computers in de naoorlogse tijd.

Als voormalig wonderkind schreef hij zijn eerste artikel reeds op zeventienjarige leeftijd, maar zijn wiskundige productie in die eerste twintig jaar zou ook zonder dit vroege begin uitzonderlijk zijn geweest. Zijn legendarische intelligentie speelde hierbij zeker een rol, maar tevens moet opgemerkt worden dat Von Neumann geen enkele bijdrage tot het huishouden leverde. Toen zijn tweede echtgenote een keer ziek was en hem om een glas water vroeg, bleek Johnny niet te weten waar de glazen stonden. Zijn eerste echtgenote pleegde overigens zelfmoord. Tot sommige gebieden van de wiskunde leverde Von Neumann belangrijke bijdragen; van andere behoorde hij tot de grondleggers. In de eerste categorie valt zijn werk aan verzamelingenleer en logica, waarmee hij zijn loopbaan begon, de theorie van tralies, maattheorie en ergodentheorie, alsmede andere bijdragen tot de reële analyse. Tot de tweede categorie mogen we rekenen de speltheorie en

in samenhang daarmee de moderne wiskundige economie, de continue meetkunde, en de functionaalanalyse. Dit laatste gebied bestaat voornamelijk uit twee onderdelen, namelijk de studie van Banach-ruimten en van de meer algemene lokaal-convexe ruimten. Deze laatste ruimten werden door Von Neumann ingevoerd, en de belangrijkste voorbeelden van de eerste zijn de zogenaamde Hilbert-ruimten, waarbij Von Neumann eveneens de beslissende figuur is geweest. Daar kom ik nu in meer detail over te spreken, want juist zijn werk op dit gebied is bepalend voor mijn wiskundige aanpak. Het is zelfs zo dat na mijn familie Von Neumann de persoon is aan wie ik het meeste denk.

Quantummechanica

Von Neumann toog in de herfst van 1926 naar Göttingen, destijds het centrum van de wiskundige wereld, om daar samen te werken met David Hilbert, de toonaangevende wiskundige van zijn tijd. Von Neumann voelde zich in eerste instantie tot Hilbert aangetrokken vanwege diens werk in de logica, maar in 1926 was Hilbert vooral gefascineerd door de opkomende quantummechanica. Deze theorie beschrijft moleculen, atomen, kernen, elementaire deeltjes, en meer in het algemeen de microscopische natuur. Daartegenover staat de klassieke mechanica,



Von Neumann met zijn vrouw Kari en hun hond Inverse

die de macroscopische wereld voor haar rekening neemt. Vanaf 1900 werd met vallen en opstaan ingezien dat de klassieke fysica niet de hele natuur kan beschrijven, en in 1925 werd de klassieke mechanica definitief opzij gezet ten gunste van de quantummechanica. Deze theorie werd onafhankelijk en vrijwel tegelijkertijd ontdekt door Erwin Schrödinger en Werner Heisenberg.⁸

Schrödinger was een bon vivant, die naar het schijnt vooral tijdens amoreuze escapades tot zijn inzichten kwam.⁹ Heisenberg daarentegen was een hele serieuze jongen die de quantummechanica aan zich zag verschijnen tijdens een kort verblijf op het Duitse eilandje Helgoland in de Noordzee, waar hij in oppperste eenzaamheid herstelde van een ernstige aanval van hooikoorts.¹⁰ Hij zag met name in dat de fysische variabelen voortaan niet meer mochten commuteren; ik kom hier straks nog op terug. Het is overigens juist deze Heisenberg die later de geallieerden de schrik op het lijf zou jagen met zijn werk aan het atoom-programma van Nazi-Duitsland.¹¹ Enigszins overdreven kunnen we zelfs zeggen dat de angst voor het genie van Heisenberg de Amerikanen er toe aanzetten met het Manhattan Project het atoomtijdperk in te luiden.¹²

Heisenberg bevond zich destijds in Göttingen, waar hij samenwerkte met Max Born. Born was een goede kennis van Hilbert, die al langer vanuit wiskundig standpunt in de natuurkunde was geïnteresseerd, en dus vooral

wilde weten hoe het met de quantummechanica zat. Hij kwam daar zelf niet uit, maar zijn jonge assistent Von Neumann doorzag de wiskundige structuur van de quantummechanica vrijwel onmiddellijk en volledig. Deze uitzonderlijke prestatie kan worden vergeleken met die van Isaac Newton, die eind zeventiende eeuw niet alleen de wiskundige formulering van de klassieke mechanica ontdekte, maar ook de daartoe benodigde wiskunde groten-deels zelf ontwikkelde. Zo ook Von Neumann, maar dan voor de quantummechanica.

Hij zag dat de structuur die nu als Hilbert-ruimte bekend staat, maar die destijds alleen in een paar voorbeelden bekend was, aan de quantummechanica ten grondslag lag. Hij ontwikkelde deze structuur tot wat het vandaag de dag nog steeds zonder enige wijziging is en gaf precies aan hoe de quantummechanica, nauwelijks een jaar oud, hierdoor naadloos kon worden beschreven. In het bijzonder liet hij zien dat de aanpak van Schrödinger equivalent was met die van Heisenberg, hoe totaal verschillend ze er in eerste instantie ook uitzagen. Von Neumann schreef zijn ideeën in drie artikelen in 1927 op; de definitieve versie hiervan verscheen in 1932 als het boek *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*.

Afgezien van de virtueuze wiskunde komt in dit boek ook heel wat echte fysica aan bod. Zo geeft Von Neumann een nog steeds gebruikte uitdrukking voor de entropie van een quan-

tummechanische toestand, en legt hij ook de basis voor alle latere discussies van het zogenaamde meetprobleem. Ik zie dit boek als het hoogtepunt van de mathematische fysica van de 20e eeuw.

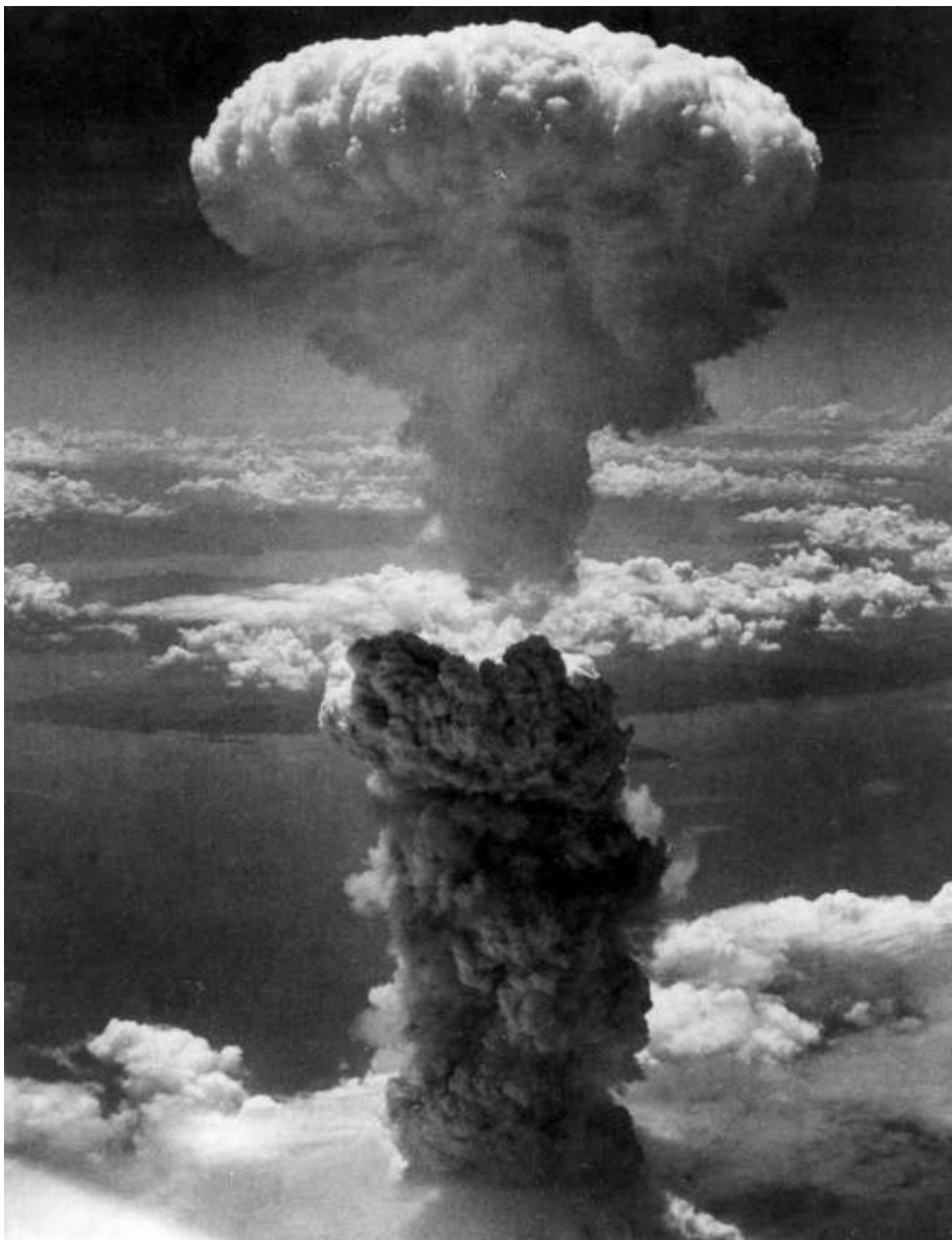
Mijn (gebrek aan) visie

In dit laatste oordeel uiten mijn beperkingen zich. In het bijzonder houd ik me uitsluitend bezig met mathematische fysica die in directe relatie staat tot de quantummechanica. In Engeland wordt de gehele stromingsleer tot de mathematische fysica gerekend, en in een kort geleden verschenen rapport over de wiskunde in Nederland¹³ staan onder het kopje *Mathematische Fysica* vijf namen van hoogleraren, vier waarvan ik nog nooit had gehoord. Voor zover naspeurbaar blijken ze actief te zijn in de scheepsbouw. In een pas drie jaar geleden vervangen wervingsbrochure vermeldt de Universiteit van Amsterdam de Deltawerken als motivatie voor de mathematische fysica. Daar weet ik allemaal niets van, hoewel ik de Stormvloedkering Oosterschelde als toerist met bewondering heb bezocht. Ook binnen de quantummechanica gebeurt van alles waar ik geen benul van heb. Deze onwetendheid strekt zich uit van transportverschijnselen in metalen tot stringtheorie, zo ongeveer de hele quantumfysica dus.

In sommige dingen ben ik niet geïnteresseerd omdat ik er niet in geloof, zoals stringtheorie. Het lijkt me niet plausibel dat op de lengteschaal waar stringtheorie relevant zou moeten zijn, zowel de quantummechanica als de relativiteitstheorie nog gelden. Van deze veronderstelling gaat de stringtheorie evenwel uit. Maar als je de quantummechanica een beetje anders axiomatiseert dan Von Neumann dat deed, zie je dat er één volkomen willekeurig postulaat in zit,¹⁴ hetgeen sterk suggereert dat er nog weer een nieuwe mechanica ontdekt moet worden die dit postulaat verklaart. Daar is een nieuwe Galilei of Heisenberg voor nodig. De diepe invloed van de stringtheorie op de wiskunde blijft uiteraard ook bij fysische irrelevantie onverlet.

Andere zaken hebben mijn aandacht niet omdat ik ze als een laf soort mathematische fysica zie. Van veel verschijnselen is de fysica geheel begrepen, en is wiskundig gesproken het formalisme van Newton of dat van Von Neumann toepasbaar, naar gelang het verschijnsel klassiek of quanteus is. Daar kan dan natuurlijk wiskundig nog weer van alles over gezegd worden, en vaak gaat het dan

Foto rechts. De op 11 augustus 1945 afgeworpen atoombom boven Nagasaki.



om ware technische *Tours de Force* die zowel diepgaand fysisch inzicht als wiskundige virtuositeit vereisen. Maar ik vind dat soort werk laf, omdat de fysische noch de wiskundige uitgangspunten ter discussie staan. Er kan eigenlijk niets mis gaan, en het is vooral een wedstrijd wie de slimste is. Zulke mathematisch fysici hebben ook altijd alles gedaan om ontwikkelingen die zij als *avontuurlijk*, of, wat als een nog ergere belediging is bedoeld, *heuristisch* zien, tegen te houden of dood te zwijgen.

Waar mijn hart dan wel ligt? Ik ben geïnteresseerd in fysische wetten aan de grenzen van hun toepasbaarheid. Juist daar raak je door de janboerenfluitjeswiskunde die aan de natuurkunde eigen is, en die zich verder uitstekend houdt, in de war. Aan de rand van een theorie ontstaat de noodzaak voor serieuze, en vaak ook nieuwe wiskunde. Een prachtig voorbeeld is het werk van Stephen Hawking in de jaren 60, toen hij nog geen kermisattractie was. De algemene relativiteitstheorie van onze man van de 20e eeuw, Einstein dus, heeft oplossingen die zogenaamde singulariteiten bevatten. Dat zijn punten waar de theorie geen zeggingskracht meer heeft omdat bepaalde grootheden oneindig zijn. De oerknal is een voorbeeld, maar ook zwarte gaten zijn met singulariteiten verbonden.

Begin jaren zestig was de wiskunde die in de algemene relativiteitstheorie werd gebruikt vanuit modern oogpunt zeer primitief, hoewel zij vergeleken bij de genoemde janboerenfluitjeswiskunde bepaald geavanceerd aandoet. Met die wiskunde kon vrijwel niets zinnigs over singulariteiten in het heelal worden gezegd. Maar samen met Roger Penrose, een ander voorbeeld van iemand die aan zijn overigens terecht verkregen roem is bezweken en een potsierlijke figuur is geworden, ontwikkelde Hawking wiskundige technieken die hem, gecombineerd met zijn nog steeds onovertroffen fysische inzicht in de zwaartekracht, in staat stelde precies te zeggen wat singulariteiten zijn en wanneer ze optreden.

Het antwoord op de laatste vraag is: vrijwel altijd. Dit was een revolutionair inzicht over het heelal, dat zonder diepe wiskundige technieken nooit met enige plausibiliteit geopperd had kunnen worden. Net als Von Neumann schreef Hawking zijn werk op jonge leeftijd neer in een schitterend boek: *The Large Scale Structure of Space-Time* (met G.F.R. Ellis), ook ongetwijfeld een klassieker van de 20e eeuwse mathematische fysica.

Een ander voorbeeld van de grens van een fysische theorie, waar overigens bijna

al mijn werk van de afgelopen tien jaar over gaat, is het verband tussen de klassieke en de quantummechanica. Heisenberg, Schrödinger, Einstein, Von Neumann, Bohr, allemaal zagen ze vrijwel onmiddellijk in dat dit verband problematisch is. De juiste manier om er naar te kijken is om de klassieke mechanica als een soort *rand* van de quantummechanica te zien.¹⁴ Maar om dit wiskundig uit te kunnen drukken is het formalisme dat Von Neumann voor de quantummechanica ontwikkelde niet afdoende.

U hoopt nu misschien dat ik, hierdoor gedwongen, eindelijk eens ophou over die man, maar niets is minder waar. Ik ben zelfs van plan na mijn emeritaat een wiskundige biografie van hem te gaan schrijven, want die bestaat nog niet.

Operator-algebra's

Von Neumann zelf werd, om een aantal redenen die los staan van de problemen met de klassieke limiet, al snel ontevreden over zijn Hilbert-ruimte formalisme van de quantummechanica.¹⁵ Zijn eerste reden was dat hij op grond van zijn werk aan entropie, en meer in het algemeen van zijn ideeën over de grondslagen van de kansrekening, van mening was dat ieder fysisch systeem een a priori toestand van maximale wanorde moet bezitten. Dat bleek voor een quantumstelsel met oneindig veel energieniveaus, hetgeen het fysisch relevante geval is, in zijn oorspronkelijk formalisme niet zo te zijn.

Een ogenschijnlijk geheel ander argument, dat uiteindelijk tot dezelfde conclusie zou leiden, was dat Von Neumann als eerste het diepe verband tussen quantummechanica en projectieve meetkunde op waarde schatte. Hij zag in die context in, dat een Hilbert-ruimte niet het juiste oneindig-dimensionale analogon van een Euclidische ruimte is. Tevens ontdekte hij op grond van zijn eerdere werk aan de logica de mogelijkheid om ieder positief reëel getal als dimensie van een gegeneraliseerde projectieve meetkunde op te laten treden.¹⁶

Deze motivatie, die nog werd versterkt door zijn inzicht in de moeilijkheden die bij de decompositie van unitaire representaties van niet-kompakte groepen op kunnen treden, bracht Von Neumann ertoe de theorie van operator-algebra's op Hilbert-ruimten te ontwikkelen. Hij deed dit, gedeeltelijk samen met zijn assistent Murray, van 1935–1940.¹⁷ Om de loftrompet maar weer op te steken: dit werk is wel beschreven als 'perhaps the most original major work in mathematics in the twentieth century'.¹⁸ Vele wiskundige ideeën

van Von Neumann, zelfs die uit de logica, maar in het bijzonder die aangaande de quantummechanica, komen in deze theorie terug.

In ieder geval is gebleken dat, afgezien van hun intrinsieke wiskundige waarde, deze *von Neumann algebra's*, zoals ze tegenwoordig heten, precies het technisch apparaat leveren om de grenzen en randen van de quantummechanica te kunnen onderzoeken. Een kleine wijziging in Von Neumanns definitie, die in 1943 door Gelfand en Neumark werd voorgesteld,¹⁹ leidt tot de zogenaamde *C*-algebra's*, welke in dergelijk onderzoek eveneens een hoofdrol spelen. Ik zal hier vandaag verder geen onderscheid tussen maken, en over beide als operator-algebra's spreken.

Waar tienduizenden wiskundigen en mathematisch fysici het oorspronkelijke Hilbert-ruimte formalisme van Von Neumann dagelijks gebruiken, behoren de klanten van de operator-algebra's tot een kleine sekte, die nog geen 100 leden heeft. Direct na het werk van Von Neumann zelf werkte jarenlang zelfs helemaal niemand aan dit onderwerp, maar na 1945 krabbelde het aantal operator-algebraïci, vooral vanwege de formidabele reputatie van Von Neumann, langzaam omhoog.²⁰

De huidige sekteleider is de Franse wiskundige Alain Connes, die als wiskundige minstens zo virtuoos is als Von Neumann, maar zich politiek gelukkig afzijdig houdt. Dit is, zoals hij eens vertelde, vanwege de geweldige afkeer die hij eind zestiger jaren tegen zijn collega Grothendieck en diens omgeving van Parijse intellectuelen en andere communistische poseurs had.²¹ Connes, die zelf uit de omgeving van Marseille komt als zoon van een reclasseringsambtenaar, probeerde als student dan ook een onderwerp te vinden dat zo ver mogelijk van de algebraïsche meetkunde en getaltheorie van Grothendieck vandaan lag. Dit leidde hem tot de operator-algebra's, een zegening waar het gebied nog steeds op drijft. Zijn uitzonderlijke talent werd in 1982 met de Fields Medal, de hoogste prijs in de wiskunde, beloond.²²

We hebben dus nu de operator-algebra's, waarmee men de diepere aspecten, en in het bijzonder de randverschijnselen van de quantummechanica kan beschrijven. Behalve de klassieke limiet valt daar ook de beschrijving van systemen met oneindig veel vrijheidsgraden onder, zoals quantumveldentheorieën en oneindig grote thermodynamische systemen.²³ Met pogingen die twee te combineren is overigens mijn loopbaan als wetenschappelijk onderzoeker begonnen.²⁴

Maar wat speelt in de klassieke mechanica

de rol van een operator-algebra? De klassieke mechanica is ongeveer 250 jaar ouder dan de quantummechanica, dus je zou verwachten dat de betreffende structuur ook wel ouder zal zijn dan Von Neumanns quantummechanische operator-algebra's. Dat is tot op zekere hoogte ook het geval, want Poisson vermeldt de naar hem genoemde haakjes al in 1811 in zijn beroemde werk *Traité de Mécanique*. En Dirac zag al in 1926 in dat het klassieke analogon van de algebraïsche structuur van de quantummechanica precies door deze Poisson-haakjes wordt beschreven.²⁵ Maar pas in 1976 formuleerden Kirillov en Lichnerowicz onafhankelijk de juiste definitie van klassieke operator-algebra's, die nu als *Poisson-algebra's* bekend staan.²⁶

Singulariteiten

Een operator-algebra leeft natuurlijkerwijze op een Hilbert-ruimte; dat was het uitgangspunt van Von Neumann, en een latere stelling van Gelfand en Neumark zegt dat je operator-algebra's inderdaad altijd op die manier kunt realiseren.²⁹ Analooft leeft een Poisson-algebra in eerste instantie op een zogenaamde Poisson-variëteit. De gebruikelijke fase-ruimtes van de klassieke mechanica zijn daar voorbeelden van. Maar er is een cruciaal verschil tussen de klassieke en de quanteuze situatie: niet alle Poisson-algebra's kunnen worden gerealiseerd als algebra's van differentieerbare functies op een gladde variëteit. Dat dit niet altijd kan heeft te maken met het mogelijk voorkomen van singulariteiten in klassieke systemen. Deze hebben geen analogon in de quantummechanica.

Hoe belangrijk zijn singulariteiten in de klassieke mechanica? Hoewel het hier technisch gesproken om een iets andere situatie gaat, breng ik in herinnering dat Hawking en Penrose bewezen dat in de algemene relativiteitstheorie singulariteiten niet uitzonderlijk zijn, zoals voorheen werd gedacht, maar generiek. Zo is het ook in de klassieke mechanica, waar ik de veldentheorie gemakshalve bij reken. Dit komt door het optreden van symmetrie. Symmetrie wordt vaak als het hoogste en schoonste in de natuur gezien, maar in de klassieke mechanica geldt: hoe meer symmetrie, hoe meer singulariteiten.²⁷

Dit heeft te maken met een opmerkelijk aspect van de wiskundige beschrijving van de natuur. Een theorie met veel symmetrie beschrijft namelijk vaak een fysisch systeem waarvan de 'observabele' grootheden juist invariant zijn onder de symmetrie. De observabelen vormen aldus equivalentieklassen, en de ruimte van dergelijke klassen is meestal



Stephen Hawking ten tijde van zijn van zijn promotie aan de universiteit van Oxford

singulier, zelfs als de oorspronkelijke theorie van alle variabelen dat niet was. In de natuurkunde treedt iets dergelijks op in alle belangrijke theorieën, zoals de algemene relativiteitstheorie en de Yang-Mills theorie (dat wil zeggen een niet-abelse ijktheorie).²⁷ Singulariteiten als de oerknal en zwarte gaten hebben hier indirect mee te maken: een pseudo-Riemannse metriek die een singuliere ruimte-tijd beschrijft is zelf een singulier punt in een geschikte ruimte van equivalenten-

tieklassen van dergelijke metrieken.

Zowel in de algemene relativiteitstheorie als in andere klassieke systemen is het in singuliere punten niet meer duidelijk wat de theorie betekent. Aan de andere kant is de natuur quantummechanisch, zodat een realistisch klassiek model altijd de klassieke rand van een quantumtheorie zou moeten zijn. Ik heb al opgemerkt dat quantumsystemen geen singulariteiten kunnen hebben, zodat de klassieke singulariteiten het gevolg moeten zijn



Alain Connes

van het nemen van de klassieke limiet. Op die manier zou de oerknal dus ook niet echt hebben kunnen plaatsvinden; het is een soort illusie die optreedt wanneer we door een klassieke bril naar een bepaalde quantumtheorie kijken. Een ook de singulariteit in het centrum van een zwart gat zou in de quantumgravitatie moeten zijn weggewassen. De quantummechanica geeft in principe een volledige beschrijving van het systeem, die in de klassieke limiet onvolledig wordt.

Om het ontstaan van klassieke singulariteiten vanuit de quantummechanica te kunnen begrijpen moeten we eerst weten wat de quantumtheorie is die een gegeven klassiek model met singulariteiten als klassieke rand heeft. Deze vraag is al moeilijk genoeg zonder singulariteiten; het is het onderwerp van de zogenaamde quantisatie-theorie.¹⁴ Die theorie is zowel wiskundig als fysisch bijzonder interessant, en vormt dus een mooi onderzoeksgebied voor een mathematisch fysicus. In mijn geval komt hier nog bij dat ik, zoals al gezegd, wil werken aan situaties waarin de fysica haar grenzen heeft bereikt en daardoor de noodzaak tot een diepere wiskundige beschrijving ontstaat. De quantisatietheorie van klassieke systemen met singulariteiten vormt voor mij dan ook een ideaal terrein.

Dit wil niet zeggen dat ik op dat gebied tot nu toe ook maar iets gepresteerd heb. Ik ben nog niet verder gekomen dan het organiseren van een conferentie over dit thema,²⁸ en daaruit weet ik dat er überhaupt nog niets belangrijks aan is gedaan. Toch ligt het raadsel van het heelal besloten in dit probleem. Uiteraard weten fysici dit; vrijwel al het latere werk van

Hawking gaat bijvoorbeeld over de quantisatie van singuliere kosmologische modellen. Maar de wiskunde die hij en zijn volgelingen daarbij gebruiken is, in schril contrast tot wat hij in zijn jeugd deed, zo ver beneden peil dat uit dit werk geen enkele conclusie kan worden getrokken. Aan de andere kant is in de zuivere wiskunde zeer veel gedaan aan de studie van singulariteiten op zich, maar is dergelijk werk niet of nauwelijks in verband gebracht met het quantisatieprobleem, laat staan met de oerknal of met zwarte gaten.

Niet-commutatieve meetkunde

Ik zal nu als afsluiting een methode schetsen waarmee de quantisatie van singuliere systemen misschien kan worden aangepakt. In deze methode komen vele componenten van mijn wetenschappelijke belangstelling samen, en ik verheug me er dan ook zeer op, hier aan te gaan werken. Ik heb eerder gezegd dat ik werk in de mathematische fysica, waarbij de fysische noch de wiskundige uitgangspunten controversieel zijn, als laf beschouw. Maar zelf ben ik op een andere manier laf, en wel door een wiskundige methode te gebruiken die bijzonder goed in de markt ligt. Ik doel hier op de *niet-commutatieve meetkunde*.

Ik heb al vermeld dat Alain Connes de sekte-leider van de operator-algebraïci is. Hij werd dat door tussen 1970 en 1980 een aantal uitzonderlijk moeilijke problemen op te lossen, waarvan de formulering in feite tot Von Neumann zelf terug ging. Maar in 1980 gaf Connes de theorie van operator-algebra's, en in feite een veel groter deel van de hedendaagse wiskunde, een geheel nieuwe draai. Wat Heisenberg in 1925 had gedaan voor de klassieke mechanica, deed Connes nu voor de klassieke wiskunde, en wel door deze als het ware te quantiseren.²² Net als Heisenberg had ook Connes uiteraard voorlopers, met name op het gebied van de K-theorie,²⁹ maar hij was onbetwist degene die dit gebied op de kaart heeft gezet, en tevens met vrijwel alle belangrijke ideeën kwam aanzetten. Dit laatste is overigens nog steeds het geval.

Zijn enthousiasme is kinderlijk, en zijn technisch kunnen bovenmenselijk. Deze combinatie maakt Connes bij zijn collega's zeer geliefd. Voor mij is hij in het bijzonder sympathiek omdat hij twijfelt aan de waarde van zijn wiskundige scheppingen. Ik kwam hem in april toevallig tegen in een broodjeszaak in Berkeley. Hij vertelde toen dat hij de week daarna op bezoek zou gaan bij Ed Witten, de paus van de stringtheorie en met Connes de grote trekker van de mathematische fysica.

Mijn onmiddellijke reactie was dat Witten niet lang geleden openlijk op de Nederlandse televisie had verklaard sinds een bepaald artikel van hemzelf in 1983 geen enkele twijfel meer te hebben aan de geldigheid van de stringtheorie.³⁰ Aangezien Connes daar niet in gelooft, en evenmin in de Grote Unificatie der Natuurkrachten die ook door stringtheorie wordt voorspeld, vroeg ik me aldus hardop af wat de zin van dit bezoek zou zijn. Twee verschillende geesten, beiden briljant, zijn nauwelijks denkbaar.

De vraag is hierbij wat naast dergelijke genieën de rol van het voetvolk in de wetenschap is. Zelf tot de laatste groep behorend, heb ik hier vaak over nagedacht. Het antwoord is dat Newton zich vergiste toen hij schreef dat hij verder had gezien dan anderen omdat hij op de schouders van reuzen had gestaan. Juist is de niet eens als grap bedoelde persiflage op Newton van de fysicus Gell-Mann, die eens opmerkte, dat hij verder had gezien dan anderen omdat hij omringd was door dwergen. Indien we in detail kijken wat Connes of Witten tot stand hebben gebracht, zien we dat zij voortdurend gebruik maken van kleine lemmaatjes, tussenresultaten en inzichten van hun minder begaafde collega's.

Zij zijn mede zo indrukwekkend omdat ze alles volgen en begrijpen. Zelfs bij voordrachten van onbekende figuren kan Connes ademloos op de eerste rij zitten luisteren. Van Bobby Fischer is bekend, dat hij zelfs bereid was met obers te schaken, in de hoop nog een ideetje op te pikken. Als deze omgeving van dwergen weg zou vallen, zou de productie van de reuzen ook opdrogen. Wat ook kan gebeuren is dat de laatsten geen belangstelling meer voor de eersten hebben, een verschijnsel dat men dikwijls ziet bij grote fysici op leeftijd. Die worden dan ook door het voetvolk terecht en zonder pardon op een zijspoor gerangeerd.

De motivatie van Connes bij de ontwikkeling van de niet-commutatieve meetkunde was in eerste instantie helemaal niet het revolutionariseren van de wiskunde, maar lag op een technisch vlak. Vrijwel alle voorbeelden die Von Neumann van zijn operator-algebra's gaf maakten gebruik van ergodentheorie. Connes zag in dat ook foliatietheorie interessante voorbeelden opleverde; als Fransman was hij uiteraard vertrouwd met dit gebied van de wiskunde. Hij kreeg toen het geniale idee om de operator-algebra die hij aan een foliatie toekende te zien als een soort quantummechanische beschrijving van de ruimte van bladen van de foliatie, die als klassieke ruim-

te vaak zeer singulier is. Het quantummechanische licht erin, dat de operator-algebra niet-commutatief is, terwijl de algebra van continue functies, die men naïef aan een klassieke ruimte toevoegt, commutatief is.

In de filosofie van Connes is de niet-commutatieve operator-algebra die hij aan een singuliere ruimte toekent nog altijd een beschrijving van de *klassieke* ruimte. Dit is conceptueel misschien verwarrend, maar wiskundig is het volkomen duidelijk. Mijn doel is daarentegen om bepaalde singuliere ruimtes die in de fysica een rol spelen echt te kwantiseren. Dit betekent dus dat ik de reeds niet-commutatieve algebra's die in de niet-commutatieve meetkunde optreden ook nog eens moet 'kwantiseren.' In de traditionele kwantisatie-theorie is deze situatie paradoxaal, maar als je de klassieke mechanica als de rand van de quantummechanica ziet, is er geen enkel probleem.

Technisch gesproken moet hier een zeer specifieke deformatie-theorie van operator-algebra's worden gebruikt, te weten de E-theorie van Connes en Higson.^{22,29} De string-theoretici beginnen net aan K-theorie te wennen, en daar is E-theorie een soort kwadraat van. Tot nu toe is de vooruitgang in de fysica vaak ontstaan door het nemen van de wortel in plaats van het kwadraat, zoals in de Dirac-vergelijking en in het concept van supersymmetrie, maar daar brengt E-theorie mogelijk verandering in. Ik ben in ieder geval benieuwd hoe het E-theoretisch gedeformeerde niet-commutatieve heelal er uit zal zien!

Theoretische versus mathematische fysica

'Wiskunde aan de grenzen van de natuurkunde' het klinkt aardig en ik hoop te hebben uitgelegd wat ik daarmee bedoel. Maar het is zeker niet de enige soort mathematische fysica die ik respecteer. Bij de vraag wat de mathematische fysica respectabel maakt, dringt de vergelijking met de theoretische fysica zich op, het gebied waar ik ooit in ben begonnen. Het grootste verschil tussen de theoretische en de mathematische fysica ligt in het waarheidscriterium. Uitspraken en afleidingen in de theoretische fysica kunnen wiskundig nog zo rammelen, als ze de uitkomst van een experiment correct voorspellen zijn ze waar. De mathematische fysica daarentegen heeft zich het waarheidsbegrip van de wiskunde toegeëigend: een artikel in de mathematische fysica moet fysisch hooguit potentieel relevant zijn, maar wiskundig moet het juist zijn.

Hier wordt overigens door Witten de hand mee gelicht, maar dit recht moet strikt voorbehouden blijven aan dergelijke mensen met

uitzonderlijk inzicht in wat wiskundig mogelijk maar misschien nog niet bewezen is. De fysicus Paul Dirac speelde deze kaart ook met groot succes, en wordt dan ook terecht door zowel fysici als wiskundigen zeer bewonderd.

Zoals onlangs nog benadrukt door Ludwig Faddeev,³¹ zal in ieder geval in de context van de hoge-energie fysica een competitie ontstaan tussen de theoretische en de mathematische fysica. Ik geloof dat de laatste die zal gaan winnen. De wiskundige structuur en correctheid van een fysische theorie zullen bij het opdrogen van experimentele resultaten, dat ons in de hoge-energie fysica vroeg of laat te wachten staat, het belangrijkste criterium zijn om voor die theorie te kiezen. De fysische waarheid van een als finaal bedoelde theorie zullen we evenwel nimmer vast kunnen stellen.

Politiek

Na de bovenstaande speculatie te hebben uitgesproken keer ik nu met beide benen terug op de grond. Een hoogleraar is, of hij het wil of niet, naast wetenschappelijk onderzoeker en docent ook bestuurder. Daar wil ik nu iets over zeggen.

Tot de scheidende minister-president Kok. Als 'landsvader', om een germanisme te gebruiken, verdient u groot respect. Na Rembrandt, Van Gogh, en Cruyff, kunnen we nu als Nederlander in het buitenland weer met iemand voor de dag komen. Het vaak gehoorde verwijt dat u over geen visie zou beschikken is dan ook geheel onjuist. Als geen ander vertegenwoordigt u namelijk de visie dat Nederland een land van *laders en lossers* moet worden. Niet 'Nederland kennisland', een kreet die de nog steeds onder bezuinigingen bloedende universiteiten slechts als affront kunnen beschouwen, maar 'Nederland distributieland!' En zelfs binnen uw visie geniet de overslag van containers klaarblijkelijk de voorkeur boven het openbaar vervoer van personen. Dagelijks is mijn trein te laat, als hij al rijdt. Het achterwege blijven van de noodzakelijke investeringen in het bestaande spoor geschiedde vooral ter financiering van de *Betuwelijn*, het meest waanzinnige infrastructurele project sinds Voorzitter Mao voorstelde om de natuurlijke loop der grote rivieren in China om te keren. Het schitterende landschap tussen Arnhem en Nijmegen, dat mij nu nog dagelijks genoegzaam verschaft, zal als blijvende herinnering aan u en uw ministers voorgoed worden verwoest.

Tot Collegevoorzitter Noorda. Omdat mijn beoogde trein niet reed, moest ik het begin van uw rede bij de opening van het huidige academisch jaar missen, maar wat ik nog kon horen was mij uit het hart gegrepen. Zeer juist was uw kritiek op de overheid, dat het herverdelen van onderzoeksgelden door middel van trendy stimuleringsprogramma's het tegendeel van *goed* is, namelijk *goed bedoeld*. Hoe merkwaardig in dit licht dat uw eigen College van Bestuur met een cumulatieve jaarlijkse bezuiniging van 2% zeer goed lopende onderzoeksinstituten als het Korteweg-De Vries Instituut voor Wiskunde financieel met de rug tegen de muur zet, met het doel zaken als *Aidsonderzoek* aan de UvA te stimuleren!

Tot dekaan Hoogland. Als student zat ik in alle mogelijke raden die al lang niet meer bestaan en tot voor kort wees ik het *Amsterdamse model* met de haar zo eigen *baasjescultuur* vol ergernis af. Maar mijn benoeming heeft me de ogen geopend voor de noodzaak tot efficiëntie en krachtige besluitvorming, waarbij ik overigens op wil merken dat toch nog twee studenten zijn geraadpleegd. Ik zal mij dan ook verder loyaal opstellen, mede onder het motto: *If you can't beat 'em, join 'em*.

Tot NWO. Uw *Thema's met Talent* bevatten geen enkel wiskundig onderwerp, en afgezien van de modieuze nanotechnologie ook geen fysisch onderzoeksgebied. Ik heb in deze oratie beargumenteerd dat de naar mijn smaak meest invloedrijke man van de 20e eeuw een wiskundige was, terwijl degene die officieel is gekozen het beroep van theoretisch fysicus uitoefende. De belangrijkste technologische ontwikkeling sinds de computer, het internet, komt mede voort uit de hoge-energiefysica. Geeft dit u niet te denken?

Afgezien hiervan heb ik overigens niets dan lof voor NWO en zo mogelijk nog meer voor haar schoondochter de FOM; ik mag dan ook bepaald niet klagen over de steun uit de tweede geldstroom die ik tot nu toe heb mogen ontvangen. Toch geniet ik iedere maand weer als Ad Lagendijk u in de *Volkskrant* weer in uw hemd zet!

Tot de UvA, NWO, en de EC. Alle drie legt u tegenwoordig strategische criteria aan ter verhoging van de kans op, en soms zelfs als enige mogelijkheid tot financiering van onderzoeksvoorstellen. De zuivere wiskunde en de mathematische fysica kunnen onmogelijk aan deze criteria voldoen zonder zichzelf uit te verkopen. Deze gebieden staan zo van drie onafhankelijke kanten onder druk. Als de wis-

kunde of de mathematische fysica wél bij de Thema's met Talent of andere strategische onderwerpen had gezeten was ik overigens wel rijker, maar nauwelijks gelukkiger geweest. Of het veld nu vooraf wordt geraadpleegd of niet, het aanwijzen van speciale aandachtsgebieden in de wetenschap heeft tot nu toe met name de atoombom en de vanuit wetenschappelijk oogpunt idiote vluchten naar de maan opgeleverd.

Mijn eerste daad als bestuurder van het FOM-GBE Samenwerkingsverband Mathematische Fysica was het afschaffen van de zogenaamde *Speerpunten*.

Dankwoord

Omdat ik ondanks het zojuist gezegde vandaag in een uitstekende bui ben, wil ik, zo-

als de traditie overigens ook voorschrijft, deze oratie afsluiten met een dankwoord.

De stamvader van het geslacht *Landsman* was de zeerover *Ivandirkie*, die voor zijn bescherming van de Nederlandse koopvaardij-schepen door de overheid werd beloond met een landgoed in het Westfries Jisp. Hem zou ik dus voor mijn bestaan en welvaart moeten bedanken. Omdat ik zo nog wel even door zou kunnen gaan, beperk ik mij tot de drie personen die de meest recente fase in mijn loopbaan mogelijk gemaakt dan wel veraangenaamd hebben.

Robbert Dijkgraaf en Tom Koornwinder van het Korteweg de Vries Instituut voor Wiskunde van de Universiteit van Amsterdam wil ik ex aequo noemen. Zij hebben zowel mijn komst van Cambridge naar Amsterdam mogelijk ge-

maakt, overigens ondersteund door een Fellowship van de KNAW, als mijn huidige benoeming geïnitieerd. En dat nog wel ondanks mijn weinig enthousiaste houding ten opzichte van zowel de stringtheorie als een aantal bestuurlijke ontwikkelingen binnen ons instituut. Hier past dus zowel dank als respect.

Omdat vrijwel alle uitspraken van de theoretische natuurkunde logisch gezien contradicties zijn, is het opmerkelijk dat een theoretisch fysicus en een logicus toch zaken kunnen doen. Aan Ieke Moerdijk dank ik het feit dat ik mijn onderzoeksbelangstelling in Nederland tot op zekere hoogte kan delen, waarbij het een bijzonder genoeg was de opkomst van Marius Crainic mee te maken. ☞

Noten

- 1 <http://www.time.com/time/time100/poc>
- 2 R. Rhodes, *The Making of the Atomic Bomb* (Simon and Schuster, New York, 1986).
- 3 A. Fölsing, *Albert Einstein: Eine Biographie*, Hoofdstuk VII (Suhrkamp, Frankfurt, 1993).
- 4 H.H. Goldstine, *The Computer from Pascal to von Neumann* (Princeton University Press, Princeton, 1972) en W. Aspray, *John von Neumann and the Origins of Modern Computing* (MIT Press, Cambridge (MA), 1990).
- 5 S.J. Heims, *John von Neumann and Norbert Wiener: From Mathematics to the Technologies of Life and Death* (MIT Press, Cambridge (MA), 1980) en N. Macrea, *John von Neumann: The Scientific Genius Who Pioneered the Modern Computer, Game Theory, Nuclear Deterrence, and Much More* (Pantheon, New York, 1992). Deze twee boeken nemen diametraal tegenovergestelde standpunten in. Interessant zijn in dit opzicht ook de vele passages over Von Neumann in S. Ulam, *Adventures of a Mathematician* (Charles Scribner and Sons, New York, 1976).
- 6 *Bull. Amer. Math. Soc.* **64**, no. 3, part 2 (1958) is geheel aan het wiskundige werk van Von Neumann gewijd, evenals *The Legacy of John von Neumann* (American Mathematical Society, Providence, RI, 1990).
- 7 Zie met name Macrea, loc. cit.
- 8 J. Mehra and H. Reichenberg, *The Historical Development of Quantum Theory* (Springer, New York, 1982), waarvan Vol. 2 aan het werk van Heisenberg, en Vol. 5 aan dat van Schrödinger is gewijd.
- 9 W. Moore, *Schrödinger: Life and Thought* (Cambridge University Press, New York, 1989).
- 10 D.C. Cassidy, *Uncertainty: the Life and Science of Werner Heisenberg* (Freeman, New York, 1992).
- 11 Zie N.P. Landsman, 'Getting even with Heisenberg,' te verschijnen in *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.* **B**, voor een bespreking van de literatuur over dit onderwerp.
- 12 In het licht hiervan, alsmede van zijn bijdragen aan de theoretische fysica, die niet of nauwelijks onderdoen voor die van Einstein, zou ook Heisenberg een goede kandidaat voor *Person of the 20th Century* zijn.
- 13 *De Toekomst van het Wiskunde-Onderzoek in Nederland*, Verkenningen, deel 1 (KNAW, Amsterdam, 1999), p. 42.
- 14 N.P. Landsman, *Mathematical Topics Between Classical and Quantum Mechanics* (Springer, New York, 1998).
- 15 Zie M. Rédei, 'Why John von Neumann did not like the Hilbert space formalism of quantum mechanics (and what he liked instead),' *Stud. Hist. Philos. Modern Phys.* **27** 493–510 (1997) en J. Bub, 'Hidden variables and quantum mechanics – a sceptical review,' *Erkenntnis* **16**, 275–293 (1981).
- 16 J. von Neumann, *Collected Works, Vol. IV: Continuous Geometry and Other Topics*, ed. A.H. Taub (Pergamon, Oxford, 1962). Zie ook J. von Neumann, 'Continuous geometries with a transition probability,' *Mem. Amer. Math. Soc.* **252**, 1–210 (1981) (ed. I.S. Halperin; manuscript uit 1937).
- 17 J. von Neumann, *Collected Works, Vol. III: Rings of Operators*, ed. A.H. Taub (Pergamon, Oxford, 1962).
- 18 I.E. Segal, 'Review of *Noncommutative Geometry* by A. Connes,' *Bull. Amer. Math. Soc.* **33**, 459–466 (1996).
- 19 I.M. Gelfand and M. Neumark, 'On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space,' *Math. Sbornik* **12**, 197–213 (1943).
- 20 R.V. Kadison, 'Operator algebras — the first forty years,' *Operator Algebras and Applications, Proc. Symp. Pure Math.* **38(1)**, 1–18 (American Mathematical Society, Providence, 1982).
- 21 Voor de ontmaskering van de Franse intelligentia zie L. van Middelaar, *Politicide: De Moord op de Politiek in de Franse Filosofie* (Van Gennep, Amsterdam, 1999) en A. Sokal en J. Bricmont, *Intellectual Impostures* (Profile Books, London, 1998).
- 22 A. Connes, *Noncommutative Geometry* (Academic Press, San Diego, 1994).
- 23 R. Haag, *Local Quantum Physics*, 2nd ed. (Springer, Berlin, 1996).
- 24 N.P. Landsman, *Concepts in Thermal Field Theory*, Academisch Proefschrift (Universiteit van Amsterdam, 1989).
- 25 P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (Clarendon Press, Oxford, 1930).
- 26 A.A. Kirillov, 'Local Lie algebras,' *Russ. Math. Surv.* **31**, 55–75 (1976) en A. Lichnerowicz, 'Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées,' *J. Diff. Geom.* **12**, 253–300 (1977).
- 27 Dit is met name benadrukt door J.E. Marsden en zijn school; zie zijn voorwoord met A. Weinstein in het in de volgende noot geciteerde boek voor volledige referenties. Zie ook R.H. Cushman and L.M. Bates, *Global Aspects of Integrable Systems* (Birkhäuser, Basel, 1997).
- 28 N.P. Landsman, M. Pflaum, and M. Schlichenmaier (eds.), *Quantization of Singular Symplectic Quotients* (Birkhäuser, Basel, 2001).
- 29 B. Blackadar, *K-theory for Operator Algebras*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- 30 Zie het interview met Witten in W. Kayser, *Het Boek van de Schoonheid en de Troost* (Contact, Amsterdam, 2000). Ik neem aan dat Witten hier doelt op L. Alvarez–Gaumé and E. Witten, Gravitational anomalies, *Nucl. Phys.* **B234**, 269–330 (1983). Het zelfde beeld komt naar voren in het onthullende interview met Witten in het algemeen verguisde maar mijns inziens zeer trefende boek van J. Horgan, *The End of Science: Facing the Limits of Knowledge in the Twilight of the Scientific Age* (Broadway Books, New York, 1997).
- 31 L.D. Faddeev, 'Modern Mathematical Physics: What It Should Be,' in *Mathematical Physics 2000*, eds. A. Fokas et al. (Imperial College Press, London, 2000).

Jan Bouwe van den Berg

Division of Theoretical Mechanics, University of Nottingham

Nottingham NG7 2RD, United Kingdom

Jan.Bouwe@nottingham.ac.uk

Column Wiskundigen in den vreemde

From Nottingham Forest

December 2000 promoveerde Jan Bouwe van den Berg aan de Universiteit Leiden. In januari 2001 werd hij voor de tijdsduur van twee jaar EPSRC-research fellow (Engineering and Physical Sciences Research Council) aan the University of Nottingham (UK). Een jaar lang houdt hij ons op de hoogte van zijn avonturen in Nottingham Forest.

Ik hoef hier in Nottingham geen onderwijs te geven. Dat geeft de mogelijkheid om tijdens het semester naar conferenties en op werkbezoek te gaan. Maar geen onderwijs is ook een gemis. Als bij het onderzoek niks lukt dan kun je altijd nog voldoening halen uit een goed verlopen college waarin een slimme vraag is gesteld. Aan het begin van het semester heeft mijn kamergenote, die wel college geeft, een pak voorbedrukte transparanten gekregen aan de hand waarvan zij de colleges moet geven. Dat vind ik toch niet zo'n aantrekkelijk idee; les geven komt later wel weer. De reden voor die voorbedrukte transparanten is trouwens dat er parallel-sessies zijn en men wil garanderen dat dezelfde stof behandeld wordt.

Het onderwijs is in Engeland veel gestroomlijnder dan ik gewend was. Als je netjes doorwerkt kun je hier in zes jaar afstuderen en promoveren terwijl dat in Nederland negen jaar kost. En daar lijkt de invoering van de Bachelor/Masterstructuur niks aan te veranderen.

In Engeland zit die Bachelor/Masterstructuur dan ook een beetje anders in elkaar. Na drie jaar halen studenten hun Bachelordiploma, waarna een minderheid ervoor kiest om er nog een Masterjaar aan vast te plakken. De meesten gaan gewoon een baan zoeken. Zo'n Masterdiploma is wel uiterst geschikt als oriëntatie-jaar voor studenten die, 21 jaar oud, nog niet precies weten wat ze willen. In dat jaar kunnen studenten zowel onderwijs volgen als ervaring met onderzoek opdoen. Om te promoveren heb je dat Masterdiploma helemaal niet nodig; dat kun je direct na je Bachelor al gaan doen.

In Nederland duurt een Masteropleiding in de wiskunde niet één maar twee jaar. Het is bovendien de bedoeling dat vrijwel alle Bachelor-afgestudeerden zo'n Masteropleiding gaan volgen, en pas met een Masterdiploma op zak kun je gaan promoveren. Het promotieonderzoek duurt dan ook weer een jaar langer dan in Engeland en zo komt het verschil op drie jaar.

Het β -convenant, de afspraak van de Nederlandse universiteiten met de minister over de vijfjarige studieduur, werd destijds als een overwinning gevierd. Maar waarom moet de studie per sé zo lang mogelijk duren? Natuurlijk, sommige studenten vinden het, mits financieel mogelijk, heerlijk om lekker lang te studeren. Ik ken er echter ook genoeg die het na drie jaar wel gezien hebben en hun studie alleen voor het papiertje afmaken. Ik zou zeggen, biedt studenten de keuze en laat ze zelf bepalen wat goed voor ze is. De

Bachelor/Masterstructuur biedt die mogelijkheid. Niemand heeft er wat aan als de enige verandering is dat de stippellijn in de studie van het eerste naar het derde jaar verplaatst wordt.

Zo'n extra lange studie biedt natuurlijk ook allerlei mogelijkheden. Het heeft uiteraard geen zin om hetzelfde curriculum over een extra jaar te gaan uitsmeren. Maar je kunt de ruimte wel uitstekend gebruiken voor stages en aandacht voor presentatie en communicatie. Ook hebben studenten meer tijd om onderzoek te doen. Dat vinden ze over het algemeen ontzettend leuk en heeft als bijkomend voordeel dat ze worden warm gemaakt voor een promotieonderzoek.

In het β -convenant is en passant ook met de minister afgesproken dat het rendement na het eerste studiejaar zal worden verhoogd tot 90%. Dat was in het Angelsaksische systeem immers ook haalbaar gebleken.

In Nottingham verlaat inderdaad meer dan 90% van de studenten na drie jaar met een Bachelordiploma de universiteit (of vier jaar voor een Master). De regels zijn hier echter ook totaal anders dan in Nederland. Elk jaar moet je genoeg punten halen, anders mag je niet door naar het volgende en verlies je dus gewoon een heel jaar (plus collegegeld). Voor een tentamen ben je geslaagd wanneer je 40% van de punten hebt gehaald, en zelfs 30% is een 'zachte' onvoldoende die gecompenseerd kan worden. Als je slechte cijfers haalt is dat je eigen probleem; uiteindelijk wordt een gewogen gemiddelde berekend en krijg je een diploma uit een bepaalde categorie: first class, upper second of lower second. Is het echt bar en boos dan krijg je zelfs een 'ordinary' degree in plaats van een 'honours' degree. Elke student, en werkgever, weet wat dat betekent. Terwijl studenten de studie en masse doorlopen geeft zo'n differentiatie in diploma's ze de mogelijkheid zich te onderscheiden. Ten slotte, wanneer je hertentamen doet dan moet je daar per stuk voor betalen; maar wat belangrijker is, bij een hertentamen kan je cijfer nooit hoger worden dan 40%.

Je hoort wel eens dat het hoge slagingspercentage deels wordt veroorzaakt doordat Engelse universiteiten hun studenten aan de poort kunnen selecteren. Inderdaad zijn er in Nottingham voor elke plaats tien aanmeldingen. Daarbij moet men wel bedenken dat studenten zich bij heel veel universiteiten aanmelden en vervolgens kiezen, bijvoorbeeld voor een betere of meer prestigieuze universiteit. Al met al wordt de helft van de kandidaten uitgenodigd om in Nottingham te komen studeren (waarvan dan dus maar één op de vijf dat ook doet). Die discussie over selectie is eigenlijk onzin. We hebben in Nederland ook een prima selectie aan de poort: je moet je VWO-diploma gehaald hebben.



Luc Florack

*Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Biomedische Technologie
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
L.M.J.Florack@tue.nl*

Overzichtsartikel

Visuele perceptie en digi

Hoe kijkt de mens? Kan een computer interpreteren wat door een camera wordt waargenomen? Kan perceptie op een wiskundige manier worden gemodelleerd? Luc Florack, sinds 2000 universitair docent aan de Faculteit der Biomedische Technologie van de TUE, brengt in dit overzichtsartikel deze problemen met elkaar in verband.

Beeldverwerking — het bewerken of analyseren van beelden met behulp van de computer — is ontstaan uit de behoefte om de interpretatie van digitale beelden te vereenvoudigen met alle mogelijkheden die hedendaagse computers ons bieden. Haar ultieme raison d'être is het feit dat de mens een van nature visueel ingesteld dier is.

Een omvangrijk toepassingsgebied is medische beeldverwerking ter ondersteuning van diagnostiek en therapie. Daarnaast bestaat er een groot aantal terreinen waarin beeldverwerking een toenemende rol van betekenis krijgt, zoals seismiek, satellietwaarneming en robotiek. In al deze gevallen tracht men, gegeven een specifieke taakstelling, tot een interpretatie van een beeld te komen. Om sturing te kunnen geven aan ons gedrag heeft ons visuele systeem eveneens een interpretatie van de optische omgeving nodig zoals die geprojecteerd wordt op ons netvlies.

Voor een doeltreffende interpretatie van een beeld is een ope-

rationele representatie van structuur — los van de betekenis die daar à posteriori aan wordt toegekend — een noodzakelijke voorwaarde. Aan een ongestructureerde datastroom kan immers nooit zinvolle betekenis worden ontleend. Een goede structuurrepresentatie is een afspiegeling van relevante, objectieve feiten op grond waarvan specifieke (subjectieve) interpretaties tot stand kunnen komen. Anders gezegd, interpretatie moet niet op hallucinaties stoelen en met het beschikbare bewijsmateriaal moet je niet knoeien. Maar hoe kan men dit alles wiskundig formaliseren? Daartoe is inzicht in de fysica van optische waarneming onontbeerlijk. Perceptieonderzoek biedt eveneens aanknopingspunten.

Het visuele systeem

In het visuele systeem blijkt een zekere scheiding te bestaan tussen structuurrepresentatie (opslag) enerzijds en interpretatie (perceptie) anderzijds, ofschoon elke poging tot exacte duiding hiervan enigszins arbitrair is. Je zou kunnen stellen dat de retina (oftewel het netvlies), de LGN (laterale geniculate nucleus, een onderdeel van de thalamus) en een gebiedje in de achterste hersenschors aangeduid als V1, een afspiegeling vormen van de optische omgeving in een universeel formaat geschikt voor uitlezing door tal van perceptiemodulen. Als zodanig is dit zogenaamde 'front-

tale beeldverwerking

end' feitelijk blind; van perceptie is hier nog geen sprake.

Het is instructief om naar een aantal electrofysiologische bevindingen bij zoogdieren te kijken. Met name bij apen en katten is er veel gemeten aan de respons van visuele cellen. De meetkarakteristieken hiervan worden 'receptieve velden' genoemd.

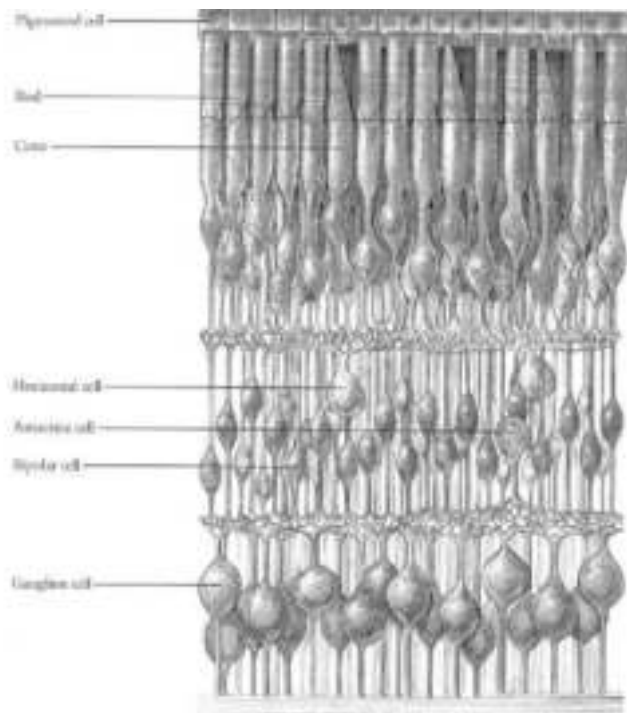
Receptieve velden ontstaan doordat het visuele systeem een aantal naburige fotoreceptoren (lichtgevoelige cellen in het netvlies) mobiliseert tot een legertje dat zijn collectieve bijdrage doorgeeft aan één enkele ganglioncel. Elke receptor legt daarbij zijn eigen gewicht in de schaal. De gewichtsfactor hangt af van de relatieve positie van de receptor en is bovendien gemoduleerd in de tijd. Zodoende ontstaat er een zeker spatiotemporeel weegprofiel. De signalen van de afzonderlijke fotoreceptoren, zeg maar de 'pixels' van het netvliesbeeld, worden dus *als zodanig* genegeerd. Eén enkele receptor kan bijdragen aan een veelheid van over lappende receptieve velden. Omgekeerd ontvangt een receptief veld van één enkele ganglioncel ingangssignalen van (meestal) een groot aantal receptoren. Een ruwe schatting van de gemiddelde convergentiefactor in het menselijke visuele systeem kan afgeleid worden uit het empirische feit dat het netvlies zo'n honderd miljoen receptoren (kegeltjes en staafjes) en ongeveer één

miljoen ganglioncellen telt. Zie figuur 1.

De uitgangssignalen worden via de ganglionaxonen, samengebundeld in de optische zenuw, doorgesluisd naar visuele cellen elders in de hersenschors. Door soortgelijke spatiotemporele weging als bij de retinale ganglionen vindt hier wederom formatie van karakteristieke (meer complexe) receptieve velden plaats. Een fraai geïllustreerd boek over de architectuur van de eerste stadia van het visuele systeem is Rodieck [1].

Men kan de weegprofielen van receptieve velden in principe in kaart brengen door in een geschikte visuele zenuwcel te prikken en haar axonsignaal te bestuderen als functie van de positie van een klein lichtstipje op het netvlies, zie figuur 3. Dit is de welbekende methode van 'reverse engineering' met behulp van een glijdende ' δ -functie', gedefinieerd 'onder de integraal' door $\delta(z) = 0$ voor alle $z \neq 0$ en $\int_{\Omega} \delta(z) dz = 1$ voor elk open volumegebied Ω rond de oorsprong. Alleen als het lichtstipje, bij benadering voor te stellen als een δ -functie, zich in het receptieve veld van de

Der Verstand vermag nichts anzuschauen, und die Sinne nichts zu denken.
Immanuel Kant



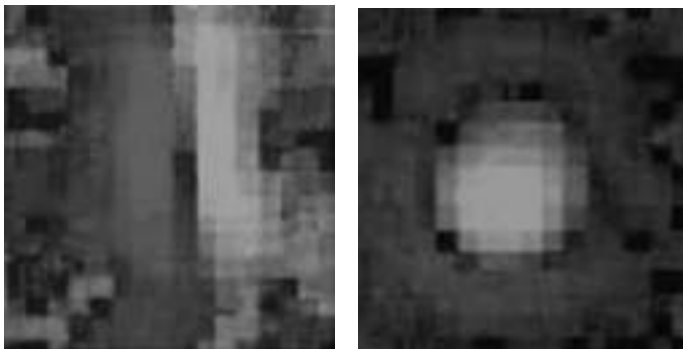
Figuur 1 Lichtgevoelige fotoreceptoren projecteren via diverse typen tussencellen op ganglioncellen. Licht valt, wellicht tegenintuïtief, binnen van beneden. Bron: [3]. From EYE, BRAIN, AND VISION by D.H. Hubel, copyright 1988, 1995 by Scientific American Library. Reprinted by permission of Henry Holt & Co., LLC.

aangeprikte cel bevindt vangt men een significant signaal op, waarvan de sterkte evenredig is met die van het plaatselijk weegprofiel:

$$\delta \star \phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(z - x) \phi(z) dz = \phi(x).$$

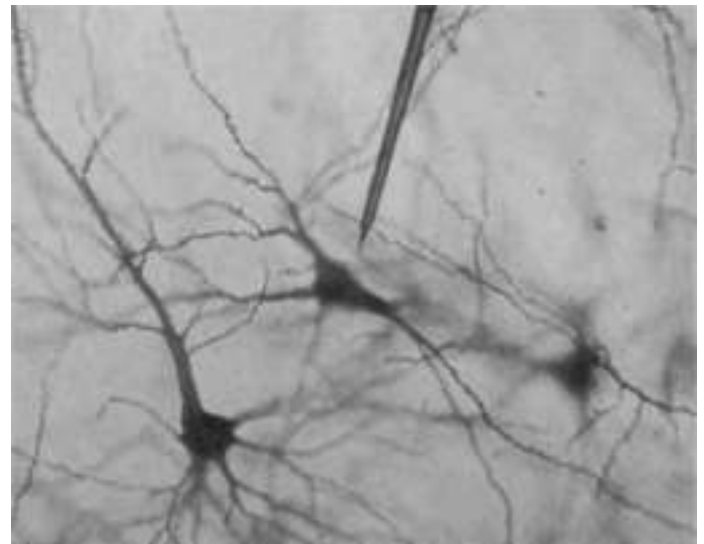
De infix operator $\star$ staat voor correlatie. Neurofysiologisch gezien bepaalt de vuurfrequentie van een cel de sterkte van het signaal. Aangezien een cel in rust een zekere spontane activiteit heeft kan dit zowel negatief als positief zijn. Men spreekt dan van inhibitie of excitatie, als gevolg waarvan de vuurfrequentie lager dan wel hoger wordt dan de 'nulactiviteit'. Door op deze manier te werk te gaan vindt men receptieve veldprofielen $\phi(x)$ zoals weergegeven in figuur 2. Veel receptieve velden in V1 blijken een zekere oriëntatievoorkeur te hebben, zie figuur 4.

Aanvankelijk werden receptieve velden opgevat als elementaire 'vormdetectoren' met namen als 'edge', 'bar', 'centre-surround', 'grating detector', enzovoort, al naar gelang de vorm



Figuur 2 Voorbeelden van gemeten receptieve velden. **Links.** 'Edge detector' cel. Georiënteerde profielen zoals deze komt men tegen in V1. **Rechts.** 'Centre-surround' cel. Dit is de typische structuur van een receptief veld van een ganglioncel. Bron: Ralph Freeman Visual Neuroscience Lab, University of California, Berkeley.

van hun profiel. Zo heeft een typische ganglioncel een 'centre-surround' structuur (zoiets als een Mexicaanse hoed) bestaande uit een exciterend centrum omgeven door een inhiberende ring, of andersom; de twee varianten worden ook wel aangeduid met 'on-centre' en 'off-centre' en blijken paarsgewijs gegroepeerd voor te komen. Een 'edge detector' is een receptief veld met een exciterend en inhiberend deel aan weerszijden van een lijn, de vermeende 'edge', enzovoort. De voorstelling van receptieve velden als elementaire vormdetectoren in deze naïeve gedaante is echter niet erg zinvol en zelfs misleidend [2].



Figuur 3 Met behulp van 'single cell recording' kunnen receptieve velden in kaart gebracht worden door te registreren hoe een cel reageert op een gecontroleerde netvliesstimulus. Bron: [3]. From EYE, BRAIN, AND VISION by D.H. Hubel, copyright 1988, 1995 by Scientific American Library. Reprinted by permission of Henry Holt & Co., LLC.

Gezien de overweldigende hoeveelheid 'wetware' die in het brein voor handen is zouden we à priori een enorme diversiteit aan receptieve velden verwachten. Afgezien van de grootte van hun spatiële drager — welke inderdaad grote variatie vertoont — is dit echter niet het geval voor wat betreft de vorm van de aange troffen profielen. Deze blijkt in de praktijk allesbehalve willekeurig. De vraag doet zich voor welk dwingend evolutionair principe ten grondslag zou kunnen liggen aan de kennelijk door de natuur uitverkoren deelverzameling van mogelijke profielen. Om dat te begrijpen volstaat het niet om te meten, daartoe moeten we theoretiseren. Ik zal hieronder trachten om vanuit een aantal ogenschijnlijk verschillende invalshoeken te komen tot een verklarend beginsel.

Algebraïsch principe

Overall in de primaire visuele cortex treft men receptieve velden aan en toch blijkt het aantal wezenlijk verschillende profielen in de praktijk zeer beperkt, om de gedachten te bepalen in de orde van tientallen. In de context van een lineair c.q. gelineariseerd systeem suggereert dit een gesloten algebraïsche structuur, aangezien de neuronale overdracht van een signaal in zo'n geval beschreven kan worden als een keten van convoluties van corresponderende overdrachtsfuncties. Voor de overdracht tussen opeenvolgende receptieve velden ϕ en ψ hebben we, bij gegeven netvliesbeeld f :

$$(f \star \phi) \star \psi = f \star (\phi \star \psi).$$

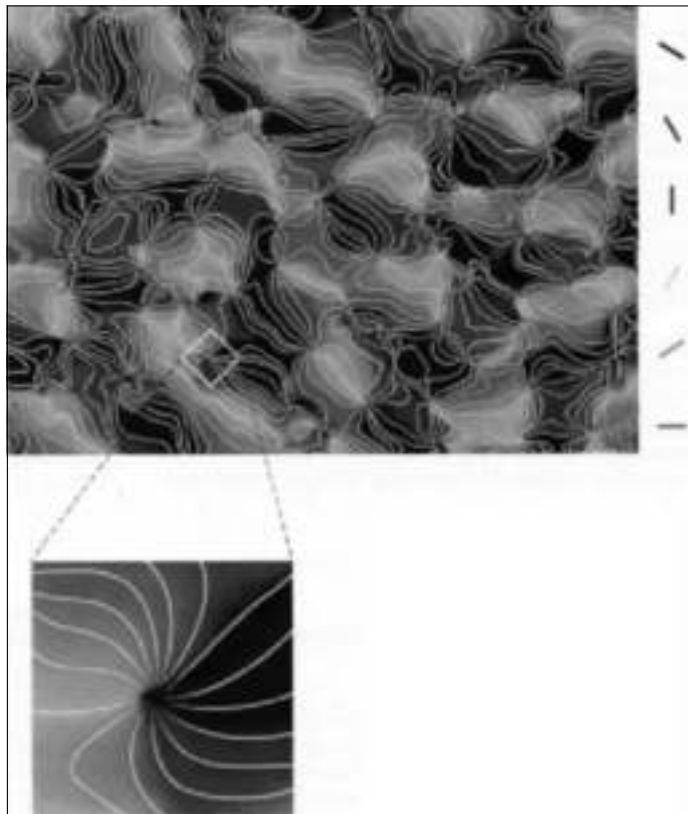
De infix operatoren $\star$ en $*$ symboliseren correlatie (lineaire bemonstering), respectievelijk convolutie:

$$f \star \phi(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(z - x) \phi(z) dz,$$

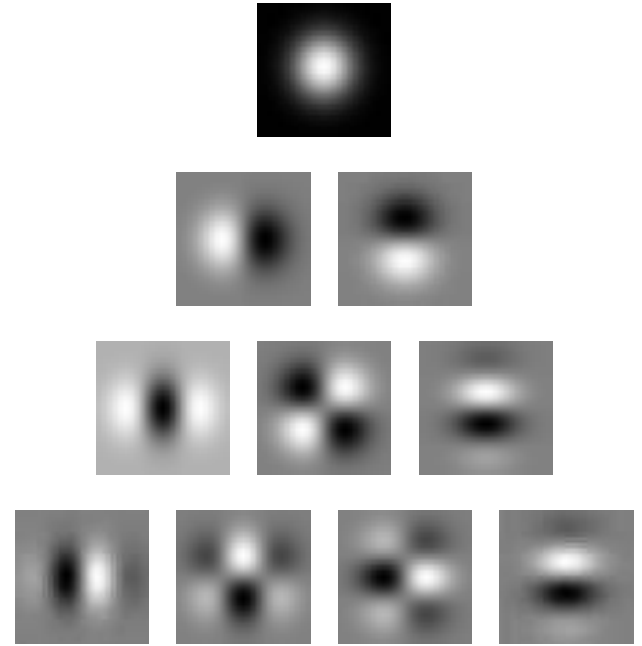
$$\phi * \psi(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \phi(x - z) \psi(z) dz.$$

Aangezien het effect van twee opeenvolgende correlaties met receptieve velden ϕ en ψ kennelijk equivalent is met dat geïnduceerd door een enkel, effectief receptief veld $\phi * \psi$, moet dit laatste, om redenen van consistentie met de electrofysiologische bevindingen, wederom een toelaatbaar profiel hebben. Dat wil zeggen, het moet passen binnen de beperkte klasse van profielen zoals we die in het visuele systeem daadwerkelijk aantreffen. Dit leidt tot een drietal voorwaarden: Ten eerste, als ϕ, ψ receptieve velden zijn, dan moet ook $\phi * \psi$ een receptief veld zijn. Ten tweede, de aldus ontstane convolutiealgebra moet ‘voldoende klein’ en, ten derde, fysiologisch plausibel zijn.

Een voor de empirische praktijk voldoende rijke klasse van functies die aan de eerste eis voldoet is de zogenaamde Schwartzruimte van gladde functies, welke ‘voldoende hard naar nul gaan op oneindig’ [5]. Deze functies zijn ‘vrijwel compact’ en er is er altijd wel een geschikt om bij goede benadering, dat wil zeggen binnen de meettolerantie, model te kunnen staan voor een gemeten receptief veld. Echter, juist omdat deze klasse zo buitengewoon



Figuur 4 Oriëntatiegevoelige cellen rond een vast gekozen punt in het visuele veld blijken keurig georganiseerd te zijn in zogenaamde corticale kolommen, waarvan dwarsdoorsneden een opvallende spaakwielstructuur vertonen (uitsnede). Cellen langs de spaken van één zo'n wiel hebben alle dezelfde oriëntatievoorkeur. Deze verloopt continu in transversale richting. Een corticale kolom is het neurofysiologisch analogon van een pixel, dat wil zeggen zij representeert één (kennelijk meerwaardig) beeldpunt van het visuele veld. Corticale kolommen voor naburige punten liggen op hun beurt netjes geordend langs het oppervlak van de visuele cortex (bovenste plaatje), een ontdekking waarvoor Hubel en Wiesel in 1981 de Nobelprijs ontvingen. Bron: [4].



Figuur 5 Schaalruimte-representatie van een tweedimensionale magnetische resonantie opname van een brein. Schaal (resolutie) neemt van links naar rechts toe (af).

groot is voldoet zij niet aan de overige voorwaarden. Het ligt dus voor de hand dat we ons beperken tot subalgebra's. De kleinste denkbare wordt gegenereerd door een genormeerde Gaussische functie $\phi_{\Sigma}(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, welke volledig bepaald is in termen van een positief definitieve symmetrische parametermatrix Σ :

$$\phi_{\Sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{\det \Sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2} x \cdot \Sigma^{-1} x \right].$$

Deze (positieve) functies genereren weliswaar een subalgebra die aan de tweede eis voldoet — immers $\phi_{\Sigma_1} * \phi_{\Sigma_2} = \phi_{\Sigma_1 + \Sigma_2}$ — ze stroken echter niet met niet-positieve cellen zoals die in figuur 2. We kunnen dit echter eenvoudig ondervangen door ook afgeleiden mee te nemen. Voor niet-negatieve geheeltallige multi-indices [6] α, β geldt dan:

$$\nabla_{\alpha} \phi_{\Sigma_1} * \nabla_{\beta} \phi_{\Sigma_2} = \nabla_{\alpha + \beta} \phi_{\Sigma_1 + \Sigma_2}.$$

Deze zogenaamde Gaussische familie [7] heeft alle gewenste eigenschappen en blijkt inderdaad goed te correleren met tal van gemeten receptieve velden in netvlies, LGN en V1 van apen en katten en wellicht ook de mens [8–9]. Figuur 5 toont een aantal Gaussische afgeleiden in $n = 2$ dimensies. Orde van differentiatie neemt toe van boven ($|\alpha| = 0$, dus $\alpha = (0, 0)$) naar beneden ($|\alpha| = 3$, dus $\alpha = (3, 0), (2, 1), (1, 2)$ of $(0, 3)$). Merk op dat de V1-cel van figuur 2 aardig overeenkomt met een eerste orde afgeleide, terwijl de ganglioncel eenvoudig verkregen kan worden door superpositie van de niet-gemengde tweede orde afgeleiden (de Laplacian).

Regularisatieprincipe

Een geheel andere invalshoek ontstaat door het visuele systeem te beschouwen in het licht van een regularisatieprincipe [10–11]. Aangezien de retinale stimulus f inherent ruisig en buitengewoon complex van structuur is, zou men kunnen opperen dat het visuele systeem hiervan een robuuste en vereenvoudigde afspiegeling tracht te construeren. Bruikbare informatie zit immers per



Figuur 6 Potentiële isofootvlakken door een Morse extremum. Dit laatste genereert volgens de impliciete functiestelling een niet-horizontale curve in de (x, t) -ruimte (t neemt toe naar boven). **Links.** Toelaatbaar. **Rechts.** Ontoelaatbaar.

definitie in die structuren die ondanks ruis toegankelijk zijn en bovendien heeft het visuele systeem nou eenmaal een beperkte verwerkingscapaciteit.

Tikhonov regularisatie gaat uit van het variationeel principe waarbij men door minimalisatie van een geschikt gekozen functionaal ('energie') een geregulariseerde functie g zoekt 'in de buurt van' de oorspronkelijke functie f . Laten we gemakshalve aannemen dat $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ en dat toelaatbare functies g tenminste glad zijn. Aangezien er geen reden is om ons te beperken tot eindige differentieerbaarheid (want welke orde zou om welke reden de voorkeur moeten genieten?) kiezen we een functionaal op $C^\infty(\mathbf{R}^n) \cap H^\infty(\mathbf{R}^n)$ waarbij $H^\infty(\mathbf{R}^n) = \cap_{k \in \mathbf{N}} H^k(\mathbf{R}^n)$, de doorsnede van alle Sobolevruimtes van eindige orde. Sterker nog, als $\|g\|$ de standaard $L^2(\mathbf{R}^n)$ -norm aanduidt, beperken we ons tot die functies g waarvoor de volgende norm gedefinieerd is voor alle $t > 0$:

$$\|g\|_t^2 = \sum_{|\alpha| > 0} \frac{t^{|\alpha|}}{\alpha!} \|\nabla_\alpha g\|^2.$$

De parameter t is geïntroduceerd uit fysische overweging, opdat alle termen dimensioneel compatibel zijn [12]: $\sqrt{t}$ is hier een natuurlijke lengte-eenheid.

Vervolgens postuleren we voor de kandidaatfuncties g een geschikte energiefunctie als een superpositie van 'potentiële' (f -afhankelijke) en 'kinetische' regularisatietermen:

$$E_t[g] = \|g - f\|^2 + \|g\|_t^2.$$

De rol van t blijkt onder andere uit inspectie van de limietgevallen $t \downarrow 0$ en $t \rightarrow \infty$. In het eerste geval verdwijnen de regularisatietermen en komt minimalisatie kennelijk overeen met L^2 -projectie op f : $g \sim f$. In het tweede geval zien we dat alleen $g \sim 0$ de energie binnen de perken houdt. Kennelijk is t , behalve een maat voor schaal, tevens een maat voor de regularisatiesterkte.

De algemene oplossing $u(t) = \arg \min_g E_t[g]$ volgt uit de Euler-Lagrange vergelijking en luidt: $u(t) = \exp(t\Delta) f$. Een equivalente formulering wordt verkregen door te differentiëren naar t :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \\ \lim_{t \downarrow 0} u = f, \end{cases}$$

waarmee het duidelijk wordt dat de expliciete oplossing wederom niets anders is dan correlatie, $u = f \star \phi_t$, met een genormeerde Gaussische (Greense) functie:

$$\phi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^n} \exp\left[-\frac{\|x\|^2}{4t}\right].$$

Deze komt overeen met de eerder besproken variant ϕ_Σ voor het isotrope geval $\Sigma = 2tI$.

Generalisatieprincipe

Als laatste hypothese zouden we kunnen veronderstellen dat ons visuele systeem een soort atlas aanlegt van de optische wereld, waarin het naar believen kan bladeren tussen fjnshalige en grofshalige 'kaarten' van onze omgeving, al naar gelang onze interesse uitgaat naar de details van een kleinschalig voorwerp dan wel naar de globale structuur van het gehele visuele veld. Omdat onze voorkeursschaal continu kan variëren moeten we hierbij eerder denken aan een continuümstructuur dan aan een atlas met discrete pagina's.

Het principe van een atlas is om voor elke gewenste schaal een overzichtelijke hoeveelheid informatie te presenteren binnen het kader van de bladspiegel. Dit houdt bijvoorbeeld in dat wanneer we willen uitzoomen, zeg van een overzichtskaart van Nederland naar een van heel Europa, we kleinschalige details zullen moeten weglaten, of liever gezegd, generaliseren (samenvatten tot globalere structuren). Zouden we met dezelfde resolutie blijven werken, dan zouden we een onwerkbaar hoeveelheid gegevens op één pagina krijgen. De intrinsieke schaal (inverse resolutie of 'korreligheid') moet evenredig zijn met de gewenste zoomfactor.

De vraag doet zich voor hoe we moeten generaliseren in geval van een (netvlies)beeld f . Een intuïtief noodzakelijke maar enigszins vage voorwaarde is dat er geen structuur mag ontstaan wanneer we resolutie verlagen (schaal vergroten). In één van zijn eerste artikelen over dit onderwerp stelt Koenderink de volgende operationele definitie voor [13]. Wederom gaan we uit van isotropie, hetgeen achteraf eenvoudig te generaliseren valt. Zij $t > 0$ een maat voor de intrinsieke schaal van onze optische 'kaart'. Bij afnemende resolutie, dus toenemende t , mogen isofoten — contouren van constante luminantie — wel verdwijnen, maar niet uit het niets ontstaan. Dit geschiedt uiteraard in extrema (maxima of minima), welke, als functie van t , paden in het (x, t) -domein definiëren. Lopend langs zo'n pad in positieve t -richting manifesteert een extremum zich hetzij als bron (creatiepunt) hetzij als put (annihilatiepunt) voor isofootcontouren — dit alles gaat goed zolang het extremum leeft en van het Morse-type is. Het laatste geval moet, aldus Koenderink, worden uitgesloten op grond van het atlasprincipe. Bijgevolg kunnen isofootvlakken in de (x, t) -ruimte zich alleen naar boven toe sluiten, zie figuur 6.

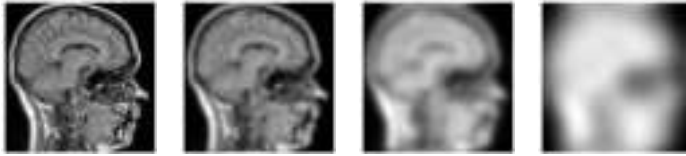
Zij $u(x, t)$ de representatie van het hoge resolutiebeeld $f(x)$ op schaal t . Op grond van bovengenoemde geometrische restrictie is eenvoudig af te leiden dat voor een willekeurig ruimtelijk extremum $x_e \in \mathbf{R}^n$ moet gelden dat

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Delta u > 0,$$

aangenomen dat $u \in C_1^2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+)$. De extra voorwaarde dat u lineair afhangt van het netvliesbeeld f levert, onder andere, de door eerder genoemde lineaire diffusievergelijking impliciet gedefinieerde oplossing [16]. Hiermee hebben we weer aansluiting gevonden bij voorgaande invalshoeken.

Biologische overwegingen

Er zijn enkele subtiliteiten die men niet over het hoofd mag zien wanneer men tracht een wiskundig model te relateren aan de werkelijkheid. In het bijzonder is het maar zeer de vraag of de para-



Figuur 7 Schaalruimterepresentatie van een tweedimensionale magnetische resonantie opname van een brein. Schaal (resolutie) neemt van links naar rechts toe (af).

metrisaties van de spatiële variabele x , de schaalparameter t en de intensiteitswaarde u , zoals die in bovenstaand model gehanteerd zijn, de biologisch relevante zijn en het is zelfs niet uitgesloten dat we ook de impliciete veronderstelling van een Euclidische ruimte moeten laten varen. In het algemeen zullen we dus een herparametrisatie moeten uitvoeren en eventueel onze metriek moeten aanpassen. In de diffusievergelijking is dit eenvoudig te verdisconteren door de isotrope Laplace operator te vervangen door een algemenere, zogenaamde Laplace-Beltrami operator op een Riemannse ruimte met metriek $G = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha \wedge dx^\beta$, waarvan de keuze der coëfficiënten aan de werkelijkheid moet worden getoetst. Voor de Euclidische ruimte vinden we dan de standaard diffusievergelijking terug. Intensiteit kunnen we herparametriseren middels een inverteerbare C^2 -functie γ , zeg $v = \gamma(u)$.

Het visuele systeem van de mens en andere zoogdieren wordt gekenmerkt door een fovea, een klein centraal gebiedje in het netvlies ten opzichte waarvan resolutie naar de periferie toe afneemt. Het menselijk netvlies is min of meer rotatiesymmetrisch en resolutie blijkt hier ongeveer omgekeerd evenredig te zijn met eccentriciteit. Dit kan redelijk goed gemodelleerd worden middels een conforme, rotatiesymmetrische metriek, die overal vlak is met uitzondering van het (singuliere) middelpunt [17]. Herparametrisatie van intensiteit leidt tot een speciale klasse van niet-lineaire diffusievergelijkingen voor *perceptuele intensiteit*, die zijn terug te voeren tot lineaire:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u, \\ \lim_{t \downarrow 0} u &= f, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{\alpha,\beta} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \nabla_\alpha (\sqrt{g} g^{\alpha\beta} \nabla_\beta u) + \mu(u) g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u \nabla_\beta u \right], \\ \lim_{t \downarrow 0} u &= f. \end{cases}$$

Hierin is $g = \det G$. De niet-lineariteit wordt bepaald door de functie $\mu(u)$ die van de fotonoverdrachtsfunctie afhangt: Zij f de fysische fotonflux en $\gamma' > 0$, dan is $\mu = (\ln \gamma')'$. Door geschikte keuze van γ , dus μ , kunnen we ervoor zorgen dat aan fenomenologische wetmatigheden, zoals de Weber-Fechner wet [18], voldaan is [19], terwijl $v = \gamma(u)$ aan de lineaire diffusievergelijking met beginvoorwaarde $g = \gamma(f)$ voldoet. In de beeldverwerking ligt de keuze voor lineariteit en Euclidische metriek echter het meest voor de hand.

Schaalruimte

Naast genoemde zijn er nog andere axiomatische uitgangspunten die leiden tot eenzelfde (x, t) - of *schaalruimterepresentatie* van een ingangsbeeld als die welke natuurlijke evolutie van biologische systemen lijkt te hebben voortgebracht. Figuur 7 toont een viertal schaalniveaus van een magnetische resonantie opname, verkregen door correlaties van het oorspronkelijke hoge-resolutie beeld met een viertal isotrope Gaussische testfuncties.

Het schaalruimtemodel impliceert dat men receptieve velden

kan opvatten als differentiaaloperatoren van eindige schaal en orde, inclusief de niet-triviale orde nul, zoals in figuur 7. Immers, het netvliesbeeld f wordt, zoals bekend, niet als zodanig door het visuele systeem benaderd. In plaats daarvan ontvangt de visuele hersenschors (afgeleiden van) correlaties van dit ingangsbeeld met receptieve velden die kunnen worden gemodelleerd door afgeleiden van Gaussische functies van diverse schalen. Merk nu op dat

$$\nabla_\alpha (f \star \phi_\Sigma) = (-1)^{|\alpha|} f \star \nabla_\alpha \phi_\Sigma.$$

Dit suggereert dat het voorstadium van het visuele systeem als een differentiaalgeometrisch substraat fungeert [20]: Receptieve velden in de vorm van geschaalde differentiaaloperatoren $(-1)^{|\alpha|} \nabla_\alpha \phi_\Sigma$ (rechterlid) genereren een multiresolutie lokale jetbundel van de optische wereld (linkerlid, voor een veelheid van schalen Σ en met $|\alpha| \leq N$ voor zekere [21] N). Dit is het 'universele formaat' waar eerder over gerept werd en waaruit perceptiemodulen elders in de visuele hersenschors vrijelijk kunnen putten om van betekenisloze data een betekenisvol percept te maken. Hoe dit precies in zijn werk gaat blijft vooralsnog een mysterie. Niettemin stelt de theoretische ansatz in dit artikel de wiskundige als geen ander in staat tot gerichte speculatie. Bijvoorbeeld, het ligt voor de hand dat aan het 'uitlezen' van afzonderlijke receptieve velden van vaste schaal een invariantiemechanisme ten grondslag ligt dat signalen (in ons model immers partiële afgeleiden) combineert tot coördinaatonafhankelijke *invarianten*. De voornamelijk laat-negentiende eeuwse literatuur over dit onderwerp is in de beeldverwerking dan ook weer uiterst actueel. Een recent boek over klassieke invariantentheorie is dat van Olver [22].

Wat het schaalruimtemodel echter bijzonder intrigerend maakt is de niet-triviale rol van de schaalparameter(s), waarvoor in de klassieke wiskunde geen pasklare antwoorden zijn te vinden. Het visuele systeem lijkt zijn onovertroffen prestaties te ontleen aan de *simultane* verwerking van de optische wereld *over een geheel interval van schalen* [23].

Relevantie voor beeldverwerking

Heuristiek heeft sedert de beginjaren van het digitale tijdperk ook in de beeldwetenschap tot het besef geleid dat beelden hun informatie slechts prijsgeven bij de gratie van een correcte inschatting van het relevante schaaldomein. Er zijn in de loop der jaren tal van veelbelovende multiresolutiemethoden ontwikkeld voor grof-naar-fijn analyse van beelden. Dit lijkt inderdaad de enige zinvolle aanpak om uiterst complexe data te benaderen. Vrijwel alle voorgestelde algoritmen zijn echter in meer of mindere mate ad hoc en heuristisch van aard. Sinds kort begint hier echter verandering in te komen.

Wanneer je resolutie verlaagt verdwijnen er, per constructie, isofoten uit een beeld. Veranderingen in functiewaarden treden geleidelijk op, veranderingen in functietopologie (kritieke punten en isofoten) echter schoksgewijs. Zulke plotselinge topologische overgangen worden geassocieerd met *singulariteiten* of *catastrofen*. De bijbehorende schalen vormen het singulariteitspectrum. Het bijzondere van de situatie ligt besloten in het feit dat dit alles geschiedt binnen onze schaalruimterepresentatie, dus binnen de oplossingsruimte van de diffusievergelijking bij gegeven beginvoorwaarde.

Damon heeft aangetoond dat er in het isotrope geval slechts twee typen generieke singulariteiten kunnen optreden [24], ervan

uitgaand dat aan het ingansgebeeld geen bijzondere eigenschappen toegedicht worden (ruis en meetonzekerheid zorgen ervoor dat dit laatste in de praktijk altijd het geval is; Damon beschouwt overigens ook ontappingsen die wiskundig gezien spannender zijn, maar met kans nul voorkomen). Een singulariteit behelst altijd een morsificatie van Morse kritieke punten in/vanuit een niet-Morse kritiek punt en verloopt altijd volgens het principe van 'ladingsbehoud'. De 'lading' van een Morse kritiek punt is hierbij gedefinieerd als het teken (± 1) van de determinant van de matrix van zijn locale tweede orde afgeleiden. De generieke singulariteiten van Damon vallen uiteen in annihilaties en (als $n > 1$) creaties van paren kritieke punten (in twee dimensies een extremum en een zadel) bij toenemende schaal. De laatste categorie lijkt op het eerste oog tegenintuïtief — er ontstaat in zekere zin structuur ondanks resolutieverlaging, maar is niet in strijd met het beginsel van Koenderink. Creaties doen zich in de praktijk echter wel minder vaak voor dan annihilaties en dat is ook begrijpelijk; als je resolutie maar voldoende verlaagt hou je uiteindelijk immers vrijwel geen structuur meer over. Statistische beschouwingen kunnen uitsluitel geven over de binaire kansverdeling op basis van de 'statistiek van natuurlijke beelden'.

Er is een stelling die zegt dat er bij compact gedragen, positieve, integreerbare functies f een schaal $T > 0$ bestaat zodanig dat er voor $t > T$ precies één kritiek pad overblijft, en wel een maximumpad [25]. De stelling biedt zelfs een scherpe afschatting voor T als functie van de straal R van het convexe omhulsel van de compacte drager van f , namelijk $2T = R^2$ en van het asymptotische gedrag van het onsterfelijke maximum als $t \rightarrow \infty$. Een andere stelling zegt dat kritieke punten niet kunnen ontsnappen uit het convexe omhulsel.

Ook de klassieke differentiaalmeetkunde biedt bruikbare invalshoeken voor de bestudering van schaalruimte-representaties. De doorgaans kwalitatieve uitspraken van singulariteitentheorie kunnen we complementeren met geometrische detaillering. Wederom uitgaande van een isotrope schaalruimte representatie $u(x, t)$ is het bijvoorbeeld niet zo moeilijk aan te tonen dat in $n + 1$ schaalruimtedimensies de (generieke) kritieke paden, inclusief de singuliere punten, beschreven kunnen worden door de volgende evolutievergelijking [26]:

$$\frac{d}{ds}(x(s), t(s)) = \left(-\tilde{\mathbf{H}} \nabla \text{tr} \mathbf{H}, \det \mathbf{H} \right),$$

waarin $\mathbf{H}$ de matrix van tweede orde afgeleiden van $u(x, t)$ is, $\tilde{\mathbf{H}}$ zijn cofactor matrix (in het niet-ontaaarde geval hebben we $\tilde{\mathbf{H}} = \det \mathbf{H} \mathbf{H}^{\text{inv}}$) en $\text{tr} \mathbf{H}$ en $\det \mathbf{H}$ spoor respectievelijk determinant. Uit bovenstaande blijkt dat we als beginvoorwaarden de collectie van alle op $t = 0$ bestaande extrema mogen nemen opdat we via integratie alle kritieke paden zullen vinden die het beginvlak bereiken. Let op: er bestaan ook 'vacuümfluctuaties' in de vorm van gesloten lussen welke we op deze manier missen!

Combinatie van statistisch onderzoek — met vragen als: Hoe zijn kritieke punten en hun singulariteiten verdeeld in 'natuurlijke beelden'? —, singulariteitentheorie in de context van de diffusievergelijking, analytische afschattingen voor haar oplossing en differentiaalmeetkundige eigenschappen van kritieke paden en duale isofoten kan leiden tot nieuw inzicht in de 'diepe structuur' van een beeld, tot verifieerbare hypothesen voor de onderliggende mechanismen van ons visuele systeem en mogelijk zelfs tot gedurfde voorspellingen ten aanzien van de grotendeels nog

onbegrepen functionaliteit van tal van visuele stadia. Zo blijkt er bijvoorbeeld een intensieve, grotendeels onbegrepen feedback te zijn van V1 naar LGN. Er gaat méér dataverkeer van de visuele hersenschors richting netvlies dan andersom! De vraag doet zich voor wat hier wiskundig achter zou kunnen steken. Dit soort inzicht zal op zijn beurt nieuwe inspiratie verschaffen voor de ontwikkeling van grof-naar-fijn algoritmen voor beeldverwerking ter vervanging van bestaande heuristiek.

Literatuuroverzicht

Anders dan het geval is met toepassingen is er nog niet zoveel theorie over het schaalruimtebegrip. Een onmisbare bron is de oorspronkelijke publicatiereeks van de hand van Koenderink uit de jaren tachtig van de vorige eeuw [2, 7, 13, 27–33]. Deze lijst is verre van compleet. Een voor wiskundig georiënteerde lezers geschikte inleiding is te vinden in een recent boek [34]. Hierin wordt uitgebreider ingegaan op het dualiteitsbeginsel, op de constructie van differentiaalvarianten en op fundamentele ruimte-tijd aspecten, zoals temporele filters op de causale half-as en op bewegingsdetectie in tijdreeksen. In het boek van Lindeberg [35] ligt de nadruk op axiomatische onderbouwing in de context van discrete voorstellingen (schaal wordt evenwel continu verondersteld). Hierin wordt onder andere aangetoond dat het discrete analogon van de Gaussische autoconvolutiealgebra gegeven wordt door filters van de vorm $T(n, t) = \exp(-t) I_n(t)$, waarin I_n gemodificeerde Besselfuncties van geheeltallige orde zijn (dus géén gediscrètiseerde Gaussische functies). Voor schalen groter dan de roosterconstante verschillen deze overigens nauwelijks van hun continue tegenhangers. Lindeberg bespreekt verder een heuristisch grof-naar-fijn algoritme voor de detectie van 'blobs'. Daarnaast bestaat er een aantal summerschool- en conferentieproceedings met fundamentele en heuristische bijdragen die inspiratie kunnen verschaffen voor verdere wiskundige modellering [36, 38–40]. Tot slot is er een leerzaam boek van Ter Haar Romeny, welk kort na het schrijven van dit artikel ter perse zal gaan [37]. Dit is geheel geschreven in Mathematica [41] en voorzien van CDROM met notebook versie, zodat men naar believen kan experimenteren. Uiteraard is dit beknopte literatuuroverzicht incompleet en niet zonder persoonlijke bias.

Conclusie

Er bestaat een bijzondere verhouding tussen digitale beeldverwerking en perceptieonderzoek. De eerste poogt algoritmen op te stellen voor de extractie van informatie uit beelden, welke — als bijkomstigheid, want dit is slechts zelden het doel — een verklaring zouden kunnen bieden voor de manier waarop bepaalde visuele competenties in het brein gerealiseerd zijn. Omgekeerd kan men in de beeldverwerking lering trekken uit de bevindingen van perceptieonderzoek, welke de architectuur en functionaliteit van het door miljoenen jaren van evolutie geoptimaliseerde visuele systeem in kaart tracht te brengen.

Helaas vindt er nog relatief weinig kruisbestuiving plaats. Verschillen in doelstelling, wetenschappelijke cultuur en vakjargon liggen hier aan ten grondslag. Wiskunde zou hierin, als neutraal en ondubbelzinnig communicatiemiddel, een grotere rol moeten spelen.



Noten en referenties

- 1 R.W. Rodieck, *The First Steps in Seeing*. Sunderland, Massachusetts: Sinauer Associates, Inc., 1998.
- 2 J.J. Koenderink, 'What is a "feature"?', *Journal of Intelligent Systems*, vol. 3, no. 1, pp. 49–82, 1993.
- 3 D.H. Hubel, *Eye, Brain and Vision*, vol. 22 of *Scientific American Library*. New York: Scientific American Press, 1988.
- 4 E.R. Kandel, J.H. Schwartz, and T.M. Jessell, *Principles of Neural Science*. McGraw-Hill, fourth ed., 2000.
- 5 L. Schwartz, *Théorie des Distributions*. Publications de l'Institut Mathématique de l'Université de Strasbourg, Paris: Hermann, second ed., 1966.
- 6 Een multi-index α is een n -tupel $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ waarvoor een aantal conventies geldt, zoals $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ (orde), $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$, $\nabla_\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, enzovoort. Meestal spreekt de notatie voor zich.
- 7 J.J. Koenderink and A. J. van Doorn, 'Receptive field families,' *Biological Cybernetics*, vol. 63, pp. 291–298, 1990.
- 8 G.C. DeAngelis, I. Ohzawa, and R. D. Freeman, 'Depth is encoded in the visual cortex by a specialised receptive field structure,' *Nature*, vol. 352, pp. 156–159, July 1991.
- 9 R.A. Young, 'The Gaussian derivative model for machine vision: Visual cortex simulation,' *Journal of the Optical Society of America*, July 1986.
- 10 A. Kirsch, *An Introduction to the Theory of Mathematical Inverse Problems*, vol. 120 of *Applied Mathematical Sciences*. New York: Springer-Verlag, 1996.
- 11 A. Tikhonov and V.Y. Arseninn, *Solution of Ill-Posed Problems*. New York: John Wiley & Sons, 1977.
- 12 In een spatiotemporeel model kan men ruimte en tijd formeel op gelijke voet behandelen door gebruik te maken van de conventie $x_0 = ct$ analoog aan die in de relativiteitstheorie; $c > 0$ is hier echter geen constante, maar relateert onafhankelijke lengte- en tijdschalen. Gemakshalve ga ik uit van isotropie oftewel rotatie-invariantie.
- 13 J.J. Koenderink, 'The structure of images,' *Biological Cybernetics*, vol. 50, pp. 363–370, 1984.
- 14 R. Duits, L. Florack, J. de Graaf, and B. ter Haar Romeny, 'On the axioms of scale-space theory.' In preparation.
- 15 K. Yosida, *Functional Analysis*. Berlin: Springer-Verlag, sixth ed., 1980.
- 16 Er zijn ook minder voor de hand liggende positiviteit behoudende lineaire p.d.v.'s die aan de eis voldoen, zoals $u_t = -(\Delta)^{\alpha} u$ met $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ [14–15]. Deze laat ik hier verder onbesproken.
- 17 L.M.J. Florack, 'A geometric model for cortical magnification,' in *Biologically Motivated Computer Vision: Proceedings of the First IEEE International Workshop, BMCV 2000, Seoul, Korea, May 2000*, S.-W. Lee, H.H. Bülthoff, and T. Poggio, eds., vol. 1811 of *Lecture Notes in Computer Science*, (Berlin), pp. 574–583, Springer-Verlag, May 2000.
- 18 De Weber-Fechner wet is een fenomeenologische wet die stelt dat de kleinste waarneembare verandering in psychofysische respons δu evenredig is met de waarde van de fysische stimulus u , met andere woorden dat $\log u$ de psychofysisch relevante grootheid is. Uiteraard geldt dit slechts bij benadering binnen zekere drempel- en verzadigingswaarden.
- 19 L.M.J. Florack, R. Maas, and W. J. Niessen, 'Pseudo-linear scale-space theory,' *International Journal of Computer Vision*, vol. 31, pp. 247–259, April 1999.
- 20 J.J. Koenderink, 'The brain a geometry engine,' *Psychological Research*, vol. 52, pp. 122–127, 1990.
- 21 Er zijn aanwijzingen voor een goede overdekking van het netvlies voor orde $N = 4$ en incidentele rapportages van ordes tot en met $N \approx 12$, al is dit laatste nogal speculatief gezien de uiterst beperkte signaalruis verhouding van celmetingen.
- 22 P.J. Olver, *Classical Invariant Theory*, vol. 44 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- 23 Bij mijn weten geldt dit alleen voor spatiale schaal. Psychofysische experimenten lijken erop te duiden dat het menselijk visuele systeem een vaste tijdschaal van circa 50 milliseconden hanteert.
- 24 J. Damon, 'Local Morse theory for solutions to the heat equation and Gaussian blurring,' *Journal of Differential Equations*, vol. 115, pp. 368–401, January 1995.
- 25 M. Loog, J.J. Duistermaat, and L.M.J. Florack, 'On the behavior of spatial critical points under Gaussian blurring. a folklore theorem and scale-space constraints,' in Kerckhove [40], pp. 183–192.
- 26 L. Florack and A. Kuijper, 'The topological structure of scale-space images,' *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 12, pp. 65–79, February 2000.
- 27 J.J. Koenderink and A.J. v. Doorn, 'Dynamic shape,' *Biological Cybernetics*, vol. 53, pp. 383–396, 1986.
- 28 J.J. Koenderink and A.J. v. Doorn, 'Representation of local geometry in the visual system,' *Biological Cybernetics*, vol. 55, pp. 367–375, 1987.
- 29 J.J. Koenderink and A.J. van Doorn, 'Operational significance of receptive field assemblies,' *Biological Cybernetics*, vol. 58, pp. 163–171, 1988.
- 30 J.J. Koenderink, 'Scale-time,' *Biological Cybernetics*, vol. 58, pp. 159–162, 1988.
- 31 J.J. Koenderink, 'A hitherto unnoticed singularity of scale-space,' *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 11, pp. 1222–1224, November 1989.
- 32 J.J. Koenderink and A. J. van Doorn, 'Receptive field assembly pattern specificity,' *Journal of Visual Communication and Image Representation*, vol. 3, no. 1, pp. 1–12, 1992.
- 33 J.J. Koenderink and A.J. v. Doorn, 'The structure of locally orderless images,' *International Journal of Computer Vision*, vol. 31, pp. 159–168, April 1999.
- 34 L.M.J. Florack, *Image Structure*, vol. 10 of *Computational Imaging and Vision Series*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- 35 T. Lindeberg, *Scale-Space Theory in Computer Vision*. The Kluwer International Series in Engineering and Computer Science, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1994.
- 36 B.M. t. Haar Romeny, L.M.J. Florack, J.J. Koenderink, and M.A. Viergever, eds., *Scale-Space Theory in Computer Vision: Proceedings of the First International Conference, Scale-Space'97, Utrecht, The Netherlands*, vol. 1252 of *Lecture Notes in Computer Science*. Berlin: Springer-Verlag, July 1997.
- 37 B.M. t. Haar Romeny, 'Front-end vision.' Leerboek over schaalruimtemodellen voor digitale beeldverwerking en de eerste stadia van het visuele systeem, geschreven in Mathematica. In voorbereiding.
- 38 M. Nielsen, P. Johansen, O.F. Olsen, and J. Weickert, eds., *Scale-Space Theories in Computer Vision: Proceedings of the Second International Conference, Scale-Space'99, Corfu, Greece*, vol. 1682 of *Lecture Notes in Computer Science*. Berlin: Springer-Verlag, September 1999.
- 39 J. Sporring, M. Nielsen, L.M.J. Florack, and P. Johansen, eds., *Gaussian Scale-Space Theory*, vol. 8 of *Computational Imaging and Vision Series*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- 40 M. Kerckhove, ed., *Scale-Space and Morphology in Computer Vision: Proceedings of the Third International Conference, Scale-Space 2001, Vancouver, Canada*, vol. 2106 of *Lecture Notes in Computer Science*. Berlin: Springer-Verlag, July 2001.
- 41 S. Wolfram, *The Mathematica Book*. Wolfram Media/Cambridge University Press, fourth ed., 1999.

Frans Boshuizen

*Divisie Wiskunde en Informatica, Vrije Universiteit
ING Group, Corporate Reinsurance
Postbus 810, 1000 AV Amsterdam
frans.boshuizen@ing-re.nl*

Peter Spreij

*Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam
spreij@science.uva.nl*

Rekenen aan hypotheeken

Meer dan honderd jaar geleden vond menig wiskundige zijn beroep in de verzekeringswiskunde. Sindsdien is er veel veranderd. De financiële markten zijn groter en sneller geworden en worden bestuurd door snelle computers die complexe modellen kunnen doorrekenen. Financiële wiskunde neemt de laatste tien jaar een veel grotere plaats in op de universiteiten en daar wordt ook weer meer gedacht aan de financiële beroepspraktijk. Frans Boshuizen en Peter Spreij beschrijven allerlei geavanceerde technieken die gebruikt worden bij financiële instellingen om risico's te meten en beheersen.

Financiële instellingen zoals banken, verzekeringsmaatschappijen, treasury afdelingen van internationaal opererende ondernemingen proberen zich op allerlei manieren in te dekken tegen financiële risico's. Deze risico's kunnen van allerlei aard zijn. Denk bijvoorbeeld aan fluctuaties van wisselkoersen, grote schadelclaims bij noodweer, of aan waardeverandering van beleggingsportefeuilles, die zeer van belang zijn voor pensioenfondsen die hun verplichtingen op het gebied van pensioenaanspraken moeten nakomen.

Welke van de genoemde voorbeelden ook van toepassing is, altijd zal een kwantitatieve analyse van marktgegevens en wiskundige modellen de grondslag vormen voor het bepalen van prijzen en het onderbouwen van risicobeheersing. Het is dan ook niet verwonderlijk dat de laatste tijd veel wiskundigen of personen met een andere exacte of kwantitatieve achtergrond — econometristen, statistici, maar ook fysici en sterrenkundigen — een werkkring vinden in de financiële sector.

Naast werk van statistische aard wordt ook gebruik gemaakt van analytische methoden uit andere delen van de wiskunde, bijvoorbeeld de theorie van de partiële differentiaalvergelijkingen. Omdat de te analyseren problemen vaak te complex zijn om een analytische 'gesloten vorm' oplossing te berekenen, worden veel numerieke methoden (numeriek integreren/differentiëren) gebruikt.

Ook eenvoudigere situaties dan de eerder genoemde voorbeelden zijn denkbaar. Bijvoorbeeld, risico's die financiële instellingen aangaan bij het verstrekken van hypotheeken aan klanten. In dit ar-

tikel gaan we nader in op een aantal wiskundige aspecten die om de hoek komen kijken bij het vaststellen van prijzen die banken, of andere hypotheekverstrekkers, hun klanten berekenen.

1 Rente en verdiscontering

Als we geld uitlenen of op een bankrekening zetten, ontvangen we daarvoor rente. Stel dat we beginnen met een kapitaal k_0 en dat we aan het eind van n op elkaar volgende perioden het kapitaal k_n ontvangen. Over elk van deze perioden bestaat een rente van $\rho_k \times 100\%$. Dan is $k_n = \prod_{k=1}^n (1 + \rho_k) k_0$. Als we deze periodes kort nemen, zeg met een lengte h , dan zal ook de rente over zo'n periode van h afhangen. In dat geval schrijven we ρ_k^h . We kiezen voor evenredigheid van ρ_k^h met de lengte van de periode, dus bijvoorbeeld $\rho_k^h = hr_k$. Denken we nu aan r_k als waarden van een functie van een reële variabele $r(\cdot)$, dan ligt het voor de hand $r_k = r(kh)$ te nemen. Op dezelfde manier beschouwen we ook het cumulatieve kapitaal k_n als interpolaties van een reële functie $k(\cdot)$. We vervangen dan k_n door $k(hn)$ en krijgen dus de uitdrukking $k(hn) = k(0) \prod_{k=1}^n (1 + hr(kh))$. Nemen we logaritmen, dan ontstaat er

$$\log k(hn) = \log k(0) + \sum_{k=1}^n \log(1 + hr(kh)) \approx \log k(0) + \sum_{k=1}^n hr(kh).$$

De som benaderen we door de integraal $\int_0^t r(s) ds$, met als gevolg dat we bij benadering $k(t) = k(0) \exp(\int_0^t r(s) ds)$ krijgen voor $h \downarrow 0$ en $nh \rightarrow t$.

We kunnen de zaken ook omkeren. Als we op een tijdstip T in de toekomst een kapitaal van een gulden willen sparen, dan moeten we op een eerder tijdstip t daarvoor een bedrag $p(t, T) = \exp(-\int_t^T r(s) ds)$ inleggen, ervan uitgaande dat $r(\cdot)$ bekend is. Het bedrag $p(t, T)$ wordt ook wel de prijs van een discount of zero-coupon obligatie genoemd. Zero-coupon duidt op het feit dat een dergelijke obligatie niet tussentijds rente uitkeert, maar alleen de hoofdsom aan het einde van de looptijd. De functie r wordt aangeduid met de naam *korte rente* of *short rate*.

Het zal duidelijk zijn dat soortgelijke overwegingen ook betrekking hebben op hypotheeken, van welke soort dan ook, met

dien verstande dat het geld voor de aankoop van een huis door de consument geleend moet worden, waarover banken rente berekenen.

Dat deze rente afhangt van de looptijd van de hypotheek, of liever van de periode waarover een rentepercentage afgesproken wordt, is iedereen bekend. Bij een rentevaste periode van vijf jaar ligt het percentage vaak hoger dan voor een periode van twee jaar. Terwijl voor de klant de te betalen rente voor een zekere periode vast ligt, is de situatie voor banken geheel verschillend. Zij sluiten immers dagelijks grote aantallen hypotheeken af, moeten het uitgeleende bedrag zelf financieren en hebben daarbij steeds te maken met de marktrente die hun die dag berekend wordt en daarmee ook met de schommelingen die de rente ondervindt. Ook hebben banken nog te maken met verschillende rechten die verstrekt worden aan de klanten. We noemen hier het recht op vervroegd aflossen en de meeneem-optie bij verhuizen. Deze rechten zorgen er voor dat de kasstromen die banken ontvangen uit hun hypotheekportefeuille niet helemaal zeker zijn, maar afhankelijk van toekomstige rente-ontwikkelingen. We komen hier uitgebreid op terug in paragrafen 5 en 6.

Voor het in kaart brengen van de onzekerheid over de ontwikkeling van de korte rente hanteren we een *stochastisch model*. Er zijn in de literatuur verscheidene modellen gepostuleerd. Sommige ervan lenen zich voor een betrekkelijk eenvoudige analytische aanpak, voor andere moet de toevlucht tot simulaties genomen worden. In het bestek van dit verhaal kiezen we voor een eenvoudig analytisch te hanteren model. Dit model werd geïntroduceerd door Hull en White in 1987 (zie [7]). Meer is hierover te vinden in bijvoorbeeld de boeken van Björk [2] of Pelsser [10].

2 Een wiskundig model

Voor het beschrijven van de onzekerheid van de renteontwikkeling is het voldoende dat we kansen kunnen bepalen over de waarden die de rente op toekomstige tijdstippen kan aannemen. Impliciet is dit het gevolg van het modelleren van de ontwikkeling van de rente in de tijd door middel van een *stochastische differentiaalvergelijking*. We introduceren wat notatie en begrippen. Van fundamenteel belang is het zogeheten Wiener-proces (vernoemd naar de wiskundige Norbert Wiener (1894–1964), die het bestaan ervan als welgedefinieerd wiskundig object aantoonde [13]). Dit *stochastische* proces duiden we aan met W . Al eerder is dit proces geïntroduceerd in een financiële context door Louis Bachelier (1870–1946) in zijn dissertatie [1], waarop hij als promovendus van Henri Poincaré aan de Sorbonne promoveerde. Ook wordt de naam Brownse beweging als synoniem gebruikt voor het Wiener-proces. Deze naam verwijst naar de Schotse botanist Robert Brown (1773–1858) die in 1827 als eerste het beweeglijke



Figuur 2 De botanist Robert Brown (1773–1858) en de wiskundige Norbert Wiener (1894–1964). Naar hen zijn de Brownse beweging en het Wiener-proces — verschillende namen voor eenzelfde stochastische proces — genoemd.

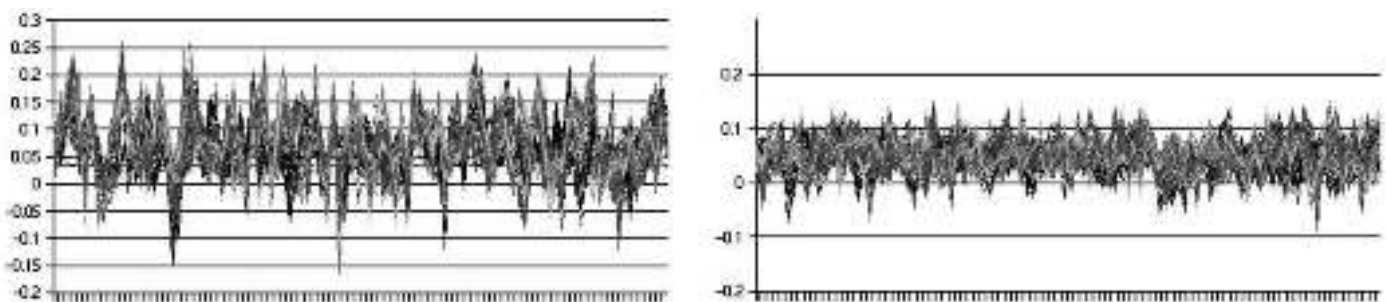
gedrag van pollen in water als het gevolg van voortdurende botsingen met watermoleculen waarnam.

De waarde van W op een tijdstip t geven we aan met W_t . Alle W_t zijn nu stochastische variabelen. Een van de belangrijkste kenmerken van het Wiener-proces W is dat *incrementen* $W_t - W_s$ voor $t > s$ normaal $N(0, t - s)$ verdeeld zijn en stochastisch onafhankelijk van alle waarden van W voor tijdstip s . Bovendien zijn de paden $t \mapsto W_t$ van het Wiener-proces continue functies. Het is zelfs zo dat het opleggen van deze eigenschappen aan een stochastisch proces impliceert dat we met een Wiener-proces te maken hebben.

De tijdsperiode die we beschouwen zetten we op $[0, T]$. Het begintijdstip is het moment dat de klant een offerte accepteert. Met r_t duiden we de korte rente op tijdstip t aan. We presenteren nu een model voor r dat tot gevolg heeft dat r_t voor elke t een stochastische variabele wordt. Zij α een gegeven reëelwaardige functie op $[0, T]$ (verderop meer hierover) en θ een niet-negatieve constante, de zogeheten ‘mean-reversion speed’. In het model van Hull en White wordt de rente beschreven door de oplossing van de stochastische differentiaalvergelijking

$$dr_t = (\alpha(t) - \theta r_t) dt + \sigma dW_t, \quad (1)$$

waarbij dW_t het increment $W_{t+dt} - W_t$ voorstelt. Een discrete tijd approximatie van deze vergelijking behandelen we in paragraaf 3; hieruit valt tevens te destilleren hoe deze vergelijking geïnterpreteerd dient te worden. We maken het typografische onderscheid door in stochastische grootheden de tijdsparameter t als subindex weer te geven (zoals r_t) en bij deterministische variabelen deze tussen haakjes te schrijven (zoals $\alpha(t)$). Omdat we de



Figuur 1 100 HW-paden met $\theta = 0.1$ (links) en $\theta = 0.4$ (rechts)

rente nu stochastisch gemaakt hebben, schrijven we dus — anders dan in paragraaf 1 — r_t in plaats van $r(t)$.

In figuur 1 zien we het effect van de ‘mean-reversion speed’ in het Hull & White model. In de figuur staan voor $\theta = 0.1$ en $\theta = 0.4$ 100 gesimuleerde paden geplot. Het is meteen duidelijk dat hoe hoger de θ des te sneller de rentepad ‘teruggetrokken’ worden naar het gemiddelde niveau.

De theorie van de stochastische differentiaalvergelijkingen en van de stochastische integratietheorie, waarvan de grondbeginselen door K. Itô in de jaren veertig van de twintigste eeuw geformuleerd zijn, onderscheidt zich qua calculusregels in het algemeen van de gewone differentiaalrekening. Dit wordt geïllustreerd door de zogenaamde Itô-regel (zie [9]). Recent is bekend geworden dat wat nu bekend staat als de Itô-regel al in 1940 is opgeschreven in een recent geopenbaard manuscript van Wolfgang Döblin (1915-1940) dat in een verzegelde envelop is bewaard in het archief van de Académie des sciences in Parijs. Zie [5] voor een verhandeling van de bizarre geschiedenis en een gedrukte versie van het origineel en ook elders in dit blad. Het van de gewone calculus afwijkende gedrag is essentieel een gevolg van het feit dat de paden van het Wiener-proces weliswaar continu zijn, maar anders buitengewoon grillig, namelijk van onbegrensde variatie over eindige intervallen. Het is voor ons doel echter niet nodig om hier dieper op in te gaan. Lezers die hierover meer willen weten verwijzen we naar bijvoorbeeld Karatzas & Shreve [9] of Chung & Williams [6]. Voor vergelijking (1) valt aan te tonen dat we onze toevlucht kunnen nemen tot methoden uit de theorie van de gewone differentiaalvergelijkingen. Gegeven een beginvoorwaarde r_0 (die we deterministisch nemen, immers we kennen de rente op dit moment) is deze stochastische differentiaalvergelijking expliciet op te lossen. De oplossing waarvan we een slordig bewijs geven in het onderstaande kader, is

$$r_t = e^{-\theta t} (r_0 + \int_0^t e^{\theta s} \alpha(s) ds + \sigma \int_0^t e^{\theta s} dW_s). \quad (2)$$

Het gevolg van bovenstaand model is (zie paragraaf 3) dat r_t op elk tijdstip normaal verdeeld is, want alleen de laatste (stochastische) integraal in (2) is een toevalsvariabele, die we zien als een (oneindige) som van onafhankelijke normalen. Deze hebben allemaal verwachtingen nul, zodat de verwachting van r_t gelijk is aan $e^{-\theta t} r_0 + \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \alpha(s) ds$. De variantie is wat lastiger te bepalen. Aangevoerd kan worden dat $\text{Var } r_t = \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t})$. Bovendien kunnen we voor elk tweetal tijdstippen t en s eenvoudig de covariantie tussen r_t en r_s uitrekenen. Voor $t > s$ krijgen we $\text{Cov}(r_t, r_s) = e^{-\theta(t-s)} \text{Var } r_s$. Het is nu een koud kunstje om voor elk n -tupel $(t_1, \dots, t_n)$ de verdeling van $r_{t_1}, \dots, r_{t_n}$ te karakteriseren. Deze is (multivariaat) normaal en verwachting en covariantiematrix kunnen we met de zojuist gegeven formules bepalen.

Samenvattend, als gevolg van de beschrijving met een stochastische differentiaalvergelijking zijn we in staat om de kansverdeling van het proces r te beschrijven, waarmee we de onzekerheid over het verloop van r in kaart hebben gebracht.

We hebben nu met behulp van een stochastisch model de korte rente beschreven. In een discreet model als in paragraaf 3 wordt beschreven, is dit vaak de 1-maands rente (rente op geldleningen met duur 1 maand). Zoals eerder gezegd worden hypotheekrentes vaak voor lange tijd (van 1 tot 20 jaar) vastgelegd. Het mooie van modellen als (1) is dat we een ‘gesloten vorm’

Het oplossen van de stochastische differentiaalvergelijking (1)

De methode die we gebruiken is die der variatie van de constante, bekend uit de theorie van de inhomogene lineaire differentiaalvergelijkingen. Hoewel opgemerkt was, dat de stochastische-calculusregels afwijken van wat we uit de gewone calculus kennen, hebben we hier met een situatie te maken waarvan aan te tonen valt dat het onderscheid wegvalt.

Beschouw eerst de homogene differentiaalvergelijking $dx_t = -\theta x_t dt$. De oplossing kennen we: $x_t = e^{-\theta t}$ bij begintoestand $x_0 = 1$. Laten we nu eens als oplossing voor de stochastische differentiaalvergelijking $r_t = x_t y_t$ proberen. Hier is x_t de oplossing van het ‘homogene’ deel en y_t is een nog onbepaald stochastisch proces. Laten we nu $r_t = x_t y_t$ gaan differentiëren:

$$\begin{aligned} dr_t &= y_t dx_t + x_t dy_t \\ &= -\theta x_t y_t dt + x_t dy_t \\ &= -\theta r_t dt + x_t dy_t. \end{aligned}$$

Als we nu naar de oorspronkelijk vergelijking voor r_t kijken, dan zien we dat dy_t gelijk moet zijn aan $x_t^{-1} (\alpha(t)dt + \sigma dW_t) = e^{\theta t} \alpha(t)dt + \sigma e^{\theta t} dW_t$. Als we de laatste vergelijking integreren aan beide zijden van het ‘=’-teken, en we nemen aan dat r_t op tijdstip 0 de beginwaarde r_0 aanneemt, dan verkrijgen we vergelijking (2).

vergelijking voor lange rentes uit kunnen rekenen in termen van de direct gemodelleerde korte rente. Met een lange rente bedoelen we het rendement op een langlopende lening (bijvoorbeeld staatsobligatie). Het eenvoudigst is om naar het rendement van de zero-coupon obligatie uit paragraaf 1 te kijken. De relatie tussen de prijs $p(t, T)$ van een zero-coupon obligatie op tijdstip t met een looptijd $T - t$ en het rendement $R(t, T)$ van dit instrument, de zero-coupon rente, kan als volgt gedefiniëerd worden: $R(t, T) := -\log p(t, T) / (T - t)$ waarbij $p(t, T)$ gegeven wordt door $p(t, T) = E_t \left(\exp(-\int_t^T r_s ds) \right)$. Het subscript t bij de verwachting betekent dat we de verwachting nemen gegeven de informatie van r_s tot en met tijdstip t . Voor de experts: de verwachting wordt genomen onder de risico-neutrale kansmaat.

De grafiek van $R(t, T)$ als functie van T (t vast) wordt wel de spot- of zero-coupon yield curve genoemd. Een populaire klasse van rentemodellen is de klasse van zogenaamde affiene modellen. Bij deze modellen bestaat er een lineair verband tussen de zero-coupon rentes $R(t, T)$ en de korte rentes r_t . Het Hull en White model behoort ook tot deze klasse en men kan na enig rekenwerk laten zien dat er functies $A(t, T)$ en $B(t, T)$ bestaan zodanig dat

$$R(t, T) = A(t, T) + B(t, T)r_t. \quad (3)$$

De functie $B(t, T)$ wordt gegeven door

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-\theta(T-t)}}{\theta(T-t)}.$$

De functie $A(t, T)$ is vrij gecompliceerd en kan gevonden worden in paragraaf 5.2 van Pelsser [10]. Zo zien we dus, dat we via een model voor de korte rente r_t ook formules kunnen krijgen voor

de lange rentes $R(t, T)$.

Als we in de praktijk vergelijkingen als (1), (2) en (3) willen simuleren op de computer, dan zullen we ook discrete versies van de vergelijkingen moeten hebben. In de volgende paragraaf wordt kort ingegaan op het discretiseren van de continue vergelijkingen in deze paragraaf. Met name vergelijking (4) is zeer nuttig en geeft direct aan hoe korte rentes gesimuleerd kunnen worden.

3 Discrete benadering

Stochastische differentiaalvergelijkingen zijn op te vatten als limieten van (stochastische) differentievergelijkingen. De aanpak die we hierbij volgen, verloopt parallel aan die van paragraaf 1. We illustreren dit aan de hand van de eerder geponeerde vergelijking

$$dr_t = (\alpha(t) - \theta r_t) dt + \sigma dW_t.$$

Over een klein tijdsinterval ter lengte h vinden we dat bij benadering geldt

$$r_{t+h} - r_t = (\alpha(t) - \theta r_t)h + \sigma(W_{t+h} - W_t).$$

Laten we nu t steeds een geheel veelvoud van h zijn, zeg $t = nh$, dan krijgen we met $r_n^h = r_{nh}$, $\alpha_n^h = \alpha(nh)$ en $\Delta W_{n+1}^h = W_{(n+1)h} - W_{nh}$

$$r_{n+1}^h = r_n^h + (\alpha_n^h - \theta r_n^h)h + \sigma \Delta W_{n+1}^h. \quad (4)$$

Merk op dat ΔW_{n+1}^h normaal verdeeld is met verwachting nul en variantie h . De laatste vergelijking is recursief eenvoudig op te lossen:

$$r_n^h = (1 - \theta h)^n \cdot (r_0 + \sum_{k=1}^n (1 - \theta h)^{-k} \alpha_{k-1}^h h + \sum_{k=1}^n (1 - \theta h)^{-k} \sigma \Delta W_k^h). \quad (5)$$

We zien nu eenvoudig dat r_n^h normaal is met verwachting

$$(1 - \theta h)^n (r_0 + \sum_{k=1}^n (1 - \theta h)^{-k} \alpha_{k-1}^h h)$$

en variantie

$$\sigma^2 (1 - \theta h)^{2n} \sum_{k=1}^n (1 - \theta h)^{-2k} h.$$

Laten we nu $h \downarrow 0$ en $nh \rightarrow t$, dan convergeert de verwachting van r_n^h naar

$$e^{-\theta t} (r(0) + \int_0^t e^{\theta s} \alpha(s) ds),$$

omdat $(1 - \theta h)^n \rightarrow e^{\theta t}$ en we de (Riemann) som kunnen vervangen door de corresponderende integraal. Analoog convergeert de variantie naar

$$\sigma^2 e^{-2\theta t} \int_0^t e^{2\theta s} ds = \sigma^2 (1 - e^{-2\theta t}) / 2\theta.$$

De aldus verkregen limieten voor verwachting en variantie zijn precies wat we in paragraaf 2 al berekend hadden voor r_t . Op soortgelijke wijze kunnen we nu ook iets over convergentie van r_n^h uit (5) zeggen, zonder deze beweringen een preciese vorm te geven: r_n^h convergeert (in kans) naar r_t uit (2), waarbij we dW_t hebben geschreven voor de 'limiet' van ΔW_k^h .

4 Statistiek voor rentemodellen

In het model van vergelijking (1) zijn de reële parameters θ en σ , alsmede de functie α nog niet gespecificeerd. In de praktijk probeert men deze onbekende parameters te vinden door het gebruikte rentemodel te calibreren op marktdata. De eerste stap is als volgt: De functie $\alpha(t)$ wordt zo gekozen dat de prijs $E \exp(-\int_0^t r_s ds)$ van een zero-coupon obligatie met looptijd t overeen komt met de prijs die vandaag in de markt geldt. In de krant kun je de prijzen zien van 'gewone' coupon obligaties uitgegeven door de Nederlandse staat. Hieruit is op eenvoudige wijze de prijzen van zero-coupon obligaties af te leiden.

De parameters θ en σ kunnen verkregen worden door het model te calibreren op prijzen van rente-opties (caps, floors, swaptions). Dit gaat door eerst een aantal prijzen te verzamelen in de huidige markt, dan de prijzen van dezelfde instrumenten uit te rekenen in het model (dus nog als functie van θ en σ), en daarna, bijvoorbeeld met behulp van de kleinste kwadraten methode, de parameters θ en σ zo te kiezen dat de marktprijzen zo goed mogelijk benaderd worden. Dat hierbij allerlei standaardvragen uit de statistiek omtrent de kwaliteit van de verkregen resultaten opdoemen, zal duidelijk zijn. In het kader van dit artikel gaan we hier niet nader op in.

5 Rentemodellen bij analyses van hypotheekportefeuilles

Nu we een wiskundig model geïntroduceerd hebben, gaan we nader in op de vraag waarom financiële instellingen complexe rentemodellen gebruiken bij het beheersen van risico's van hypotheekportefeuilles. Er zijn twee redenen aan te voeren:

1. Zoals gezegd in paragraaf 1 is er een verschil tussen de hypotheekrente zoals klanten die zien, en de marktrente die financiële instellingen zien als zij de hypotheeken moeten financieren. Marktrentes fluctueren dagelijks en hypotheekrentes zijn voor langere periode constant.
2. In de praktijk is het niet zo dat banken altijd de aflossingen en rentes met zekerheid ontvangen. Dit heeft te maken met bepaalde herfinancieringsrechten die klanten krijgen aangeboden in het hypotheekcontract. Er is vaak een verband aan te wijzen tussen het wel of niet uitoefenen van deze rechten en de stand van de rente. Enkele van deze rechten worden hieronder besproken.

We hebben hierboven herhaaldelijk de term 'rechten' laten vallen. Deze rechten worden in de financiële wereld veelal *opties* genoemd. Deze opties komen in allerlei soorten en maten voor en worden vaak met een geografische naam aangeduid (bijvoorbeeld Europese, Amerikaanse, Russische, Aziatische opties). Deze naamgeving heeft evenwel niets met een geografische achtergrond te maken, slechts met een verschil in het moment waarop een klant van zijn recht gebruik kan maken. Bijvoorbeeld, bij een Europese optie is dit het geval op een van te voren bepaald moment, bij een Amerikaanse optie daarentegen staat het de klant vrij binnen een vastgestelde periode op elk moment dat hem goeddunkt zijn recht uit te oefenen.

DE OFFERTE-OPTIE. In een hypotheekofferte ontvangt de klant een hypotheektarief dat hij gedurende een zekere periode — zeg een maand — mag (niet moet, vandaar dat we spreken van een optie) accepteren. Dit betekent dat als de marktrente omhoog gaat, en de bank dus hogere financieringskosten heeft, de klant

nog steeds de geoffreerde rente gaat betalen bij acceptatie van de offerte. Nu komt het — voor de klant — mooiste gedeelte van de offerte-optie: als de hypotheekrente in de periode tussen offrenen en passeren bij de notaris omlaag gaat, dan verlaagt de bank automatisch de rente in de offerte tot het dan geldende nieuwe hypotheekentarief. Het woord 'optie' hier is ietwat misleidend, omdat de klant zelf niet in actie hoeft te komen om dit recht uit te oefenen.

DE MEENEEMOPTIE. Als een klant verhuist, moet de hypotheek volledig afgelost worden. Het huis als onderpand van de hypotheek vervalt namelijk. Als de klant een nieuwe hypotheek nodig heeft voor het nieuwe huis dan biedt de bank of verzekeringsmaatschappij de volgende mogelijkheid: de klant mag de oude hypotheek 'meeverhuizen' of de klant mag een nieuwe offerte vragen. Als de huidige rente lager is dan zijn oude tarief dan zal de klant een nieuwe hypotheek nemen. In het andere geval, dat de rente intussen gestegen is, zal de klant de oude hypotheekvoorwaarden 'meeverhuizen' naar zijn nieuwe hypotheek.

DE OPTIE VERVROEGD AF TE LOSSEN. Klanten hebben tijdens de looptijd van de hypotheek de mogelijkheid deze hypotheek vervroegd af te lossen. Een gedeelte kan zelfs zonder boete vervroegd worden afgelost. Dit kan interessant zijn, indien de hypotheekrente flink gedaald is en de hypotheek elders voordeliger gefinancierd kan worden. (Vanuit het gezichtspunt van de klant moeten overigens ook belastingaspecten die kleven aan een vervroegde aflossing en herfinanciering grondig bestudeerd worden.)

DE RENTEBEDENKTIJD-OPTIE. Sommige hypotheekvormen hebben een zogenaamde rentebedenktijd ingebouwd. Deze rentebedenktijd houdt in dat klanten, veelal in het laatste jaar van de hypotheek, de mogelijkheid krijgen om alvast het nieuwe hypotheekentarief voor de volgende rentevaste periode te nemen. Dit kan gunstig zijn voor de klant als hij of zij denkt dat de huidige rente wel erg laag is en alleen maar kan stijgen.

Wat veel mensen doen bij het kiezen van de eerste hypotheek is het nemen van een hypotheek met een 1-jarige rentevast periode en gedurende dat hele eerste jaar een rentebedenktijd. De klant kan dan gedurende dat hele eerste jaar een gunstig moment kiezen om te switchen naar een hypotheek met een langere rentevaste looptijd. We hebben hier een mooi voorbeeld van een optie in Amerikaanse stijl. Voor de experts en fijnproevers: een hypotheek is dus eigenlijk een Forward starting loan met look back faciliteit, die bovendien putable is.

Het volgende valt dus op bij bovenstaande opties: het uitoefenen hangt af van de huidige stand van de rente, het gedrag van de klant en externe omstandigheden (bijvoorbeeld het winnen van een loterij, waardoor een klant zijn gehele schuldrest in één keer aflost).

Rentemodellen, zoals besproken in paragraaf 2, worden gebruikt voor een aantal doeleinden:

- De onzekere kasstromen behorende bij hypotheeken met bovengenoemde ingebouwde opties kunnen gemodelleerd worden.
- Nadat de kasstromen gemodelleerd zijn, kunnen hypotheekenportefeuilles gewaardeerd (dat wil zeggen van een prijs voor-



zien) worden en — belangrijker — de ontwikkeling van de portefeuillewaarde kan in de tijd gevolgd worden.

- Maatregelen kunnen worden genomen om de waardeveranderingen van de hypotheekenportefeuille als gevolg van veranderingen in de rente zoveel mogelijk te reduceren. Dit wordt bij financiële instellingen wel hedgen genoemd.

6 Een waarderingsvraagstuk

In deze paragraaf zullen we ons richten op het waarderingsvraagstuk (b) uit het einde van de vorige paragraaf. We gaan er hierbij vanuit dat het om afgesloten hypotheeken gaat, zodat de offerte-optie hier niet gemodelleerd behoeft te worden en we richten ons alleen op het geval waarin we met vervroegde aflossingen te maken hebben. Het gaat er al met al dus om hypotheeken te voorzien van een prijs die aan de klant berekend zal worden, terwijl we niet van te voren weten wanneer klanten vroegtijdig aflossen en hoe groot die aflossing bedraagt. Om de onzekerheid van de kasstromen uit de hypotheekenportefeuille en de onzekerheid van de rente met elkaar te verbinden zijn zogenaamde vervroegde-aflossingsmodellen nodig. Verderop presenteren we een eenvoudig, maar in de praktijk vaak gebruikt, model. Zelfs voor dit model zal blijken dat een analytische formule voor de aan de klant door te bereken prijs in de regel niet voorhanden is. We bespreken vervolgens een simulatiemethode om toch een numerieke waarde aan de hypotheek toe te kennen en we lichten toe wat de invloed van de verschillende parameters in het model is op de te berekenen prijs.

Voordat we aan de hand van een vervroegd-aflossingsmodel trachten prijzen te berekenen, laten we eerst zien hoe de kasstromen (rente en aflossingen) lopen van de klant naar de hypotheekverstrekker zonder dat we vervroegde aflossingen en andere op-

ties in ogenschouw nemen. We gaan uit van een eenvoudige annuïteiten hypotheek. Dit is een hypotheek waarbij de klanten (tijdens de rentevaste periode) maandelijks een constant bedrag aan rente plus aflossing betalen aan de hypotheekverstrekker. Gaan we uit van een te lenen bedrag B dat in N termijnen afbetaald moet worden tegen een vaste rente r per termijn, zodanig dat per termijn n de som van de betaald rente i_n en de aflossing a_n constant is, de *annuïteit*, dan kunnen we a_n en i_n als volgt bepalen.

Zet de schuldrest op tijdstip n op S_n , dan is dus $S_0 = B$ en $S_N = 0$. Verder geldt $i_n = rS_{n-1}$ en $a_n = a - i_n$, waarbij a de annuïteit. Dit leidt tot de volgende vergelijking: $S_n = (1+r)S_{n-1} - a$. Eenvoudig rekenwerk leidt tot

$$a = \frac{r(1+r)^N S_0}{(1+r)^N - 1} \quad \text{en} \quad S_n = \frac{(1+r)^N S_0 (1 - (1+r)^{n-N})}{(1+r)^N - 1}.$$

Er is een uitgebreide literatuur beschikbaar over vervroegde-aflossingsmodellen. Zie bijvoorbeeld [12] and [11]. In de literatuur worden deze modellen *prepayment models* genoemd. Een populair en eenvoudig model wordt gegeven door de volgende vergelijking:

$$v_t = \alpha + \beta (r_t^{ma 10j} - r_t^{nu 10j}) + \gamma \max\{r_t^{ma 10j} - r_t^{nu 10j}, 0\} \quad (6)$$

Hier is v_t het percentage vervroegde aflossingen (op jaarbasis als percentage van uitstaande schuldrest), $r_t^{nu 10j}$ en $r_t^{ma 10j}$ respectievelijk de 10-jaars rente op tijdstip t en het 10-jarig voortschrijdend gemiddelde van de 10-jaars rente op tijdstip t .

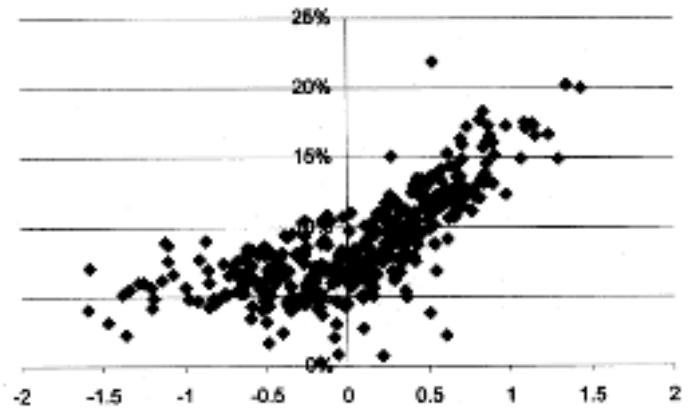
Figuur 3 laat een patroon zien dat vaak in de praktijk wordt waargenomen. Afgebeeld staat het vervroegde-aflossingspercentage op jaarbasis (verticale as) tegen het verschil van een voortschrijdend gemiddelde van de 10-jaars rente en de actuele 10-jaars rente (op moment van de waarneming). De data in dit plaatje zijn fictief en niet gebaseerd op data van hypotheekportefeuilles van bestaande financiële instellingen.

Als we nu teruggaan naar de bovenstaande notatie dan zien we dat de schuldrest op tijdstip n als volgt berekend wordt: $S_0 = B$, $S_n = S_{n-1} - a_n - v_n S_{n-1}$, waarbij a_n de reguliere aflossing is en v_n het vervroegde-aflossingspercentage. Verder geldt dat de kasstroom (cash flow) naar de bank toe op tijdstip n gegeven wordt door $CF_n = a_n + v_n S_{n-1} + i_n$, waarbij i_n de rentecomponent $r S_{n-1}$ is. Analytische formules voor S_n zijn niet te verkrijgen omdat de vervroegde-aflossingscomponent een lastige vorm heeft en bovendien van de rente afhangt.

Het is nu belangrijk om in te zien dat de kasstromen afhankelijk zijn van de onderliggende marktrentebewegingen. Bovendien zijn ze 'pad-afhankelijk', dat wil zeggen, ieder andere rentebeweging naar tijdstip t toe kan tot en andere reeks kasstromen $CF_1, \dots, CF_t$ leiden. Met behulp van de rentemodellen beschreven in paragraaf 3 kunnen de onzekere kasstromen gewaardeerd worden. In theorie gaat dit via de vergelijking

$$V_T = E \left(\sum_{t=1}^T \exp(-\int_0^t r_s ds) CF_t(r_s, s \leq t) \right). \quad (7)$$

Hier is V_T de waarde van de hypotheek (of portefeuille) op tijdstip T , en $CF_t = CF_t(r_s, s \leq t)$ zijn de onzekere kasstromen die de portefeuille genereert op de tijdstippen $t = 1, \dots, T$. Merk op dat CF_t afhangt van de hele historie van de rente tot op tijdstip t (via verband korte en lange rentes gegeven in (3)).



Figuur 3 Verschil voortschrijdend gemiddelde en huidige 10-jaars rente versus vervroegd-aflossingspercentage

In de praktijk is het zeer lastig, zo niet onmogelijk, om de bovenstaande formule analytisch uit te rekenen. Veelal worden simulatie-methoden gebruikt om een nauwkeurige benadering te geven van formule (7). In termen van het discrete model van paragraaf 3 gaat dit als volgt:

1. Simuleer een reeks korte rentes $r_1^h, \dots, r_N^h$ met bijvoorbeeld $h = 1/12$ (stappen van 1 maand).
2. Bereken benodigde lange rentes met behulp van de relatie in formule (3).
3. Bereken de vervroegde-aflossing percentages (die afhankelijk zijn van berekende lange rentes, en de reeks kasstromen $CF_1, CF_2, \dots$).
4. Verdisconteer de kasstromen met de gesimuleerde korte termijn rentes:

$$\exp(-\sum_{i=1}^n h r_i^h) CF_n(r_1^h, \dots, r_n^h) \quad (8)$$

en tel de verdisconteerde kasstromen bij elkaar op.

5. Doe (1) tot en met (4) een groot aantal, zeg 1000, keren en neem als schatting voor de waarde van de portefeuille het gemiddelde van de som van de verdisconteerde kasstromen in (8).

Bij bovenstaande recept moeten we enige kanttekeningen plaatsen. De eerste is dat bij gebrek aan data de meeneem-optie en de optie om vervroegd af te lossen meestal in een model gegoten worden. De tweede kanttekening is dat voor de rentebedenktijd-optie sec modellen gehanteerd kunnen worden die lijken op de vervroegde-aflossingsmodellen. We merken nog op dat de rentebedenktijd-optie eigenlijk een Amerikaans call optie is (geschreven door de bank). Tenslotte stellen we vast, dat in een rentemodel vaak de lange rente op staatsobligaties gemodelleerd wordt. In een verfijnde versie van het model zou het verband tussen de markt- en de hypotheekrentes ook beschreven moeten worden. Een 10-jaars rendement op staatsobligaties verandert natuurlijk vaker dan de 10-jaars hypotheekrente. Vaak volgt de hypotheekverstrekker de marktrente op enige afstand.

In tabel 4 zien we de resultaten van een simulatie. De karakteristieken van de hypotheek staan in tabel 1. We nemen aan dat de 10-jaars marktrente op de kapitaalmarkt 5,2% is (het hypotheektarief ligt dus 0,8% hoger dan de marktrente). Het aflossingspatroon van de hypotheek is een annuïteit en de hypotheek wordt in 30 jaar afgelost. We hebben deze hypotheek gewaardeerd met behulp van een Hull en White model en met een vervroegde-

Hoofdsom	100
Rente	6%
Looptijd	30 jaar
Rentevaste looptijd	5 jaar
Type	Annuïteit

Tabel 1 Modelhypotheek

	θ	σ
Basis	0.1	1.0%
Hoog	0.1	3.0%
Laag	0.1	0.5%

Tabel 2 Parameters Hull & White model

	α	β	γ
Basis	7%	0.1	0.7
Nul	0%	0	0
Hoog	14%	0.2	1.4
Laag I	3.5%	0.05	0.35
Laag II	0%	0.1	0.7

Tabel 3 Parameters vervroegd-aflossingsmodel

Vervr.-aflossingsmodel/rente	Laag	Basis	Hoog
Basis	103.62	103.53	102.09
Nul	104.13	104.13	104.13
Laag I	-	103.80	-
Laag II	-	103.79	-
Hoog	-	103.05	-

Tabel 4 Uitkomsten waardering modelhypotheek

aflossingsfunctie als in formule (6). In tabel 2 staan de waarden voor θ en σ . We hebben θ constant gehouden en σ laten variëren. 'Hoog' en 'Laag' zijn dus modellen met hoge respectievelijk lage beweeglijkheid van de rente. 'Basis' zit er tussen in. In tabel 3 staan vijf verschillende drietallen voor de parameters α , β en γ in formule (6).

We lichten de uitkomsten van tabel 4 nader toe. We zien dat zonder opties, dus met vervroegde-aflossingsparameters gelijk aan nul, de hypotheek voor de verstrekker 104,13 waard is. Dit is meer dan de hoofdsom van 100 omdat de winstmarge van de

hypotheekverstrekker in de 104,13 verdisconteerd is.

Omdat de kasstromen van de hypotheek zeker zijn (parameters vervroegd-aflossingsmodel op nul) heeft de beweeglijkheid van de rente geen invloed op de waarde als we het vervroegd-aflossingsmodel 'uitzetten'. Kijken we nu naar het basistripel vervroegde-aflossingsparameters dan zien we dat de waarde van de hypotheek (wederom voor de verstrekker) hoger wordt, naarmate de beweeglijkheid van de rente lager is. Dit komt omdat dan de kans dat de optie voor de klant voordeel oplevert kleiner is.

Bij de parameters 'Laag I', 'Laag II' en 'Hoog' in het vervroegd-aflossingsmodel bekijken we de resultaten van de waardering alleen voor het basistripel parameters in het Hull & White model. In de regel is het zo dat de hypotheek minder waard wordt voor de verstrekker als de parameter γ hoger wordt. Klanten gaan dan immers hun hypotheek aflossen en wellicht herfinancieren als de rente laag is. De parameter α heeft een dubbele werking op de waarde van de hypotheek. Een hoge α kan gunstig zijn voor de verstrekker in een klimaat met hogere rente dan bij verstrekking van hypotheek, maar is juist ongunstig in geval van lagere rente dan bij de verstrekking. Om te bekijken of hogere α een hogere of lagere waarde voor de modelhypotheek impliceert, moeten we weten met welke kans het gebruikte rentemodel hogere of lagere rentes gaat simuleren. In vergelijking met het basistripel zien we dan de modelhypotheek meer waard is in situaties 'Laag I' en 'Laag II'. De extreem hoge γ in 'Hoog' verklaart dat de modelhypotheek minder waard is dan voor de basiswaarden van α , β en γ .

7 Tot slot

In de gepresenteerde analyse is gekozen voor een populair rentemodel (Hull en White), dat zich leent voor een analytische aanpak met voor een deel formules in gesloten vorm. Er bestaan echter veel meer rentemodellen, waarvan sommige bepaalde karakteristieken van het verloop van de rente beter weergeven. In [10], [3] of [2] is hiervan een overzicht te vinden. Voorts hebben we een aantal gedragingen van klanten, en de verschillende mogelijkheden tot het uitoefenen van sommige opties niet volledig gemodelleerd. Het ontwikkelen van rentemodellen is een levendig onderwerp van onderzoek waarin nog bij lange na niet het definitieve woord gesproken is. $\square$

Referenties

- 1 L. Bachelier (1900), 'Théorie de la spéculation', *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 3e série, tome 17, Paris, Gauthier-Villars.
- 2 T. Björk (1998), *Arbitrage theory in continuous time*, Oxford University Press.
- 3 D. Brigo and F. Mercurio (2001), *Interest Rate Models: Theory and Practice*, Springer Finance, Heidelberg.
- 4 Robert Brown (1828), 'A brief account of microscopical observations made in the months of June, July, and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies', *Philosophical Magazine (2nd series)* **4**, 161–173.
- 5 Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, 331, Issue 12, Part 2, December 2000
- 6 K.L. Chung and R. Williams (1997), *Introduction to Stochastic Integration, Second Edition (3rd Printing)*, Birkhäuser.
- 7 J. Hull and A. White (1987), 'The pricing of options on assets with stochastic volatilities', *Journal of Finance* **42** (2), 281–300.
- 8 K. Itô (1944), 'Stochastic integral', *Proc. Imperial Acad. Tokyo* **20**, 519–524.
- 9 I. Karatzas and S. Shreve (1991), *Brownian motion and Stochastic calculus*, Springer.
- 10 A. Pelsser (2000), *Efficient Methods for Valuing Interest Rate Derivatives*, Springer.
- 11 S.F. Richard and R. Roll (1989), 'Prepayments on fixed-rate mortgage-backed securities', *Journal of Portfolio Management*, Spring 1989, 73–82.
- 12 E.S. Schwartz and W.N. Torous (1989), 'Prepayment and the valuation of mortgage-backed securities', *Journal of Finance* **44** (2), 375–392.
- 13 N. Wiener (1923), 'Differential space', *J. Math. Phys.* **2**, 131–174.

John D. Gilbert

Director of Library Services

Universiteit Maastricht

Postbus 616, 6200 MD Maastricht

J.Gilbert@ub.unimaas.nl

Opinion Serials crisis

The business of scientific communication

The advent of the internet has brought great changes to the practice of scientific research. In the last two issues of the *Nieuw Archief*, Krzysztof Apt and Michiel Kolman gave their views on the effects of the great rise in pricing of scientific journals, and on the role the internet will play in the future of scientific publishing. John Gilbert, director of the library services at the Universiteit Maastricht, argues that scientific communication has gone out of control, and proposes measures to regain it.

"Scientists demonstrate a poor sense of business in buying back their produce, namely scientific journal articles, at a high price from publishers. It is even more bizarre when academic libraries, the source of information for the scientists, look like being priced out of business." [1]

What does this thesis of one of our young doctors tell us about the state of scientific publishing and the parties involved? Are scientists naive and are they to blame for what we call the serials crisis? Is there a future for 'academic publishing' and 'free' journals? Are the Internet and the World Wide Web cat-

alysts for the reformation of the publishing business chain?

Following the views aired in this journal by the scientist K. Apt and the publisher M. Kolman, I present a librarian's viewpoint [2-3]. It derives from experience as both a university librarian and, more recently, chair of UKB (Association of Dutch University Libraries, Royal Library and the Library of the Royal Academy of Science).

Serials crisis

The opening thesis is hard to challenge in the wake of an era which saw the prices of most scientific journals rise dramatically and the larger commercial publishers strengthen their position in the market. The main vehicles for this 'success' have been journals recognised by the scientists themselves as key journals, i.e. those already attracting articles of prominent scientists and hence with a high impact factor and a good 'brand name'.

Many scientists are still hardly aware of the serials crisis. As long as they can publish their papers in the key journals and as long as these journals are available to them, in the department or in the library, there is no cause

for concern. As long as library budgets are not a problem for faculty, and as long as the rising costs of serials and other information sources do not visibly threaten research funding, scientists consider the 'serials crisis' a problem for librarians.

At Universiteit Maastricht, however, faculties now have to pay for all the costs of the library and the high percentage increases in the costs of serials become more conspicuous. Integral costing increases awareness to the matters at stake. It also improves the climate for concerted activity in reforming the business of scientific communication. Let us first look at responses by libraries to the serials crisis.

Library initiatives

Initiatives by libraries to counteract the serials crisis gathered momentum with the onset of electronic journals. Budgetary problems caused by double-figure percentage increases in journal prices were aggravated by publishers seeking further surcharges for access to electronic versions of the print titles. According to the RABO bank, publishers had found a way of selling the same materi-

al twice at little extra cost; the bank encouraged investors to put their money on Elsevier, Wolters-Kluwer and the like [4]. Those who followed this advice have probably not been disappointed, but librarians were also spurred into action.

One of the more successful initiatives of libraries was the effort to ensure reasonable terms for access to the electronic products of publishers. In 1997 Dutch and German university libraries joined forces in publishing a policy statement on reasonable licensing principles. In 1998 European university libraries joined up with their North American counterparts to form the International Coalition of Library Consortia and the ICOLC subsequently published its statement on licensing principles. This statement, recently updated, set the tone for agreements between university libraries and publishers with regard to access to electronic journals [5]. It addressed matters which are now regarded as logical parts of licensing agreements (e.g. permanent access, campus-wide access, lower pricing for 'electronic only'), but which were not so then.

About the same time UKB libraries began to concert their efforts in negotiating terms with (commercial) publishers. Clearly, electronic journals call for other price models than their printed counterparts, as the distribution process can be radically simplified. However, there was a desire to avoid discontinuity. Publishers were keen to preserve turnover and profits; libraries have their own budgets and their own customers and prefer to operate independently. Nevertheless, UKB gradually evolved from an association to a consortium, as the benefits of collective bargaining became apparent. Early attempts to come to terms with publishers were less successful than in other countries, partly because of lack of subsidies for national licences in the Netherlands, but eventually agreement was reached between UKB and publishers such as SDU, Elsevier, and Kluwer Academic. With the aid of the SURF Foundation and of the Innovatie Wetenschappelijke Informatievoorziening (IWI) in particular, a central licensing office has now been set up and UKB is coming to terms with other publishers.

This begs the question: what 'terms'? The terms so far represent something of a truce, but also a 'win-win' situation: for publishers maintenance of turnover and for university libraries single-figure percentage price increases and electronic access to all titles of the publisher for the price of those print titles subscribed to beforehand. Such price models can however be only transient, and UKB, IWI

and some of the publishers are looking at new models for the pricing of electronic journals.

Academic publishing

These developments concern the transition of existing print journals to the electronic environment. UKB libraries are also involved in publishing innovation. Internet drastically alters the relation between the various parties in the business chain, their respective roles become less well defined. Publishers can compete with libraries (and indeed do), universities and their libraries can compete with publishers, scientists can 'publish' directly on the Web. Again with the help of IWI funding, the late 1990's have been characterized by increasing activity in the area of self-publishing. Several new 'niche' electronic journals have been launched and developed. Many of them survive, but only just, the main difficulty being to establish a reputation in a world dominated by traditional values. For a scientist keen to make his/her mark, an article in a journal with a high impact factor is a better (personal) proposition than one in a journal of which some have not yet heard.

Another approach is cooperation between universities and learned societies, where the university library acts as a production centre for electronic versions of printed journals published by the societies ('co-publishing'). At Stanford, USA, the university library has successfully developed HighWire Press as a platform for the production and distribution of learned society journals in the biosciences [6]. IWI is looking at the possibility of doing something similar in the Netherlands, but in other disciplines.

Most Dutch universities are actively exploring new publishing opportunities offered by the Internet, be it in the area of self-publishing or of co-publishing. Some of these initiatives have received the support of IWI, such as the Roquade and ARNO projects. The former is a multifunctional digital publishing platform, whereas the latter focuses on the digital publication of 'domestic' scientific production. ARNO is related to the international Open Archives Initiative (OAI). The ultimate goal of OAI is for each institute to make its own scientific production available through servers compliant with international standards and interconnected via the Web [7]. In this way the whole of the world's production becomes accessible through a single search!

The viability of the OAI model of interconnected e-print archives is doubted by scientists of a traditional vein. What about peer review, they ask? OAI supporters argue the

case for open peer reviewing, claiming that the OAI could be complemented by 'supersections' of openly peer-reviewed material. The OAI has probably received less publicity than the Public Library of Science initiative [2], but the respective goals are remarkably similar. The PLS statement reads: "We support the establishment of an online public library that would provide the full contents of the published record and scholarly discourse [...] in a freely accessible, fully searchable, interlinked form". [8]

Of the OAI it has been said: "The initiative's ultimate aim is to allow readers to locate articles on different servers as if the articles were all in one virtual public library". [9]

Regaining control

Will OAI and/or PLS ever be seen as ultimate solutions for scientific communication in the future? If so, how do we migrate there from where we are now? Reformation of the scientific communication and publication business will depend on several things, not in the least in the ability to get (the future of) scientific communication and publication on the university agenda! The driving force here should be the desire to improve the 'knowledge management' and hence the knowledge economy of the parent institution. The World Wide Web and OAI offer all sorts of interesting perspectives in this respect but, in the current situation, publications of scientists are often inaccessible to colleagues and students of the same university! Moreover, universities tend to pay more attention to the management of administrative information than to the management of their scientific information or 'content', but there are signs that 'better' times are on their way.

The ultimate goal should be for universities and research institutes to regain control of the process of publishing and (peer) reviewing the results of scientific research. Whether or not there is a role to be played by commercial publishers, surely the terms should be dictated by the academic community. At the moment, this is far from the case. Much of the peer reviewing is done primarily as a service to publishers, the prices of journals are still determined by the publishers, impact factors of journals from commercial sources are taken at face value for certification purposes, and universities often pay double (or more) for journal articles used in student readers and courseware. Apt put it quite simply: "The issue is: who is to govern the access to the scientific literature?" [2] The answer must be: the scientific community

itself, with the lead being taken at an institutional and a national level.

Awareness

A necessary condition for the reform of the 'business chain' of scientific communication is a common awareness of the issues at stake and the problems involved. If public institutes are to re-establish control of scientific communication, the message and the goal have to be communicated clearly to all individuals concerned. Every scientist must be aware of his/her role and responsibility in the process of scientific communication whether it be as author, reviewer, editor, library user, or reader, and of the importance of sustained, affordable access to relevant literature. The same holds for board members of faculties, for librarians, for vice-chancellors and everyone else involved.

One of the ways to improve awareness is to confront faculties, departments, even individuals with the integral costs of library services, as we do at Maastricht. In fact, one should go further by considering the whole economy of scientific publication and communication (including writing of papers, peer reviewing, editing). It should not be hard to show that universities receive little reward for the time their scientists spend helping the cause of publishers.

Orchestration

Once awareness has been aroused, there is a need for 'orchestration'. Initiatives so far to combat the serials crisis and particularly excessive commercial exploitation of scientific publications have been fragmentary. What is lacking is the coordination of activities in different areas and different disciplines. Coordination should be done at an institutional level, and at a national level, and preferably also at a disciplinary level by learned societies, as this will promote international coordination of initiatives. What does 'orchestration' involve?

I propose that each university or research institute should develop a policy on scientific communication and 'knowledge manage-

ment', in which goals and good practices and the roles and responsibilities of the various parties (scientists, faculties, library etcetera) are laid down. This will involve cooperation of persons and groups not accustomed to working in close harmony. The ultimate responsibility lies with governing boards but others, including librarians, should be prepared to take the lead.^[10] Some universities have policies on certain aspects of communication and publication but few have elucidated a comprehensive policy. Elements of such a policy should be:

- support for self-publishing initiatives — development of an OAI server for at least preprints and theses and ultimately for all 'domestic' scientific production,
- revision of copyright policy and management, with particular attention being paid to the interests of the institute and its scientists and students,
- decentralisation of the costs of scientific information,
- stipulation of good publishing practices; rewards for good practice.

At a national level there must be more co-operation between parties such as SURF-IWI, VSNU, KNAW and more involvement of government, particularly the Ministry of Education and Science and the Ministry of Economic Affairs. The aim should be to develop and implement policy for regaining public control of scientific communication and publication. The policy should comprise:

- continuing support for new self-publishing and co-publishing initiatives within the academic community,
- agreements on (inter)national standards for self-publishing, in order to promote interlinking and cross searching,
- promotion of open e-print archives and of initiatives in the area of open peer reviewing,
- development of and agreement on new methods of journal ranking (other than ISI impact factors) and employment of such in

quality assessments

- reappraisal of copyright policies in the interest of research and education
- fiscal reform (zero-rate or low-rate tax on electronic media).

The second point deserves explanation. Elsevier has taken the lead on CrossRef ^[3], while one of the most attractive aspects of HighWire is the 'toll-free' linking. A click on a reference to an article in another HighWire journal gives full-text access to the article concerned, irrespective of whether the journal concerned is subscribed to. This principle should be embraced worldwide. There should be an international code for academic or not-for-profit electronic scientific journals, which prescribes how all such journals provide toll-free linking to each other's articles. Perhaps commercial publishers could be persuaded to make CrossRef 'toll-free' as well. In a digital environment, toll-free access to all referenced literature would be a breakthrough.

Institutional and national initiatives should be accompanied by actions at a disciplinary level; learned societies are best placed to give such initiatives international esteem.

Conclusion

Interlinking and fair ranking of all not-for-profit electronic journals will help determine the extent to which these become a viable alternative to established commercial journals and, ultimately, whether public institutions can exercise control over scientific communication.

Transition, however, is likely to be gradual: in the meantime librarians must seek and acquire the support of scientists in their continuing negotiations with publishers. Our common mission as representatives of the academic community should prevail over individual interests or differences of opinion. ←

References

- 1 F. van der Sande. Strategies for improving hemodynamic stability during hemodialysis: clinical and pathophysiological studies. Doctoral thesis, Universiteit Maastricht, 1999.
- 2 K. Apt. Towards free access to scientific literature. *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/2 nr. 3, 251–255, 2001.
- 3 M. Kolman. Free publishing? *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/2 nr. 4, 349–350, 2001.
- 4 Volkskrant. Full-page advertisement on behalf of RABO bank, 1997.
- 5 <http://www.library.yale.edu/consortia/statement.html> (1998) and <http://www.library.yale.edu/consortia/2001currentpractices.htm>
- 6 <http://highwire.stanford.edu>
- 7 <http://www.openarchives.org>
- 8 <http://www.publiclibraryofscience.org>
- 9 T. Delamothe, R. Smith, M. Keller, J. Sack and B. Witscher. Editorial. *British Medical Journal* 319, 1515–1516, 1999.
- 10 J.D. Gilbert. Publishing revolution? Response and responsibility of the library. *Libri*, 50, nr. 2, 122–128, 2000.

Gerard Alberts

Werkgroep Wetenschap en Samenleving
Katholieke Universiteit Nijmegen
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
g.alberts@cwi.nl

Ieke Moerdijk

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
moerdijk@math.uu.nl

Interview W.T. van Est

De geometer

Op 12 december 2001 werd Van Est 80 jaar. Twee dagen later werd hij geëerd met een symposium 'Van Est 80'. Tientallen gasten vonden hun weg naar het Korteweg de Vries Instituut in Amsterdam. Daar spraken Jacob Murre (Leiden), A. Haeffliger (Genève), Ieke Moerdijk (Utrecht) en Gijs Tuynman (Lille), waarna de feestelijke middag afgesloten werd met een receptie. Nadat alle feestelijkheden voorbij waren, werd Van Est geïnterviewd door Gerard Alberts en Ieke Moerdijk.

W.T. van Est is een echte geometer. Hij is zo zeer bezig met het meten van de aarde dat het laatste door hem geïntroduceerde wiskundige object een S-atlas heet. Atlas, omdat de intuïtieve betekenis van het begrip het beschrijven van een wereld betreft. De weergave van het onderstaande gesprek zou videofragmenten moeten bevatten. Van Est *denkt* niet alleen in plaatjes; als het even ingewikkeld wordt begeleiden zijn handen de uitleg met vlakken en lichamen, foliaties en compactificaties in de lucht.

Wiskunde is vooral het uitleggen wat voorgangers hebben gedacht. "Mijn eigen bijdrage is nul-komma-nul". Alleen in de cohomologie wil hij wel toegeven dat hij iets nieuws heeft bedacht, maar verder is het een en al bescheidenheid: "Het staat al bij Cartan".

Esthetisch genot

Geboren en getogen in Batavia (Jakarta) kwam Willem Titus van Est in 1938 naar Amsterdam om natuurkunde te studeren. Aan de Gemeen-

telijke Universiteit waren de hoogleraren Man-noury en Hk. de Vries juist twee jaar tevoren met emeritaat gegaan en als gevolg van de crisistijd niet opgevolgd. Heyting was benoemd tot lector voor de meetkunde. Freudenthal, bevorderd van assistent tot de curieuze functie van conservator, verzorgde de analyse. "Freudenthal had een nieuw idee. Hij wilde de hele analyse behandelen in vijf jaar, de elementaire analyse in de eerste twee jaar en dan de complexe functietheorie; analyse IV betrof partiële differentiaalvergelijkingen en analyse V behandelde de lineaire analyse. Dat programma heb ik nooit in zijn geheel kunnen lopen voordat de oorlog uitbrak. Freudenthal gold als slecht didact. Als het erom gaat in te zien *hoe het stuk speelt*, dan heb ik aan hem altijd een geweldige leraar gehad. Als je wilde nagaan in hoeverre allerlei details netjes op elkaar aansloten en zonder feilen waren, dan bleek dat niet altijd 100 procent te zijn. Hij liet impliciet veel aan de student over. Het was een opvoedende ervaring voor iedere student, om de gaten in zo'n college voor zichzelf te dichten. In dat opzicht vond ik het eigenlijk wel goed, maar niet iedereen was het daarmee eens."

"Brouwer gaf colleges 'Niet-euclidische meetkunde' en 'Canonische vergelijkingen' (analytische mechanica). Qua stof was het misschien niet zo sensationeel, maar de manier waarop ... dat was wel sensationeel. De manier waarop hij dingen voordroeg, hele lange zinnen maakte die perfect liepen — dat je dacht, man hoe krijg je het voor mekaar — en toch daarin het nodige wist mee te delen, dat

vond ik werkelijk heel bijzonder. Het was op zichzelf een esthetisch genot."

"Ik had de theoretische natuurkunde willen doen, maar de oorlog kwam ertussen. Na de oorlog bleek me dat ik nog anderhalf jaar practicum zou moeten volgen en ik wilde er zo lang niet meer over doen. Daar kwam bij dat Freudenthal me vroeg assistent bij hem te worden en zo is het dan wiskunde geworden. Eigenlijk een soort van geestelijke traagheid of luiheid, want als je nou een jongen van Jan de Witt was, of een echte Hollandse jongen was geweest, dan had je moeten zeggen: wat het kost kost het, ik zet mijn voornemen door. Hoewel ik er nooit erg diep in ben doorgedrongen, heb ik een zekere belangstelling voor natuurkunde altijd gehouden. In de samenwerking met mijn laatste promovendus, Gijs Tuynman, is deze belangstelling zelfs weer opgebloeid."

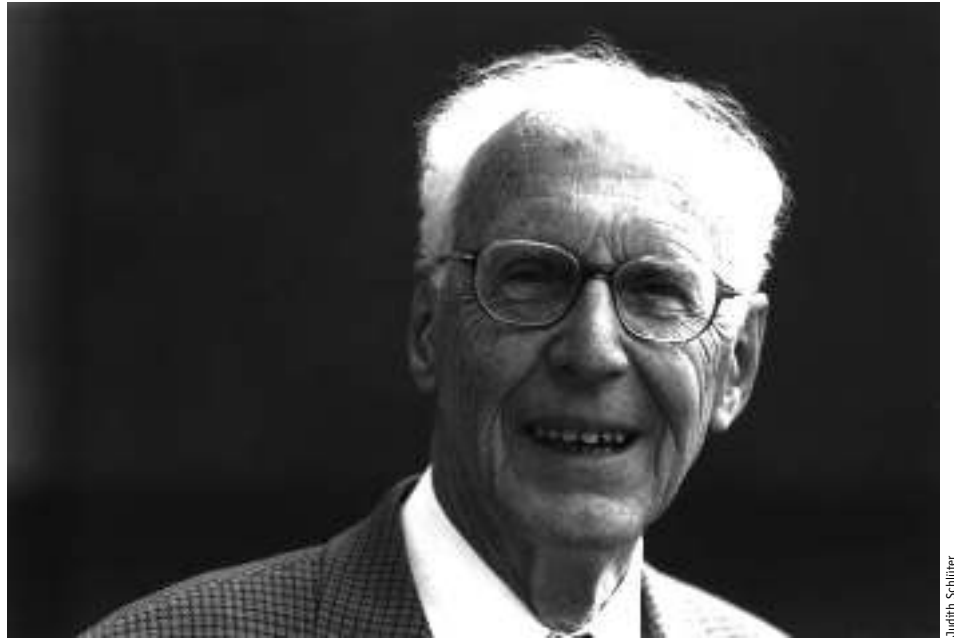
Vulcaniseren

Hoe bent U de oorlog doorgekomen? "Vooral door niets te doen. Je kon op een gegeven moment niet meer studeren vanwege de loyaliteitsverklaring. Na mijn kandidaats in 1942 heb ik weinig meer gedaan. Ik deed klusjes, allemaal zwart werk natuurlijk, een tijdlang in een smidse, later bij een bedrijfje dat banden vulcaniseerde. Banden vulcaniseren was dankbaar werk in de oorlog natuurlijk. Je bracht met solutie rubber strips op een versleten band en dat ging dan in een vulcaniseermachine. Een deel van die banden was voor de Wehrmacht. In zekere zin heb ik "vlijtig collaborerend" de oorlog doorgebracht."

“Nee, handig was ik daar niet in. Je kunt wel wat leren natuurlijk, maar handig ben ik nooit geweest. Tijdens de studie maakte men op het natuurkunde-practicum ook onmiddellijk een scheiding tussen lui die experimentele natuurkunde studeerden en de lui die meer aan de theoretische kant werkten. C.J. Gorter kwam in 1941 als buitengewoon hoogleraar naar het Zeemanlab en ik volgde zijn collega ‘Moderne Experimentele Methoden’ omdat het zo’n goed college was, maar ik geloof dat ik er goed aan heb gedaan zijn aanbod assistent te worden af te slaan.”

Maar U kon toch niet over straat in de oorlog, met uw leeftijd? “Weet je wat het is, aan al dat soort risico’s wen je. Echt waar. Het laatste halfjaar was ik mijn persoonsbewijs kwijt. Ik had een vervalst persoonsbewijs; op een gegeven moment was ik het kwijt. Je stompt op de een of andere manier af en denkt ‘het zal wel goed komen’. Inderdaad kon ik een paar keer, doordat ik ze op tijd zag staan, de controle door de Duitse politie ontwijken. Als ze me hadden aangehouden, hadden ze me zeker meegenomen voor nader onderzoek. Hoe dat dan afloopt, weet je ook niet. Kan nooit zo verschrikkelijk aflopen. Je gaat naar Vught, of je gaat onmiddellijk naar Duitsland, of naar een werkkamp, of wat dan ook. Geen heldendaad, het is gewoon luie onverschilligheid die je op den duur eenvoudig krijgt, dat is het. Het is dezelfde onverschilligheid waardoor ook ongelukken gebeuren. Ik heb dus geluk gehad.”

U kwam al in die tijd bij Freudenthal over de vloer, wat toch uitzonderlijk was. “Dat waren de speciale oorlogsomstandigheden. Hij werd op zeker moment, zoals alle joodse werknemers, op non-actief gesteld. Dat gebeurde vrij abrupt, in mijn herinnering. Dat vond je eigenlijk te gek, hè. Hemelrijk schreef over deze zaak een brief aan het College van Curatoren van de universiteit. Hemelrijk was



Judith Schlüter

altijd erg fel, maar er waren er meer die het erg gek vonden.”

“Ik dacht, die man die zit daar; een man van kwaliteit, aan wie ik een en ander heb gehad. Ik heb de stoute schoenen aangetrokken en ben naar hem toegegaan. Je trof hem thuis aan; je praatte over de toestand; hij ontving je in zijn studeerkamer, boekenkasten vol met boeken, niet alleen over wiskunde; vooral veel literatuur ook. Hij praatte vrijelijk over allerlei onderwerpen, ook wel over wiskunde. Ik heb dat een paar keer gedaan. Ik was niet de enige, maar je ging niet als groep.”

In 1945 ondernam U met Hemelrijk actie om Freudenthal te behouden voor Amsterdam. “Freudenthal was reeds vóór de oorlog een van de bekende topologen. Hij was een bijzonder docent, iemand die de stof voor de studenten wist te brengen op een manier dat het gaat leven, dat je denkt, verdorie, dat had ik ook kunnen bedenken.”

“Als student wist je ook niet overal het fijne van. Je hoorde dat hij in Amsterdam niet een positie kreeg waarop wij als student meenden dat hij zo langzamerhand recht had; daardoor kwam je in actie. Iemand die in die tijd gewoon op het eerste plan meespeelde in de topologie, die kun je niet na de oorlog met een lectorsplaats afschepen, terwijl van de Corput uit Groningen werd gehaald en Van Dantzig hier hoogleraar werd. Dat maakte allemaal een verwrongen indruk, dus daarvoor kwam je als student in actie.”

“Die actie bestond eruit dat de studenten een brief schreven aan wethouder De Roos, een zeer machtig man, een man met veel grip voor ons. We, Jan Hemelrijk, nog een derde student en ik, zijn bij hem op bezoek geweest, om te bepleiten dat Freudenthal in Amsterdam zou blijven. De Roos heeft ons aangehoord, er nota van genomen, maar ja. Wat kun je meer doen, je kunt niet gaan demonstreren.”

“Brouwer had toen nog een vrijwel onbetwist gezag en Brouwer wilde het niet. Brouwers woord was wet op het stadhuis en in de faculteit. Brouwer en zijn broer, de geoloog, regeerden echt als potentaten in de faculteit.”

Plaatjes

Freudenthal werd hoogleraar in Utrecht en in 1947 werd U zijn assistent. Heeft hij U opgeleid als topoloog? “In de eerste plaats, Freudenthal was in zeer veel dingen geïnteresseerd. Zijn collega ‘lineaire analyse’, bijvoorbeeld, was werkelijk prachtig. Hij had misschien wel verwacht dat ik wat meer in zijn lijn zou doen. Behoudens een paar artikelen zijn we nooit

Klaas Vaak

J.A. Schouten heb ik altijd bewonderd. Hij was zeer ad rem. Na de oorlog schudde het Wiskundig Genootschap op zijn grondvesten toen een groep jongeren, mensen als De Bruijn, Freudenthal, verandering wilde brengen in de wijze waarop het bestuur verkozen werd. Het moest democratischer. In plaats van coöptatie wilde men inbreng van de leden. De ene verandering bracht de andere mee en het kwam tot een statutenwijziging. Het bestuur was afgetreden en Schouten, interimvoorzitter, leidde de vergadering waarin de nieuwe statuten vastgesteld zouden worden. De sfeer was gespannen en het debat liep natuurlijk uit op allerlei futiliteiten. Zo rees het voorstel ergens in de tekst het woord ‘dikwijls’ te vervangen door ‘vaak’ en even later, opnieuw een voorstel om dat woord ‘vaak’ toch maar weer te vervangen door ‘dikwijls’. Iemand in de zaal vroeg zich hoorbaar af wat toch het verschil was tussen vaak en dikwijls, waarop Schouten uiterst geïrriteerd opmerkte: “Het enige verschil dat ik weet, is dat je wel kunt zeggen Klaas Vaak maar niet Klaas Dikwijls”.



Elie Cartan, Oslo, 1936

D. van Dantzig

als topologen samen werkzaam geweest.”

“Ik denk sterk in plaatjes, erg sterk, misschien meer nog dan Freudenthal. Freudenthal had bijvoorbeeld ook een sterke interesse in grondslagenkwesties. Hoe respectabel ik dat ook vind, dat moet ik nooit doen. Hij dacht ook wel in plaatjes, maar ik denk dat ik toch meer in plaatjes dacht dan hij. Als ik nu Freudenthals boek over Lie-groepen inkijk, dan denk ik, het is allemaal knap, maar ik begrijp niet dat je het op deze manier opschrijft. Ook als ik het boek van Jacobson over Lie-algebra's lees: maar man, hoe kun je zo iets opschrijven! Het is gewoon een andere manier van denken, een niet-meetkundige manier, een algebraïsche manier. Anderen kunnen weer niet op mijn manier of op Cartans manier denken.”

Bij Lie-groepen, Lie-algebra's, cohomologie en bij de Cartan-Leray spectraalrij kun je moeilijk plaatjes maken. “Nee, dat is dan aan de rand. Toch is het zo dat ik altijd in plaatjes denk. [De spectraalrij vormt zich nu onder Van Ests handen in de lucht]. Tijdens de oorlog heb ik natuurlijk toch wel eens wat wiskundeboeken ingekeken en een van de dingen die ik niet heb afgemaakt na mijn kandidaats — waar de oorlog dus als obstructie tussen is gekomen — is een college partiële differentiaalvergelijkingen. Je hebt partiële differentiaalvergelijkingen van de eerste orde en van hogere orde en dat zijn twee verschillende theorieën. De theorie van partiële differentiaalvergelijkingen van de eerste orde is echt een heel meetkundige theorie. Daar zie je echt de oplossingen van zo'n systeem lineair voor je: dat is dus echt een foliatie — een term die ik toen nog niet kende! — Je ziet dan gewoon in die ruimte dat hij wordt opgevuld, lokaal, door die oplossingen. Ik besepte wel dat het verder weinig zoden aan de dijk zette om dat beeld te hebben bij die oplossing, maar op de een of andere manier vond ik dat leuk. Toen ik naderhand in de foliaties terecht kwam, dacht

ik, zie je wel, het kan zo gek niet lopen in het leven of je komt weer terug bij de dingen die je hebt laten liggen — bij een plaatje in dit geval.”

Uw jaar in Princeton in 1953/54 was een belangrijke stap in uw carrière. Was het op eigen initiatief dat U daar naartoe ging? “Ik was bij Freudenthal in Utrecht assistent vanaf 1947 en vanaf 1950 zat ik daar als min of meer als vast medewerker. In 1952/1953 was de topoloog Ralph Fox uit Princeton op bezoek in Utrecht omdat hij iets gedaan had op het gebied van ‘eindentheorie’, waarvan Freudenthal de *Urheber* was. Vanwege onze gemeenschappelijke belangstelling zorgde Fox dat ik een jaartje als visiting lecturer naar Princeton kon komen.”

“Het werk aan de Lie-algebra-stellingen had ik achtergelaten bij Freudenthal toen ik naar Princeton vertrok en die heeft het vlot in de *Proceedings* van de KNAW laten verschijnen. Toen dat verscheen en Princeton bereikte, verbeterde dat mijn status wel. Kort daarna heb ik die zaak kunnen aanscherpen met behulp van spectraalrijen. Hiermee was ik getrouwd geraakt door Robert Herman die ook in dat jaar 1952/53 in Nederland was op een reisbeurs en vaak naar Parijs ging voor het befaamde *séminaire Bourbaki*, dat juist dat jaar door Cartan werd gegeven over topologie. Herman was een groot pleitbezorger van het gebruik van Elie Cartans werk in de fysica en hij vertelde me over spectraalrijen. Ik ontmoette hem opnieuw in Princeton. Een Amerikaan als Herman reisde gewoon vanuit Nederland naar Parijs, maar voor Nederlanders was het in die tijd echt iets uitzonderlijks om het *séminaire Bourbaki* bij te wonen.”

Topologeneffect

In Amsterdam heeft J. de Groot een hele generatie wiskundigen opgeleid die de verzamelingstheoretische topologie een prominente plaats hebben gegeven. Men spreekt wel van het topologeneffect. Heeft dit de door Freudenthal ingezette bloei van de algebraïsche topologie opzij geschoven? “De Groot was daar zeker niet op uit. Natuurlijk zoals een lichaam in beweging een zekere traagheid heeft, zo volhardt ook het intellect in zijn spoor. Door het vak waarin je bent opgeleid, heb je een zekere richting gekregen, maar je zou zeggen, die leerlingen hadden ook zelf hun blik wel kunnen verruimen.”

“Ik begrijp ook heel goed hoe dat gaat. Voor de algemene topologie heb je weinig bagage nodig om ergens aan te beginnen. Een tijdlang kon je met een nieuw begrip of een verdere abstractie een heel eind komen ...

alleen de band met werkelijke wereld is dan soms ver te zoeken.”

“Ik vermoed dat De Groot wel degelijk heeft gezien dat het *centrum* van de *topologie* elders lag. Je hebt van die verzamelings-theoretische topologie wel een beetje nodig, maar het harde werk werd toch gedaan in de algebraïsche topologie. Dat zal de reden zijn geweest dat hij het verschijnen van *Foundations of Algebraic Topology* van Eilenberg en Steenrod aangreep om er een seminarie te geven. Mensen als Springer, Korthagen en Murre zaten daar bij.”

Commentator

Van Est is vooral bekend om zijn werk aan cohomologie- en Lie-theorie. Hoe zou U uw eigen bijdrage aan dit terrein omschrijven? “Mijn eigen bijdrage, als ik het je heel eerlijk mag zeggen, is nul- komma-nul.”

Ja, dat is een echte Van Est-uitspraak. “Ik ben een commentator geweest van dingen die ooit eerder gedaan zijn. Ja, mijn enige bijdrage is dat ik in de jaren vijftig een aantal dingen heb bewezen over differentieerbare cohomologie. Daarvan moet ik zelf zeggen: dat

Lie-III

Een Lie-groep is een gladde variëteit voorzien van een groepsstructuur (met C^∞ -differentieerbare vermenigvuldiging), zoals de groep van inverteerbare $n \times n$ -matrices.

Een Lie-algebra is een vectorruimte V voorzien van een bilineair ‘Lie-haakje’,

$$[-, -]: V \times V \rightarrow V,$$

dat voldoet aan de volgende axiomas (het tweede axioma is de zogenaamde Jacobi-identiteit):

$$[x, y] = [y, x]$$

en

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]].$$

De raakruimte $\mathfrak{g} = T_e(G)$ van een Lie-groep G in het punt e (de eenheid van de groep) is een Lie-algebra. De derde fundamenteelstelling van S. Lie zegt dat elke eindigdimensionale Lie-algebra V van deze vorm is. Zie bijvoorbeeld E. Cartan, *Oeuvres Complètes*, Parti I (‘Groupes de Lie’), 1307–1330. Er is geen versie van Lie-III voor Banach-Lie-algebras, zie W.T. Van Est en Th.J. Korthagen, *Indag. Math.* **24** (1962), 409–425.

waren dingen, die waren in die tijd niet bekend. Dat was ook inderdaad toch wel aardig. Ehresmann had me uitgenodigd voor een voordrachtje in Parijs in zijn *séminaire* en daar bleek dat zelfs Chevalley, die toch niet zo gecharmeerd was van een meetkundige werkwijze, nieuwsgierig was naar dit werk.”

“Voor de rest, bijvoorbeeld wat Lie-III betreft, kan ik niet anders zeggen dan dat ik een commentator ben geweest van wat Cartan ooit heeft gedaan, maar dan wel een commentator die een aantal consequenties heeft getrokken, die anderen niet hebben getrokken. Dat is wel waar, maar het is in feite Elie Cartan.”

“Je moet het maar eens nalezen in zijn verzamelde werken. Het artikel ‘La topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie’ is gebaseerd op de openingsvoordracht van een conferentie in Genève in oktober 1935. Daar heeft Cartan toch een paar schuifjes losgemaakt. Hopf was erbij en is door die voordracht gaan werken aan, wat naderhand is gaan heten, de stelling van Hopf over topologische structuur van groepen of van Hopf-ruimten.”

Hoe kwam U van differentieerbare cohomologie bij foliaties terecht? “Dat was dus eigenlijk via de Lie-theorie. Lie-III voor Banach-Lie-algebra’s bestaat niet in strikte vorm. Het bestaat alleen in strikte vorm als je wilt accepteren dat er groepen zijn die in strikte zin niet-analytisch zijn, maar die — om het in moderne terminologie te zeggen — als S-atlas, een soort gegeneraliseerde variëteit, wel bestaan. Neem maar het quotient van de reële getallen met betrekking tot zijn overal dichte ondergroepen, dat is precies het fenomeen dat zich hier voordoet. Dat was het begin voor mij. Aan de andere kant, laten we eerlijk zijn, Banach-groepen, Banach-Lie-algebra’s, best aardig, je kunt natuurlijk wel van alles definiëren, maar het heeft verder zo



weinig concrete toepassing. Daarom vroeg ik mij af of er niet in eindige dimensies iets zou zijn waar je ook dat soort fenomenen tegenkomt. Zo kwam ik op de foliaties terecht.”

Haefliger probeerde op het symposium even om S-atlassen te hernoemen tot Van Est-variëteiten, maar daar wilt U niet aan? “De S van S-atlassen komt van Satake. In het begin zei ik *schéma de variété* en op een suggestie van Pradines ben ik ze zo gaan noemen. Satake werkte met een speciaal geval van dergelijke variëteiten waar singulariteiten in zitten, maar als je het nu S-atlas noemt in plaats van *schéma de variété*, dan doe je hem ook recht. Tegelijkertijd had je Thurston met zijn *orbifolds* en Haefliger met *pseudogroepen*, maar je kunt niet aan het hernoemen blijven. De reden dat ik voor mijzelf de voorkeur geef aan de naam S-atlassen, is dat deze naam uitdrukt dat je het beschouwt als beschrijving van een zekere wereld, een vreemde wereld maar des-

ondanks als beschrijving van een wereld. En die wereld die je beschrijft in het geval van foliaties is dan de transverse structuur. Zo heb ik het altijd willen beschouwen, het is gewoon een atlas, maar op een wat vreemde manier zit hij aan elkaar. Je beschrijft namelijk een wereld die, als je naar het topologische substraat kijkt, er heel vreemd uitziet, maar desondanks op mijn knutselachtige manier een atlas. Dat is de intuïtieve achtergrond van de naamgeving.”

Intuïtie en bewijs

U noemt uzelf commentarist. Toch bent U degene die expliciet maakt, wat bij Cartan impliciet staat. Is dat expliciteren niet het wezen van de voortgang in de wiskunde? “Dat zijn dingen waar je vanzelf toe komt. Je wordt door een zeker inzicht geleid en dan moet je maar achteraf verifiëren dat dat inzicht een tastbaar hard resultaat oplevert. Het besef dat het bewijs er staat, dat je voor jezelf de overtuiging hebt dat het rond is, dat leer je niet van iemand; je leert het vanzelf in de loop van de tijd. Voor mijn afstuderen gaf Van Dantzig me een artikel om in het colloquium te bespreken. Daar heb ik heel hard aan gewerkt en op een gegeven moment wist ik niet meer of de dingen nu wel of niet bewezen waren. Dat heb ik toen met Van Dantzig doorgesproken.”

Had U voorbeelden qua schrijfstijl? “De stijl van Freudenthal om dingen op te schrijven, heb ik naderhand altijd een beroerde stijl gevonden. Als je dat vergelijkt met Hopf, daar gaat het allemaal zo natuurlijk. Het staat er allemaal prachtig, hoor, bij Freudenthal, en het klopt ook wel, maar zoals Cartan som-

Het Van Est-isomorfisme

Van Est is vooral bekend om het zogenaamde Van Est-isomorfisme, dat een verband aangeeft tussen de ‘differentieerbare cohomologie’ van een Lie-groep, gedefinieerd in termen van differentieerbare coketens

$$G \times \dots \times G \rightarrow \mathbf{R},$$

en de cohomologie van de Lie-algebra $\mathfrak{g} = T_e(G)$ gebaseerd op lineaire coketens

$$\mathfrak{g} \wedge \dots \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{R}.$$

Er is eigenlijk een aantal isomorfismen, alle gebaseerd op de zogenaamde Van Est spectraalrij. Er is een mooi bewijs van de derde fundamentealstelling van Lie dat gebruik maakt van het Van Est-isomorfisme. Van Est publiceerde zijn resultaten in de *Proceedings* van de KNAW (1955). Zie bijvoorbeeld ook A. Borel en N. Wallach, ‘Continuous Cohomology, etc’, *Annals of Math Studies* 94, Princeton U.P. 1980.

S-atlassen

De torus T (een fietsband, maar niet ge- vulcaniseerd) is op te delen in een familie lijnen. Elk van deze lijnen windt zich on- eindig vaak om de torus, en ligt ‘dicht’ in de torus.



De Kronecker-foliatie

Dit is een voorbeeld van een foliatie, de zogenaamde Kronecker foliatie, die ook een belangrijke rol speelt in de niet-commutatieve meetkunde. (Zie A. Connes, *Non-commutative geometry*, Ac. Press, 1994.) De lijnen heten de bladen van de foliatie. Deze bladen worden geparametriseerd door een quotiënt $S^1/\mathbf{Z}$ van de cirkel S^1 , die als een dunne velg over de fietsband loopt. De werking van $\mathbf{Z}$ op deze cirkel is zo, dat de quotiënttopologie de indiscrete topologie is. Dit quotiënt is dus geen informatief model voor de bladenruimte van de foliatie. Een goed model voor de bladenruimte van een willekeurige foliatie kan worden verkregen met behulp van het begrip 'S-atlas', een generalisatie van het begrip gladde variëteit. (Zie W.T. van Est, Rapport sur les S-atlas, *Astérisque* **116**, 1984.)

mige dingen heeft opgeschreven, dat *loopt* veel beter.”

Waar komt het inzicht vandaan dat de wiskundige vervolgens gaat verifiëren? “Ik schreef een artikel voor een Frans tijdschrift en had een vrije sterke intuïtie hoe die zaak in elkaar zat en hoe die zaak tot het gewenste resultaat zou leiden. Zo’n inzicht is min of meer gebaseerd op gevoelens, zoals een schaker een stelling inschat. Dan verbaast het je, dat je toch nog hard moet werken, echt hard moet werken, om het voor elkaar te krijgen. Het blijkt dan dat dat intuïtieve inzicht wel correct is, maar om het overtuigend op te schrijven zo dat iedereen kan zeggen ja-ja-ja-ja-ja-zo-is-het, dat eist soms een enorm werk. Dat is mijn ervaring.”

“Dat heb ik met een aantal dingen gehad. Bijvoorbeeld bij de stelling van Ado. Ik kon ’s nachts niet slapen en dacht, verdorie, zó moet het zijn. Dat is eigenlijk iets gek. Er zit een verborgen harmonie in de wereld die op de

een of andere manier in je oren klinkt of tot je hersens doordringt — en waarvan je helemaal niet ziet hoe dat precies allemaal verschakeld zit — die dan toch je op de goede weg leidt. Het is een influistering ergens vandaan. Ja, dat klinkt gek, maar verdomd, het is waar, hoor!”

“Ik heb dat een paar keer in mijn carrière ondervonden. Bijvoorbeeld bij de voorbereiding van het cohomologie-artikel. Ik had het ook bij het bewijs van de Stelling van Ado via de Cartan-methode, bij de niet-uitbreidbaarheid van Banach-Lie-algebra's en bij een bewijs in de foliatietheorie.”

Verhuizen

Van Est bekleedde leerstoelen aan drie universiteiten. Hij maakte een compleet rondje van studie aan de Universiteit van Amsterdam, naar Utrecht als assistent, wetenschappelijk ambtenaar, lector en hoogleraar, naar Leiden en terug naar Amsterdam als hoogleraar. “Leiden was rustig, hè. In Utrecht was iedereen driftig bezig. Vlucht is misschien een groot woord, maar Freudenthal was natuurlijk toch wel dominerend. De overstap was voor mij een manier om mijn Schüler-complex af te leggen en onafhankelijk van Freudenthal mijn interesses te ontwikkelen.”

“Kloosterman in Leiden onthield zich van commentaar op andermans werk. Het gaf mij een iets vrijer gevoel. Waarom ben ik dan toch uit Leiden weggegaan? Na verloop van tijd zaten we met zijn drieën aan de meetkundige kant, Van de Ven, Murre en ik. Als je maar weinig studenten hebt, ben je al gauw elkaars concurrent. Ik heb het natuurlijk in zekere zin aan mezelf te wijten. Als je met voldoende *poids* en met voldoende interessante onderwerpen studenten weet te boeien, dan blijf je natuurlijk hangen. Dat heb ik nou eenmaal niet en in Amsterdam had ik een zekere taak voor de meetkunde. Toen ik het aanbod kreeg om naar Amsterdam te gaan, heb ik dat graag aangenomen.”

In beide gevallen bent U weggegaan, voordat U strijd moest leveren? “Precies, altijd op de vlucht; dat is het.”

Verantwoordelijkheden bent U anders nooit uit de weg gegaan, als bestuurder in Leiden, Amsterdam, in het Wiskundig Genootschap, de Academische Raad, het Mathematisch Centrum en tenslotte als voorzitter van de Nederlandse Commissie voor de Wiskunde. Wat was uw bestuurlijke visie op de wiskunde-beoefening in Nederland? “De Commissie voor de Wiskunde heeft de wiskunde-beoefening van het niet-geïstitutionaliseerde naar het geïstitutiona-

liseerde stadium getild. Er zijn werke-
meenschappen gekomen. Het Mathematisch
Centrum kreeg een eigen positie binnen
de Nederlandse Organisatie voor Zuiver-
Wetenschappelijk Onderzoek (ZWO) — dat is
nu alweer veranderd. Er waren veel mensen
die zich bestuurlijk inzetten. Mijn opvolger
Van Lint heeft daarin veel krachtdadiger op-
getreden en de Verkenningcommissie Wis-
kunde (1989–1992), onder Korevaar en Van
Zwet, heeft het denken van de wiskundigen
sterk veranderd. En Baayen, Baayen speelde
in allerlei bestuurlijke activiteiten met lande-
lijke uitstraling een grote rol. Seidel kwam je
ook overal tegen. Seidel was een heel an-
der bestuurder dan ik. Seidel had een enor-
me push; als hij zich ergens voor inzette, nou
dan gebeurde het ook. Maar ik denk dat op
het gebied van bestuurlijke *wijsheid* Baayen
beslist niet onderschat moet worden. Bij die
stijl voelde ik me meer thuis.”

“We hebben die institutionalisering tot stand gebracht, maar in mijn visie is dat helemaal niet zo belangrijk. Het idee van grote laboratoria, met een chef d'équipe à la Schouten, dat zag ik niet als iets wat je voor de wiskunde moest nastreven. Een Hendrik Lenstra, die groeit niet op in een werkgemeenschap; die is daar als zodanig en weet iets te creëren. Dat is zijn individuele prestatie. Om dan te zeggen, we moeten te allen tijde een werkgemeenschap hebben die, noem eens wat, Euclidische ringen bestudeert ... in godsnaam, nee! Je hebt mensen die eruit springen waardoor ze bijzondere dingen maken en dat is naar mijn mening in de wiskunde zo individueel, nog altijd, dat het moeilijk te institutionaliseren is. Neem een Troelstra. Hij doet intuitionisme omdat *hij* dat is. Dat heeft hij bij Heyting geleerd, maar hoeveel mensen zullen het hem nadoen? Als hij er niet meer is, moet je dat dan per se willen voortzetten, moet dat per se een school of groep zijn? Dat is mijn visie tegenover de geïnstitutionaliseerde visie die nu bij NWO, destijds bij ZWO, opgeld doet.”

“Natuurlijk moet je een klimaat scheppen waarin talent kan gedijen. Creëer dan een tussenvorm. Er moeten een paar lui zijn die voortrekkers zijn, die een aantal mensen weten warm te maken, tot werken weet aan te zetten. Je hebt mensen als Van der Geer die graag samenwerken en iets opbouwen. Zijn dergelijke figuren er op een bepaald terrein niet, laat het dan, dan heeft het geen zin om over een samenwerkingsverband te praten. Zo zie ik het.”

Michael van Hartskamp

Doelenstraat 18, 2282 MX Rijswijk

michael@vanhartskamp.com

T_EX-rubriek

De kracht van T_EX

Het professioneel drukken van een wiskundige tekst is een gecompliceerde en kostbare aangelegenheid. Bovendien is de oplage vaak klein, bijvoorbeeld wanneer het een proefschrift betreft. Vroeger werd zo'n tekst getypt, waarna er met de hand de formules in werden geschreven. Het programma troff betekende een behoorlijke vooruitgang en het is enige tijd populair geweest. Het programma T_EX heeft een grote omwenteling in het zetten van wiskundeteksten veroorzaakt. Michael van Hartskamp, gepromoveerd topoloog (Vrije Universiteit) met een vader uit de drukkerswereld, zal een rubriek over dit onderwerp verzorgen.

Het lijkt zo tegenstrijdig: het Nieuw Archief probeert zich te vernieuwen en ondertussen start men met een rubriek over een computerprogramma dat al in 1978 beschikbaar was en sinds 1989 niet wezenlijk meer veranderd werd. T_EX, want daar hebben we het over, heeft echter een ongeëvenaarde bijdrage geleverd aan het wiskundige schrijfwerk. Daarom staan we daar graag even bij stil en voorzien we waar mogelijk van nadere informatie om het werken met T_EX te vereenvoudigen of te verbeteren.

De vraag is natuurlijk hoe T_EX zo'n sterke positie heeft weten te verwerven, en hoe T_EX deze heeft kunnen behouden. Daar zullen we deze eerste keer naar kijken. Naast de sterke punten gaan we ook in op de zwakke punten van T_EX en wat de T_EX-wereld gedaan heeft ter verbetering.

Geschiedenis

Tot ver in de vorige eeuw werden boeken volgens de klassieke methode gedrukt. De zetter bekeek de tekst en maakte aan de hand hiervan een verdeling van de tekst over de regels. De regels vormden samen weer een bladzijde. Elke regel bestond uit letters die één voor één op de regel geschoven werden. De aldus gezette tekst werd vervolgens gebruikt als drukplaat. Het op deze wijze foutloos zetten van tekst was een tijdrovende bezigheid. Zeker het zetten van wiskundige teksten was specialistisch werk, en dus extra kostbaar.

Het sprak voor zich dat uitgevers en drukkers naar andere minder kostbare methoden zochten. Een nog altijd veelgebruikte methode is om het te drukken materiaal te fotograferen en van die foto's drukplaten te maken. De verantwoordelijkheid voor de juiste vormgeving verschoof hiermee naar degene die het papieren origineel aanleverde.

Het correct afleveren van wiskunde was daarmee nog steeds niet opgelost. Terwijl gewone tekst eenvoudig op schrijfmachines kon worden getikt, was voor het wiskundig formulewerk extra werk nodig. Soms werden symbolen met de hand geschreven in speciaal open gelaten ruimte, maar voor een professioneler resultaat was al gauw een hoop geknoei nodig met speciale wielen die andere tekens aan de schrijfmachine konden onttrekken. Hoewel dit werk veelal werd uitbesteed aan niet-wiskundig opgeleide secretaresses was dit proces nog altijd zeer moeizaam en tijdrovend.

Omdat steeds meer niet-specialisten zich bezighielden met de voor-

bereiding van het drukproces was de kwaliteit van het drukwerk lang niet meer zo hoog als vroeger in de tijd van de gespecialiseerde zettters. Aan één zo'n tegenvallend resultaat is $\TeX$ te danken. De Amerikaanse wiskundige en computerwetenschapper Donald Knuth bekeek de nieuwe edities van zijn beoogd zeventien delig levenswerk 'The Art of Computer Programming' en was hierover zeer ontevreden. Hij wist dat het mogelijk was om met de computer beter zetterwerk af te leveren. Speciaal voor zijn levenswerk bedacht hij, samen met zijn promovendi, $\TeX$: een programma speciaal geschikt voor het zetten van wiskunde. Vele jaren later, in 1997, leverde Knuth de eerste in $\TeX$ gezette herdrukken van zijn levenswerk af.

$\TeX$ was bedoeld om papieren originelen af te leveren die gebruikt kunnen worden in het drukproces. De laatste jaren werd het origineel voor de drukplaat echter steeds vaker aangeleverd als uitdraai van een printer en dus was de volgende logische stap in de ontwikkeling van de drukpers om meteen vanuit de computer de drukplaten te genereren. Zonder veel moeite bleek $\TeX$ in staat ook deze overgang te maken.

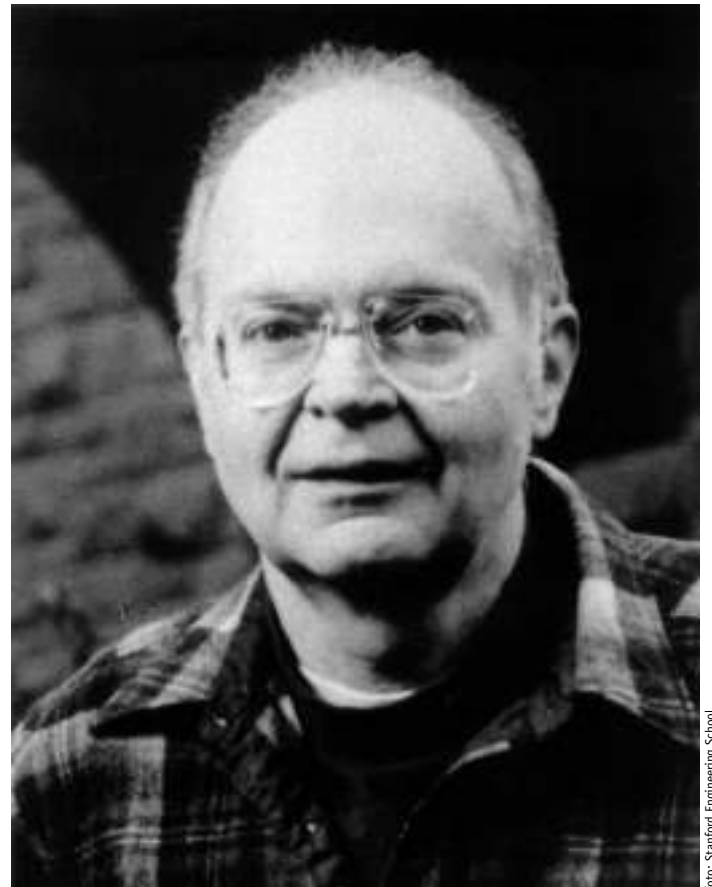
De ontwikkeling van $\TeX$ door Knuth is een verhaal op zich. Met $\TeX$ 78 werd in 1978 de eerste versie van $\TeX$ getoond. Daarna is $\TeX$ doorontwikkeld. Met het verschijnen van versie 3 nam Knuth een belangrijke stap. Hij wilde $\TeX$ niet meer verder ontwikkelen. Alleen het weghalen van fouten in het programma zou nog tot veranderingen kunnen leiden. Bij iedere fout werd het versienummer aangevuld met een extra cijfer uit de decimale ontwikkeling van π . Het aantal gevonden fouten sinds versie 3 is vrij gering gebleven. Knuth durft het dan ook aan om op de volgende fout een beloning van \$327.68 te zetten. Een beloning die hij bij het vinden van een eerdere fout steeds heeft verdubbeld.

De eerste versie

De ontwikkeling van een programma zoals $\TeX$ was voor Knuth ook vanuit onderzoeksperspectief interessant. Zo werd voor $\TeX$ een algoritme ontwikkeld dat (engelse) woorden vrijwel altijd correct afbreekt. De uitdaging zit erin dat de computer geen lettergrepen onderscheiden kan en niet genoeg geheugen had voor een volledige woordenlijst. Op basis van de opeenvolging van specifieke letters worden voor een woord de mogelijke afbreekplaatsen gewaardeerd. De plaatsen met de hoogste score worden als toelaatbaar gekenmerkt. Een bepaalde collectie patronen zorgt voor de juiste gewichten.

Een ander nevenproduct van $\TeX$ was het zogenaamde 'literate programming': $\TeX$ werd zelfs herschreven in het daarvoor ontwikkelde pascaldialect Web. De programmeur werd geacht zijn programma te documenteren met $\TeX$ -tekst. Zo ontstaat een helder begrijpelijk computerprogramma dat enerzijds door de computer kan worden geïnterpreteerd en anderzijds, dankzij $\TeX$, ook door de mens.

De belangrijkste reden van het succes van $\TeX$ in de wiskundige wereld was ongetwijfeld het gebrek aan concurrentie. De standaard



Donald E. Knuth

tekstverwerkings programma's WordStar, Word en WordPerfect boden aanvankelijk geen enkele ondersteuning voor wiskundige formules. $\TeX$ daarentegen was gebouwd met wiskunde in het achterhoofd en kon eigenlijk iedere wiskundige tekst vrijwel probleemloos aan.

Macropakketten

Toch werd $\TeX$ zeker door de wiskundige gebruikers Spartaans gevonden, de informatici hadden daar wat minder moeite mee. Om iets eenvoudigs te maken was vaak al veel programmeerwerk in een onplezierige programmeertaal nodig. Van diverse kanten werd daaraan gewerkt: Leslie Lamport maakte het populaire $\LaTeX$, de AMS maakte $\text{Ams}\TeX$. $\LaTeX$ zou uitgroeien tot het standaard macropakket. Ook het werk van de AMS werd uiteindelijk in $\LaTeX$ geïntegreerd. Aan $\LaTeX$ wordt nog altijd gewerkt. Versie 2.09 werd opgevolgd door een versie 2 ϵ . Deze laatste versie moet al jarenlang dienen als voorloper van $\LaTeX$ 3. De toegenomen (vrij ongestructureerde) complexiteit van $\LaTeX$, maakt het pakket soms erg ondoorzichtig. Voor programmeurs en gebruikers blijft het doorgronden van $\LaTeX$ een bijna ondoenlijke puzzel. De Nederlander Hans Hagen heeft de laatste jaren besteed aan het schrijven van een doorzichtiger macropakket met vergelijkbare functionaliteit als $\LaTeX$. Het resultaat is $\text{Con}\TeX$ t. Met behulp hiervan wordt het Nieuw Archief gezet. Door wiskundigen wordt het overigens nog maar mondjesmaat gebruikt.

De kracht van $\TeX$

$\TeX$'s mogelijkheden voor het (correct) vormgeven van wiskunde zijn nog altijd ongeëvenaard. $\TeX$ kent vrijwel alle regels die de vroegere zettters ook in acht namen.

```
This is TeX, Version 3.14159 (Web2C 7.3.1)
**\relax

*Welkom in de wondere wereld van \TeX!

*\bye
[1]
Output written on texput.dvi (1 page, 260 bytes).
Transcript written on texput.log.
```

Figuur 1 Hoezo is $\TeX$ onvriendelijk?

Door de mogelijkheid erin te programmeren is $\TeX$ geschikt om het vervelende handwerk van het schrijven te automatiseren. $\TeX$ kan al jaren hoofdstukken, paragrafen en literatuurverwijzingen automatisch nummeren en dat voorkomt veel werk voor de maker van inhoudsopgaven en indices, en ook een hoop ergernis voor de lezer die altijd net die ene onjuiste verwijzing treft die een handmatige nummering onherroepelijk oplevert.

$\TeX$ is zeer sterk in het zetten van alinea's tekst. Waar de meeste tekstverwerkers per regel besluiten of een woord naar de volgende regel wordt verplaatst of niet, doet $\TeX$ dit per alinea. Zo kan een suboptimale keuze in één regel leiden tot een veel mooier geheel en er ontstaat een uniformer tekstbeeld, dat daardoor prettiger leest. $\TeX$ maakt zijn keuzes op basis van het kortste-pad-algoritme. In essentie komt het hier op neer: de steden voor het pad zijn de spaties tussen de woorden. Een pad tussen twee steden komt overeen met een regel tekst voor de alinea. De prijs van een pad wordt bepaald aan de hand van de hoeveelheid tekst en de wijze waarop deze kan worden gezet: ver uiteen staande tekst of gedrongen tekst is lelijk, en het bijbehorende pad wordt lang gemaakt, enzovoort. Ook tussen opeenvolgende regels is een relatie: gedrongen tekst gevolgd door veruiteen staande tekst leest niet prettig en het bijbehorende pad is dus ook relatief duur.

De kracht van $\TeX$ is dat het meestal automatisch goed gaat. Afwijken van de regels wordt vaak erg moeilijk gemaakt. Als $\TeX$ al eens een steekje laat vallen moet de auteur dus handmatig ingrijpen. Dat komt maar zelden voor en dus zullen veel auteurs de trucjes niet kennen of niet realiseren dat ze ze moeten gebruiken. Ook aan deze zaken zullen we aandacht besteden. We zullen voorgaande met een beroemd voorbeeld illustreren. Aan het eind van een zin (na een punt) laat $\TeX$ meer witruimte dan tussen woorden. Het menselijk oog wordt hierdoor geholpen. $\TeX$ kan echter geen verschil maken tussen een afkorting en het eind van de regel, d.w.z. dat achter de 'z' in de voorafgaande afkorting 'd.w.z.' er teveel witruimte komt omdat $\TeX$ ten onrechte denkt dat de zin is afgelopen. Door $\TeX$ te vertellen dat hier een gewone spatie hoort is het probleem verholpen. Dat laatste kan door achter de punt een $\TeX$ -backslash te zetten gevolgd door een spatie. Hoewel de afkorting in de vorige zin de tweede keer tussen aanhalingstekens is geplaatst geldt ook daar hetzelfde.

Verder blijkt $\TeX$ ook prima geschikt voor het elektronisch of op papier aanleveren van tekst aan de drukker. Wel blijkt dat het standaard $\TeX$ -lettertype soms iets te dun is voor de moderne drukker. Ook voor het publiceren op het Internet is $\TeX$ geschikt, maar dan is de omweg via PDF aan te raden.

Zwakke punten

De eerlijkheid gebiedt ook de zwakke punten te bekijken. Het gebruik van een ander lettertype was vroeger een heidens karwei. Nu is het een vrij eenvoudig op te lossen probleem en zijn duizenden commerciële lettertypes ook bruikbaar binnen $\TeX$. Voor vrijwel iedere wiskundige tekst zijn echter speciale symbolen onontbeerlijk en de mooiste afdruk wordt verkregen indien de symbolen bijpassend vormgeven zijn. Helaas bevatten de commerciële lettertypes niet veel meer dan een plus- en een minteken. Er zijn mij slechts drie lettertypes bekend waarvoor de meest voorkomende wiskundige symbolen in bijpassende stijl beschikbaar zijn.

Het gebruik van afbeeldingen in tekst is iets waar $\TeX$ eigenlijk nooit voor gemaakt is. Het levert dan ook tot op de dag van vandaag regelmatig problemen op. Wie een folder of een glossy magazine wil maken kan $\TeX$ beter thuis laten.

Tot slot $\TeX$ is nog steeds duidelijk gericht op techneuten. De instal-

latie is inmiddels stukken eenvoudiger dan ze vroeger ooit was, maar $\TeX$ blijft een niet-interactief programma dat meer een programmeerhulpmiddel is dan een tekstverwerker. Het communiceren met $\TeX$ blijft programmeren. Er zijn wel enkele 'moderne' point-and-click interfaces: voor ervaren $\TeX$ -ers zijn die een ergernis, maar ook voor de beginner is het behelpen.

De conclusie is duidelijk. $\TeX$ heeft een lange geschiedenis en die is nog niet ten einde. $\TeX$'s sterkste punt is het mooi weergeven van tekst en wiskunde. Voor een wiskundige is het plezierig dat niet alleen de inhoud maar ook de vorm prettig is en het lezen van zijn/haar werk vereenvoudigt, waardoor de toegankelijkheid verbetert. De zwakke kanten zijn dat $\TeX$ als moeilijk en ontoegankelijk wordt ervaren en niet zo goed met afbeeldingen overweg kan.

Wordt vervolgd

In deze rubriek zal ik proberen om met name op deze laatste punten verlichting te brengen. De volgende keren zal deze rubriek in het teken staan van: $\TeX$ thuis, $\TeX$ vragen beantwoord krijgen en plaatjes. Maar ook leuke hulpmiddelen zoals het programma Bib $\TeX$ voor de referenties aan het eind van een artikel zal ik onder de loep nemen. 

Frits Beukers

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
beukers@math.uu.nl

Weia Reinboud

Simon Bolivarstraat 87, 3573 ZK Utrecht
weia@antenna.nl

Snellius versneld

In 1621 ontdekte Snellius een eenvoudige manier om de benadering van π van Archimedes aanmerkelijk te verbeteren. Dit bleek een diepzinnig resultaat dat pas later werd bewezen. Frits Beukers en Weia Reinboud, respectievelijk docent en studente aan de Universiteit Utrecht, plaatsen de methode in een breder verband en ontwikkelen andere, op Snellius' methode geïnspireerde formules.

Practically all computations of the value of π before 1600 were done using Archimedes' method. This method consists of approximation of the circle with diameter 1 by inscribed and circumscribed regular polygons. Denote the circumference of the inscribed and circumscribed regular N -gon by P_N and Q_N respectively. Then $P_N < \pi < Q_N$ and

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N = \lim_{N \rightarrow \infty} Q_N = \pi.$$

A little trigonometry shows us that

$$Q_N = N \tan \frac{\pi}{N}, \quad P_N = N \sin \frac{\pi}{N}, \quad (1)$$

from which the duplication formulae

$$Q_{2N} = \frac{2P_N Q_N}{P_N + Q_N}, \quad P_{2N} = \sqrt{P_N Q_{2N}} \quad (2)$$

follow readily. For more details, see [3].

Archimedes started with the values $Q_6 = 2\sqrt{3}$ and $P_6 = 3$ and calculated $Q_{12}, P_{12}, Q_{24}, \dots, Q_{96}, P_{96}$ consecutively using the duplication formulae in (2). See also [1].

Ludolph van Ceulen, around 1600, continued this procedure until he obtained 35 decimal places of π . To get an idea of the accuracy of the approximation Q_N to π we use the Taylor series expansion of $\tan x$. We get,

$$\begin{aligned} Q_N &= N \left(\frac{\pi}{N} + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{N} \right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{\pi}{N} \right)^5 + \dots \right) \\ &= \pi + \frac{1}{3} \frac{\pi^3}{N^2} + \frac{2}{15} \frac{\pi^5}{N^4} + \dots \end{aligned}$$

In other words, $Q_N - \pi$ has order of magnitude $O(\frac{1}{N^2})$. More precisely, $Q_N - \pi$ is equal to $\frac{\pi^3}{3N^2}$ up to order $O(\frac{1}{N^4})$. Similarly, $P_N - \pi$ equals $-\frac{\pi^3}{6N^2}$ up to order $O(\frac{1}{N^4})$. From these two facts it follows immediately that

$$\frac{1}{3}(Q_N - \pi) + \frac{2}{3}(P_N - \pi) = \frac{1}{3}Q_N + \frac{2}{3}P_N - \pi$$

has order $O(\frac{1}{N^4})$. So we see that $\frac{1}{3}Q_N + \frac{2}{3}P_N$ gives an approximation of π having approximately twice as many correct digits as P_N or Q_N . This was discovered by the Dutch natural scientist Willebrord Snellius in 1621, about ten years after Van Ceulen's death. Snellius used geometrical observations to find his approximations. Only much later Christiaan Huygens delivered a complete proof of the correctness of these observations.

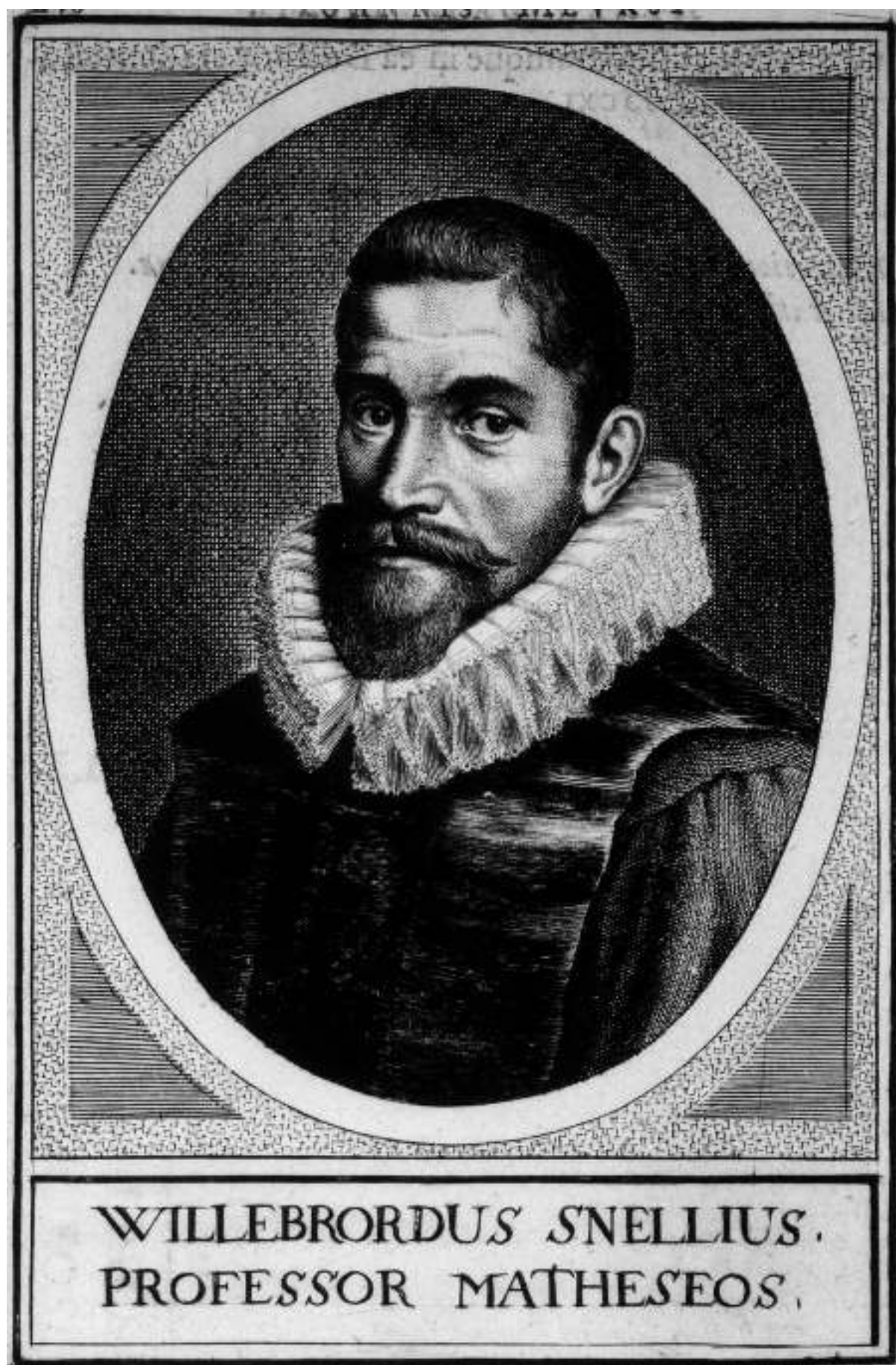
The conclusion is that Van Ceulen could have stopped halfway through his calculations, compute $\frac{1}{3}Q_N + \frac{2}{3}P_N$ for the value of N then reached, and obtain 35 decimal places of π . Such a speedup of calculation makes one wonder if Snellius' discovery can be generalised in its turn. It is the purpose of this article to give a number of such generalisations.

In our considerations we assume that we carry out a number of steps of the Archimedean algorithm. We then stop and collect the values of P_N, Q_N . Now use one of the theorems in this article. For example, after we have done the Archimedean steps, we find, up to 39 decimal places,

$$\begin{aligned} P_{96} &= 3.141031950890509638111352926459660107036 \\ Q_{96} &= 3.142714599645368298168859093772123871001 \\ \pi &= 3.141592653589793238462643383279502884197 \end{aligned}$$

We see that Archimedes approximation is correct up to two decimal places. Let us now use Archimedes result and, for example, theorem 1, which states that

$$\pi = Q_N - \frac{Q_N}{3} \left(\frac{Q_N}{N} \right)^2 + \frac{Q_N}{5} \left(\frac{Q_N}{N} \right)^4 - \frac{Q_N}{7} \left(\frac{Q_N}{N} \right)^6 + \dots$$



This series is easily obtained from the power series expansion of $\arctan$. Using $N = 96$ and our value of Q_{96} summation of 12 terms of this series yields the approximation

$$3.141592653589793238462643383279502883909$$

which is correct up to 35 decimal places. So Archimedes' four steps and addition of 12 terms in a series would have sufficed to get Van Ceulen's precision.

More generally, suppose we wish to compute π to L decimal places. As a time unit we may take the time to perform one operation (addition, multiplication, division) of two L -digit numbers. Then the Archimedean algorithm gives us the answer with L -digit precision in $O(L)$ steps. However, in the last section of this article we see that if we combine the Archimedean steps with a Snellius' type acceleration, we require only $O(\sqrt{L})$ steps.

We have not made any effort to make this very precise, since modern day methods are far better suited for the high precision calculation of π . The most widely used are the Gauss-Salamin procedure or the Ramanujan-Chudnovsky series, which are very easy to program. Again, see [4] or [3].

The motivation for this note is not to present a speedup for the calculation of π . Instead, we thought it remarkable that generalisations of Snellius' trick could be written down as a handsome series, with terms that look quite simple. In the text one finds series expressions for $\frac{\pi}{Q_N}$ in terms of $\frac{Q_N}{N}$ and $\frac{P_N}{N}$ in theorems 1 and 6. Of course there also exists a power series expansion for $\frac{\pi}{P_N}$ in terms of $\frac{Q_N}{N}$ and $\frac{P_N}{N}$. However, the first one will be a very ugly one, which we haven't even attempted to write down, whereas the second looks very simple and is stated in theorem 4.

Of course the possibility of improvements, like the ones discussed in this paper, has been considered by many others, professional mathematicians and amateurs alike. See, for example [5].

Unfortunately it is hard to get a good overview concerning publications on this subject. So we do not claim any originality in the results here. We present it as a hopefully amusing aside to π -folklore.

Accelerations based on $\arctan$

The first improvement is obtained by using the arctangent series. From $Q_N = N \tan \frac{\pi}{N}$ it follows immediately that

$$\frac{\pi}{Q_N} = \frac{\arctan(Q_N/N)}{Q_N/N}.$$

Using the well-known Taylor series for $\arctan$ we obtain our first result.

Theorem 1. *We have*

$$\frac{\pi}{Q_N} = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{Q_N}{N} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{Q_N}{N} \right)^4 - \frac{1}{7} \left(\frac{Q_N}{N} \right)^6 + \dots$$

So, by subtracting $Q_N \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{Q_N}{N} \right)^2$ from Q_N Van Ceulen could have doubled the precision of his calculations in one stroke. By adding the next term the precision could have been tripled. There is a nice variation on the above formula which does not use P_N/N or Q_N/N , but only the value $t_N = \frac{Q_N - P_N}{2Q_N}$. To explain this we need a few facts on hypergeometric functions.

Let a, b, c be real numbers and $c \neq 0, -1, -2, \dots$. Then the Gauss' hypergeometric function with parameters a, b, c is defined by the power series

$$F_{\text{Gauss}}(a, b, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k.$$

Here, $(x)_k$ is the so-called Pochhammer symbol defined by $(x)_k = x(x+1) \cdots (x+k-1)$. The series converges for all complex z with $|z| < 1$. Here is one of the many transformation formulas between hypergeometric series:

$$F_{\text{Gauss}} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{4t^2 - 4t}{(1-2t)^2} \right) = (1-2t)^a F_{\text{Gauss}} \left(a, b, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; t \right). \quad (3)$$

This formula is basically due to Kummer and can be found in [2, page 561]. As a result of this formula we find the following application which is useful for us.

Proposition 2. *We have*

$$F_{\text{Gauss}} \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \frac{4t^2 - 4t}{(1-2t)^2} \right) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2)_k}{(3/2)_k} \frac{t^k}{k}.$$

Proof. To see this, apply formula (3) with $a = b = 1$ to get

$$F_{\text{Gauss}} \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \frac{4t^2 - 4t}{(1-2t)^2} \right) = (1-2t) F_{\text{Gauss}} \left(1, 1, \frac{3}{2}; t \right) \\ = (1-2t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(3/2)_k} t^k.$$

For any $k \geq 1$ the coefficient of t^k in the last product is of course equal to

$$\frac{k!}{(3/2)_k} - 2 \frac{(k-1)!}{(3/2)_{k-1}}.$$

A straightforward calculation shows that this is equal to

$$-\frac{(k+1)!}{(3/2)_k} \frac{1}{k} = -\frac{(2)_k}{(3/2)_k} \frac{1}{k}.$$

Our proposition now follows immediately. $\square$

We note that the arctangent series is an example of a hypergeometric series. One easily checks that

$$\frac{\arctan z}{z} = F_{\text{Gauss}} \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -z^2 \right).$$

We wish to substitute $z = Q_N/N$. Now observe that $t_N = (Q_N - P_N)/2Q_N = \frac{1}{2}(1 - \cos \frac{\pi}{N})$. Using this, we find that

$$-\left(\frac{Q_N}{N} \right)^2 = -\left(\frac{\sin \frac{\pi}{N}}{\cos \frac{\pi}{N}} \right)^2 = 1 - \frac{1}{(\cos \frac{\pi}{N})^2} \\ = 1 - \frac{1}{(1-2t_N)^2} = \frac{4t_N^2 - 4t_N}{(1-2t_N)^2}.$$

Using this observation and proposition 2 we find another result.

Theorem 3. *We have*

$$\frac{\pi}{Q_N} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2)_k}{(3/2)_k} \frac{t_N^k}{k}.$$

Note that if we take the first two terms of this series, we get

$$\pi \approx Q_N - \frac{4}{3}Q_N t_N = Q_N - \frac{2}{3}(Q_N - P_N) = \frac{1}{3}Q_N + \frac{2}{3}P_N,$$

which is precisely Snellius' improvement. Finally we like to point out that $t_N = 2(P_{2N}/2N)^2$, so we see that t_N is of order $O(\frac{1}{N^2})$.

Accelerations based on arcsin

Just as with the arctan series we can also play with the arcsin series, which reads

$$\begin{aligned} \frac{\arcsin z}{z} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/2)_k}{k!} \frac{z^{2k}}{2k+1} \\ &= F_{\text{Gauss}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z^2\right). \end{aligned}$$

As an immediate consequence, the next theorem follows from $\frac{\pi}{P_N} = \frac{\arcsin(P_N/N)}{P_N/N}$.

Theorem 4. *We have*

$$\frac{\pi}{P_N} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/2)_k}{k!} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{P_N}{N}\right)^{2k}.$$

There is a small variation based on the following proposition.

Proposition 5. *We have*

$$(1 - z^2)^{1/2} \frac{\arcsin z}{z} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{(3/2)_k} z^{2k}.$$

Proof. This result follows from the another well-known formula in hypergeometric functions, which reads

$$(1 - z)^{a+b-c} F_{\text{Gauss}}(a, b, c; z) = F_{\text{Gauss}}(c - a, c - b, c; z).$$

The formula can be found in [2, page 559]. Apply this with $a = b = 1/2, c = 3/2$ and z replaced by z^2 to get

$$(1 - z^2)^{-1/2} \frac{\arcsin z}{z} = F_{\text{Gauss}}\left(1, 1, \frac{3}{2}; z^2\right).$$

Multiply on both sides by $1 - z^2$ and notice that

$$\begin{aligned} (1 - z^2)^{1/2} F_{\text{Gauss}}\left(1, 1, \frac{3}{2}; z^2\right) &= (1 - z^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(3/2)_k} z^{2k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k!}{(3/2)_k} - \frac{(k-1)!}{(3/2)_{k-1}} \right) z^{2k} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{(3/2)_k} z^{2k}. \quad \square \end{aligned}$$

We apply our proposition with $z = P_N/N = \sin \frac{\pi}{N}$. Notice that $(1 - z^2)^{1/2} = \cos \frac{\pi}{N}$. Hence the proposition implies the following.

Theorem 6. *We have*

$$\frac{\pi}{Q_N} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{(3/2)_k} \left(\frac{P_N}{N}\right)^{2k}.$$

Looking back we see that we expressed $\frac{\pi}{Q_N}$ as a power series in $\frac{P_N}{N}$ and in $\frac{Q_N}{N}$. We also expressed $\frac{\pi}{P_N}$ as a power series in $\frac{P_N}{N}$. Although there is certainly a power series for $\frac{\pi}{P_N}$ in terms of $\frac{Q_N}{N}$, the shape of this series does not seem to be as simply as the other three.

Gain of the acceleration

In this section we indicate briefly how much Archimedes' calculation can be speeded up using our Taylor series. As we said before, we use the time taken for one operation on two L -digit numbers as a unit of time. Suppose we wish to calculate π to L decimal places. We first carry out $\sqrt{L}$ steps of Archimedes' algorithm. This gives us $\sqrt{L} \cdot \log_{10}(4)$ correct decimal places. To increase this precision by a factor $\sqrt{L}$ we have to take $O(\sqrt{L})$ terms of any of the power series given in the previous sections. So the total number of steps is again $O(\sqrt{L})$.

As we already indicated in the introduction, modern methods like the Gauss-Salamin algorithm or its speedup by the Borweins provide a much faster scheme of computation. The number of steps required for the latter methods is $O(\log L)$. $\leftarrow$

References

- 1 Archimedes, Measurement of the circle, reprinted in [4].
- 2 M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications 1972 (9th edition).
- 3 F. Beukers, *Pi*, Zebra-reeks 6, Epsilon Uitgaven, Utrecht 2000.
- 4 L. Berggren, J. Borwein, P. Borwein, *Pi: a source book*, Springer Verlag 1997.
- 5 G.M. Philips, Archimedes, the numerical analyst, American Math. Monthly 88 (1981), 165–169. Reprinted in [4].

Koeno Gravemeijer

Vakgroep Onderwijskunde Utrecht

Freudenthal Instituut

postbus 9432, 3506 GK Utrecht

koeno@fi.uu.nl

Inaugurele rede

Reken-wiskundeonderwijs

Koeno Gravenmeijer heeft op 8 maart van het jaar 2000 het ambt aanvaard van bijzonder hoogleraar op het vakgebied van “Domeinspecifieke onderwijstheorieën, in het bijzonder voor rekenen-wiskunde”, aan de Faculteit Sociale Wetenschappen, mede ten behoeve van de Faculteit Wiskunde en Informatica. Deze leerstoel is aangevraagd door de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-wiskundeonderwijs (NVORWO). Naast deze positie is hij onderzoekscoördinator bij het Freudenthal Instituut. Dit artikel is een bewerking van zijn oratie.

Dankzij de inspanningen van velen heeft Nederland reken-wiskundeonderwijs dat bij de tijd is. Daarmee onderscheidt Nederland zich van tal van andere landen, waar de inzichten die hier zo'n dertig jaar geleden de basis hebben gelegd voor de vernieuwing van het reken-wiskundeonderwijs, pas een jaar of tien opgeld doen. Dit is geen reden om tevreden achterover te gaan leunen. Uiteraard mogen we best tevreden achterom kijken, maar we moeten ook vooruitkijken.

Er zijn twee zaken die volgens mij van fundamentele betekenis zijn voor het toekomstige reken-wiskundeonderwijs. In de eerste plaats zijn dat de maatschappelijke veranderingen die het gevolg zijn van de snelle groei van de informatietechnologie. In de tweede plaats zijn dat de moderne opvattingen over leren en onderwijzen. Wat dit laatste betreft wil ik mij in dit artikel beperken tot het idee van kennisconstructie voor zo ver dat past binnen het idee van ‘wiskunde als menselijke activiteit’ waarop de bovengenoemde vernieuwing van het reken-wiskundeonderwijs is gebaseerd. Zowel het daadwerkelijk vormgeven van deze ideeën en het aanpassen van het onderwijs aan nieuwe maatschappelijke behoeften zal ingrijpende consequenties hebben voor de leraren. Daarom wil ik naast de betekenis van de maatschappelijke ontwikkelingen en de vormgeving van het reken-wiskundeonderwijs ook de professionalisering van leraren aan de orde stellen. Ik wil beginnen met de maatschappelijke ontwikkelingen.

Maatschappelijke ontwikkelingen

Het toenemend gebruik van computers en rekenmachines betekent volgens mij niet dat we minder reken-wiskundeonderwijs nodig hebben. Noch dat we met eenvoudige rekenvaardigheid kunnen volstaan. Ik zal proberen te laten zien dat iedereen eerder wiskunde van een hoger niveau nodig zal hebben. Dit betekent dat we de leerlingen daar al binnen de basisschool en de basisvorming mee in aanraking zullen moeten laten komen. De crux zit hem in wat je nodig hebt om adequaat met de nieuwe technologie te kunnen omgaan. Voor ik mij op de toekomst richt wil ik echter laten zien dat het huidige gebruik van computers en rekenmachines al problemen veroorzaakt in de aansluiting tussen het rekenonderwijs van vroeger en de maatschappij van nu.

Ter illustratie neem ik een stukje uit een column in het gratis treinblad *Metro* (van 25 februari 2000), waarin Pauline de Bok schrijft over haar rekenvaardigheid: “Vragend kijkt de visboer mij aan: ‘Mevrouw?’ M’n boodschappenbriefje, waar is m’n boodschappenbriefje? Ik graai in mijn zakken, in m’n tas, kijk in m’n portemonnee. Dan maar uit het hoofd. Zeven volwassenen, drie kinderen ... eh, in elk pakje zitten twee filets, per volwassene had ik drie halve gedacht, de kinderen ieder ... Achter me voel ik nauw verholen ongeduld van een winkel vol wachtenden. Hulpeloos kijk ik de visboer aan. Ik leg hem de feiten voor, hij is even stil en vertelt me wat ik nodig heb. Met meewarige blik. Goed, fluister ik in mijn schaamte. Het was de druk van de andere klanten, zo troost ik mezelf op weg naar huis en ik probeer het sommetje nu in vrijheid eventjes snel te maken. Weer stukt mijn innerlijke telraam.” Toch heeft Pauline de Bok heel degelijk reken-wiskundeonderwijs genoten. Ze memoreert: ‘Op de Mariaschool hebben we uren tafels opgedreund onder het scherpe oor van de nonnen. Jaren heb ik de wiskunde I en II-lessen glansrijk doorstaan. En wat heeft het me opgeleverd? Goed, als ik zes maal zeven zeg, denk ik nog steeds tweeënveertig, maar ik vertrouw dat antwoord niet meer. Waarom denk ik tweeënveertig? De reeks cijfers die vroeger automatisch ter controle



Koeno Gravemeijer

voor de 21ste eeuw

voor mijn geestesoog verscheen, is weggevaagd. Hulpeloos sta ik met die getallen in mijn hoofd en voel me oliedom. Het is mijn eigen schuld, verwijt ik mijzelf. Een luiaard ben ik: ik reken zo min mogelijk. Als mijn computer in de buurt is, rekent hij alles voor mij uit en anders heb ik mijn vriend nog. Op hem schuif ik heel wat sommen af. Ik heb mijn talenten niet benut, ik heb mijn rekenkunsten verkwanseld.' Pauline de Bok lijkt rekenen te hebben geleerd als een verzameling van losse feitjes, regels en procedures. Waarschijnlijk was er weinig aandacht voor toepassingen, behalve dan in standaard redactiesommen. Dit type rekenonderwijs had zijn nut in een tijd waarin je nog veel met pen en papier moest uitrekenen. Inmiddels heeft de zakrekenmachine veel van dit rekenwerk overgenomen. Mechanische rekenvaardigheid heeft zijn maatschappelijke functionaliteit verloren. Het gevolg is een gebrek aan oefening, en dat leidt weer tot onzekerheid.

In het moderne realistisch reken-wiskundeonderwijs worden de tafels niet meer als losse feitjes geleerd. Tegenwoordig ligt de nadruk juist op samenhang. Zo wordt de leerlingen bij het leren van de tafels van begin af aan gevraagd om onbekende tafelproducten af te leiden uit wat ze al weten. Bijvoorbeeld door gebruik te maken van herhaald optellen.

Door een opgave als 4×6 te berekenen via $6 + 6 = 12$, $12 + 6 = 18$, $18 + 6 = 24$. Of door gebruik te maken van verdubbelen.

Bijvoorbeeld door voor het berekenen van 8×6 uit te gaan van $4 \times 6 = 24$, 8×6 is dan het dubbele is 48. Of door op een andere manier gebruik te maken van een bekend tafelproduct².

Met dit onderwijs kan worden bereikt dat de leerlingen tafelproducten die ze niet direct uit het hoofd weten, of waar ze niet zeker van zijn, altijd kunnen reconstrueren.

Bij 6×7 kun je dan denken aan $6 \times 6 = 36$ en 6×7 is dus 6 meer, dus $6 \times 7 = 42$. Of je gaat uit van $3 \times 7 = 21$ dus 6×7 is het dubbele, dus $6 \times 7 = 42$.

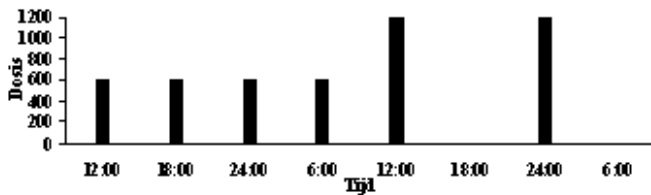
De nieuwe aanpak steunt op andere didactische inzichten dan de oude. Het zwaartepunt ligt niet meer op het uit het hoofd leren, het

memoriseren. In plaats daarvan ligt het accent nu op het redeneren en het leggen van verbanden. De verandering betreft niet alleen een verandering van werkwijze, maar ook een verandering van doel: er wordt onder meer gemikt op een ander type getalkennis. Ik denk dan aan getalkennis, waarbij getallen wiskundige objecten zijn geworden. Van Hiele³ beschrijft dit objectkarakter van getallen door te spreken van getallen als knooppunten in een relatienet. Een simpel voorbeeld van zo'n knooppunt is het getal twaalf, dat een wiskundig object is geworden wanneer de leerlingen dit spontaan associëren met $12 = 10 + 2$, $12 = 2 \times 6$, $12 = 3 \times 4$, maar bijvoorbeeld ook met $12 = \text{de helft van } 24$ of $12 = 20 - 8$.

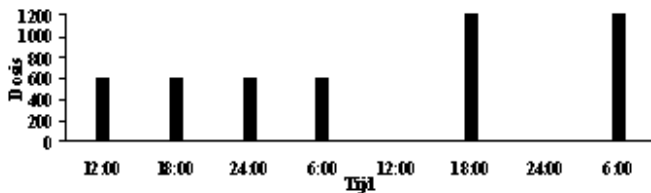
Het voordeel van dit soort kennis is dat je deze flexibel kunt inzetten als puzzelstukjes, die je naar believen kunt combineren. Greeno⁴ vergelijkt dit type getalkennis met een omgeving waar je goed de weg weet. Een omgeving, waar je tal van herkenningpunten hebt en allerlei handige routes kent. Het aardige van dit beeld is, dat daarmee eveneens wordt uitgedrukt dat de leerling die dit type getalkennis ontwikkelt, een stukje nieuwe werkelijkheid creëert. Een relatienet rond vermenigvuldigen zal uiteraard ook relaties met andere bewerkingen, zoals optellen, aftrekken, delen en kennis van eenvoudige kwadraten moeten bevatten. Bovendien dient de gangbare tafelkennis te worden uitgebouwd met wat Treffers de 'grote tafels' noemt: Als je 3×7 weet, dan weet je ook 30×7 en 30×70 enz. Daarnaast zullen de leerlingen ook vertrouwd moeten raken met breuken en kommagetallen. Ik denk daarbij bijvoorbeeld aan mooie getallen als 0.25 of $\frac{1}{4}$.

Rond $4 \times 0.25 = 1$ kun je zo een mooi netwerkje opbouwen met $4 \times 2, 5 = 10$, $4 \times 25 = 100$, $4 \times 250 = 1000$.

Zulke kennis heb je nodig bij het schattend rekenen. Bijvoorbeeld om te bepalen dat 4×247 ongeveer 1000 is. En naar mate het precieze rekenen vaker aan machines wordt overgelaten neemt het belang van het schattend rekenen toe. Al was het alleen maar om de machine globaal te kunnen controleren.



Figuur 1 Snelle start met nieuwe dosering

Figuur 2 Uitgestelde start nieuwe dosering¹⁰

Samenvattend kunnen we zeggen dat de aandacht voor het ontwikkelen van een flexibel netwerk van getalrelaties een belangrijke verworvenheid is van het realistisch reken-wiskundeonderwijs. Maar het gaat uiteindelijk om het kunnen toepassen. En bij toepassen gaat het om meer dan getalrelaties alleen. Het is ook een kwestie van inzicht, en van attitude: hoe benader je een toepassingsprobleem? Wanneer je bij het visboerprobleem op zoek gaat naar de formele standaardprocedures die hier mogelijk bruikbaar zijn dan wordt het tamelijk lastig. Zeker als je denkt dat de traditionele standaardprocedure eist dat je de betrokken getallen eerst als echte breuken schrijft. Pauline de Bok wilde zeven volwassenen ieder drie halve filets geven. Volgens de traditionele standaardprocedure moet je zeven keer drie halve dan herschrijven als $\frac{7}{1} \times \frac{3}{2}$ en de tellers met de tellers en de noemers met de noemers vermenigvuldigen. Dat levert $\frac{21}{2}$ op en dat moet je nog vereenvoudigen tot $10\frac{1}{2}$. Dus:

$$\frac{7}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}.$$

Met meer inzichtelijke rekenkennis zou je op het idee kunnen komen $7 \times 1\frac{1}{2}$ te vervangen door de helft van 7×3 of door $1\frac{1}{2} \times 7$. Maar dat zijn wel puur rekenkundige oplossingen. Het kan ook met een redenering die dichterbij de context blijft. Als één volwassene $1\frac{1}{2}$ filet krijgt, dan heb je voor twee volwassenen 3 filets nodig. Dan kan je gemakkelijk verder redeneren: 1 volwassene: $1\frac{1}{2}$ filet, 2 volwassenen: 3 filets, 4 volwassenen: 6 filets, 6 volwassenen: 9 filets, 7 volwassenen is $1\frac{1}{2}$ meer, dus 7 volwassenen: $10\frac{1}{2}$ filets

Ik heb met dit voorbeeld willen laten zien dat het moderne realistisch reken-wiskundeonderwijs tot meer zekerheid, meer flexibiliteit en een betere toepasbaarheid leidt dan het eraan voorafgaande, mechanistische, rekenonderwijs. Het huidige reken-wiskundeonderwijs past daarmee veel beter bij de maatschappij van nu.

Rekenen-wiskunde in de toekomst

Maar hoe staat het met de toekomst? Die is dichterbij dan je denkt: de vierjarige leerling die nu de basisschool betreedt is over veertien jaar achttien, we leven dan in het jaar 2016. En als we een onderwijsverandering willen voorbereiden dan zullen we nog verder vooruit moeten kijken. Ik denk dan al gauw aan 2025.

Freudenthal voorspelde in 1976 dat het wiskundeonderwijs zo rond het jaar 2000 of 2010 verdwenen zou zijn.⁵ De wiskunde die het toenmalige Instituut voor Onderzoek van Wetenschappelijk Onderwijs (IOWO) — de voorloper van het Freudenthal Instituut — voorstond, was

zo verweven met andere vakken, dat Freudenthal verwachtte dat de wiskunde in deze vakken zou worden opgenomen. Wiskunde zou als zelfstandig vak ophouden te bestaan. Behalve misschien als specialisatie voor oudere leerlingen. Ik hoop niet dat Freudenthal gelijk krijgt. In het middelbaar beroepsonderwijs (MBO) is echter wel een tendens te bespeuren in die richting. Nieuwe ontwikkelingen als modulering en meer nadruk op een verbinding met de praktijk na de school, zouden kunnen maken dat wiskunde straks bijna alleen nog maar een kans krijgt in toepassingen. Ik denk dat dit geen goede zaak is. Niet omdat wiskunde in toepassingen niet goed zou zijn, maar omdat de informatiemaatschappij wiskunde vraagt die het niveau van de toepassingen overstijgt. Freudenthal heeft dit niet voorzien en achteraf is het natuurlijk gemakkelijk om te wijzen op de maatschappelijke consequenties van de snelle opmars van de informatietechnologie. Toch is het goed om er even bij stil te staan hoe snel de ontwikkelingen gaan.

Zo blijkt dat de capaciteit van een modale chip elke 18 maanden verdubbelt. Verder daalt de prijs van een computer waarop je een geavanceerd computeralgebra-programma als Maple kunt draaien elke zes jaar met een factor tien.⁶ Het gevolg van deze ontwikkeling is dat zwaardere zakrekenmachines inmiddels computeralgebra-systemen, als Maple of Derive, bevatten die algebraïsche vergelijkingen voor je oplossen en waaraan je integraal- en differentiaalrekening kunt overlaten.

Voor een deel ervaren de meeste van ons de technologische ontwikkeling direct in de dagelijkse levenssfeer en het werk. Niet alleen maken we steeds meer gebruik van computers, we maken ook steeds meer gebruik van apparaten waarin computertechnologie zit verwerkt. Kenelly⁷ spreekt in dit verband van een 'black-box world'. We krijgen steeds meer te maken met apparaten waarvan we niet eens globaal weten wat ze doen. Dit maakt het vaak lastig om ermee om te gaan. Kenelly geeft als voorbeeld een vliegtuigongeluk dat werd veroorzaakt door een fout bij het intypen van de coördinaten van het vertrekpunt. De computer maakt gebruik van een ingebouwde landkaart die ook hoogtegegevens bevat. De foute coördinaten maakten dat de computer van een verkeerde hoogte uitging, waardoor het vliegtuig met een veel te grote snelheid de grond raakte. Piloten zouden zich moeten realiseren hoe cruciaal de startcoördinaten zijn voor het goed functioneren van de automatische piloot.

Kenelly pleit voor het ontwikkelen van 'grey-box experience for a black-box world'. Experience moet hier ruim worden opgevat; het gaat ook om de vorming van een conceptueel model van de werking van die black box.⁸ Ik wil het belang hiervan aantonen door gebruik te maken van onderzoek van Noss⁹, die samen met anderen onderzoek doet naar het gebruik van wiskunde in de alledaagse beroepspraktijk. Hij betoogt dat de belangrijkste wiskundige activiteit in de beroepssfeer bestaat uit het modelleren van complexe situaties. Een van de voorbeelden die hij geeft betreft een probleem waar verpleegkundigen zich voor geplaatst zien wanneer een arts de voorgeschreven dosis van een antibioticum, vancomycine geheten, verandert van 4 x per dag 600 mg naar 2 x per dag 1200 mg. De vraag waar de verpleegkundigen nu voor staan is wanneer met de nieuwe dosering te beginnen. Dit is geen academische kwestie, want te weinig vancomycine in het bloed betekent dat het medicijn zijn werk niet kan doen, terwijl te veel doofheid tot gevolg kan hebben. Bekend is dat dit medicijn slechts langzaam wordt afgebroken. Hoe lang moet je dan wachten na het toedienen van de laatste lage dosis, voor je die nieuwe, hoge, dosis kunt toedienen? Zes uur (figuur 1), of twaalf uur (figuur 2), of iets er tussenin?

De verpleegkundigen maken bij het oplossen van dit probleem gebruik van een model van de situatie; ze denken in termen van een

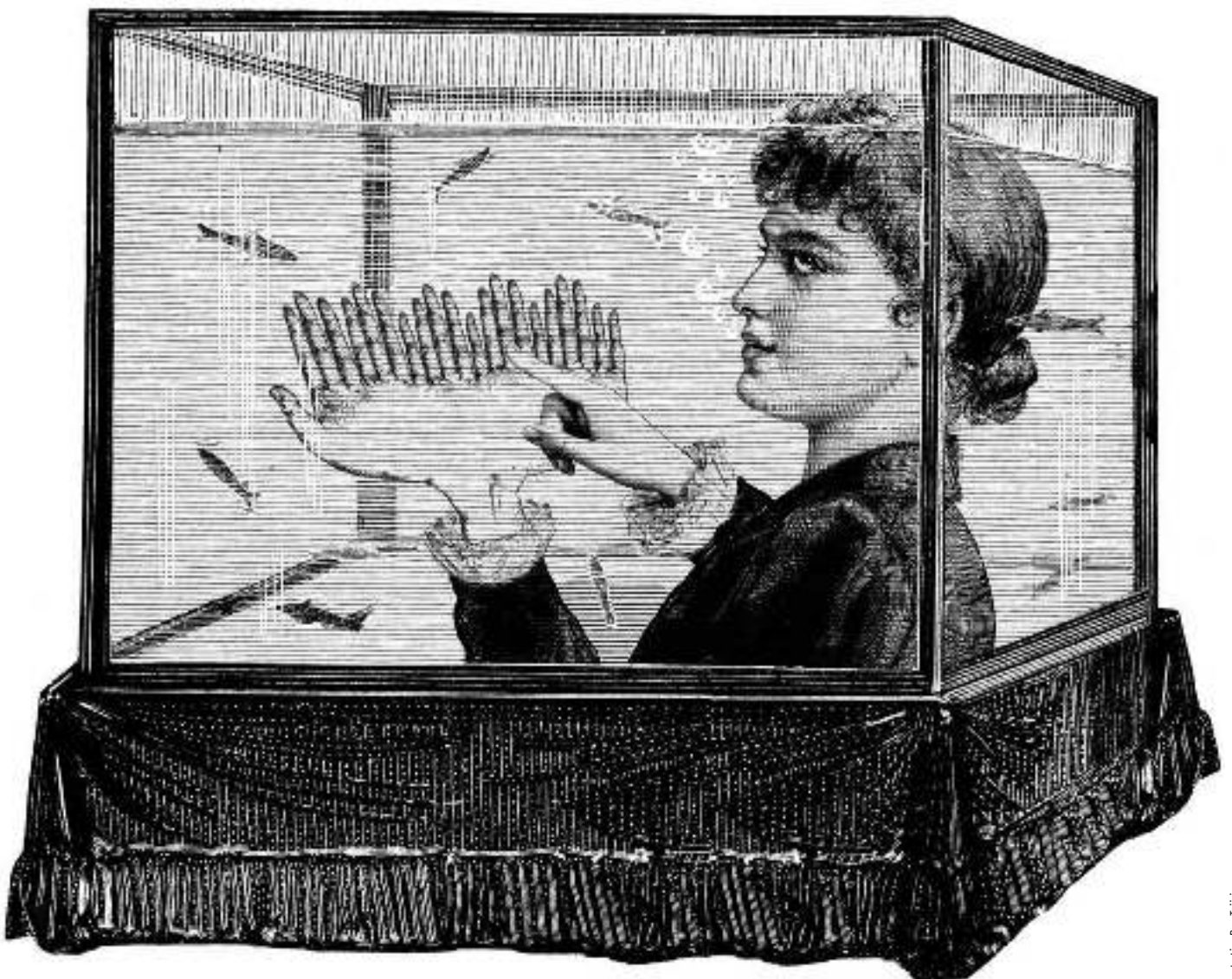
grafiek die de hoogte van het medicijnniveau in het bloed beschrijft als functie van de tijd. Ze tekenen de grafiek niet daadwerkelijk maar verwijzen ernaar wanneer ze spreken van 'piek' en 'verval'. De piek doet zich voor bij de toediening van een nieuwe dosis, daarna neemt het medicijnniveau af tot de nieuwe dosis wordt toegediend. De tijd die verstrijkt en het tempo waarin het medicijnniveau daalt bepalen samen hoeveel er nog in het bloed zit bij de toediening van de volgende dosis.

De kern is dat de verpleegkundigen niet zomaar een model maken; ze maken een mathematisch model. Ze gebruiken wiskundige middelen als getallen, grafieken, variabelen en functies om hun probleem te modelleren. Voor het modelleren van complexe situaties heb je reken-wiskundige kennis en inzichten nodig. Dat zal zeker gelden voor de modellen die de basis vormen voor veel black-box-technologie.

Wanneer we dus willen dat toekomstige gebruikers van geavanceerde technologie globaal begrijpen wat die technologie doet, dan zullen deze gebruikers over de noodzakelijke reken-wiskundige bagage moeten beschikken. Een deel daarvan overstijgt het niveau dat nu voor basisschool en basisvorming gebruikelijk is. Maar, we moeten daarbij wel bedenken dat het kunnen begrijpen van een wiskundig model an-

dere kennis vraagt dan het model kunnen doorrekenen. De gebruiker hoeft niet te kunnen wat de computer kan. Het zal gaan om meer globale noties en inzichten. Dit kan betekenen dat dit type kennis binnen het bereik van een grotere groep leerlingen kan worden gebracht. En dat er op jongere leeftijd mee kan worden begonnen.

Overigens kan worden opgemerkt dat hiermee wordt aangesloten op een traditie binnen het realistisch reken-wiskundeonderwijs. Ik denk in dit verband aan de door De Lange, Kindt en anderen ontwikkelde Wiskunde A, waarmee bepaalde wiskunde binnen het bereik van een groter aantal leerlingen is gebracht. Maar ook de realistische aanpak van het rekenen op de basisschool past in die categorie. De cijferalgoritmen zijn immers ook te beschouwen als black-boxes, waarvan de werking voor jonge kinderen inzichtelijk wordt gemaakt. Op een vergelijkbare manier wordt er op de basisschool ook al het nodige gedaan aan het verkennen van grafieken. Tenslotte kan ook de computer zelf een rol spelen bij het toegankelijk maken van reken-wiskundige kennis en inzichten. Uiteraard moet daarvoor specifieke didactische software worden ontwikkeld.



Vakdidactische vernieuwing

Met Freudenthal, zien we wiskunde binnen het realistisch reken-wiskundeonderwijs primair als een activiteit met als centraal element, de activiteit van het mathematiseren; het wiskundig organiseren van de werkelijkheid, of van de wiskunde zelf. Door Treffers respectievelijk horizontaal en verticaal mathematiseren genoemd.¹¹ Het basisidee van het realistisch reken-wiskundeonderwijs is dat een combinatie van horizontaal en verticaal mathematiseren de leerlingen in de gelegenheid stelt reken-wiskundige kennis en inzichten uit te vinden. Daarmee hoop je te bereiken dat de leerlingen wiskunde construeren waarvan ze zelf de juistheid kunnen overzien. Zodat ze daarvoor niet hoeven te leunen op de autoriteit van de leraar of het leerboek.

De taak van de leraar is dan de leerlingen te begeleiden bij het heruitvinden van wiskunde. De eigen kennis en de eigen inbreng van de leerlingen vormen daarbij het vertrekpunt. Deze benadering past goed bij constructivistische opvattingen over kennisconstructie. Volgens het constructivisme is kennis niet zonder meer overdraagbaar, omdat eenieder zijn of haar eigen kennis construeert. In het reken-wiskundeonderwijs ontstaan volgens deze theorie al snel communicatieproblemen doordat leraar en leerlingen dezelfde termen en activiteiten binnen verschillende referentiekaders interpreteren. Realistisch reken-wiskundeonderwijs kan aan dergelijke communicatieprobleem tegemoet komen door de eigen inbreng van de leerlingen te stimuleren en daarop voort te bouwen. Op die manier kan worden gewaarborgd dat steeds wordt aangesloten bij het referentiekader van de leerlingen.

Een dergelijke invulling van realistisch reken-wiskundeonderwijs, veronderstelt een andere rolverdeling tussen leraar en leerlingen dan het traditionele reken-wiskundeonderwijs. In het traditionele reken-wiskundeonderwijs was het de taak van de leerlingen uit te vinden wat de leraar in zijn of haar hoofd had. In het nieuwe onderwijs moet de leraar proberen om erachter te komen wat de leerlingen denken. Bovendien moet de leraar dit denken van de leerlingen stimuleren en sturen. Daarmee is de taak van de leraar veel complexer geworden. Het is nu immers niet meer de leraar die onderwijst maar de leerling die uitvindt. En, hoe zorg je ervoor dat de leerlingen uitvinden wat je wilt dat ze uitvinden? Of, om Ball te parafraseren: 'hoe kun je recht doen aan de eigen inbreng en eigen ideeën van de leerlingen en ze tegelijkertijd vertrouwd maken met de wiskunde die door anderen is uitgevonden?'¹²

Bij de beantwoording van deze uitdaging kan de Nederlandse leraar steunen op de eerder genoemde realistische schoolboeken. Decennia van ontwikkelingsonderzoek in en rond het Freudenthal Instituut hebben ertoe geleid dat we nu beschikken over uitgebalanceerde leergangen die geleid heruitvinden mogelijk maken. De goed functionerende netwerken binnen de kring van reken-wiskunde didactici hebben ervoor gezorgd dat deze leergangen concreet zijn uitgewerkt in moderne reken-wiskundemethoden die ook breed zijn ingevoerd.

Maar het is wel de leraar die dit in de praktijk concreet moet invullen. Die moet proberen aan te sluiten bij de actuele kennis en ideeën van de leerlingen. En die moet bedenken hoe de leerlingen individueel en als groep te helpen deze kennis verder uit te bouwen. Voorwaar geen eenvoudige opdracht.

De professionalisering van leraren

Het zal duidelijk zijn dat leraren tijd nodig zullen hebben om dit nieuwe reken-wiskundeonderwijs onder de knie te krijgen. En dat kan alleen door te experimenteren met het eigen onderwijs. De eigen onderwijspraktijk is mijns inziens de beste leersituatie. Ik denk dan aan een proces van experimenteren, reflecteren en discussiëren. Met 'discus-

siëren' doel ik op het feit dat leraren niet ieder voor zich het wiel moeten gaan uitvinden. Leraren kunnen van en met elkaar leren en externe deskundigen kunnen zo'n leerproces ondersteunen.¹³

Hier kunnen we ons een zelfde rolverdeling tussen de externe deskundigen en de leraren voorstellen als die in het beoogde reken-wiskundeonderwijs bestaat tussen de leraar en de leerlingen. Wat betekent dat de eigen inbreng en het eigen oordeel van de leraren voorop staat, maar er toch een gidsrol voor de deskundige is weggelegd. Een belangrijk verschil met het 'gewone' onderwijs is echter dat er tussen leraren en deskundigen veel meer op voet van gelijkheid zal worden gediscussieerd omdat de leraren specifieke praktijkdeskundigheid hebben waar de externe deskundigen niet over beschikken.¹⁴

Dat vakdidactici, zoals ikzelf, een bepaald soort onderwijs voor ogen hebben, betekent niet dat de leraren uiteindelijk aan dit ideaal moeten gaan voldoen. Een open samenwerking veronderstelt immers dat deze ideaalbeelden ook ter discussie staan en aan de praktijk worden getoetst. Er zal daarom veel meer gedacht moeten worden in termen van 'gap closing', waarbij praktijk en idealen bij elkaar komen in een proces van wederzijdse aanpassing. Aan de ene kant betreft dit een proces waarbij het gat tussen praktijk en idealen wordt gedicht doordat de leraren steeds verder toe groeien naar ideaaltypisch realistisch reken-wiskundeonderwijs. Aan de andere kant betreft dit een proces van aanpassing van het ideaalbeeld onder invloed van uitwisseling van ervaringen en ideeën.

De externe deskundigen komen dan voor de taak te staan de theorie over voortbouwen op eigen inbreng van de leerlingen verder uit te bouwen. Hoe realiseer je dat in de praktijk, wat is er reëel mogelijk? Wat zijn de belemmeringen en wat kun je daaraan doen? Van leraren zal worden gevraagd dat ze zich hun praktijktheorieën bewustmaken en daarop reflecteren. Wat wil je met je onderwijs, wat zijn de doelen, wat vind je echt belangrijk? Wat doe om dat te bereiken? Waarom denk je dat dat werkt?

Externe deskundigen kunnen het experimenteren en reflecteren bovendien ondersteunen door beschikbare wetenschappelijke kennis in te brengen. Ik denk hier bijvoorbeeld aan onderzoek van Desforges & Cockburn.¹⁵ Zij verrichtten klassenobservaties bij leraren die aangaven probleemgeoriënteerd te willen werken. Uit die observaties bleek dat deze leraren geconfronteerd werden met leerlingen die verandering in een meer probleemgeoriënteerde richting tegenwerkten. Ze bleven vragen wat ze moesten doen, wilden steeds aanwijzingen, meer voordoen. Leraren met zulke ervaringen zullen van mening zijn dat probleemgeoriënteerd onderwijs met hun leerlingen niet mogelijk is. En de praktijk geeft hen daarin ook gelijk.

Maar vanuit een wetenschappelijk perspectief valt te verdedigen dat er vermoedelijk een onderliggende oorzaak is die te maken heeft met de rolpatronen die in de loop der tijd zijn ontstaan. De leerlingen zijn gewend dat de docent uitlegt en voordoet. En dat hun werk wordt beoordeeld op de mate van overeenstemming met wat de docent heeft uitgelegd en voorgedaan. Daardoor hebben ze zich een beeld gevormd van wat hun rol is en die van de docent, van wat er van hen wordt verwacht en van wat ze van de docent mogen verwachten. In de literatuur spreekt men in dit verband wel van een 'didactisch contract'.¹⁶ Dit zogeheten contract is doorgaans niet gebaseerd op expliciete afspraken die leraar en leerlingen met elkaar hebben gemaakt, maar op basis van ervaring. Aspecten van zo'n contract worden zichtbaar als we een gangbare schoolse dialoog vergelijken met alledaagse communicatie buiten de school.

In de klas is een normaal lespatroon dat van vraag, antwoord en evaluatie. De leraar stelt een vraag, de leerling antwoordt en de leraar

stelt vast of het antwoord goed is. Hoe typisch deze gesprekform is blijkt wanneer we ons voorstellen dat we dat buiten de school zouden doen. Stelt u zich de volgende dialoog voor:

A: Kunt u mij zeggen waar de Kerkdwaarsstraat is?

B: De Kerkdwaarsstraat, dan moet u recht doorgaan tot de tweede stoplichten. Daar gaat u rechts. En dan neemt u de eerste links.

A: Oké: Rechtdoor tot de tweede stoplichten, en daar naar rechts. En dan de eerste links. Goed zo, andere vraag: Kunt u nu ook vertellen waar de Middenweg is?

Op basis van informatie over het verschijnsel 'didactisch contract' zou een docent kunnen gaan experimenteren met het veranderen van de rollen en verwachtingen.

Uiteraard speelt de vakinhoudelijke en vakdidactische kennis van de leraar een belangrijke rol. Zo zal de mate waarin de leerlingen probleemgeoriënteerd willen werken niet alleen afhangen van het didactisch contract, maar ook van het probleem dat de leraar de leerlingen voorlegt. Het probleem moet zodanig van aard zijn dat het de leerlingen motiveert. Ik denk dat het dan gaat om de juiste mix van het creëren van een uitdaging en van een gevoel van: 'hier kom ik wel uit.' Vervolgens is het essentieel dat de leraar op de oplossingen van de leerlingen kan voortbouwen. Dit vergt een behoorlijke dosis vakdidactische kennis, inclusief zicht op leerlijnen en onderwijsactiviteiten.¹⁷

Naast bovengenoemde argumenten voor professionalisering, is er nog een reden om de professionalisering van leraren aan de orde te stellen en die betreft de in het begin van dit betoog genoemde tempo van de veranderingen in technologie en maatschappij. De maatschappij verandert en dus zal het onderwijs moeten veranderen. De maatschappij verandert steeds sneller en het gevolg zal zijn dat verandering een permanent kenmerk van het onderwijs wordt. Dit heeft consequenties voor de professionaliteit van leraren. Waar de leraar in een grijs verleden tijdens zijn of haar studie genoeg leerde om zijn of

haar hele loopbaan mee toe te kunnen, zal de leraar van de toekomst zich steeds nieuwe vaardigheden eigen moeten maken. Dit plaatst ook de professionaliteitsontwikkeling in een ander perspectief. De gangbare separate nascholingsactiviteiten zullen moeten worden vervangen door nascholing als een continu proces. Ik spreek in dit verband overigens liever van professionalisering dan van nascholing. Niet omdat het mooier klinkt maar om dat je het centrum van de activiteit daarmee bij de leraar legt. Niet 'de leraar wordt nageschoold', maar 'de leraar werkt aan zijn of haar professionalisering'. Het werken aan de eigen professionaliteit zou mijns inziens ook een onderdeel van de beroepsidentiteit van de leraar moeten zijn. Leraren moeten daarvoor dan ook de ruimte en de middelen krijgen.¹⁸

Besluit

Terugblikkend op mijn betoog over 'reken-wiskundeonderwijs voor de 21e eeuw', zie ik drie ontwikkelingen.

1. De technologische ontwikkeling van onze maatschappij, die nieuw, daarbij passend reken-wiskundeonderwijs nodig maakt - voor alle leerlingen. Dat betekent dat dit nieuwe onderwijs met name in de basisschool en de basisvorming zijn beslag zal moeten krijgen.
2. De moderne inzichten in kennisconstructie en reken-wiskunde-didactiek vragen om onderwijs dat een centrale plaats inruimt voor de eigen inbreng van de leerlingen en voor interactie tussen leraar en leerlingen en tussen leerlingen onderling.
3. Deze twee ontwikkelingen komen samen bij de leraar die uiteindelijk het onderwijs in de klas zal moeten vormgeven. Ook die zal zich moeten ontwikkelen. De leraar van de 21e eeuw zal nooit zijn uitgeleerd. Dit betekent mijns inziens dat het werken aan de eigen professionaliteit een structurele plaats moet krijgen in de taak van de leraar. Bijvoorkeur ingebed in een structuur, waarin de leraar met het eigen onderwijs experimenteert en kennis en ervaringen uitwisselt met collega's en andere deskundigen.

Noten en literatuur

- 1 Dit artikel is een ingekorte versie van de inaugurerende uitgesproken bij de aanvaarding van de NVORWO-leerstoel "Domeinspecifieke Onderwijstheorieën, in het bijzonder voor rekenen/wiskunde" aan de Universiteit Utrecht.
- 2 Zie Ter Heege (1985) voor een overzicht van de oplossingsstrategieën die de leerlingen spontaan gebruiken. Heege, H. ter (1985). *The Acquisition of Basic Multiplication Skills*. Educational Studies in Mathematics, 16 (4), 375-388.
- 3 Hiele, P.M. van (1973). *Begrip en Inzicht*. Purmerend: Muusses.
- 4 Greeno, J.G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 170-218.
- 5 Freudenthal, H. (1976). *Wiskundeonderwijs anno 2000*. *Euclides*, 52, 290-295.
- 6 Kenelly, J. (2000). When machines do mathematics, what do mathematics teachers do? Paper gepresenteerd op de ICME-9 te Tokyo.
- 7 Zie noot 6.
- 8 Binnen het wiskundeonderwijs zelf zien we iets dergelijks bij het gebruik van grafische rekenmachines en computeralgebra. Hier blijkt, dat schijnbaar eenvoudige gebruiksvorschriften toch vereisen dat de leerling over een conceptueel, wiskundig model beschikt (zie Drijvers, P. en Van Herwaarden, O. (2000). Instrumentation of ICT-tools: the case of algebra in a computer algebra environment. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* 7 (4), 255-275.).
- 9 Noss, R. (1997). *New cultures, new numeracies*. London: Institute of Education, University of London (Inaugural Professorial Lecture).
- 10 Figuren ontleend aan Noss (1997).
- 11 Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education*. The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel.
- 12 Ball, D. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *Elementary School Journal*, 93, 373-397.
- 13 Een dergelijke opzet sluit ook nauw aan bij de huidige algemeen-onderwijskundige opvattingen over nascholing en professionalisering. Ook daar pleit men voor observatie en reflectie op de eigen en andermans lespraktijk en het gezamenlijk zoeken naar andere vormen van instructie (zie bijvoorbeeld het interview van M. Notenbomer met Berger en Derksen in *Didactief en School jrg. 30, nr. 7, 2000*). Dankzij de TIMSS-studies weten we dat zo'n systeem in Japan allang bestaat. En, dat de leraren daar, een belangrijk deel van hun professionele identiteit ontleen aan het uitwisselen van ervaringen met experimentele lessen, zie Lewis, Ch. (2000). *Lesson study: The core of Japanese professional development*. Paper gepresenteerd tijdens de AERA conferentie in New Orleans.
- 14 Het Freudenthal Instituut probeert dergelijke processen te faciliteren in het Rekennet-project. Niet alleen door geïnteresseerde leraren bij elkaar te brengen maar ook door het creëren van een virtuele ontmoetingsplaats op internet.
- 15 Desforges, Ch. & Cockburn, A. (1987). *Understanding the Mathematics Teacher, A Study of Practice in First School*. London: The Falmer Press.
- 16 Brousseau, G. (1990). *Le contrat didactique: le milieu*. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, 9 (3), 308-336. Zie ook: Elbers, E. (1988). *Social context and the child's construction of knowledge*. Utrecht (dissertatie).
- 17 Via de nationale cursus reken-coördinator wordt thans geprobeerd rekencoördinatoren op te leiden die de collega's van de eigen school op dit punt kunnen ondersteunen.
- 18 Dit is ook een concept waar de NVORWO zich voor inzet.

Jacob Perrenet

Onderwijs Service Centrum
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
j.c.perrenet@tue.nl

Hans Sterk

Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
sterk@win.tue.nl

Blij met de vernieuwde Tweede Fase?

In 2001 heeft ongeveer een kwart van de eerstejaars wiskundestudenten die direct van het vwo komen het nieuwe programma van de Tweede Fase doorlopen; in 2002 bijna allemaal. De wiskunde-inhoud in de Tweede Fase is anders geworden in de profielen, de vorm van het wiskundeonderwijs is anders in het Studiehuis. Zijn wij als wiskundeopleiders eigenlijk wel blij met deze veranderingen? Wat merken we ervan en hoe passen we ons aan?

In dit artikel geven twee betrokkenen bij de opleiding Technische Wiskunde van de TUE inzicht in hoe de TUE deze vragen beantwoordt en roepen ze op om de aanpassingen en ervaringen bij de wiskundeopleiders aan andere universiteiten te inventariseren. Serviceonderwijs (wiskundeonderwijs aan studenten van andere opleidingen) is een verhaal apart, daar gaat dit artikel niet over.

De profielen Natuur en Gezondheid (N&G) en Natuur en Techniek (N&T) geven toegang tot het (technisch) universitaire wiskundeonderwijs. Het profiel N&G biedt het programma wiskunde B1, dat een deel is van het programma wiskunde B1,2 binnen N&T. In het kort komen de veranderingen ten opzichte van het oude examenprogramma wiskunde B op het volgende neer. Verdwenen zijn een aantal onderwerpen uit de ruimtemeetkunde (bijvoorbeeld parametervoorstellingen van vlakken, translaties en inwendig product), limieten van

functies en cyclometrische functies. Erbij gekomen zijn, zowel voor N&G als voor N&T, combinatoriek en kansrekening, het werken met een grafische rekenmachine en integralen en differentiaal opstellen in een natuurkundige context. Exclusief voor N&T zijn de onderwerpen bewijzen in de vlakke meetkunde, afstanden en grenzen en rijen, inclusief het begrip convergentie.

De precieze vormveranderingen zijn moeilijker te omschrijven. Iedere leerling moet, individueel of groepsgewijs, meer projectacti-

ge activiteiten uitvoeren zoals het maken van praktische opdrachten of van een profielwerkstuk, maar verder heeft iedere school de vrijheid om in meer of mindere mate het Studiehuis in de bovenbouw in te voeren. Het Procesmanagement Voortgezet Onderwijs [1] ziet accenten binnen het onderwijs binnen het Studiehuis als volgt verschuiven. Het onderwijs is meer *vaardigheidsgericht*: het realiseren van een goed evenwicht tussen kennis, inzicht en vaardigheden in het onderwijsleerproces is gewenst; de nadruk ligt op vaardigheden van het leren zelf: het uitvoeren, het reflecteren en het communiceren. Er is sprake van meer *begeleid onderwijs*: er moet een nieuw evenwicht tussen les geven en begeleiding worden gevonden. Er is in grotere mate sprake van *differentiatie*: verschillen tussen leerlingen moeten worden herkend en gehonoreerd door het maken van bewuste keuzes voor leerinhouden en verwerking door leerlingen. Er moet meer *samenhang* in het onderwijs bestaan: het is van belang om een verbin-

ding te leggen tussen leerinhouden van verschillende vakken en om samenhang aan te brengen in het pedagogisch-didactisch handelen van het team. Tenslotte dient het onderwijs meer *procesgericht* te zijn; het onderwijs is niet alleen gericht op de vakinhoud, maar ook op het leerproces.

Blij met inhoudelijke veranderingen?

De grootste blikvanger in het onderdeel wiskunde B1,2 uit het profiel Natuur en Techniek is ongetwijfeld het onderwerp 'Bewijzen in de vlakke meetkunde' (zie ook [12]). De (profi)examens van de afgelopen jaren geven een beeld van wat men ongeveer eist: gelijkvormigheden, koordenvierhoeken, meetkundige plaatsen en kegelsneden, afstanden en grenzen met het voor de meesten nieuwe begrip Voronoi-diagram (zie voor de eindtermen [13]).

Natuurlijk gaat je hart sneller kloppen bij deze revival: ontwikkeling van gevoel voor en inzicht in meetkundige configuraties, leren bewijzen in deze inspirerende context; althans, wij docenten vinden die context inspirerend. Vooral de expliciete aandacht voor bewijzen is hartverwarmend en een hoopvolle indicatie dat fundamentele aspecten van de wiskundeopleiding niet (verder) uit het eerste jaar hoeven te verdwijnen maar hun natuurlijke plaats in curricula vinden.

Ongelukkig is het verdwijnen van het begrip limiet van een functie, waardoor een essentieel ingrediënt bij het introduceren van afgeleiden onder tafel geveegd is. Nu blijft het bij differentiequotienten en vervolgens zijn er plotseling afgeleiden.

Het onderdeel bewijzen in de vlakke meetkunde is ook geïsoleerd: de verbinding met de analytische kant wordt niet gelegd omdat zowel de (beginselen van de) analytische meetkunde als de vectormeetkunde uit het vwo-programma verdwenen zijn (iets van vectoren komt wel aan de orde bij natuurkunde); bewijzen komen bij andere leerstofonderdelen niet aan de orde. Daarnaast hoor je vwo-docenten wel verzuchten: waar doen we het voor, als jullie én niet voortbouwen op de meetkunde (meetkunde komt in ons basiscurriculum niet terug) én ook studenten met het profiel Natuur en Gezondheid toelaten. Het zal overigens wel bij een enkeling blijven die vanuit N&G instroomt. We plakken zo'n student het label 'deficiënt' op en geven eventueel wat extra onderwijs. Het gevaar bestaat dat wij zo ongewild bijdragen aan de ondergraving van het profiel N&T.

Daarnaast zullen we worden geconfronteerd met studenten met een grote differentia-

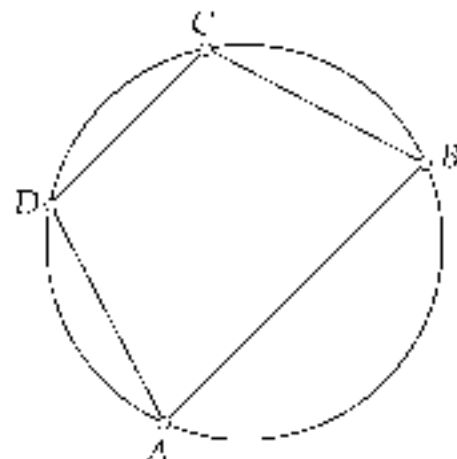
tie in achtergrond door de mogelijkheden die praktische opdrachten en profielwerkstukken bieden. Of dit voor een toegepaste opleiding gunstig is, weten we nog niet.

Een ander zorgelijk punt — iedereen die met eerstejaars te maken heeft zal het wel niet ontgaan zijn — waar is toch die parate kennis zoals $\sin \pi/6$? Die lacune kan op zichzelf niet aan de vernieuwde Tweede Fase worden toegeschreven, maar rondvragen bij enkele vwo-docenten leert, dat die parate kennis en manipulatievaardigheid wel eens verder zouden kunnen afnemen. Een uitgebreide formulekaart (met onder andere resultaten uit de vlakke meetkunde) en een grafische rekenmachine staan scholieren ter beschikking bij al hun wiskundig handelen. Wij zullen daarom zelf duidelijk moeten maken welke parate kennis en manipulatievaardigheid wij wenselijk vinden en hoe wij dit in ons onderwijs onderbrengen. Om de taal van de wiskunde te spreken moet je een zekere vocabulaire hebben. De nadruk op vaardigheden heeft als keerzijde de verminderde (parate) kennis. Ook onderwijskundigen geven aan (bijvoorbeeld in [10]) dat professioneel probleemoplossen niet geleerd kan worden los van goed gestructureerde kennis van het betreffende domein. Opzoekvaardigheden alleen zijn niet voldoende. De vraag is uiteindelijk hoeveel en wat voor soort (parate) wiskundekennis voor eerstejaars wiskunde echt vereist is, misschien $\sin \pi/6$ op zichzelf niet, maar wel het schema van de eenheidscirkel om de waarde in een handomdraai te produceren.

Inhoudelijke veranderingen

We zijn begonnen met het afnemen van een 'instaptoets' aan het begin van het jaar (zoals reeds op de Vrije Universiteit gebeurt (zie [6])) om parate kennis en manipulatievaardigheid in te schatten en daarmee verwachtingen van onze kant vroegtijdig tot realistische proporties terug te brengen.

Om per student de vinger aan de pols te houden en aan hun parate kennis te schaven, nemen we wekelijks een kleine overhoring af bij onze eerstejaars over goed afgebakende onderwerpen, bijvoorbeeld de definitie van limiet of het begrip vectorruimte. Gedurende 5 à 10 minuten stellen wij vragen over dat onderwerp. Bijvoorbeeld: wat betekent $\lim_{t \rightarrow 3} f(t) = 1$? Is f in de buurt van 3 ongelijk 3? Welke axioma's gebruik je bij het uitwerken van $(a+b)(\overline{v} + \overline{w})$? De waardering voor de overhoringen resulteert in een bonus bij het tentamen. Met zo'n gerichte opdracht kunnen studenten niet verdrinken in de op-



Uit het eindexamen wiskunde B1,2 vwo 2001-II. Bewijs: als een koordenvierhoek een trapezium is, heeft hij twee overstaande zijden die even lang zijn.

gegeven hoeveelheid stof en hebben wij een aanknopingspunt om te zien of studenten de theorie met beleid bekijken. Om dit proces te ondersteunen voegen we opgaven toe die studenten op het spoor zetten de theorie zo te bestuderen dat ze tot de kern van de zaak doordringen. Het dwingt ons ertoe te bedenken hoe we studenten nu eigenlijk met de theorie om willen laten gaan.

Na jaren waarin de onderwezen analyse gewoon te moeilijk bleek te zijn geworden is dit jaar het analyse-onderwijs van inhoud veranderd. Bij kansrekening en statistiek zullen de bakens wellicht verzet gaan worden in een andere richting, omdat het nieuwe vwo-programma daar wat sterker is geworden.

Wat de inhoudelijke kant betreft, vinden onze studenten afkomstig uit de vernieuwde tweede fase (het is overigens maar een handvol) dat het programma goed aansluit. Wel schrikken studenten zoals altijd van het tempo.

Blij met vormveranderingen?

Bij de inhoudelijke veranderingen heeft het wiskundeveld meegepraat, bij de vormveranderingen minder. Uit de publicaties van verschillende didactici komt een gemengd beeld naar voren. Enerzijds zijn er didactici die de studiehuisaanpak, met grotere aandacht voor het zelfstandig leren, vertalen naar het wiskunde leren, bijvoorbeeld Kok [7], Lagerwerf en Korthagen [8], Boertien [2]. Anderzijds zijn er didactici die zich zorgen maken dat het contact met de leerkracht verdwijnt, bijvoorbeeld Bos [3], Groen [5] en Broekman [4]. Van Streun [11] diept de zorg verder uit. We staan kort stil bij hun argumenten.

Lagerwerf en Korthagen [8] voelen zich aangesproken door de nieuwe denkbeelden

Profiel Cultuur en maatschappij <i>Wiskunde a1</i> – Functies en grafieken – Discrete analyse – Combinatoriek en kansrekening – Grafen en matrices – Statistiek en kansrekening	Profiel Economie en maatschappij <i>Wiskunde a1,2</i> – Functies en grafieken – Discrete analyse – Meetkunde – Combinatoriek en kansrekening – Differentiaalrekening met toepassingen – Discrete dynamische modellen – Lineair programmeren – Grafen en matrices – Statistiek en kansrekening – Keuze-onderwerpen
Profiel Natuur en gezondheid <i>Wiskunde b1</i> – Functies en grafieken – Discrete analyse – Meetkunde – Combinatoriek en kansrekening – Differentiaal- en integraalrekening – Continue dynamische modellen – Goniometrische functies – Normale verdelingen en toetsen van hypothesen – Keuze-onderwerpen	Profiel Natuur en techniek <i>Wiskunde b1,2</i> – Functies en grafieken – Discrete analyse – Meetkunde – Combinatoriek en kansrekening – Differentiaal- en integraalrekening – Continue dynamische modellen – Goniometrische functies – Normale verdelingen en toetsen van hypothesen – Keuze-onderwerpen – Voortgezette meetkunde – Voortgezette analyse

Tabel 1 De vier profielen van de Tweede Fase van het vwo met de bijbehorende wiskundeprogramma's. Bron: www.nvww.nl

over onderwijs, zoals de grotere aandacht voor leren als proces, voor leren als actief bouwen van eigen denkbeelden en met grotere verantwoordelijkheid van de lerende zelf. Kok [7] constateert dat ook bij wiskunde B de leerling zich steeds minder bij de hand liet nemen, maar de docent moet wel aandacht geven aan systematische probleemaanpak en stappenplannen om het zelfstandig werk te ondersteunen. Het verst gaat Boertien [2]: hij accepteert de 'terugtrekkende leraar' (een term van Van Streun [11]), als een gegeven. Vanuit het CITO ontwikkelt hij zogenaamde voortgangstoetsen ter ondersteuning van het leerproces en de begeleiding: verzamelingen van leergang-onafhankelijke opdrachten gericht op brede toepassing van het geleerde met uitgebreide correctievoorschriften voor de leerlingen zelf. Deze zouden de rol over moeten nemen van de leerkracht die inzichtvragen stelt of extra opgaven aanbiedt, gericht op integratie van de leerstof, nadat de leerlingen standaardopgaven hebben gemaakt. Boertien merkt terecht op dat een nieuwe aanpak gevolgd door oude toetsen niet werkt. Echter, wat deed de leerkracht in de opgeheven rol eigenlijk verkeerd? Het is daarom dat Groen [5] zijn zorgen uit omtrent het Studiehuis: in het onderwijs van de wiskunde kan en moet volgens hem niet zo veel veranderen. Zelfstandig werk kwam al veel voor in de klas. Adviezen over studievaardigheden werden al impliciet gegeven. Een groter gebruik van studiewijzers moet niet betekenen dat de interactie met de leerkracht verdwijnt. Ook Bos [3] maakt zich ongerust over

de gedachteloze inzet van op zelfwerkzaamheid geschreven materiaal. Zelfstandig werken is nog geen zelfstandig leren. Leerlingen moeten leren doelen te stellen, te plannen, te monitoren en te evalueren (metacognitie). Leraren moeten daartoe leerlingen vragen naar hun werkwijze, soms hardop denkend zelf met een probleem worstelen, leerlingen de eigen resultaten op diagnostische toetsen laten analyseren, overzichten en schema's laten maken van de leerstof en zelf proefwerkvragen laten bedenken. En Broekman [4] vindt het een verarming van het wiskundeonderwijs wanneer de docent zich steeds op de achtergrond zou moeten houden en geen uitdagende initiatieven meer zou mogen nemen om leerlingen te inspireren. Van Streun [11] ten slotte acht de studiehuisaanpak (lees: zelfstandig leren) wel geschikt voor leren gericht op reproductie, maar minder voor leren gericht op productief denken: het bereiken van inzicht, overzicht, probleemoplossingsbekwaamheden en onderzoeksvaardigheden.

Alles goed en wel, maar de gemiddelde wiskundeleraar zal volgens ons ongetwijfeld zeer beïnvloed worden door het beleid van de school als geheel, waarbij de vakken mogelijk uniform benaderd worden. De vlucht in wat Van Streun noemt 'de terugtrekkende leraar', die zijn klas niet meer als geheel ziet, lijkt ons een doorgeschoten reactie. Dit is ook niet bedoeld door de Stuurgroep Tweede Fase, die, nog vóór het PMVO [1], aan de wieg stond van het Studiehuis. De bedoeling was niet opheffing van het klassikale onderwijs,

maar wel een vermindering, en wel met het doel de aandacht van de leerkracht meer te richten op speciale groepen leerlingen (begeleiding op maat).

Wiskundeonderwijs moet volgens ons een mengvorm zijn van klassikaal onderwijs, werken in groepen en individueel werken. Bij het klassikaal onderwijs is de docent nodig voor het geven van een samenhangend overzicht van de stof, het demonstreren van realistisch probleemoplossen (inclusief vastlopen en opnieuw beginnen), het voeren van een socratische dialoog. Ook is de docent er om uit te stralen dat wiskunde leuk en waardevol is. Bij het werken in kleine groepen, denk bijvoorbeeld aan projectwerk, is de rol van de docent voornamelijk coach, verder opdrachtgever, expert en beoordelaar; hetzelfde voor individueel werk, enerzijds minder frequent, anderzijds meer toegespitst op de individuele leerling. Verder volgen we Schoenfeld ([9]) in zijn visie, dat juist de onderdompeling van leerlingen in een wereld van wiskundige cultuur het meest leerzaam is (in tegenstelling tot de onnatuurlijke schoolcultuur). Zowel docenten wiskunde in het vwo als in het wetenschappelijk onderwijs willen we Schoenfelds artikel ter inspiratie sterk aanbevelen.

Vormveranderingen, wat doen we ermee?

Niets doen lijkt op het eerste gezicht gerechtvaardigd omdat het Studiehuis werd ingevoerd om juist de aansluiting te verbeteren tussen vwo en hoger onderwijs. Toch kunnen we maar beter op twee fronten werken aan de brug tussen vwo en hoger onderwijs om voeling te hebben met wat zich in het vwo afspeelt. Trouwens, ook binnen universiteiten zijn vernieuwingen gaande die gebaseerd zijn op onderwijskundige inzichten, soortgelijk aan de inzichten die aan het Studiehuis ten grondslag liggen. Aan de TUE is dat Ontwerpgericht Onderwijs (OGO), gericht op het versterken van de kenmerken professionaliserend, activerend, samenwerkend, schepend, integrerend en multidisciplinair in de opleidingen. Binnen de opleiding Technische Wiskunde is men echter gewend een eigen koers te varen bij de invulling van de opleiding. Jaren eerder zijn hier bijvoorbeeld de zogeheten Modelleerprojecten ingevoerd: open, niet per se in wiskundige termen geformuleerde opdrachten bestemd om door tweetallen studenten te worden gemaakt. Onderwijskundige vernieuwingen van buitenaf slaan men kritisch en vaak sceptisch gade – een opsomming als die van het PMVO zoals hierboven spreekt weinig vakbroeders aan. Hun voornaamste rol is dat er tot stelling nemen

aangezet wordt. Soms blijken zulke nieuwe ideeën in een of andere vorm toch (al) een plaats te hebben gekregen of in gang gezette veranderingen een extra zetje te hebben gegeven.

Concrete aanleiding om over vormveranderingen na te denken, waren gesprekken met vwo-docenten uit de regio. Hun verwachting is dat de studiehuisstudent sterker is op het gebied van zelfstandigheid, plannen, ijver (met name bij betere leerlingen, door de praktische opdrachten), vaardigheden met betrekking tot informatie zoeken, samenwerken, presenteren en Informatie en Communicatie Technologie (ICT), maar zwakker op het gebied van parate kennis, rekenen en algebraïsch manipuleren, misschien zelfs redeneervaardigheid. Daarnaast verwachten ze een toename van calculerend gedrag, mede door de steeds drukkere agenda van de leerling en de ruim aanwezige afleidingsmogelijkheden. Bij ons, aan de universiteit, zouden colleges vooral moeten dienen om studenten te inspireren en uit te dagen en wellicht zouden het er minder moeten zijn; wij zouden bewust moeten opzoeken wat voor parate kennis we willen realiseren en welke rol we geven aan (ICT)hulpmiddelen, en voort moeten bouwen op de praktische opdrachten.

De eerste plek waar we aan de slag zijn gegaan is het wiskundepracticum. Het wiskun-

depracticum in het eerste jaar beslaat meerdere middagen en is gekoppeld aan diverse vakken (afhankelijk van het trimester), onder meer analyse en lineaire algebra. In de geschiedenis van het wiskundepracticum is herhaaldelijk met een huiswerkbonussysteem en met proeftentamens gewerkt; nu komt ook groepswork aan bod: studenten werken in drietallen aan opgaven. Per sessie is een ander groepslid verantwoordelijk voor het inleveren van de opgaven aan het eind van de middag (een duidelijke deadline dus). Om warm te draaien voor zo'n middagsessie geven we studenten vooraf, als huiswerk, een serie eenvoudige opgaven op die bedoeld zijn voor eerste verwerking van de stof en het opbouwen van routine (deze opgaven worden niet ingeleverd). Het ingeleverde werk wordt beoordeeld voor elke groep als geheel. Tevens vinden, als eerder gemeld, overhoringen plaats (dat kan dus met die geringe studentenaantallen). Bij voldoende resultaat voor een en ander wordt een bonus voor het tentamen gegeven. Het collegeonderwijs in de bijbehorende vakken is onveranderd gebleven. Bij het in te leveren werk houdt de deadline er behoorlijk de vaart in; natuurlijk, soms treedt er toch afschuifgedrag op of wordt er wat overgeschreven. De mondelinge sessies zijn voor ons heel boeiend. Studenten denken al gauw dat 'ongeveer weten' plus talent meer dan ge-

noeg is en gaan met de billen bloot. Zo'n minisessie fungeert dan en passant als studiebegeleiding en wordt door studenten ook als leerzaam ervaren.

Bij deze vorm rapporteren de studenten afkomstig uit de vernieuwde tweede fase geen kloof met hun eerdere manier van werken.

Een diffuus beeld en een oproep

Het beeld dat uit vorm- en inhoudsveranderingen naar voren komt is diffuus: er is veel vrijheid voor scholen bij de invulling van het Studiehuis, er zijn veel mogelijkheden voor uitstapjes via keuze-onderwerpen, praktische opdrachten en profielwerkstukken. Kortom, we verwachten een gemêleerd gezelschap. We zijn bepaald niet radicaal anders te werk gegaan, maar lijken alleszins redelijk aan te sluiten bij de vernieuwde Tweede Fase, al is onze populatie te klein om conclusies te trekken. Toch bekruipt ons wel eens een onbehaglijk gevoel omdat er ook geluiden uit het middelbaar onderwijs zijn dat we met compleet andere studenten te maken zullen krijgen. Merken we dat niet omdat we er al goed op inspringen, of zien we iets over het hoofd? Daarom hier de vraag aan andere wiskundeopleiders om studiehuisstudenten en oude-stijlers te vergelijken.

Referenties

- 1 Procesmanagement Voortgezet Onderwijs (1996), *Studiewijzers: de spoorboekjes voorbij*. <http://www.pmvo.nl/downloaden>
- 2 H. Boertien (2001), 'Voortgang bijhouden in het studiehuis, hoe doe je dat?', *Euclides* 76/5, pp. 192–195.
- 3 M. Bos (1996), 'Zelfwerkzaamheid? Zelfstandig leren!', *Euclides* 72/1, pp. 15–18.
- 4 H. Broekman (2001), 'De essentie van het leren van wiskunde ... zonder inspirerende docent?', *Euclides* 77/2, pp. 42–44.
- 5 W.E. Groen (1999), 'Zorgen bij het studiehuis wiskunde'. In: *Meningen over het Studiehuis – deel 2*; *Nieuwe Wiskrant* 17/4, p. 15.
- 6 W.E. Groen (2001), 'Parate wiskundekennis en rekenvaardigheid', *Nieuwe Wiskrant* 20/3, pp. 50–52.
- 7 D. Kok (1997), 'Zelfstandig leren en de wiskundeleraar', *Nieuwe Wiskrant* 17/1, pp. 5–10.
- 8 B. Lagerwerf en F. Korthagen (1999), 'Van Model DA naar het VAARDIG-model', *VELON Tijdschrift voor lerarenopleiders* 20/3, pp. 28–36.
- 9 A.H. Schoenfeld (1987), 'What's All the Fuss About Metacognition'. In: A. Schoenfeld (Ed.): *Cognitive Science and Mathematics Education*, Lawrence Erlbaum, London, pp. 189–215.
- 10 H.G. Schmidt en J.H.C. Moust (1998), *Probleemgestuurd Onderwijs. Praktijk en Theorie*. Wolters-Noordhoff, Groningen.
- 11 A. van Streun (2001), 'Hoe staat ons Nederlands wiskundeonderwijs ervoor?'. *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/2 nr. 1, pp. 42–50.
- 12 B. Zwaneveld (2001), 'Het wiskunde B1,2 examen'. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/2 nr. 2, pp. 148–155.
- 13 <http://www.nvww.nl/Eindtermen2.html>

T.A. Springer

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Budapestlaan 6, 3584 CD Utrecht
springer@math.uu.nl

Boekbespreking Development of Mathematics 1950-2000

High level vulgarization of mathematics

Het jaar 2000 staat te boek als het jaar van de wiskunde. Het Clay instituut heeft een lijst opgesteld met belangrijke wiskundige problemen, net als in 1900 door Hilbert is gedaan. Uitgeverijen zoals Springer en Birkhäuser hebben feestelijke gedenkboeken gepubliceerd waarin een panoramisch beeld van de wiskunde wordt gegeven. Vele wiskundigen hebben aan deze gedenkboeken meegewerkt, met als gevolg buitensporig dikke boeken.

Een van die overzichtswerken is 'Development of Mathematics 1950-2000'. De titel maakt nieuwgierig: Wat is er de laatste vijftig jaar gebeurd? Geeft dit boek een goede impressie van de recente ontwikkelingen? T.A. Springer geeft een kritische bespreking.

This book is a sequel to a book with a similar title (*Development of Mathematics 1900-1950*), published in 1994, with the same editor and publisher.

The two books have rather different characters. The first book was an unsystematic outgrowth of a Symposium organized by the Luxembourg Mathematical Society in 1992. The aim of the second book, as I see it, is to present a somewhat systematic review of what happened in mathematics in the second half of the 20th century. A worthy but

ambitious undertaking, as the period has seen an exponential growth of mathematical production.

The book is presented as an attempt at high level vulgarization of mathematics. Is it a successful attempt? Before answering that question I have to give some idea of the contents of the book.

Overview

The core of the book consists of 36 reviews, of variable lengths, about half of them in French. Besides, the reader finds lists of the invited one-hour addresses at the International Mathematical Congresses, of the invited addresses of the Bulletin of the American Mathematical Society and of the Russian Mathematical Survey.

At the end of the book there are three interviews of R. Langevin with A. Douady, M. Gromov and F. Hirzebruch. They are quite interesting, reflecting three very different personalities, each with his own views.

Making a technical evaluation of all contributions is an impossible task for one reviewer. However, my mathematical life — such as it is — spanning more or less the period covered in the book, I expected to find familiar material. This is indeed the case, although none of the

contributions is on topics with which I am really technically conversant.

Ideally, I think, a contribution should be written by an expert in its area and be largely intelligible for laymen in the area. They should be able to get some feeling for what has been going on and what have been the most striking developments in the last fifty years. With such an ideal contribution in mind let me now turn to some of the material.

Some examples

The book starts off with two contributions by V. Arnold (the order of the contributions is alphabetic), *Dynamical systems* and *Singularity theory*. These contributions seem to approach the ideal pretty closely. Arnold starts off quite simply, but manages to present a great deal of material very clearly, with many illustrative pictures.

Another contribution which impressed me — in an area where I am a stranger — is the one by P.-A. Meyer: *Les processus stochastiques de 1950 à nos jours*. This is a historic survey with hardly any formulas but with very detailed references. My impression is that for stochastic laymen (and maybe also for experts) this is an enlightening report.

Other enlightening contributions are by M. Berger: *Les mathématiques durant le deuxième demi-siècle: géométrie riemannienne*, P. Dolbeault: *Variétés et espaces analytiques complexes*, C.O. Kiselman: *Plurisubharmonic functions and potential theory in several complex variables* and J. Sjöstrand: *Microlocal Analysis*. These are contributions in areas which to me are somewhat far away. A little closer is a — very good — contribution by M. Karoubi: *Rapport sur la K-théorie (1956-1997)*.

But some contributions are far from ideal, for example the one by F.W. Lawvere: *Comments on the development of topos theory*. It is pretty unhelpful to an ignorant reader, as there is no explanation of the basic notion of a topos (which should have been placed right at the beginning, I think).

Technical progress

The contributions of the book demonstrate that mathematical technique made enormous progress in the last fifty years. One usually takes this for granted. But when I tried to look at things from the perspective of the 1950's I realized how impressive the progress really is. Here are some illustrations, coming from my private interests.

In my mathematical youth I was intrigued by analytic number theory (without getting into it seriously). There is a very good contribution on that topic by E. Fouvry: *Cinquante ans de théorie analytique des nombres*. Fouvry describes technical tools which have been developed and discusses a number of concrete successes of analytic number theory, results which in 1950 were completely inaccessible. For example, that the generalized Riemann hypothesis holds for almost all Dirichlet L -functions, and also the description of the distribution of primes which are sum of a square and a fourth power.

Another subject in which I got interested in my youth is algebraic geometry (and in later years I got fairly familiar with some parts of it). In 1954, at the International Congress in Amsterdam, I attended the Symposium on Algebraic Geometry. Looking today at the Proceedings of that Colloquium one realizes what enormous progress has been made. Things which looked very hard or had shaky foundations in 1954 are now common knowledge: rational equivalence, Weil conjectures. Sheaf theory, which had just appeared in 1954, is now a familiar tool.

The book contains an instructive contribution by C. Ciliberto on the geometry of algebraic varieties. The contribution discusses some of the progress of algebraic geometry. But, probably because of length limitations, it is sometimes rather sketchy.

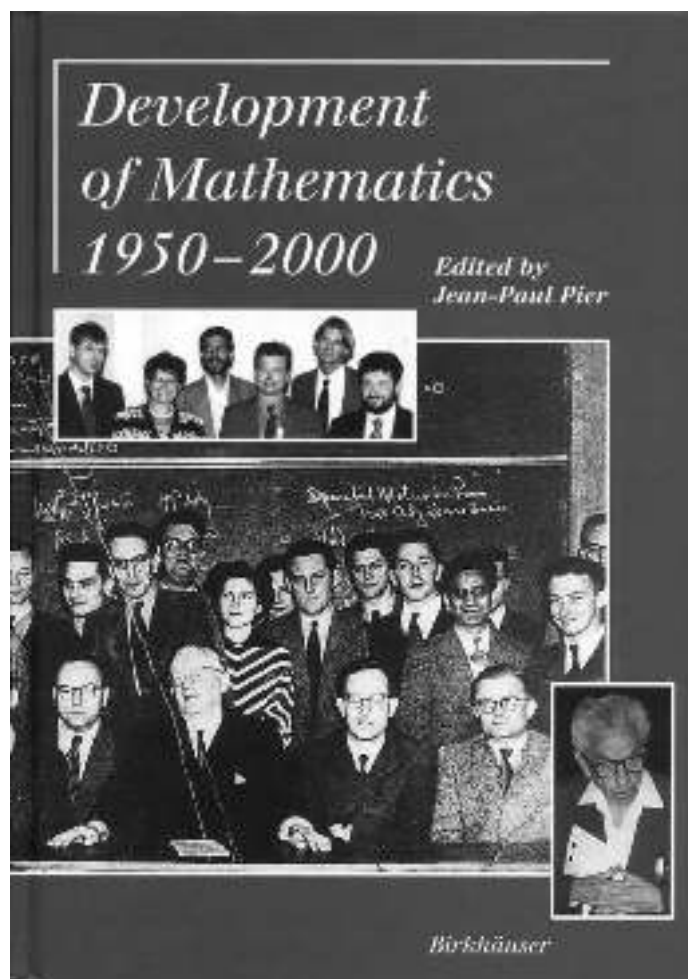
There is one other contribution about algebraic geometry, namely by M.-Fr. Roy: *Géométrie algébrique réelle*. In my opinion other topics from algebraic geometry now hardly touched upon in the book — for example the theory of motives, moduli spaces or arithmetic algebraic geometry — would have equally deserved a contribution.

Crossing borders

My later research interests — in algebra and Lie theory — are not represented in the contributions. But some items rang a bell. One of these brings me to a digression.

There are two contributions on model theory, by B. Poizat: *Autour du théorème de Morley* and by J.-P. Ressayre: *La théorie des modèles, et un petit problème de Hardy*. I am a layman in that area, but over the years I have been struck by the power of model theory, which is sometimes able to establish results which are beyond the capabilities of 'ordinary' mathematicians. I became aware of that power in the sixties, when Ax-Kochen (and Ershov) established the first general results about a conjecture of Artin, using model theory.

Let K be a local field and let f be a homogeneous polynomial in n indeterminates of degree $d > 0$, with coefficients in K . Then the conjecture was: if $n > d^2$ the equation $f = 0$ has a non-trivial solution in K^n . It had been proved by Lang if K has characteristic $\neq 0$ (i.e. if K is a finite extension of a field of formal power series in one variable over a finite field), but it remained open for some time for K of characteristic 0 (i.e. if K is a finite extension of a p -adic field). In the sixties counterexamples appeared (already for $d = 4$). But then model theory



intervened. It enabled one 'to pass from characteristic p to characteristic 0', and led to the following result, for $K = \mathbb{Q}_p$ (the field of p -adic numbers): given p , there is a d_p such that Artin's conjecture holds for $d \geq d_p$. As far as I know, there is no 'arithmetic' proof of such a result, and there do not seem to be good estimates for d_p .

In Poizat's contribution this application is mentioned in passing, as only superficial aspects of model theory are involved. But in my opinion such examples of border crossing between different areas in mathematics are highly interesting and would deserve some attention in the present book. (Poizat's contribution describes other instances, but a bit too brief for a layman. Ressayre's contribution, though, does discuss in detail an application of model theory in mathematics.)

In connection with the phenomenon of 'border crossing' I quote a remark made by Arnold in his contribution on singularity theory (observing that the ADE-classification appears in different areas). He mentions "the rather mysterious unity of all branches of mathematics".

As to passage from characteristic p to characteristic 0, several examples have appeared in the last decades, for example in the theory of perverse sheaves, in representation theory and in the use of Frobenius splittings. It is a phenomenon which deserves some attention. I would have liked to see a contribution discussing methodical phenomena of such a nature.

Bibliographical matters

There is a list of names of about 2500 cited people. Chauvinistically, I observed that a little more than 2% of the names are Dutch. The compiler of the book obviously had trouble with the vagaries of Dutch names, leading to some inconsistencies: De Bruijn is listed twice (under B and under D), Van Dantzig is listed under D, but Van der Waerden under V. Moreover, one also finds garbled Dutch names (Lojienga).

The book contains about 200 pictures of mathematicians. These come from a collection at the Eidgenössische Technische Hochschule in Zürich. But the book contains no subject index.

Criticism

I have mixed feelings about the book. On the one hand it contains a wealth of interesting material, mostly very well presented. On the other hand — and this is my main criticism — the choice of the topics is rather haphazard. One would expect the editor to have some master plan for the distribution of various areas in the book. What is it? Why eight contributions on probability and statistics and none in topology or in Lie groups, and only one in algebra? Why no separate contribution on numerical analysis? (One does find a few pages on numerical work in the contribution of R. Temam, *Some developments on Navier-Stokes equations in the second half of the 20th century* and some computations in number theory are discussed in the contribution of J.-L. Nicolas, *Arithmétique et cryptographie*.)

To be more specific I mention a few serious omissions. In the book group theory is practically absent. There is one probabilistic contribution involving groups, *Marches aléatoires sur les groupes* by Y. Guivarc'h. But there is nothing about finite groups or Lie groups and nothing about representation theory. This is very strange.

As for finite group theory, there is the classification of finite simple groups, a monumental piece of work (perhaps not yet well understood). This is an achievement in algebra which certainly ought to have a place in a review of mathematical successes in the second half of the 20th century. The more so as partial results, like the solvability of finite groups of odd order, are understandable to any mathematician (al-

though still very difficult to prove). Also, some sporadic groups would merit a description.

The period covered by the book has also witnessed spectacular developments in representation theory. As examples I mention Harish-Chandra's work on the representation theory of real Lie groups and the fact that the theory is involved in the "Langlands program", one of the most significant developments in number theory. But Harish-Chandra's and Langlands's names are mentioned only once in the book, in a review of French mathematics by the late J. Dieudonné. (Also, as far as I can see, Dieudonné's contribution is the only one mentioning modular forms). Moreover, representation theory and Langlands's work provide beautiful examples of 'border crossings' and Arnold's 'unity of all branches of mathematics'.

Conclusion

Finally, I return to the question posed at the beginning, whether this attempt at high level vulgarization of mathematics has been successful. My answer is a qualified 'yes'. Taken as a whole the book, in spite of its flaws, presents a lot of interesting material. But the reader should be aware of its incompleteness. 

Development of Mathematics 1950–2000, edited by J.-P. Pier. x + 1372 pages, price €208,51. Birkhäuser Verlag, 2000. ISBN 3-7643-6280-4

Boekbesprekingen

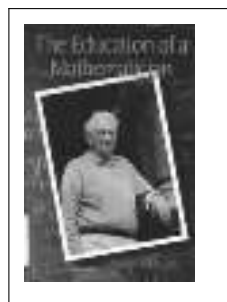
| Book Reviews

Alle in de vijfde serie van het NAW verschenen boekbesprekingen zijn op onze webpagina te vinden.

Tevens staat daar een lijst met ter recensie aangeboden congresverslagen en eventueel andere boeken.

Indien u er prijs op stelt een van deze verslagen te bespreken, meld dit dan binnen een maand na verschijnen van dit nummer (bij voorkeur per e-mail) op onderstaand adres.

Eindredactie: Jaap Top
Redactieadres: Boekbesprekingen WG
Instituut voor wiskunde en informatica
Postbus 800, 9700 AV Groningen
Webpagina: <http://www.math.rug.nl/revwg/>
E-mail: revwg@math.rug.nl



P.J. Davis

The education of a mathematician

Natick: A K Peters, 2000

368 p., prijs \$ 29.95

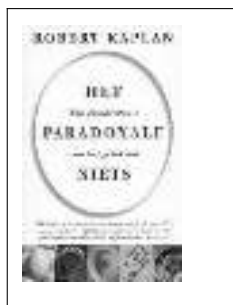
ISBN 1-56881-116-0

The author is a well-known mathematician, particularly through his work in numerical analysis and approximation theory as well as through his work as a philosopher and historian in the field of mathematics. This book is not a mathematics book but rather a collection of essays, often of an anecdotic nature, covering quite a number of subjects, but concentrating on the role of mathematics in society and the other way around. But it is also an autobiography. For instance, he relates how already at school he had a vivid interest in mathematics and how he was struck by the beauty and rigor of geometry, but also how his belief in the infallibility of geometry was put to the test by the well-known 'proof' that every triangle is isosceles.

In his early years as a student he was a great fan of Whitehead and Russel's *Principia Mathematica* and it is rather hilarious to read how he was turned off from formalism: although he knew a great deal about it from a course by Quine, his fiancée, who in her own words "hadn't a clue as to what was going on", by just using some common sense got higher marks than he. Nevertheless, the quest for absolute knowledge has never left him, and he relates with great satisfaction his being invited by the Imperial College, London, in 1998 to give the first Whitehead Memorial Lecture. We also read about many important mathematicians whom he has met and has worked with in his student years at Harvard and in his professional life, and who have thereby contributed to his education as a mathematician (the title of the book). In 1950 he got his Ph.D, but much to his dismay, there were then no university positions available. He finally landed in the National Bureau of Standards, where he could do research, for example, leading to a contribution to the standard work of Abramowitz and Stegun, but where he had no opportunity to pursue his essayistic ambitions.

The situation changed dramatically in a few years time in the aftermath of the launching of Sputnik 1. There were now jobs galore and, as he notes as an aside, the universities now came to him instead of he to them. He chose for Brown University, an important place for applied mathematics, and that is where he stayed. They offered him the opportunity to do both research and writing, although they did not expect a great deal of the latter. However, 30 years later one may well say that they have been proved wrong, to the satisfaction of all parties concerned. A rather unusual feature of the book is that in a sense it is dedicated to Thomas J. Jefferson (1743–1826), third president of the US, the reason being that he was not only a politician but also a philosopher who knew a good bit of mathematics and science, and who clearly saw the importance of these disciplines for society. The author wishes to update Jefferson's Ghost on the current state of mathematics, and so on several occasions he addresses the Ghost, using this as a vehicle to impart to the reader his views on the role of mathematics in today's civilization.

A. van der Sluis

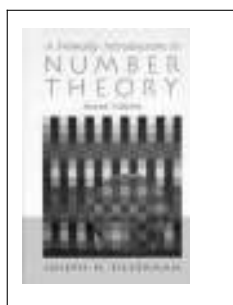


R. Kaplan
Het paradoxale niets
 Amsterdam: Bert Bakker, 2000
 255 p., prijs €16,56
 ISBN 90-351-2140-6

Het boek draagt als subtitel "Een geschiedenis van het getal nul". Het oorspronkelijk in het Engels geschreven werk is vertaald door Aat van Uijen. Mijn belangrijkste bezwaar tegen dit boek is de schrijfstijl. En ik weet niet of dat de auteur danwel de vertaler is aan te rekenen. Een idee over de gebruikte stijlform krijgt men uit de volgende twee voorbeelden. "Om de verschuiving van het achtergrondparadigma bij te kunnen houden, begon men de wisselwerking tussen getallen te zien als manifestatie van deze axioma's, die van ver het weefsel van ons begrip strakgespannen houden als een trampoline." (p.97) "Al hun terreinopnamen van gebieden, die waren gemaakt van oneindig veel onzichtbare lijnen en vormen die achterbleven nadat hun afmetingen waren verwijderd, zijn telegrammen uit het binnenland, bedoeld om de wereld te doen opschrikken." (p.181)

Wanneer men zich door deze stijlbloempjes heenslaat, leest men een interessante verhandeling over invoering en gebruik van het getal nul. Deze reis door de geschiedenis start bij de Soemeriërs en eindigt met Gödel en von Neumann. Wij zien een kuiltje in het tafelblad van de rekentafel geleidelijk transformeren tot een cirkeltje in cijferrijen, fundamentele problemen zoals delen door nul en nul oneindig dicht benaderen opkomen en al dan niet bevredigend opgelost worden. Gelukkig vraagt de auteur weinig wiskundige kennis van de lezer.

J.H. Jongejan



Joseph H. Silverman
A friendly introduction to number theory (2e editie; 1e editie 1997)
 Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001
 386 p., prijs \$70.50
 ISBN 0-13-030954-0

Dit boek is de ideale inleiding in de getaltheorie. Ook wie niet meer wiskundige achtergrond heeft dan middelbare school algebra kan dit boek zonder meer lezen, analyse is niet eens nodig. De eerste hoofdstukken behandelen traditionele onderwerpen uit de getaltheorie, zoals bijvoorbeeld Pythagoreïsche drietallen, priemgetallen, modulair rekenen en de Pell-vergelijking. Latere hoofdstukken schenken ook aandacht aan meer moderne onderwerpen, met name RSA-cryptografie en modulariteitseigenschappen van elliptische krommen. Het boek is geschreven in een constante levendige en enthousiasmerende stijl. Daarbij staat één thema steeds op de voorgrond: in de getaltheorie gaat het om het verzamelen van gegevens over natuurlijke getallen, het herkennen van patronen in die gegevens, en het geven van bewijzen dat die patronen algemeen zijn. (Het boek maakt overigens het waardevol-

le onderscheid tussen *proofs* en *verifications*.) Een voorbeeld: maak een lijst van alle oneven priemgetallen onder de 100 en kijk welke te schrijven zijn als som van twee kwadraten en welke niet. Wat is het patroon dat hierin te herkennen valt? Welnu, de priemgetallen die te schrijven zijn als som van twee kwadraten blijken precies alle priemgetallen te zijn die 1 zijn modulo 4. Is dit patroon algemeen? De schrijver laat stapje voor stapje zien dat het antwoord "ja" is. Hij volgt hierbij Fermats klassieke bewijs via 'descent'. De schrijver moedigt de lezer voortdurend aan om ook zelf op zoek te gaan naar data, naar patronen en naar bewijzen. De vele opgaven in het boek zijn hierbij een waardevol aanknopingspunt. Als er al een minpunt is aan dit boek, dan is dat wellicht de mijns inziens onterechte ommissie van een bewijs van de kwadratische reciprociteitswet. Het boek telt al ruim 380 pagina's, soms met lange bewijzen. Er is bijvoorbeeld een compleet bewijs van het bestaan van unieke factorisatie in de gehele van Gauss. Dus een paar pagina's meer voor een bewijs van de kwadratische reciprociteitswet hadden er best bijgekund.

R. de Jong



M. Waldschmidt
Diophantine approximation on linear algebraic groups
 (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; 326)
 Berlin: Springer-Verlag, 2000
 633 p., prijs \$ 94,-
 ISBN 3-540-66785-7

De auteur van het hier besproken boek is één van de actiefste onderzoekers op het gebied van de transcendente getallen en mag wel als de grondlegger van de Franse transcendentieschool worden beschouwd. In het boek behandelt hij onder meer de stellingen van Baker over lineaire vormen in logaritmen van algebraïsche getallen en generalisaties daarvan. Het boek bestaat uit vijftien hoofdstukken en een uitgebreide bibliografie. Twee van de hoofdstukken, waarin de benodigde algebraïsche meetkunde wordt behandeld, zijn geschreven door D. Roy.

Als toelichting op de inhoud van Waldschmidt's boek maken we enkele historische opmerkingen. In 1873 bewees Ch. Hermite dat e transcendent is. In 1882 bewees F. Lindemann dat voor elk algebraïsch getal $\alpha \neq 0$ het getal e^α transcendent is. In het bijzonder impliceert dit dat π transcendent is. In de jaren 1930 bewezen de Rus A.O. Gel'fond en de Duitser Th. Schneider onafhankelijk van elkaar en met verschillende methoden dat α^β transcendent is wanneer α, β algebraïsche getallen zijn met $\alpha \neq 0, 1$ en β irrationaal. In 1966 bewees A. Baker de volgende generalisatie van de resultaten van Hermite, Lindemann, Gel'fond en Schneider: neem aan dat $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_n$ algebraïsche getallen zijn zodat $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ multiplicatief onafhankelijk zijn en $\beta_0, \dots, \beta_n$ niet alle gelijk aan 0; dan is $e^{\beta_0 \alpha_1^{\beta_1} \dots \alpha_n^{\beta_n}}$ transcendent. Een gevolg hiervan, in feite equivalent hieraan, is dat onder de bovengenoemde aannamen voor de getallen α_i en β_i de lineaire vorm $\Lambda := \beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_n \log \alpha_n$ ongelijk is aan 0. Het jaar daarop bewees Baker een kwantitatieve versie, waarin hij een expliciete ondergrens voor $|\Lambda|$ geeft in termen van de getallen α_i en β_i . Deze resultaten zijn later op allerlei manieren verscherpt en gegeneraliseerd. Het werk van Baker was een grote

doorbraak en leidde bijvoorbeeld tot een oplossing voor het klas-sengetal 1-probleem van Gauss (Baker en Stark) en tot effectieve oplossingsmethoden voor allerlei klassen van Diophantische vergelijkingen (Baker en anderen).

Waldschmidt beperkt zich in zijn boek tot standaard logaritmen en gaat niet in op p -adische, elliptische of abelse logaritmen. In de eerste tien hoofdstukken geeft Waldschmidt een historische inleiding, behandelt de benodigde technische hulpmiddelen, en geeft bewijzen van de bovengenoemde stellingen van Hermite-Lindemann, Gel'fond-Schneider en Baker. Waldschmidt volgt daarbij niet de bewijsmethode van Baker, maar een andere, rond 1990 door M. Laurent gesuggereerde methode gebaseerd op zogenaamde interpolatiedeterminanten.

In de hoofdstukken elf tot en met vijftien staat de van Waldschmidt zelf afkomstige Stelling van de Lineaire Ondergroep (Linear Subgroup Theorem) centraal. Ruw gezegd geeft deze stelling een expliciete ondergrens voor de rang van een matrix waarin zowel algebraïsche getallen als logaritmen van algebraïsche getallen voorkomen. De stelling van de lineaire ondergroep impliceert onder meer het transcendentieresultaat van Baker ($\Lambda \neq 0$) en een aantal andere bekende transcendentieresultaten. Waldschmidt geeft ook nog een uitermate gecompliceerde kwantitatieve versie van de stelling van de lineaire ondergroep en leidt daaruit allerlei kwantitatieve transcendentieresultaten af.

Waldschmidt heeft zich met zijn boek niet alleen tot de transcendentie-experts willen richten maar ook tot relatieve buitenstaanders die zich het onderwerp eigen willen maken. Het boek vereist geen specialistische voorkennis, ook niet voor wat betreft de behandelde algebraïsche meetkunde, en elk hoofdstuk is voorzien van een groot aantal opgaven. De eerste zeven hoofdstukken zijn voor niet-specialisten het meest interessant. Daarin wordt uitgebreid ingegaan op de historische ontwikkelingen en krijgt de lezer een goede indruk van de bewijstechnieken die in het boek worden gebruikt. Vanaf hoofdstuk acht wordt het boek steeds technischer. De laatste hoofdstukken bevatten allerlei resultaten die weliswaar voor specialisten erg interessant zijn maar voor niet-specialisten toch moeilijk op waarde zijn te schatten.

Naar mijn mening is het hier besproken boek een belangrijke toevoeging aan de transcendentie-literatuur. Ik vond de inhoud erg de moeite waard. Er is vrijwel geen overlapping van dit boek met andere literatuur over transcendente getallen. Het boek is geen standaardwerk omdat het maar een beperkt gebied van de transcendentietheorie bestrijkt, maar het geeft toch een goede indruk van het soort onderzoek dat in de transcendentietheorie gaande is.

J.H. Evertse



W. Bosma (ed.)
Algorithmic number theory
(Lecture notes in computer science; 1838)
Berlin: Springer-Verlag, 2000
615 p., prijs \$ 91,-
ISBN 3-540-67695-3

De mier die op de voorkant prijkt toont in één oogopslag waarover bundel nummer 1838 uit Springers serie *Lecture Notes in Com-*

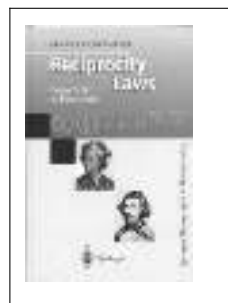
puter Science gaat. ANTS' vierde aflevering beslaat in boekvorm een veertigtal nogal diverse bijdragen over de algoritmische kant van getaltheoretische vraagstukken. De diversiteit van de bijdragen komt tot uitdrukking in zowel de onderwerpen, die lopen van het tellen van punten op hyperelliptische krommen tot het tellen van Goldbach-partities, als de moeilijkheidsgraad, die varieert van Hecke-operatoren en modulaire symbolen tot het berekenen van grootste gemene delers in $\mathbb{Z}[i]$.

Zoals te verwachten valt, komen bekende problemen aan bod als roosterreductie en het berekenen van de discrete logaritme voor eindige lichamen en elliptische krommen. In de behandeling van deze problemen wordt er met name gevarieerd op bekende algoritmen, zodat computationele aspecten als efficiëntie worden geperfectioneerd, zonder dat er wezenlijk nieuwe ideeën worden geïntroduceerd. Hierdoor zal, naar ik vermoed, de aandacht voor deze artikelen beperkt blijven tot ingewijden.

Wel wat nieuwer lijkt de aandacht te zijn voor het efficiënt rekenen met de groepswet op de K -rationale punten van de Jacobiaan van een hyperelliptische kromme. Dit in het kader van het implementeerbaar maken van de toepassingen van hyperelliptische krommen in de cryptologie. Deze interesse lijkt een logisch gevolg van de belangstelling voor elliptische krommen die al veel langer bestaat.

Ik zal geen opsomming geven van de onderwerpen die in deze bundel de revue passeren, alhoewel zo'n opsomming een aardige indruk geeft van wat er op dit moment op het gebied van de algoritmische getaltheorie gebeurt. Toch zal de bundel niet als kaleidoscopische introductie op dit gebied gaan fungeren, omdat de meeste bijdragen direct overgaan tot hun eigenlijke, ietwat specialistische onderwerp, zonder dat ze dit eerst inbedden in een algemenere context. Dit boek zal alleen dienst kunnen doen als naslagwerk, waarschijnlijk geheel in lijn met de doelstelling van de samenstellers.

G.J. van der Heiden



F. Lemmermeyer
Reciprocity laws
(Springer Monographs in Mathematics)
Londen: Springer-Verlag, 2000
487 p., prijs \$79.95
ISBN 3-540-66957-4

Eine ungerade Primzahl ist ein Quadrat modulo einer anderen ungeraden Primzahl, genau dann wenn dies mit vertauschten Rollen wahr ist, ausser wenn beide Primzahlen kongruent zu 3 modulo 4 sind, in welchem Falle das Gegenteil gilt. Für diese, in etwas anderer Form, zuerst von Euler formulierte Aussage über 'quadratische Reste' fand Gauss als Erster gleich acht verschiedene Beweise, weshalb sie heute auch unter dem Namen 'Gauss'sches Reziprozitätsgesetz' bekannt ist.

Ähnliche Gesetze lassen sich für höhere Potenzreste ganzer algebraischer Zahlen aufstellen, wobei dann die entsprechenden Einheitswurzeln vorhanden sein müssen. So waren Eisenstein bereits ein kubisches, quartisches und sextisches Reziprozitätsgesetz im dritten beziehungsweise vierten Kreisteilungskörper bekannt. Auch wenn sich diese klassischen Resultate für den heu-

tigen Zahlentheoretiker allesamt unter der Klassenkörpertheorie subsumieren, so ist ihre Aufarbeitung sowohl, weil sie sehr explizit sind, als auch aus historischen Gesichtspunkten interessant und sinnvoll. In dieser Hinsicht schliesst das vorliegende Buch sicherlich eine bisher vorhandene Lücke. Sein Untertitel *From Euler to Eisenstein* deutet an, dass allein elementare (d.h. algebraische Zahlen betreffende) Reziprozitätsgesetze behandelt werden. Die weitere Entwicklung von der Einführung der Ideale(n Zahlen) durch Kummer bis zur Klassenkörpertheorie nach Takagi und Artin will der Autor einem zweiten Band vorbehalten.

Vier der acht Gauss'schen Beweise werden in den ersten drei Kapiteln durchgeführt. Zu ihrem Verständnis werden Kongruenzhalbsysteme, die Genustheorie quadratischer Zahlkörper, Kreisteilungskörper und quadratische Gauss-Summen besprochen. Als Anwendung beweist der Autor den Lucas-Lehmer-Test für Mersenne'sche Primzahlen. Schliesslich wird noch der Zusammenhang zu Hilberts quadratischer Reziprozität in den rationalen Zahlen hergestellt.

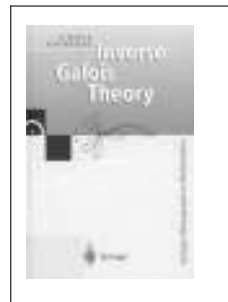
Danach werden das allgemeine Kummersche Potenzrestsymbol in einem algebraischen Zahlkörper sowie die höheren Gauss- und Jacobi-Summen eingeführt. Ihre Primidealzerlegung liefert dann jeweils den entscheidenden Schritt im Beweis der quadratischen, kubischen, sextischen, oktaischen und ℓ -ten (Eisensteinischen) Reziprozitätsgesetze, die im wesentlichen den Rest des Buches füllen. Eisensteins analytische Beweise führen den Leser zudem über Lemniskate und elliptische Funktionen bis hin zur Theorie der komplexen Multiplikation. Einen Ausflug in die arithmetische Geometrie erlaubt sich der Autor dann noch im zehnten Kapitel ausgehend von Gauss' letztem Tagebucheintrag. Hier werden die Reziprozitätsgesetze mit zyklotomischen Zahlen, dem Primzahlsatz und den Weil-Vermutungen in Zusammenhang gebracht.

Der gesamte Text, vor allem das erste Kapitel, ist angereichert mit historischen Hintergrundinformationen und Zitaten. Eine Fülle von Übungsaufgaben sollen den Leser zum Mitdenken und Mitrechnen anregen. Auffällig ist die ausführliche Literaturliste, die insgesamt mehr als 1600 Referenzen umfasst. Dem nur vierseitigen Stichwortverzeichnis steht eine sechsstufige Chronologie von Beweisen des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und ein 16-seitiger Autorenindex gegenüber.

Trotz der vom Autor jeweils gegebenen Einführungen scheinen mir Grundkenntnisse in algebraischer Zahlentheorie zum Verständnis des Buches erforderlich zu sein. Die Darbietung des Stoffes habe ich beim Lesen als recht unübersichtlich empfunden. So manches Mal musste ich innehalten, um eine Notation oder Definition aufzusuchen, die dann entweder überhaupt nicht oder zum Beispiel in unverständlicher Form zwischen den historischen Anmerkungen eines früheren Kapitels zu finden war. Der Text weist stellenweise so viele Druckfehler und unklare Begrifflichkeiten auf, dass sein mathematischer Sinngehalt (mit bedingt durch den sehr impliziten Stil des Autors) zuweilen nur noch mit äusserster Mühe zu erschliessen ist. Es wäre zu hoffen, dass dieser Nachteil in einer zweiten Auflage behoben wird.

Nach allem ist mir nicht ganz deutlich, an welche Leserschaft sich das Buch eigentlich richtet. Zwar enthält es einige thematische Anregungen, die man in eine Vorlesung einfließen lassen könnte, doch ist es wohl weniger als Lehrbuch denn als historisches Nachschlagewerk oder vielleicht als Schmökerlektüre für den Liebhaber geeignet. Zumindest der Rezensent hat es ja nun

gelesen und dabei — auch wenn ihm das nicht immer leicht gemacht wurde — einige interessante Dinge dazugelernt. R. Auer



G. Malle and B. H. Matzat

Inverse Galois theory

(Springer monographs in mathematics)

Berlin: Springer-Verlag, 1999

436 p., prijs €48,95

ISBN 3-540-62890-8

Galois theory describes properties of a field extension: adjoining all (simple) zeros of a polynomial to a base field K , we obtain an extension $L \supset K$, and subgroups of the automorphism group of that extension — the Galois group — are precisely the intermediate fields. This is one of the essential tools in algebra, but also in various other domains, such as number theory and algebraic geometry.

The inverse problem of Galois theory asks whether for a given base field K and a given group G there is an extension such that $\text{Gal}(L/K) \cong G$. Already Emmy Noether considered this problem. Many efforts, by Hilbert, Emmy Noether and many other mathematicians, have been devoted to this problem, and several special cases have been solved. But basically the problem is unsolved: *it is not known whether for any number field K and any finite group G the inverse problem has an affirmative solution.*

This book is devoted to this problem, describing several cases which have been solved, and discussing several methods and techniques which can be applied for a possible solution. Let me discuss first whether this is an interesting problem. As we see so often in mathematics, a good question, a difficult problem challenges us to find new ways, to develop new ideas; this intriguing problem turns out to have exactly this effect. And the book under review is a good example of such a development.

Let us mention some of the ideas described in this book. Hilbert developed the theory of specialization of coefficients of a polynomial in such a way that the polynomial remains irreducible, the famous *Hilbert irreducibility theorem* from 1892. Emmy Noether in 1918 asked whether a field of invariants under the action of a group of a purely transcendental extension (of the field of rational numbers) is a again purely transcendental, the *Emmy Noether problem*. In this form the problem has a negative answer, but it took us more than 50 years before this was observed: Swan in 1969, with more general results by H. W. Lenstra in 1974, and Saltman in 1984. We see that the inverse Galois problem cannot be solved completely in the way suggested by Emmy Noether. However it gave rise to a large number of partial results, beautiful attempts and much more: The notion of *rigidity* gives the bridge between a geometric approach (existence of coverings of the projective line) and algebra, thus solving an impressive number of cases of the inverse Galois problem. These are recorded in the first half of this book, the first three chapters. Results obtained along these lines are impressive, and the present book gives an excellent access to this part of the theory.

In 1954 Shafarevich proved an affirmative solution to the inverse Galois problem in case of a *solvable group* G over a number

field; this way of viewing things was initiated by Scholz, 1937, and by Reichardt, 1937; an unclear point in the proof by Shafarevich was proven rigorously much later by Neukirch in 1979.

Once we know how to solve the problem for certain groups, it is natural to consider the question of constructing Galois extensions with composite groups from given Galois extensions with simple Galois groups, the 'embedding problems'; these are discussed in the fourth chapter.

The solution of the inverse Galois problem over $\mathbb{C}(t)$ was solved by topological and geometric methods. In the last chapter of this book a similar approach for any ground field complete with respect to a non-archimedean valuation is discussed. This is connected with the Abhyankar conjecture (1957, concerning finite quotients of the fundamental group of an algebraic curve in positive characteristic), and the solution by Serre (1990), Raynaud (1994) and Harbater (1994). These proofs use rigid analytic methods: 'patching over complete valued fields'; these are discussed in the final chapter.

The authors state that they consider the 'field theoretic approach'. Indeed, that is central in this book. Geometric and analytic methods do play a role, but the emphasis is on algebraic and explicit methods. This results in a book which is impressive with respect to the variety of situations covered, the number of cases studied and the long lists of explicit equations giving certain extensions. In general the exposition in this volume is precise and rather technical. A reader wanting to have a more geometric approach, or in need of a more down-to-earth approach could consult J.-P. Serre, *Topics in Galois theory*, or H. Völklein, *Groups as Galois groups — an introduction*. Also the book M. Fried & M. Jarden, *Field arithmetic*, gives a beautiful point of view.

The restriction on topics to be discussed the authors impose on themselves seems wise. Therefore other topics remain untouched, such as the Grothendieck anabelian conjectures, and a possible description of the absolute Galois group of $\mathbb{Q}$ via the Grothendieck-Teichmüller group.

The Inverse Galois problem is still wide open. This book, rich in details, results, methods discussed, and description of special cases proved, is a valuable source for many aspects of this fascinating circle of ideas.

F. Oort

de fractionele idealen vormen een monoïde onder de vermenigvuldiging. Twee fractionele idealen worden equivalent genoemd als ze gelijk zijn op een hoofdideaal na, en de equivalentieklassen vormen de klassegroep. Een alternatieve beschrijving is de volgende: kijk naar isomorfismeklassen van projectieve modulen van rang 1. Deze vormen een groep onder de operatie geïnduceerd door het tensorproduct.

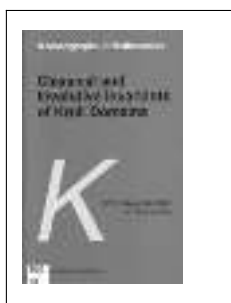
Men kan zich afvragen of de klassegroep kan veralgemeend worden naar willekeurige commutatieve ringen. De beschrijving via projectieve modulen van rang 1 kan direct veralgemeend worden, en dit levert de Picard groep van een commutatieve ring op. Voor integraal gesloten commutatieve ringen, of, meer algemeen, voor Krull domeinen kan ook de andere definitie veralgemeend worden, en dit geeft ons de klassegroep van een Krull domein. In het algemeen is de klassegroep niet gelijk aan de Picard groep, maar wel bestaat er een groepshomomorfisme tussen beiden. Voor een Dedekind domein, in het bijzonder een getallenring, vallen beide invarianten samen, en dit komt eigenlijk doordat in een Dedekind domein alle priemidealen van hoogte 1 zijn.

Gelijkaardige fenomenen treden op voor andere invarianten, zoals de Brauer groep. De Brauer groep meet hoever een centraal simpele algebra (over een lichaam) of een Azumaya algebra (over een commutatieve ring) kan afwijken van een matrixring of een endomorfismenring. Over een noethers integraal gesloten domein voerde Yuan reflexieve Azumaya algebras in, en de reflexieve Brauer groep. Hij liet ook zien dat er een exacte rij is die de Picard groep, de klassegroep, de Brauer groep, en de reflexieve Brauer groep met elkaar verbinden. Een mysterieuze vijfde term — de Brauer-klassegroep — treedt hierin op.

Begin jaren tachtig toonden Van Oystaeyen en de tweede auteur aan dat dit alles onderdeel is van een meer algemene theorie: voor elke torsietheorie op de categorie der modulen over een commutatieve ring kan men een Picard groep en een Brauer groep geassocieerd aan die torsie theorie definiëren. De twee hierboven beschreven gevallen krijgen we als we de torsietheorieën bekijken geassocieerd aan respectievelijk alle priemidealen, en de priemidealen van hoogte 1 (wat nog eens impliceert dat beide theorieën samenvallen over Dedekind domeinen).

Het boek gaat over de 'divisoriële' invarianten van Krull domeinen, dit zijn de invarianten relatief aan de torsietheorie voortgebracht door de priemidealen van hoogte 1. Niet alleen de klassegroep en de reflexieve Brauer groep worden uitgebreid behandeld, maar ook andere invarianten. Veel aandacht wordt besteed aan involutieve invarianten (de Hermitische Picard groep en de involutieve Brauer groep) waarover de onderzoeksgroepen van beide auteurs tijdens de voorbije jaren uitgebreid publiceerden. Verder wordt een divisoriële versie van Galoistheorie behandeld, en de diverse cohomologische beschrijvingen van de divisoriële invarianten.

Uiteraard is dit een werk voor specialisten. Niettemin deden de auteurs een inspanning om het ook voor een breder publiek toegankelijk te maken, zo kan ik het inleidend hoofdstuk over Krull domeinen ten zeerste aanbevelen. Het hele boek is trouwens geschreven in een vlotte en coherente stijl, met hier en daar tussen de lijnen een relativerend gevoel voor humor — misschien ware het beter om over 'relativerende' invarianten te spreken. S. Caenepeel



M.V. Reyes Sánchez and A. Verschoren
Classical and involutive invariants of Krull domains

(K-monographs in mathematics; 5)

Dordrecht: Kluwer, 1999

267 p., prijs €99,83

ISBN 0-7923-5719-1

De ring der gehele getallen is een hoofdideaalring. Dezelfde eigenschap geldt niet voor alle ringen van gehelen in een getallenlichaam: in het algemeen bestaan er idealen die geen hoofdideaal zijn. Sterker zelfs: indien het zo zou zijn dat alle getallenringen hoofdideaalringen zijn, dan zouden we een eenvoudig bewijs van de stelling van Fermat kunnen geven. Hoever getallenringen afwijken van hoofdideaalringen wordt beschreven door de klassegroep. Deze invariant wordt eenvoudig gedefinieerd als volgt:



E. Casas-Alvero
Singularities of plane curves
 (LMS lecture notes series; 276)
 Cambridge: Cambridge university press, 2000
 345 p., prijs £29.95
 ISBN 0-521-78959-1

Hoe singulier een algebraïsche kromme lokaal is, kan op verschillende manieren gemeten worden. Voor de topologische beschrijving beperken we ons tot het klassieke geval van complexe krommen door de oorsprong in $\mathbb{C}^2$. De doorsnede van de kromme met de rand van een voldoende kleine bol om de oorsprong geeft een knoop (of schakel, als de kromme meer dan een tak heeft) in een 3-sfeer, en wel een geïtereerde torusknoop. We noemen twee krommen equi-singulier als hun knopen topologisch equivalent zijn. Dezelfde equivalentierelatie kan ook met algebraïsch-meetkundige middelen verkregen worden. De eerste methode gaat terug op Newton. In een singulier punt geldt de impliciete functiestelling niet meer, maar we kunnen y toch als machtreeks in x schrijven, als we gebroken machten toelaten. Dit geeft voor een irreducibele kromme de zogenaamde Puiseux ontwikkeling. De exponenten bepalen het type van de geïtereerde torusknoop. De andere benadering gebruikt de ingebedde resolutie; topologisch correspondeert dit met de Waldhausen-decompositie van het complement van de schakel.

Beide methoden leveren discrete invarianten, die het topologische type volledig bepalen. Hoe je van de ene naar de andere beschrijving komt, staat al beschreven in twee boeken van F. Enriques, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* (Pubblicate per cura del Dott. Oscar Chisini) uit 1915 en 1918. Centraal in Enriques' benadering staat het concept van oneindig dichtbijpunten. In de gewone definitie van een raaklijn als limiet van sekanten hebben we een variabel punt op een kromme, dat 'oneindig dichtbij' een vast punt, zeg de oorsprong, komt. Het ligt als het ware bovenop de oorsprong, maar onthoudt nog zijn richting. Als we nu het vlak opblazen in de oorsprong, dat wil zeggen het punt vervangen door de projectieve lijn van alle richtingen, wordt de raakrichting een echt punt op de opblazing. Dit maakt een algebraïsch-meetkundige definitie mogelijk, los van alle differentiaalrekening.

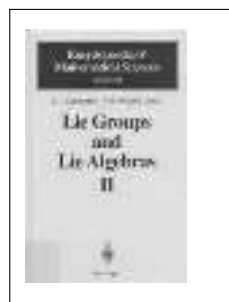
De auteur van het onderhavige boek is goed thuis in het werk van Enriques en heeft de grote verdienste de inhoud daarvan gemoderniseerd en toegankelijk gemaakt te hebben. Oneindig dichtbijpunten spelen een centrale rol. De lezer kan een duidelijke behandeling van Enriques' 'ontladingsprincipe' vinden. Bewust kiest de auteur voor Enriques' meetkundige benadering. Topologische aspecten komen nauwelijks aan de orde, met de motivering dat die al goed beschreven staan in bijvoorbeeld *Ebene algebraische Kurven* uit 1981 van Egbert Brieskorn en Horst Knörrer.

Het boek begint met het Newton-Puiseux algoritme. Daarmee wordt de Weierstrass voorbereidingsstelling in het speciale geval van twee variabelen bewezen. De delingsstelling is volgens een bekend argument equivalent met de voorbereidingsstelling, maar wordt hier zelfstandig, alweer met de Puiseux ontwikkeling bewezen. Dit is typerend voor het boek: het biedt interessante gezichtspunten, maar de bewijzen zijn vaak aan de lange kant.

De tweede helft van het boek behandelt nieuwere onderwerpen. Hoofdstuk zes gaat over polaire krommen en daarvan afgeleide invarianten. Deze hangen in het algemeen niet alleen van de equisingulariteitsklasse af. Hier bestudeert men een functie f van twee variabelen tezamen met een algemene lineaire functie. Dit kan gegeneraliseerd worden tot f samen met een andere functie g . Hoofdstuk zeven, over lineaire families van kiemen, gaat daarover, met toepassingen op speciale μ -constante deformaties. Tenslotte wordt Zariski's theorie van valuaties en complete idealen beschreven in termen van oneindig dichtbijpunten.

De tekst op de achterflap klopt half: dit boek is erg nuttig voor onderzoekers in het gebied, maar als leerboek is het minder geschikt door de eenzijdige benadering; Brieskorn-Knörrer is nog steeds het beste boek.

J. Stevens



A.L. Onishchik and E.B. Vinberg (eds.)
Lie groups and Lie algebras II
 (Encyclopaedia of mathematical sciences; 21)
 Berlin: Springer-Verlag, 2000
 223 p., prijs DM 159,-
 ISBN 3-540-50585-7

Dit is de uit het Russisch in het Engels vertaalde versie van een VINITI uitgave, in een analoge boekenreeks, uit 1988. Het is tevens deel II onder het hoofd *Lie groups and Lie algebras*. Twee onderwerpen krijgen de aandacht: *Discrete subgroups of Lie Groups* (auteurs Vinberg, Gorbatsevich en Shvartsman) en *Cohomologies of Lie groups and Lie algebras* (auteurs Feigin en Fuchs). Vertalen van wiskunde uit het Russisch in het Engels lukt over het algemeen goed. Vertalers die tevens wiskundige zijn, hebben snel de Engelse vertaling paraat door jarenlange ervaring met in het Engels geschreven artikelen. Zodra het echter op het vertalen van niet-wiskundige tekst aankomt, zoals bijvoorbeeld in het voorwoord grotendeels het geval is, valt op, althans bij vele boeken in deze serie, dat het Engels nogal arm is. Vaak is het ook een beetje ridicul. Toch geloof ik dat Springer-Verlag dit eenvoudig zou kunnen verbeteren.

De inhoud van deel 21 van de *Encyclopaedia of mathematical sciences* heeft aanrakingspunten met werk van de Nederlandse wiskundigen Kloosterman en Van Est. Zoals de titel van de serie al doet vermoeden is het boek vooral een naslagwerk. Het eerste onderwerp is vooral geënt op het werk van Mal'tsev, Mostow en Auslander, en ook op dat van Borel, Harish-Chandra, Weil, Godement en Margulis. De auteurs zeggen over hun aanpak: "In the present work we have tried to systematize all the basic results on the theory of discrete subgroups of Lie groups. Most of it has the character of a survey." "Apart from the original papers, our basic sources were: the monographs of Raghunatan (1972), Mostow (1973) and Zimmer (1984), the surveys of H.C. Wang (1972), ..., and finally the notes for specialized courses given by the first named author at Moscow State University". Een belangrijke klasse van discrete ondergroepen zijn de aritmetische ondergroepen. Deze krijgen uitvoerige aandacht. Het klassieke voorbeeld van $SL(2, \mathbb{Z})$ in $SL(2, \mathbb{R})$ slaat natuurlijk de brug met de getaltheorie: de theorie van modulaire vormen.

Het tweede deel behandelt de klassieke cohomologie van Lie groepen (Van Est, Segal) en de berekening hiervan voor eindig-dimensionale Lie algebras, Lie algebras van vectorvelden, 'current algebras', Lie algebras van differentiaaloperatoren, en van de Virasoro algebra en Kac-Moody algebras. Belangrijke Russische specialisten zijn Gelfand, Feigin en Fuks.

De uitvoering van het boek is, zoals van Springer-Verlag gewend, uitstekend. De prijs is in orde. De wiskundige kwaliteit van het gebodene is hoog. Zoals gezegd vind ik de vertaling niet altijd even goed. Met wordt met veel Russisch Engels geconfronteerd. Overigens is Springer-Verlag niet de enige uitgever, en zeker niet de slechtst geklasseerde, die met deze vertaalarmoede naar buiten komt. Wellicht zou het helpen om een engels sprekende wiskundige die expert is op het betrokken gebied en die enige affiniteit tot het Russisch heeft, te vragen de tekst door te lezen voor tot publikatie wordt overgegaan.

G. van Dijk



M. Saito, B. Sturmfels, N. Takayama
Gröbner deformations of hypergeometric differential equations
(Algorithms and computation in mathematics; 6)
 Berlin: Springer-Verlag, 2000
 254 p., prijs DM 69,-
 ISBN 3-540-66065-8

De laatste jaren zijn er voor Gröbnerbases toepassingen ontstaan in heel wat domeinen van het symbolisch rekenen en in het bijzonder in de combinatoriek. De tweede auteur van het voorliggende boek heeft hierbij baanbrekend werk geleverd (zie het boek B. Sturmfels, *Gröbner bases and convex polytopes*, 1995). Het huidige werk behandelt een toepassing van Gröbnerbases bij algoritme over ringen van differentiaaloperatoren. Gröbnerbases worden hier bestudeerd met het oog op meetkundige vervormingen (geometric deformations). Er worden symbolische algoritmen voorgesteld voor de constructie van holomorfe oplossingen van stelsels lineaire partiële differentiaalvergelijkingen met polynomiale coëfficiënten. Een dergelijk stelsel wordt voorgesteld als een linksideaal I in de Weyl-algebra $D = C\langle x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$. Een Gröbnervervorming (Gröbner deformation) van I is een initieel ideaal $\text{in}_{(-w,w)}(I) \subset D$ met betrekking tot een generische gewichtsvector $w = (w_1, \dots, w_n)$ met reële coördinaten w_i . Met methodes uit de computationele commutatieve algebra wordt een expliciete oplossingsbasis voor de Gröbnervervorming $\text{in}_{(-w,w)}(I) \subset D$ verkregen. Het probleem is nu deze basis uit te breiden naar een oplossingsbasis voor I . Dit wordt opgelost onder de natuurlijke voorwaarde dat het D -ideaal I regulier holonoom is. Deze voorwaarde geldt bijvoorbeeld voor de D -idealen die hypergeometrische integralen voorstellen.

In het eerste hoofdstuk maken we kennis met de basisnotaties. De klassieke Gauss-hypergeometrische functie wordt voorgesteld in het Gel'fand-Kapranov-Zelevinsky schema (GKZ). Er wordt ook een inleiding gegeven tot holonome stelsels van differentiaalvergelijkingen vanuit het standpunt van Gröbnerbases.

Het tweede hoofdstuk handelt over het oplossen van reguliere holonome stelsels. De holomorfe oplossingen van I rond het generieke punt in $\mathbb{C}^n$ vormen een vectorruimte. De termen van

een dergelijke holomorfe oplossing f zijn partieel geordend met behulp van de generische gewichtsvector w . De som van de kleinste termen $\text{in}(f)$, is een oplossing van de Gröbnervervorming $\text{in}_{(-w,w)}(I)$.

Het derde hoofdstuk behandelt het GKZ-hypergeometrisch systeem $H_A(\beta)$ geassocieerd met een matrix A en een complexe parametervector β zoals ingevoerd door Gel'fand, Zelevinsky en Kopranov, waarbij de matrix A een torische variëteit voorstelt. Gebruikmakend van expliciete vervormingen in de parameter ruimte wordt de fundamentele ongelijkheid $\text{rank}(H_A(\beta)) \geq \text{vol}(A)$ aangetoond.

In hoofdstuk 4 onderzoeken de auteurs drie voldoende voorwaarden opdat bovenstaande ongelijkheid een gelijkheid zou worden. Hoofdstuk 5 behandelt de integratie van D -modulen. De auteurs onderzoeken de wisselwerking tussen b -functies en Gröbnerbases voor holonome D -modulen. Het GKZ-systeem $H_A(\beta)$ blijft het toetsvoorbeeld voor alle begrippen en constructies inzake D -modulen. In de appendix worden in het kort drie computersystemen voor D -modulen voorgesteld.

Deze monografie vraagt een diepgaande studie, maar biedt dan ook een verrassende kijk op de onverwachte wisselwerking tussen uiteenlopende takken van de wiskunde. Het boek bevat een aantal originele onderzoeksresultaten op het gebied van holonome systemen en hypergeometrische functies, en presenteert een aantal open problemen voor verder onderzoek in het snelgroeiend domein van de computationele wiskunde. A. Hoogewijs



A.A. Ivanov
Geometry of sporadic groups I: Petersen and tilde geometries
(Encyclopedia of mathematics and its applications; 56)
 Cambridge: Cambridge university press, 1999
 408 p., prijs £45
 ISBN 0-5214-1362-1

Dit is het eerste van twee boeken gewijd aan de meetkunde van sporadische groepen. Het onderwerp van beide boeken is het classificeren van twee belangrijke klassen van meetkunden, namelijk de Petersen- en de zogeheten tilde-meetkunden. Beide zijn nauw met elkaar verbonden.

Er wordt een volledig bewijs van de classificatie gepresenteerd. Zo is er een oneindige familie van tilde-meetkunden geassocieerd met niet-splijt-uitbreidingen van symplectische groepen over het lichaam bestaande uit twee elementen. Daarnaast zijn er nog twaalf exceptionele Petersen- en tilde-meetkunden die aan sporadische enkelvoudige groepen (waaronder de Monstergroep) gerelateerd zijn. Dit boekdeel bevat een constructie voor elk van de Petersen- en tilde-meetkunden, die nodig zijn om de classificatie te volbrengen. Belangrijke toepassingen van die meetkunden blijven niet onvermeld, zoals de volledige identificatie van de zogeheten Y -groepen, de Y -presentaties voor de Monstergroep inbegrepen.

Dit nogal technische boek is het waard om in seminaria besproken te worden; het is zeer zeker specialistisch van aard. Vermelden we tot slot nog enkele dingen om een indruk van het gebodene te krijgen: amalgaamconstructies, Tits-meetkunden, Mathieu-

groepen, de Golay-code en Steiner systemen, Todd-modulen, Conway-groepen en tralies (onder meer van Leech), allerhande Monsterzaken, Y-groepen.

R.W. van der Waall

L. Rodino (ed.)

Microlocal analysis and spectral theory

(Mathematical and physical sciences; 490)

Dordrecht: Kluwer, 1997

444 p., prijs €163,36

ISBN 0-7923-4544-4

Deze bundeling van lezingen vormt de neerslag van een aantal voordrachten die zijn gehouden tijdens de Nato Advanced Study Institute *Microlocal Analysis and Spectral Theory* van 23 september tot 3 oktober 1996 in Il Ciocco. Het doel van de conferentie was om een beeld te schetsen van de recente ontwikkelingen op het gebied van de microlocale analyse en toepassingen.

In brede zin is microlocale analyse een moderne, zeer technische en geavanceerde vorm van de klassieke methode van Fourier om lineaire partiële differentiaalvergelijkingen te bestuderen en op te lossen. Dit levert vaak verbluffende resultaten op van vooral theoretische aard.

De bijdragen in deze serie zijn ruwweg in te delen in twee categorieën. Er zijn artikelen die betrekking hebben op de theorie van lineaire partiële differentiaalvergelijkingen en er zijn artikelen die gaan over spectraaltheorie en dan in het bijzonder in verband met de Schrödinger-vergelijking.

Een buitenbeentje en misschien wel het interessantste artikel. Een verhaal dat thuishoort in de niet-commutatieve meetkunde zoals die door Alain Connes is geïntroduceerd *Wodzicki's noncommutative residue and traces for operator algebras on manifolds with conical singularities*, geschreven door E. Schrohe.

Zoals het bovenstaande reeds doet vermoeden vormen deze proceedings een waardevolle collectie artikelen, die echter wel bedoeld zijn voor de specialist. De prijs is aan de forse kant.

R. Martini

C.D. Aliprantis and K.C. Border

Infinite dimensional analysis (2nd ed.)

Berlin: Springer-Verlag, 1999

672 p., prijs €60,84

ISBN 3-540-65854-8

This first edition of this voluminous book appeared nearly five years ago, so we may assume that there is a run after this treatise on functional analysis. And indeed, as a low budget tour to infinite dimensional real analysis the authors are rather successful. They themselves have chosen the subtitle *a hitchhiker's guide*; regarding the price (but not the size) of the book and the extent of the theory it is a good choice.

The book deals with topology, measurability, Banach lattices and L_p -spaces in a wide sense, but always in an elementary way. The text was born out of an advanced mathematical economics seminar and is meant to be helpful to a typical graduate student in mathematical economics or finance. Still it is pure math, you will not find concrete applications. The authors justify this selection by just mentioning "dynamical (money or growth) models require

infinite dimensional analysis whereas static models do not or by continuous linear functionals are important in economics because they can often be interpreted as prices".

The main prerequisite is mathematical sophistication, but if you want to use the book as a textbook, then you should have knowledge of university mathematics (including metric spaces and set theory). On the other hand it is surely a good manual for functional analysis with its well-written chapter-introductions and the extensive list of over 300 references. The change with the first edition is the treatment of Polish spaces (separable metric spaces which are complete). The book fails to have exercises, I would not recommend it as a student's guide to a university course.

G. Jeurnink



V. Kozlov and V. Maz'ya

Differential equations with operator coefficients with applications to boundary value problems for partial differential equations

(Springer monographs in mathematics)

Berlin: Springer-Verlag, 1999

442 p., prijs €86,41

ISBN 3-540-65119-5

Dit boek betreft gewone lineaire differentiaalvergelijkingen waarvan de coëfficiënten onbegrensde lineaire operatoren zijn tussen Hilbert- of Banachruimten. De vergelijkingen hebben de vorm

$$L(t, D_t)u(t) = \sum_{q=0}^{\ell} A_{\ell q}(t) D_t^q u(t) = f(t),$$

en worden beschouwd op de reële rechte $\mathbf{R}$ of een halfrechte $t > t_0$. De functies u en f zijn vectorwaardig en $D_t = -i\partial_t$. De relatie met partiële differentiaalvergelijkingen is onmiddellijk duidelijk als men bedenkt dat de coëfficiënten in bovenstaande vergelijking zelf ook weer differentiaaloperatoren kunnen zijn. In dat geval zijn de onderliggende ruimten Sobolevruimten of andere functieruimten. De literatuur over abstracte differentiaalvergelijkingen is zeer uitgebreid en omvat onder meer de theorie van operator-halfgroepen met de bijbehorende evolutievergelijkingen. Het onderhavige boek gaat echter vooral over vergelijkingen waarvan niet vooraf vast staat dat het bijbehorende Cauchy-probleem goed gesteld is. Veel van het besprokene betreft recent werk, met name van beide auteurs. Een steeds terugkerend thema is een 'vergelijkingsprincipe' waarbij bijvoorbeeld het groeigedrag van de functie $t \rightarrow \|u\|_{W^\ell(t, t+1)}$ naar boven begrensd wordt door een oplossing van een gewone scalaire differentiaalvergelijking met $\|f\|_{L_2(t, t+1)}$ als rechter lid. Hier staat $W^\ell(t, t+1)$ voor een vectorwaardige Sobolev ruimte van de orde ℓ op het interval $(t, t+1)$.

Het boek bestaat uit drie delen en een appendix. Het eerste deel behandelt vergelijkingen met constante coëfficiënten. In het tweede deel worden de bovengenoemde vergelijkingen opgevat als 'kleine' storingen van een corresponderende vergelijking met constante coëfficiënten, hetzij in globale zin of in een omgeving van oneindig. Het derde deel betreft de asymptotisch analyse. Aan de orde komen condities voor het oplosbaar zijn van de vergelijkingen, deelklassen waarvoor uniciteit van een oplossing kan worden bewezen, schattingen voor de groei van de oplossingen

en asymptotische representatie van oplossingen. Kwalitatieve en asymptotische aspecten staan dus voorop. Fredholmtheorie van abstracte operatoren en spectraaltheorie van operatorveeltermen en van holomorfe operatorfuncties zijn belangrijk hulpmiddelen in dit boek. De appendix behandelt deze onderwerpen.

Het boek is zeer rijk voorzien van voorbeelden en toepassingen op problemen uit de theorie van partiële differentiaalvergelijkingen, met name verschillende typen randwaardeproblemen. Het eerste hoofdstuk eindigt bijvoorbeeld met een lange paragraaf over Dirichlet-problemen in een kegel en in een halfruimte en met een Neumann-probleem in een cilinder. Deze problemen keren ook steeds in verschillende vormen terug in de latere hoofdstukken.

De verwevenheid van de abstracte theorie met concrete vergelijkingen is een van de aantrekkelijke en sterke punten van dit boek. Het boek vraagt van de lezer de nodige voorkennis. Enige vertrouwdheid met de theorie van partiële differentiaalvergelijkingen, reële en complexe analyse, en functionaalanalyse en operatorentheorie zijn onontbeerlijk. Het is dus vooral een boek voor gevorderde studenten en onderzoekers op het terrein van de analyse en haar toepassingen. Voor beide categorieën lijkt het mij een aantrekkelijk boek. Het boek heeft ook de functie van een goed toegankelijk naslagwerk voor recente ontwikkelingen op dit terrein.

M.A. Kaashoek



R.T. Rockafellar and R.J.-B. Wets

Variational analysis

(*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*; 317)

Berlin: Springer-Verlag, 1998

733 p., prijs €101,24

ISBN 3-540-62772-3

Het boek beoogt een wiskundig raamwerk te scheppen voor een breed spectrum van problemen die te voorschijn komen bij de bestudering van optimalisatietheorie, controle-theorie en de stabiliteitstheorie van lineaire en niet-lineaire systemen. De titel van het boek weerspiegelt deze breedte. Het gaat dus niet specifiek om variatierekening.

Als je het boek nader bestudeert blijkt het eerder een encyclopedie dan een leerboek te zijn met dien verstande dat je al behoorlijk op de hoogte moet zijn wil je met vrucht uit het gebodene kunnen putten. Ik heb dit getoetst aan een aantal binnen dit vakgebied zeer gangbare begrippen zoals epigraaf en subdifferentiatie. Het encyclopedische karakter wordt nog verder geaccentueerd door een drievoudige inhoudsopgave bestaande uit een index van beweringen (15 pagina's), een index voor notaties (1 pagina) en een voor onderwerpen (10 pagina's). De zeer uitgebreide literatuurlijst (25 pagina's) mag er ook zijn.

Opmerkelijk is het verder dat in dit werk ondanks de uitgebreidheid er praktisch geen woord wordt gerept over kritieke punten en de nauwverwante singulariteitentheorie. Dit is een duidelijke keuze van de schrijvers. Samengevat is het een nauwkeurig en verzorgd geschreven naslagwerk dat vooral zijn waarde heeft voor de werkers in het veld en beslist geen inleidend leerboek. De prijs is alleszins redelijk.

R. Martini

G.R. Grimmett

Percolation (2nd ed.)

(*Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*; 321)

Berlin: Springer-Verlag, 1999

444 p., prijs €81,30

ISBN 3-540-64902-6

Dit boek verschilt aanzienlijk van de eerste uitgave, die eerder in deze rubriek werd besproken. Dit blijkt al direct uit het aantal bladzijden (444 in plaats van 296). De eerste hoofdstukken lijken veel op die in de eerste uitgave. Verderop is echter materiaal uit de eerste uitgave herordend en is veel nieuw en interessant materiaal toegevoegd. Het laatste betreft onder meer de Burton-Keane stelling (uniciteit van het oneindig cluster), de zogenaamde *lace expansion* en de Grimmett-Marstrand theorie, die ruwweg zegt dat als percolatie optreedt er dan ook zo'n grote rijkdom aan verbindingen is dat op grote schaal transportverschijnselen kunnen plaatsvinden. Door de prettige stijl, de didactische gaven van de auteur en de grote hoeveelheid materiaal, beveel ik dit boek van harte aan, zowel als leerboek voor beginners op dit gebied als naslagwerk voor experts. Ten slotte nog enkele opmerkingen over percolatie in het algemeen, en nieuwe ontwikkelingen. Zeer recent (dus na de publikatie van dit boek) is spectaculaire vooruitgang geboekt op het gebied van kritieke percolatie in twee dimensies. Hierbij spelen interessante connecties met (twee-dimensionale) Brownse beweging en complexe analyse (conforme invariantie, Löwner vergelijkingen) een sleutelrol. Kortom, het vak percolatie is nog steeds springlevend en blijft steeds opnieuw zeer getalenteerde en vaak jonge onderzoekers uit de kansrekening en andere delen van de wiskunde aan te trekken.

J. van den Berg



J. Moser

Stable and random motions in dynamical systems

(*Princeton landmarks in mathematics*)

Princeton: Princeton university press, 2001

198 p., prijs \$ 14.95

ISBN 0-691-08910-8

Dit is een herdruk van een manuscript, gebaseerd op de Hermann Weyl lezingen zoals Moser die gaf in februari 1972 aan het Instituut for Advanced Studies in Princeton. Ze werden oorspronkelijk in 1973 gepubliceerd in de serie *Annals of Mathematics Studies*. In die tijd was het een hoogst actueel werk waarin zeer recente ontwikkelingen op het gebied van de hemelmechanica op een toegankelijke manier uiteengezet werden.

De belangrijkste onderwerpen die aan de orde komen zijn wat we nu KAM-theorie noemen (voor Kolmogorov, Arnold en Moser) en de theorie van chaotische bewegingen als gevolg van homocliene dynamica. Wat betreft beide onderwerpen waren er al belangrijke stappen gezet door H. Poincaré (*Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, *Acta Mathematica* 13 (1890), 1–270). Voor Poincaré ging het om de vraag of het zonnestelsel stabiel is. Met andere woorden, de vraag of de effecten van de aantrekkingskracht tussen de planeten onderling

op den duur ongeveer tegen elkaar zullen wegvallen. Het alternatief is dat deze verstoringen van de Keplerbanen op de lange duur tot dramatische afwijkingen zullen leiden. Poincaré maakte aannemelijk dat beide mogelijkheden zich kunnen voordoen, afhankelijk van vooral de begintoestand van het systeem. Hij was echter niet in staat om alle aspecten wiskundig te onderbouwen. Die onderbouwing vorderde echter snel, vooral in de periode van rond 1950 tot 1970. De KAM-theorie behandelt de situatie waarin men kan aantonen dat de kleine verstoringen (bij het zonnestelsel de onderlinge aantrekking van de planeten) elkaar in evenwicht blijven houden. Bij de 'random motions' uit de titel gaat het daarentegen om de situatie waarbij de kleine verstoringen op de lange duur juist wel grote gevolgen hebben. In het laatste geval spreekt men tegenwoordig over chaos, maar die term is pas in 1975 ingevoerd in een artikel van Li en Yorke.

Deze heruitgave stelt de lezer in staat om zich een goed beeld te vormen van de bereikte resultaten op dit gebied in het begin van de zeventiger jaren zonder verstrikt te raken in de vaak verwarrende details van volledige bewijzen. Omdat veel van het behandelde materiaal ook nu nog van belang is, en niet alleen voor de hemelmechanica maar ook voor een veel bredere klasse van dynamische systemen, is dit werk nog steeds een nuttige aanvulling op de moderne literatuur.

In deze uitgave is een voorwoord van P.J. Holmes toegevoegd, waarin onder andere de rol van Moser nader wordt toegelicht en waarin men enkele verwijzingen kan vinden in de richting van latere literatuur.

F. Takens

P.C. Hu and C.C. Yang

Differentiable and complex dynamics of several variables

(Mathematics and its applications; 483)

Dordrecht: Kluwer, 1999

338 p., prijs €117,07

ISBN 0-691-00498-6

The book is basically an extensive survey on Fatou-Julia type of theory in complex manifolds and gives an advanced account of dynamical system theory in the framework of differential geometry and analysis. The authors make extensive use of real and complex manifold theory to study and analyse these Fatou-Julia type of problems. In particular the basic results of ergodic theory and differential dynamics for real manifolds are formulated and exploited to reach a unifying approach. Some new concepts of invariant sets are introduced as basic instruments to find relationships between the Julia or Fatou set and the hyperbolic sets. Criteria for the non emptiness of the Julia sets of continuous mappings on compact manifolds are derived as well as the existence and quantitative measure of the fixed points of holomorphic mappings on $\mathbb{C}^n$. Furthermore the relationship between the topological and analytic descriptions of repulsive or attractive cycles are given.

The book consists of seven chapters *Fatou-Julia type theory*. Normality and equicontinuity are used to obtain Fatou sets and Julia sets; criteria are derived for the non-emptiness of Julia sets of continuous mappings on compact manifolds. *Ergodic theorems and invariant sets*. The basic notations and theorems in ergodic theory are introduced; Relations between invariant sets and some quantities similar to entropies are established. *Hyperbolicity in differen-*

table dynamics. Julia sets are compared with nonwandering sets, chain recurrent sets and hyperbolic sets. *Some topics in dynamics*. Topics related to Fatou-Julia type theory, in particular Hamiltonian systems, linearization and L_p -normality are treated. *Hyperbolicity in complex dynamics*. Metrization problems are considered, Kobayashi hyperbolicity, Tautness and tightness and Julia sets of meromorphic mappings. *Iteration theory on $\mathbb{P}^m$* . The Fatou-Julia theory on $\mathbb{P}^m$ following Fornæss and Sibony is introduced. *Complex dynamics in $\mathbb{C}^n$* . Here Fatou-Julia theory is introduced on $\mathbb{C}^n$, special problems are considered and a fixed point theorem is proven.

The appendices containing the basic concepts and techniques used in the book are concerned with foundations of differentiable dynamics and foundations of complex dynamics.

The book is a careful well written text and presents an up-to-date survey of the theory. It is an advanced account of the theory which is of interest to graduate students and researchers in global analysis, complex manifolds and dynamical theory. Moreover the authors formulate several open problems in this area. The work is selfcontained and has an extensive bibliography on the subject. It may be regarded as a standard reference work in the subject.

P. Dhooghe



T. Kool

Kratpoint. Een verhaal over wiskunde, tennis en bier.

Deel 1: Kunnen konijnen tennissen?

Leeuwarden: Eisma, 2000

158 p., ISBN 90-75482-24-8

Als lid van de Pensioen- en Verzekeringskamer was Ton Kool een belangrijk man die zijn liefde voor de wiskunde manifesteerde door dit boekje bij zijn pensionering aan velen cadeau te doen. Het boek zelf is leuk maar niet echt belangrijk. Naar aanleiding ervan zal ik enkele opmerkingen maken over de popularisering van ons vak.

Allereerst iets over het boekje zelf. Het is een fraai uitgevoerd werkje, waarin de auteur met medewerking van Arjan van Dalen op onderhoudende wijze vertelt over een onderwerp uit de combinatoriek. Hij was daarbij geïnspireerd door de tennissport en, in verband daarmee, met opgave 46 van A.J. Bosch in Statistica Neerlandica 1977. Het is aardig op te merken dat zowel de heer Bosch als de heer Kool houden van woordspelletjes. Zo gaf de eerste zijn tekst over variantie-analyse als titel mee *Bosch ANOVA*. Hij verwees hiermee naar de lichtvoetige wijze waarop hij zijn studenten naar de dansvloer leidde. De titel *Kratpoint* op zijn beurt is door Kool bedacht als verbastering van het woord 'Matchpoint' en van het kratje bier dat de winnaar mag ledigen — hopelijk samen met de overwonnenen, in het belang van beiden.

De genoemde opgave 46 gaat over twee tennissers A en B . De kans dat A een slagenwisseling wint is p en voor B is die kans $q = 1 - p$. Gevraagd wordt de kans dat A de game wint. Het antwoord hierop luidt $p^4(1 + 2q)(1 + 4q^2)/(p^2 + q^2)$, maar voor de afleiding hiervan moet worden gewacht op *Kratpoint deel 2* (behalve voor het geval $p = q = 1/2$). Wel worden allerlei com-

binatorische voorbereidingen getroffen voor deze en voor diverse algemenere situaties. Van mij hoort U niets dan lof over de leuke wijze waarmee Ton Kool met zulke zaken bezig is. Als voorbeeld hiervan wijs ik naar de bijzonder aardige manier waarop hij ons vertelt over de wortels van een derdegraadsvergelijking. Hiermee hoop ik ook voldoende onderbouwd te hebben dat het boekje wel leuk maar niet echt belangrijk is.

Het is natuurlijk verheugend dat de wiskunde ook aan een algemeen publiek wordt gepresenteerd. Het door Kool behandelde probleem wordt, bijvoorbeeld, ook uitvoerig besproken door wetenschapsjournalist Hans van Maanen onder de titel *Waarom Boris wint*. Wat de statistiek betreft is popularisering wellicht minder nodig: de kranten puilen uit van de statistische uitspraken. Naast verheugenis over de belangstelling voor wiskunde en statistiek zijn er ook enkele bedenkingen. Ik zou die als volgt willen formuleren: popularisering kan leiden tot trivialisering en tot ridiculisering. Wat de statistiek betreft hebben wij wat deze gevaren aangaat ons aandeel wel gehad. Ik verwijs slechts naar de bekende uitspraak van Gladstone dat er leugens zijn, vervloekte leugens, en statistieken. Maar ook de wiskunde ontkomt niet aan deze gevaren als men, zoals ik, enthousiast is over bijvoorbeeld zo'n verhaal als dat van Ton Kool over het oplossen van de derdegraadsvergelijking. Dit 'oplossen' betekent alleen maar dat de 'oplossing' van $x^3 + px = q$ in verband wordt gebracht met 'oplossingen' van andere eenvoudiger tweede- en derdegraadsvergelijkingen, namelijk die van $y^2 = a$ en $z^3 = b$. Om die dan weer op te lossen moet men zich in het algemeen behelpen met numerieke benaderingen die, als het goed is, een bovengrens en een ondergrens leveren voor de 'werkelijke' oplossing. De indruk zou kunnen worden gewekt dat de zuiver wiskundige enkel bezig is met het transformeren van het een in het ander zonder zich met de concrete werkelijkheid te bekommeren. De toegepast wiskundige moet dan maar het vuile rekenwerk opknappen.

Bij Ton Kools formulering van de opgave is op heel eenvoudige wijze aan te geven waarom het eigenlijk slechts gaat om theorie, niet om iets echts. Wat is namelijk de precieze betekenis van p en q ? Hoe groot zijn ze precies, hoe zou je ze moeten schatten. Hoe zou je een tenniswedstrijd moeten organiseren opdat met zo weinig mogelijk slagenwisselingen op verantwoorde wijze een uitspraak kan worden gedaan over de hypothese dat $p > q$. Moeten we misschien rekening houden met wie serveert en wie ontvangt?

De wiskunde en de statistiek zijn Kool veel dank verschuldigd voor zijn alleraardigste boekje. W. Schaafsma



J. von zur Gathen en J. Gerhard

Modern computer algebra

Cambridge: Cambridge university press, 1999

754 p., prijs £29.95

ISBN 0-521-64176-4

Dit boek biedt een uitstekende breed georiënteerde toegang tot de computeralgebra. Zelf positioneren de schrijvers hun werk aldus: numerieke analyse richt zich op benaderingen, computeralgebra daarentegen richt zich op het ontwerpen van algoritmen teneinde

exacte oplossingen te verkrijgen. In meer detail richten zij zich in hun boek op het ontwerpen en bespreken van algoritmen in verscheidene contexten met nadruk op degelijke wiskundige onderbouwingen, asymptotische analyse van de gepresenteerde algoritmen en snelle algoritmen. Zelf geven ze al toe dat deze doelen bij sommige onderwerpen iets te hoog gegrepen zijn. De auteurs hebben evenwel een gedegen, uitvoerig werk geschreven waarbij ze naast de wiskunde en de algoritmen (inclusief voorbeelden en opgaven) het boek hebben verluchtigd en in context hebben geplaatst met historische inleidingen, citaten, foto's en aantekeningen.

Het boek is, afgezien van een inleidend hoofdstuk en een appendix, opgedeeld in vijf delen, elk genoemd naar een wiskundige die (mede) aan de basis van het besprokene heeft gestaan: *Euclides*, *Newton*, *Gauss*, *Fermat* en *Hilbert*. De delen zelf zijn weer opgesplitst in hoofdstukken en paragrafen; ze eindigen met een kort hoofdstuk over toepassingen. Het inleidende hoofdstuk fungeert als smaakmaker: het stipt de rol van computeralgebra aan bij de ruimtelijke structuur van cyclohexaan (C_6H_{12}), bij codes en het RSA-cryptosysteem. Verder bevat het een korte bespreking van de diverse beschikbare computeralgebrapakketten. In de appendix zijn de belangrijkste zaken over de benodigde basisbegrippen uiteengezet en is ook een paragraaf over complexiteitstheorie opgenomen.

In het deel *Euclides* staat het Euclidische algoritme in diverse domeinen en in diverse verschijningsvormen centraal. Algoritmen gaan vergezeld, zoals in het hele boek, van een kostenanalyse, niet helemaal in detail, maar gericht op de orde van grootte. Aan het eind van dit deel wordt als toepassing het decoderen van BCH-codes beschreven.

In het deel *Newton* is het kernwoord snel. Enkele relevante termen zijn (in het Engels, er zijn geen ingeburgerde Nederlandse equivalenten): fast multiplication, fast Fourier transform, fast polynomial evaluation, fast Euclidean algorithm, fast linear algebra. De naam Newton vinden we terug in het hoofdstuk Newton iteration. Het deel eindigt met een bespreking van beeldverwerking.

Factoriseren van polynomen komt in het deel *Gauss* ter sprake. Het tweede gedeelte van *Gauss* is gewijd aan het vinden van kort(st)e vectoren in roosters (LLL-algoritme). Het deel eindigt met verscheidene toepassingen.

Fermat behandelt priemtesten en factorisatiealgoritmen voor gehele getallen. Als toepassing worden cryptosystemen besproken, van RSA tot systemen gebaseerd op elliptische krommen.

Het deel *Hilbert* ten slotte behandelt Gröbnerbases, symbolische integratie, symbolische sommatie en enkele toepassingen.

De auteurs hebben geweldig veel werk verzet, maar zich vanwege de verscheidenheid aan onderwerpen uiteraard wel eens moeten beperken. Het hoofdstuk Symbolic integration is bijvoorbeeld kort en bespreekt enkel het integreren van rationale functies. Meer spectaculaire integranden (logaritmen en e -machten) komen niet aan bod. De schrijvers onderhouden verder een internetpagina voor het boek. Daar staan onder meer de oplossingen van een aantal opgaven.

Het boek is toegankelijk voor hogerejaars studenten, goed geschikt om bij een college te gebruiken en plezierig om als naslagwerk te hebben. Kortom, zeer aanbevolen.

H. Sterk



V.V. Buldygin and A.B. Kharazishvili
**Geometric aspects of probability
 theory and mathematical statistics**

(*Mathematics and its applications*; 514)

Dordrecht: Kluwer, 2000

303 p., prijs NLG 235,-

ISBN 0-7923-6413-9

In de inleiding van dit boek spreken de auteurs de wens uit dat hun werk "vividly demonstrates [...] interactions between the following three fundamental concepts: quasicompactness, convexity and measurability".

Hiertoe worden in het eerste hoofdstuk bekende begrippen en resultaten uit de theorie van convexe verzamelingen in vectorruimten over $\mathbf{R}$ besproken, waaronder de stelling van Hahn-Banach, convexe lichamen, polyhedra, de Minkowski support-functie, en de stellingen van Krein-Milman en Carathéodory. Eindig-dimensionale topologische vectorruimten, isomorf met $\mathbf{R}^n$ zijn het onderwerp van hoofdstuk 2. De Hausdorffmetriek, de selectiestelling van Blaschke en de Brunn-Minkowskistelling passeren de revue. Voor de toepassingen in de waarschijnlijkheidsrekening die later in het boek aan bod komen, is vooral de integraalongelijkheid van Anderson van belang. Na een kort intermezzo (klassieke convexe meetkunde) is hoofdstuk 5 gewijd aan oneindig-dimensionale topologische vectorruimten, met name aan de ruimte $\mathbf{R}^N$ en haar deelruimte l_∞ der begrensde rijen.

In de tweede helft van het boek verschuift het zwaartepunt naar de kansrekening. Na twee overzichtshoofdstukken over moderne waarschijnlijkheidsrekening op topologische vectorruimten uit maattheoretisch oogpunt — waaronder de uitbreidingsstelling van Carathéodory, het begrip Radonmaat en de stelling van Ulam, alsmede convergentiebegrippen voor stochastische 'variabelen' — wordt in hoofdstuk 8 de topologische structuur bestudeerd van de drager van Borelmaten op metrische ruimten.

Vervolgens besteden de auteurs aandacht aan Borelmaten op topologische vectorruimten die quasi-invariant zijn onder translaties, de theorie van Haar maten, en aan operaties om nieuwe ruimten met quasi-invariante maten te construeren uit bekende ruimten. In hoofdstuk 10 wordt unimodaliteit in de zin van Anderson gedefinieerd voor kansmaten op een topologische vectorruimte, en vergeleken met de bekendere definitie van Khinchin voor symmetrische kansmaten op $\mathbf{R}$. Speciale aandacht gaat uit naar Gaussische kansmaten op $\mathbf{R}^N$. In het volgende hoofdstuk wordt de link gelegd naar de uitbreiding van kansmaten op l_∞ en de oscillatie van (Gaussische) stochastische processen. Ook voor het ordenen van Gaussische processen op basis van hun covariantiefunctie blijkt de ongelijkheid van Anderson een belangrijk technisch hulpmiddel.

Het laatste hoofdstuk behandelt het probleem uit de mathematische statistiek om een stochastisch proces op een Poolse vectorruimte te schatten op basis van het waarnemen van een ander proces. Onder normaliteitsaannamen wordt bewezen dat voor een convexe verliesfunctie de voorwaardelijke verwachting van het te schatten proces de optimale schatter is, een bewering die ook geldt voor niet-Gaussische processen als men het criterium van de verwachte kwadratische fout hanteert.

Het boek lijkt vooral geschreven voor stochastici met belang-

stelling voor convexe meetkunde. De benodigde concepten uit de theorie van convexe verzamelingen worden in de eerste helft van het boek op heldere wijze uiteengezet. Ook hebben de auteurs veel aandacht besteed aan een zorgvuldige bewijsvoering en de interactie tussen meetbaarheid en topologische structuur. Al met al van harte aanbevolen voor de doelgroep. *M.N.M. van Lieshout*

H. Schlichting and K. Gersten

Boundary layer theory (8th revised and enlarged edition)

Berlin: Springer-Verlag, 2000

799 p., prijs €91,52

ISBN 3-540-66270-7

Tot aan het begin van de 20e eeuw begreep men niet waarom je door een harde windvlaag zomaar omver geblazen kon worden. Er werd namelijk gedacht dat een beschrijving van een luchtstroming op basis van potentiaaltheorie redelijk nauwkeurig zou moeten zijn, en reeds halverwege de 18e eeuw had d'Alembert aangetoond dat een voorwerp geplaatst in een potentiaalstroming geen kracht ondervindt. Een kennelijke tegenspraak met de ervaring van alledag! In 1904 gaf Ludwig Prandtl de verklaring: viscositeit veroorzaakt vlak langs het oppervlak van een omstroomd voorwerp een (uiterst) dunne grenslaag, waar de stroming door de wrijving met het oppervlak wordt afgeremd. Deze ontdekking heeft een revolutie in de stromingleer teweeg gebracht. Reeds enige jaren later werd aangetoond hoe de nauwelijks zichtbare grenslaag de potentiaalstroming fors beïnvloedt, waarmee uiteindelijk d'Alembert's paradox kon opgelost.

Het voor ons liggende boek beschrijft deze grenslagen. De eerste editie is geschreven in 1950 door Hermann Schlichting, een leerling van Prandtl. Gersten (op zijn beurt een leerling van Schlichting) heeft in 1996 het boek helemaal bijgewerkt. Ik schets de belangrijkste veranderingen.

In de eerste hoofdstukken is hier en daar wat bijgevoegd of weggelaten; zo heb ik met enige weemoed moeten constateren dat Pohlhausen's methode (uit 1921) om met een vierde-orde polynoom een grenslaagprofiel te benaderen niet meer is opgenomen in het boek. De hoofdstukken over thermische grenslagen zijn al meer herzien, en het hoofdstuk over stroming bij hoge viscositeit is volledig weggelaten (maar dat is dan ook geen grenslaagstroming). De hoofdstukken over turbulente grenslagen zijn volledig opnieuw samengesteld. Het zal geen verbazing wekken dat in de nieuwe editie veel aandacht wordt besteed aan het modelleren van turbulentie, terwijl in de vorige edities voornamelijk uitgebreid over specifieke experimenten gesproken kon worden. Twee nieuwe hoofdstukken gaan over de ontwikkelingen die de laatste dertig jaar hebben plaatsgevonden bij de asymptotische beschrijving van grenslagen (triple-deck theorie, enz.), en bij het numeriek oplossen van de grenslaagvergelijkingen.

Met enige nationale trots kan gemeld worden dat in deze herziene editie verwezen wordt naar 19 Nederlandse publicaties; beduidend meer dan in de vorige edities, en aangevend dat in Nederland de afgelopen decennia belangwekkend onderzoek is verricht aan stromingen bij lage viscositeit.

Al met al geeft de nieuwe editie een groots overzicht van een eeuw grenslaagonderzoek. 'Schlichting' was en is HET boek over grenslagen: generaties ingenieurs zijn ermee opgegroeid, en na deze upgrade kan het weer generaties mee. *A.E.P. Veldman*

G. Kallianpur and R.L. Karandikar

Introduction to option pricing theory

Basel: Birkhäuser Verlag, 1999

280 p., prijs €65,45

ISBN 0-8176-4108-4

This is a book for mathematicians written by mathematicians. It gives a very nice but very mathematical treatment of the theory of option pricing. I always wonder what the added value of a book on option pricing is since lately so many books appear on this topic. The added value of this book is that it is very sound mathematically and also the probabilistic theory on stochastic integration, (local/semi) martingales is outlined to make the book self-contained. This is probably also the only added value of the book: not many practitioners will find a new source of inspiration from the book.

As I said, mathematically the book is very nice. An example is chapter 8 where necessary and sufficient conditions for the 'no-arbitrage' property are derived: the equivalent martingale measure (or some variant). This is done for a very wide class of stock price process (only assumption is that processes are cadlag: right-continuous with existing left-limits). Even Orlicz spaces are used to get economically meaningful conditions on the stock price processes such that they satisfy the existence of an equivalent martingale measure.

The book is interesting for mathematics and perhaps economics student with a firm background in measure theoretic probability theory and preferably also a background in functional analysis. The book is also interesting for mathematics academics who would like to see where different field of mathematics meet in an applied topic.

The first five chapters of the book are devoted to probabilistic tools necessary in developing the option pricing theory: stochastic integration, Itô's formula, representation theorems for square integrable martingales, SDE's and Girsanov's theorem. Chapters 6 and 11 explain option pricing in discrete time and discrete approximations. My opinion is that chapter 11 is redundant in this book. Chapters 7–10 describe the continuous-time trading Black-Scholes world plus some additional stock price models in chapter 8. The last three chapters in the book study some exotic topics: American and Russian options, and stochastic volatility models.

F. Boshuizen

schrijving van de levensloop en de contributies op het gebied van de stromingsleer van tal van beroemdheden.

Er is sprake van een duidelijke structuur. Een begrip wordt behandeld via een korte theoretische introductie, geïllustreerd door filmpjes en soms ook een interactief laboratorium. De filmpjes bevatten zowel experimentele resultaten als ook resultaten van numerieke stromingssimulaties. Een installatie van de inhoud van de CD-ROM op de harde schijf van de computer is aan te bevelen. De korte pauzes, die optreden als er weer verse data wordt geladen, worden op die manier beperkt dan wel voorkomen.

Dat de CD-ROM uitermate geschikt is voor beginners op het gebied van de stromingsleer blijkt bijvoorbeeld uit de uitgebreide behandeling van het verschil tussen een Eulers coördinatenstelsel en een Lagrangiaans coördinatenstelsel. Ook andere begrippen uit de stromingsleer alsmede eigenschappen van stromingen worden vrij uitgebreid geïntroduceerd. Daarbij kan men denken aan de continuüm hypothese voor veeldeeltjessystemen, effecten van viscositeit enz. Weer andere begrippen, zoals turbulentie en transitie worden op een meer aanschouwelijke manier geïntroduceerd. Diepere theoretische achtergronden worden niet behandeld. Deze vallen buiten het kader van de CD-ROM.

Door de aanwezigheid van menu's, submenu's enz. is het mogelijk heel snel door de inhoud van de CD-ROM te 'bladeren' om uiteindelijk met een paar klikken op de muis op de plaats van bestemming te komen. Eén overeenkomst tussen de oude en de nieuwe media blijft. De CD-ROM is niet geheel vrij van typefouten. In het kinematica hoofdstuk wordt bijvoorbeeld een aantal maal q en θ door elkaar gebruikt. Tevens gebeurt het af en toe dat een formule dwars door de tekst heen verschijnt. Dit laatste kan natuurlijk computerafhankelijk zijn. Ten slotte was het op mijn computer niet mogelijk in het historische overzicht de levensloop van von Kármán op te roepen.

De CD-ROM is voor de PC bezitter die geïnteresseerd is in stromingsmechanica een echte aanrader. Ze geeft een goede introductie in tal van begrippen uit deze wereld. Een boekje met een beschrijving van de inhoud wordt niet noodzakelijk, maar zou een welkome aanvulling zijn. De verpakking is groot genoeg!

J. Wissink

U. Franz and R. Schott

Stochastic processes and operator calculus on quantum groups

(Mathematics and its applications)

Dordrecht: Kluwer, 1999

234 p., prijs €84,85

ISBN 0-7923-5883-X

In de niet-commutatieve wiskunde, die steeds meer in de mode komt, begint men met een verzameling met een zekere structuur, en men dualiseert vervolgens deze structuur in termen van een geschikte ruimte van functies op de verzameling. Deze functies vormen een commutatieve algebra onder de operatie van puntsgewijze vermenigvuldiging, zodat men een puur algebraïsche interpretatie van de oorspronkelijke structuur verkrijgt. Tenslotte kijkt men in hoeverre het mogelijk is deze algebraïsche beschrijving ook te laten gelden voor een niet-commutatieve algebra.

De duale beschrijving van een groep gebeurt zoals bekend in termen van een Hopf-algebra, en de duale beschrijving van een



Multi-Media Fluid Mechanics

Cambridge: Cambridge university press, 2000

prijs £14,95

ISBN 0-521-78748-3

Deze engelstalige CD-ROM is in eerste instantie bedoeld als aanvulling bij colleges in de stromingsmechanica. Een veelheid van begrippen uit de dynamica, kinematica en grenslaagtheorie wordt behandeld. Daarnaast is er een bibliotheek met een schat aan filmpjes en bevat de CD-ROM een historisch overzicht met een be-

stochastisch proces gaat met een door de tijd t geïndiceerde familie van *-homomorfismen tussen twee *-algebras waarop een voorkeurstoestand (in de zin van een genormaliseerde positieve lineaire functionaal) is gedefinieerd; in het commutatieve geval zijn deze algebras van de vorm $L^\infty(\Omega, F)$, waar (Ω, F, P) een kansruimte is, en de toestand de verwachtingswaarde is ten opzichte van de waarschijnlijkheidsmaat P . De laatste gebied heet *quantum probability*. Merk op dat de tijd een 'commutatieve' parameter blijft!

In het onderhavige boek worden deze twee ideeën gecombineerd; het onderliggende commutatieve geval bestaat dus uit stochastische processen op een groep. Het gaat hier uiteraard om de wisselwerking tussen beide structuren. De niet-commutatieve versie werd voor het eerst door M. Schürmann in 1993 onderzocht. De auteurs zijn respectabele figuren op dit gebied. Het blijkt dat vrijwel alles wat in het commutatieve geval gedaan kan worden inderdaad een niet-commutatieve versie heeft. Zo kunnen we lezen over niet-commutatieve onafhankelijkheid, Lévy processen, Feynman-Kac formules, Appell polynomen, diffusie, Brownse beweging, Gaussische processen, centrale limietstellingen, enzovoort. A propos onafhankelijkheid: de auteurs definiëren deze in de zin van tensorproducten, hetgeen niet de enige mogelijkheid is; dikwijls worden de definities van een niet-commutatieve theorie niet geheel voorgeschreven door het commutatieve geval. Zo bestaat ook Voiculescu's 'vrije' begrip van onafhankelijkheid, dat momenteel zeer in de aandacht staat en tot diepe resultaten heeft geleid.

Het boek richt zich klaarblijkelijk op stochastici die niet veel weten van Hopf-algebra's en quantum groepen, waartoe een uitvoerige inleiding wordt gegeven; zo worden bijv. zowel Lie groepen als gevlochten categorieën gedefinieerd. Als zodanig is het boek bijzonder duidelijk en met zorg geschreven, en leidt het ook vrijwel tot het 'front'. Omgekeerd zullen beginners in de stochastiek die goed op de hoogte zijn van quantum groepen niet veel aan het boek hebben. In ieder geval is het een erg specialistisch onderwerp, waarvan de wiskundige waarde en diepgang mijns inziens nog moet worden aangetoond.

K. Landsman

cetera. For most interest rate derivatives the final payoff usually depends on a large number of these rates and the future developments of these rates are definitely not independent from each other. Hence, to value the derivative one has to model all these interest rates consistently. This makes the valuation of interest rate derivatives much more complicated than options on stocks or foreign exchange rates.

In this book the author gives a nearly complete overview of the models developed over time, starting from the original Vasicek model from 1976 to the most recent developed models, known as Swap or Libor market models.

The book is split in two parts. In the first part the so-called spot and forward rate models, such as the Hull-White and Heath-Jarrow-Morton models are described. Most of this is quite standard. The second part is definitely the most interesting part since popular market models are described. These models are all based on the application of martingale theory for finance. As a nice service to the reader the author gives the most essential elements of martingale theory in his first chapter, necessary to understand the application in financial theory.

The book is very well written and definitely worth reading for anyone interested in the pricing of interest rate derivatives. The book clearly reflects a combination of academic background and practical experience. This is due to the fact that the book grew out of the thesis of the author, which was written while the author was working as a modeller at ABN AMRO bank. Hence, the book not only describes theoretical models, but also the way in which the models should be calibrated to market data and implemented in order to be of use for valuing interest rate derivatives. This means that there is room for the description of the econometric estimation techniques and the numerical computation issues, which are given with an open eye for the practical applicability. Especially these features make the book very valuable.

T. Vorst



A. Pelsser
Efficient methods for valuing interest rate derivatives

(Springer finance)
Berlin: Springer-Verlag, 2000
172 p., prijs £64.95
ISBN: 1-85233-304-9

This book describes the state of the art in pricing interest rate derivatives. Theoretical developments in pricing options on interest rates started much later than in pricing options on stocks, since pricing interest rate options is definitely more complicated. In valuing an option on a single underlying stock one does not have to consider the future evaluation of the prices of other stocks, but can simply consider only the evolution of the single underlying stock. This is due to the fundamental work of Black, Scholes and Merton. However, each moment in time there are infinitely many different interest rates, such as the 1-month interest, 3 month, 6 month et



Ding-Zhu Du and P.M. Pardalos
Handbook of combinatorial optimization

Dordrecht: Kluwer, 1998
2400 p., prijs NLG 2450,-
ISBN 0-7923-5018-9

Combinatorische optimalisering is een actief onderzoekgebied op het snijvlak van de operations research en de theoretische informatica, met vele toepassingen op allerlei terreinen. De literatuur is zeer omvangrijk: vele tijdschriften en talloze boeken. Het is ondoenlijk dit materiaal samen te vatten in een handboek, zelfs al bevat dit handboek drie dikke delen met in totaal 2400 pagina's. Welke keuzes kun je dan zinvol maken bij het samenstellen van een handboek?

North-Holland heeft in haar serie Handbooks in Operations Research and Management Science gekozen voor een thematische aanpak. Zo zijn er het zesde en zevende deel over respectievelijk Network Routing en Network Models. Kluwer heeft gekozen voor een andere benadering. De editors schrijven: "We have tried to bring together almost every aspect of this enormous field with

emphasis on recent developments". Men wil dus de recente ontwikkelingen van het brede vakgebied van de combinatorische optimalisering in dit handboek beschrijven. De artikelen kunnen als volgt worden ingedeeld. Er zijn acht wat langere overzichtsartikelen *Knapsack problems* (door Pisinger en Toth) Knapsack problemen zijn de eenvoudigste NP-moeilijke problemen: naast de doelfunctie slechts één beperking. Dit hoofdstuk geeft een up-to-date overzicht met aandacht voor zowel theoretische als experimentele resultaten. *Interior point methods for combinatorial optimization* (door Mitchell, Pardalos en Resende) Hierbij wordt een discrete verzameling, wat een combinatorisch object is, benaderd als een limiet van continue objecten en worden meetkundige eigenschappen van de continue ruimte benut. Een interessant hoofdstuk over recente research. *Applications of set covering, set packing and set partitioning models: a survey* (door Vemuganti) Dit zijn speciale gevallen van combinatorische optimalisering. Ze komen onder andere voor in scheduling-, locatie- en routeringsproblemen. De nadruk van deze bijdrage ligt op de modellering en niet op de oplossingsmethoden. *Resource allocation problems* (door Katoh en Ibaraki) Hierbij wordt gezocht naar een optimale allocatie van een gegeven aantal resources aan activiteiten zodanig dat een kostenfunctie (in het algemeen niet-lineair) wordt geminimaliseerd. De auteurs hebben in 1988 een boek over dit onderwerp gepubliceerd. In hun bijdrage aan dit handboek ligt de nadruk op de voortgang van het onderzoek gedurende de negentiger jaren. *Optimization applications in the airline industry* (door Yu en Yang) In de luchtvaartindustrie spelen vele optimaliseringsproblemen. In dit hoofdstuk wordt een aantal toewijzings-, scheduling- en verkeerscontroleproblemen besproken, waarbij het accent vooral op de modellering ligt. *A review of machine scheduling: complexity, algorithms and approximability* (door Chen, Potts en Woeginger) In *Handbooks in Operations Research and Management Science*, Volume 4 (1993), staat een uitstekend overzichtsartikel over scheduling, geschreven door Lawler, Lenstra en Rinnooy Kan. Het overzicht van Chen, Potts en Woeginger is eveneens van prima kwaliteit en bespreekt ook de recente technieken zoals local search, simulated annealing, tabu search en genetische algoritmen. *The quadratic assignment problem* (door Burkard, Aela, Pardalos en Pitsoulis) Dit klassieke model van het optimaal toewijzen van faciliteiten aan locaties, met als kosten een functie van de onderlinge afstand en de verkeersstroom ertussen, wordt uitvoerig besproken. Zowel exacte methoden (branch and bound) als heuristieken worden besproken. Het is een goed overzichtsartikel. *Tabu search* (door Glover en Laguna) In 137 pagina's wordt het onderwerp tabu search besproken. Dit hoofdstuk is in feite een beknopte versie van hun boek *Tabu Search*, dat in 1997 — ook bij Kluwer — is verschenen.

Naast deze overzichtsartikelen zijn er meer researchachtige artikelen, 25 in totaal. Zij zijn van uiteenlopende kwaliteit. Een mooie bijdrage is het artikel van Bertsimas en Ye (Semidefinite relaxations, multivariate normal distributions and order statistics), waarin ze met randomizatietechnieken gebaseerd op de multivariate normale verdeling 0.878-approximaties verkrijgen voor diverse combinatorische problemen. Ze borduren hiermee voort op het werk van Goemans en Williamson. Verder zijn er drie artikelen over niet-lineaire combinatorische problemen, één over het Satisfiability probleem (het eerste NP-volledige probleem), vier over minimale Steiner-bomen (zonder wederzijdse verwijzingen), twee over parallelle algoritmen, twee over dominerende verza-

melingen in grafen, twee over het kleuren van grafen, één over speltheorie en combinatorische optimalisering en een aantal over toepassingen, bijvoorbeeld clustering, dynamische systemen, optische netwerken.

Je zou verwachten dat de editors enige redactionele sturing geven aan de inhoud van een dergelijk omvangrijk werk. Daar is weinig van te merken. Het handboek bevat 33 artikelen, variërend van 20 tot 170 pagina's. De volgorde van de artikelen is — in ieder geval voor de recensent — eigenaardig. Per deel lijkt gekozen te zijn voor een alfabetische volgorde van de auteurs, maar in het derde deel wordt daar weer vanaf geweken. Ook is er per deel geen samenhang tussen de artikelen te ontdekken. Dit alles maakt het handboek tot een ratjetoe. Het is een bundeling van een aantal artikelen over onderwerpen uit de combinatorische optimalisering. Van een handboek mag je meer verwachten. De samenstellers hebben als lezers "not only researchers in discrete optimization, but all scientists who use combinatorial optimization methods to model and solve problems" op het oog. Zowel de rommelige inhoud, maar zeker ook de extreem hoge prijs (een gulden per pagina!) nodigen niet uit tot aanschaf. Dat is jammer voor de enkele mooie bijdragen die er in dit handboek zeker staan.

L. Kallenberg

UWC

Universitaire Wiskunde Competitie

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina <http://academics.its.tudelft.nl/uwc>

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Per nummer worden twee prijzen van 100 Euro toegekend: één aan de aanvoerder van de ladder (die daarna weer onderaan begint), en één aan de inzender van de oplossing die de meeste punten behaald heeft (die dan geen punten voor de ladder krijgt). Daarnaast zal twee maal per jaar een ster-opgave worden aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend. Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in $\text{\LaTeX}$ wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 mei 2002. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

Eindredactie: Jan van Neerven
Redactieadres: Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
j.vanneerven@its.tudelft.nl

De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.

Opgave A

Zij $f(t)$ een monisch polynoom in de variabele t van oneven graad n en met gehele coëfficiënten; we nemen bovendien aan dat $f(0) = -1$. Zij p een priemgetal. Bewijs dat $f(t^2)$ *reducibel* is modulo p , dat wil zeggen, er bestaan niet-constante monische polynomen $g(t)$ en $h(t)$ zodanig dat: $f(t^2) = g(t)h(t)$ modulo p .

Opgave B

Bewijs dat op de kubus van Rubik niet drie hoeken kunnen worden verwisselend door met slechts twee zijvlakken te draaien.

Opgave C

Bewijs dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \log n}{\log \log n} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{n/2} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx = 1.$$

Hierin stelt $\log \log n$ de geïtereerde natuurlijke logaritme voor.

Ster-opgave

Voor $n = 1, 2, 3, \dots$ definiëren we de functies $\phi_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ door

$$\phi_n(x) := (2n)^x - (2n-1)^x + (2n-2)^x - (2n-3)^x + \dots + 2^x - 1^x.$$

Bewijs of weerleg dat voor alle $x \in \mathbf{R}$ en voor alle $n = 1, 2, 3, \dots$ geldt dat:

1. $\phi'_n(x) > 0$;
2. $\phi''_n(x) > 0$.

Hoe zit het met de hogere afgeleiden?

Editie 2001/3

Op de ronde 2001/3 van de Universitaire Wiskunde Competitie ontvingen we 7 inzendingen. Tot dusver hebben we geen oplossingen van de ster-opgave ontvangen.

Opgave 2001/3-A

Toon aan dat voor alle positieve gehele n er een permutatie $a_1, a_2, \dots, a_n$ van $1, 2, \dots, n$ bestaat zo dat $a_j \mid \sum_{i=1}^j a_i$ voor alle $j = 1, \dots, n$. Voorbeeld: voor $n = 9$ is 8 4 3 5 1 7 2 6 9 een dergelijke permutatie. Bepaal zoveel mogelijk (oneindige) series van dergelijke permutaties.

Oplossing De volgende uitwerking is gebaseerd op de oplossingen van Roelof Oosterhuis (deel 1) en het team Steven Delvaux/Hendrik Hubrechts (deel 2).

Deel 1 Voor $n = 2k$ nemen we

$$\begin{cases} a_{2i} &= i \\ a_{2i-1} &= i+k \end{cases} \quad \text{voor } i = 1, \dots, k.$$

Zo verkrijgen we rijtjes $a_1, \dots, a_{2k}$ van precies de getallen $1, \dots, 2k$. Dit geeft als sommen $s_j = \sum_{i=1}^j a_i$. Met inductie vinden we:

$$\begin{cases} s_{2i} &= i(i+k+1) \\ s_{2i-1} &= i(i+k) \end{cases} \quad \text{voor } i = 1, \dots, k.$$

UWC

oplossingen

Er geldt dus voor zowel even als oneven a_j dat $a_j | s_j$. Voor $n = 2k + 1$ kiezen we dezelfde serie als voor $n = 2k$, alleen voegen we het element $a_{2k+1} = 2k + 1$ toe. Er geldt nu opnieuw dat $a_{2k+1} | s_{2k+1}$.

Deel 2 We geven een methode waarmee oneindig veel series kunnen worden gegenereerd. We maken gebruik van de notatie zoals we die hierboven hebben geïntroduceerd:

$s_j = \sum_{i=1}^j a_i$. Stel $s_j = a(b-1)$, dan kunnen de elementen

$$\begin{cases} a_{j+2i-1} = a + i - 1 \\ a_{j+2i} = b + i - 1 \end{cases} \quad \text{voor } i \geq 1$$

worden gekozen zolang er geen dubbele elementen optreden, want immers

$$\begin{cases} s_{j+2i-1} = (a+i-1)(b+i-1) \\ s_{j+2i} = (a+i)(b+i-1) \end{cases} \quad \text{voor } i = 1, \dots, k,$$

hetgeen de deelbaarheid bewijst.

Kiezen we nu $a = k + 1$ en $b = 1$, dan hebben we de serie van opgave A1. Voor het zoeken naar andere series blijkt het handiger te zijn om bij a_n te beginnen en vanaf daar de lijst omlaag aan te vullen. We gaan één of meerdere elementen invoegen. We gebruiken de notatie $T(a_1^{k_1}, \dots, a_r^{k_r})$ om aan te geven dat de getallen $a_1, \dots, a_r$ worden ingevoegd. De exponenten geven de positie van de invoegingen aan, van achteren af geteld. Dus $T(6^1)$ wil zeggen dat op de laatste positie een 6 wordt geplaatst, en $T(1^2, 3^4, 5^6)$ houdt in dat 3 elementen achter in de serie zijn ingevoegd. De notatie $T(0^k)$ houdt in dat op die plaats de regelmatigheid van het om en om plaatsen van grote en kleine getallen wordt verstoord. Bijvoorbeeld $T(0^3)$ houdt in voor $n = 2k$, even dat $a_{2k} = k$, $a_{2k-1} = 2k$ zoals in opgave A1, echter $a_{2k-2} = 2k - 2$ in plaats van $a_{2k-2} = k - 1$. In dit geval wordt $2k - 1$ overgeslagen. Dit element moet ergens voorin de serie worden opgenomen. We vinden uiteindelijk de serie $T(0^3) : 2k - 1, 1, 2, k + 1, 3, k + 2, \dots, k - 1, 2k - 2, 0, 2k, k$.

Zo vinden we voor $n = 10$ de serie 9, 1, 2, 6, 3, 7, 4, 8, 10, 5. Hieronder sommen we een aantal series op:

—	$k + 1, 1, \dots, 2k, k$	$n = 2k$
$T(0^3)$	$2k - 1, 1, 2, k + 1, \dots, k - 1, 2k - 2, 0, 2k, k$	$n = 2k$
$T(0^3, 1^7)$	$2k - 4, 3, 2k - 1, 2, \underline{4, k + 1, \dots, k - 2, 2k - 5},$ $1, 2k - 3, k - 1, 2k - 2, 0, 2k, k$	$n = 2k \equiv 4 \pmod{6}$
$T(0^3, 0^9)$	$2k - 5, \left\{ \begin{smallmatrix} 1, 3 \\ 3, 1 \end{smallmatrix} \right\}, 2k - 1, 2, \underline{4, k + 1, \dots, k - 3, 2k - 6},$ $0, 2k - 4, k - 2, 2k - 3, k - 1, 2k - 2, 0, 2k, k$	$n = 2k \equiv 2, 4 \pmod{6}$
$T(1^1)$	$2k, \underline{2, k + 1, \dots, k, 2k - 1}, 1$	$n = 2k$
$T(1^1, 0^9)$	$2k - 5, 3, 2, 2k, \underline{4, k + 1, \dots, k - 3, 2k - 6},$ $0, 2k - 4, k - 2, 2k - 3, k - 1, 2k - 2, k, 2k - 1, 1$	$n = 2k \equiv 2 \pmod{6}$
$T(1^1, 2^5)$	$2k - 3, 3, 2k, \underline{4, k + 1, \dots, k - 1, 2k - 4},$ $2, 2k - 2, k, 2k - 1, 1$	$n = 2k \equiv 0 \pmod{6}$
$T(1^1, 3^3)$	$2k - 2, 2, 2k, \underline{4, k + 1, \dots, k, 2k - 3}, 3, 2k - 1, 1$	$n = 2k \equiv 0, 4 \pmod{6}$
$T(1^1, 3^3, 5^5)$	$2k - 4, 2, 2k - 2, 4, 2k, \underline{6, k + 1, \dots, k, 2k - 5},$ $5, 2k - 3, 3, 2k - 1, 1$	$n = 2k \equiv 0, 10, 18, 28 \pmod{30}$
$T(3^1)$	$2k, 1, 2k + 1, 2, \underline{4, k + 2, \dots, k + 1, 2k - 1}, 3$	$n = 2k + 1 \equiv 3, 5 \pmod{6}$
$T(6^1)$	$2k - 2, 1, 2k - 1, 2, 2k, \left\{ \begin{smallmatrix} 3, 5, 4 \\ 4, 5, 3 \end{smallmatrix} \right\},$ $\underline{k + 2, 7, \dots, k + 1, 2k - 3}, 6$	$n = 2k \equiv 12, 24, 32, 44 \pmod{60}$

De onderstreepte delen van de series corresponderen met de eerder genoemde elementen $a + i$ en $b + i$.

Opmerking van de jury Het is mogelijk om voor kleine n het aantal partities uit te rekenen dat voldoet aan de in de opgave genoemde voorwaarde. Er komen grillige aantallen uit. In tabel 1 zijn de aantallen tot en met 30 bij elkaar gezet. Een programma om deze aantallen te berekenen is beschikbaar via de website (zowel voor Windows als voor UNIX).

UWC

oplossingen

dim	aantal	dim	aantal	dim	aantal
1	1	11	29	21	5.320
2	1	12	39	22	3.220
3	2	13	67	23	4.489
4	2	14	55	24	20.237
5	4	15	386	25	36.580
6	5	16	235	26	52.875
7	7	17	312	27	197.103
8	7	18	347	28	216.562
9	24	19	451	29	289.478
10	22	20	1.319	30	567.396

Tabel 1 Het aantal partities dat voldoet aan de eisen uit opgave 2001/3-A.

Opgave 2001/3-B

Twee platte linten worden als een kruis over elkaar gelegd en op het kruispunt aan elkaar gelijmd. De bovenzijde van het kruis wordt rood gekleurd, de onderzijde groen. De vier losse uiteinden worden eveneens aan elkaar geplakt, nadat ieder van de uiteinden een geheel aantal slagen gedraaid is; de kleuren sluiten aan. Er ontstaat zo een ruimtelijke figuur met twee kruispunten die viervoudig verbonden zijn. Langs ieder verbindingstuk is draaiing mogelijk.

Kan zo'n figuur altijd uit een torus geknipt worden?

Oplossing De vraagstelling liet enige ruimte voor interpretatie: het bleef in het midden of de uiteinden, alvorens aan elkaar te worden bevestigd, al dan niet mogen worden 'verstrengeld'. Hierbij kan in het bijzonder de onderlinge oriëntatie van de uiteinden veranderd worden, en sommige van zulke figuren kunnen inderdaad uit een torus geknipt worden! We zullen hier we volstaan met een tegenvoorbeeld in de 'kleinst gemene deler'.

De twee tegenoverliggende uiteinden van het eerste lint draaien we beide een hele slag, de uiteinden van het andere lint draaien we geheel niet, en vervolgens bevestigen we de vier uiteinden 'rechtstreeks' aan elkaar. De resulterende figuur kan niet uit een torus worden geknipt. Dit werd impliciet of expliciet opgemerkt in alle inzendingen. Het team van Gerben Stavenga heeft zelfs een fraaie foto meegestuurd.

De volgende redenering is gebaseerd op argumenten van Filip de Smet en het team van Gerben Stavenga. Neem eens aan dat de figuur uit een torus T geknipt kan worden. Zij L het lint zonder torsie. Het complement $T \setminus L$ bestaat uit één of twee samenhangscomponenten, al naar gelang L al dan niet om de middelste as van T gewonden is. In geval (1) is $T \setminus L$ een gesloten strip; in geval (2) is één van de twee samenhangscomponenten homeomorf met een enkelvoudig samenhangend gebied in $\mathbb{R}^2$. De twee delen D_1 en D_2 van het andere lint liggen in $T \setminus L$ en hebben beide een hele slag torsie. Hun bevestigingspunten met L corresponderen met twee paren punten op de rand van $T \setminus L$ die door D_1 en D_1 met elkaar verbonden worden. In beide gevallen is echter eenvoudig in te zien dat D_1 en D_2 niet beide torsie kunnen hebben.

Opgave 2001/3-C

Los het volgende stelsel algebraïsche vergelijkingen op:

$$\sum_{i=1}^r \binom{2r}{2i-1} x_i = 1 \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Oplossing De volgende uitwerking is een iets vereenvoudigde versie van de oplossing van Jan Tuitman.

UWC

oplossingen

Het is triviaal dat het stelsel een unieke oplossing $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ heeft. Beschouw de genererende functie

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{(2k-1)!} t^{2k-1}.$$

Er geldt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})F(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{(2k-1)!(2n-2k+1)!} t^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n} \sum_{k=1}^n x_k \binom{2n}{2k-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n} = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) - 1. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $F(t) = 1 - \frac{2}{e^t + 1}$. De *Bernouilligetallen* B_n zijn gedefinieerd door $\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n$. Wegens $\frac{t}{e^t - 1} - \frac{t}{e^t + 1} = \frac{2t}{e^{2t} - 1}$ geldt

$$\frac{t}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2t)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - 2^n) \frac{B_n}{n!} t^n.$$

We vinden zo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{(2k-1)!} t^{2k-1} = F(t) = 1 - \frac{2}{e^t + 1} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1) \frac{B_n}{n!} t^{n-1}. \quad (1)$$

Elementair rekenwerk laat zien dat $B_1 = -\frac{1}{2}$. Verder is $t(e^t - 1)^{-1} - (1 + \frac{1}{2}t) = \frac{1}{2}t \coth \frac{1}{2}t$ een even functie, waaruit volgt dat $B_3 = B_5 = \dots = 0$. Zodoende is

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1) \frac{B_n}{n!} t^{n-1} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (2^{2k} - 1) \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k-1}. \quad (2)$$

Vergelijken van de coëfficiënten van t^{2k-1} in (1) en (2) geeft tenslotte $x_k = \frac{B_{2k}}{k} (2^{2k} - 1)$.

Uitslag Editie 2001/3

De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

Naam	A	B	C	Totaal
1. Gerben Stavenga e.a. (Utrecht)	7	9	9	102
2. Guit-Jan Ridderbos (VU Amsterdam)	6	8	8	90
3. Hendrik Hubrechts/Steven Delvaux (Leuven)	10	10	1	75
4. Jan Tuitman (Groningen)	5	-	10	65
5. Filip De Smet (Gent)	8	9	-	60

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie

We vermelden alleen de top 5. Voor de complete ladderstand verwijzen we naar de UWC-website.

Naam	Punten
1. Steven Lippens	301
2. Herbert Beltman	198
3. Joeri Van der Veken e.a.	185
4. Jan Tuitman	165
5. Stijn Symens	143

Problemen

| Problem Section

Problem 27 (L. Bleijenga)

Let L be a Latin square of order n . Show that any matrix $A \subset L$ of order $a \times b$ with $a + b = n + 1$ contains all elements $1, 2, \dots, n$.

Problem 28 (H. van den Berg)

For integers k, m, n and a prime number $p \geq 5$ show that if $(k^2 - mn)^p + (m^2 - kn)^p + (n^2 - km)^p = 0$, then p divides all three numbers $k^2 - mn, m^2 - kn, n^2 - km$.

Problem 29 (Lute Kamstra, open problem)

Let $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N}_0$ and let A be a subset of $\{1, 2, \dots, n + h\}$ of size n . Count the number of bijective maps $\pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A$ such that $k \leq \pi(k) \leq k + h$ for all $1 \leq k \leq n$.

Solutions to volume 2, number 3 (September 2001)

Problem 21

Suppose that E^n is a finite-dimensional (real) vector space of dimension > 2 and that f, g are quadratic forms on E^n such that $f(x) = g(x) = 0$ implies that $x = 0$. Show that there are real numbers a, b such that $af + bg$ is positive definite.

Solution The solution is taken from a paper of E. Calabi. Consider the map $E^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ defined by $x \rightarrow (f(x), g(x))$, which maps lines onto lines. Hence, this induces a map $F: P^{n-1} \rightarrow P^1$ between (real) projective spaces. The preimage of a point $(a, b) \in P^1$ is a quadric $(af + bg)(x) = 0$, which is a closed and connected subset of P^{n-1} . Since P^1 has fundamental group $\mathbb{Z}$ and P^{n-1} has fundamental group $\mathbb{Z}_2$, the map F can be lifted to $\tilde{F}: P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$. If F were surjective, then there would be a point $(a, b) \in P^1$ such that $\tilde{F}$ maps onto two or more preimages of (a, b) , contradicting that $(af + bg)(x) = 0$ is connected. So there exists an $(a, b) \in P^1$ which is not in the image of F . Then either $(af + bg)(x) < 0$ or $(af + bg)(x) > 0$ for all nonzero $x \in E^n$. Replacing (a, b) by $(-a, -b)$, if necessary, this gives a positive definite quadratic form $af + bg$.

The number 111001100000110101 is a square in base 5. In the following problems an n -binary number stands for a number that, written in base n , consists of digits 0 and 1 only, ending with a 1.

Problem 22

Prove that there are infinitely many 4-binary squares and 3-binary cubes with more than N digits equal to 1, for any natural number N .

Solution The following solutions were given by Aad Thoen. Observe that $a = 4^{2k+1} + 4^{k+1} + 1$ is a square for any natural number k . Now if x is a 4-binary square then so is ax , for sufficiently large k . The solution for 3-binary cubes is very neat. Consider the 3-binary numbers

$$x = \sum_{i=0}^{2n} 3^i \text{ and } y = \sum_{i=1}^n 3^{2i}.$$

Then $x = \frac{1}{2}(3^{2n+1} - 1)$ and $y = \frac{1}{8}(3^{2n+2} - 3^2)$. One verifies that $x^3 = 1 + (3^{4n+1} + 1)y$, which is a 3-binary number with $2n + 1$ digits equal to 1.

Problem 23 (Open problem)

Are there 3-binary squares with more than N digits equal to 1, for any natural number N ?

Solution This problem remains open.

Solutions to the problems in this section can be sent to the editor — preferably by e-mail. The most elegant solutions will be published in a later issue. Readers are invited to submit general mathematical problems. Unless the problem is still open, a valid solution should be included.

Editor:

R.J. Fokkink

Technische Universiteit Delft

Faculteit Wiskunde

P.O. Box 5031

2600 GA Delft

The Netherlands

r.j.fokkink@its.tudelft.nl