

Inhoud | Contents

306	Colofon
307	Redactioneel <i>Derk Pik</i>
308	Agenda
310	Nieuws
314	Van het WG

Evenementen | Events

315	Studiegroep Wiskunde in de industrie <i>Geertje Hek, Mark Peletier</i>
317	From chaos to early warnings <i>Floris Takens</i>

Oratie | Inaugural lecture

322	Waarom werkt wiskunde ook voor polymeren? <i>Jaap Molenaar</i>
-----	--

Onderzoek | Research

330	Bijna de waaierstelling <i>Wim Veldman</i>
340	Oscillations of the Taylor polynomials of the sine function <i>Imme van den Berg</i>
342	Turbulentie, golfballetjes en discrete afgeleiden <i>Arthur Veldman, Roel Verstappen</i>

Opinie | Opinion

349	Free publishing? <i>Michiel Kolman</i>
-----	--

Cultuur | Culture

351	Hoe geef ik een wiskundige voordracht <i>Klaas Landsman</i>
-----	---

Onderwijs | Education

356	Tijd voor bewijzen <i>Douwe van der Kooi</i>
358	Hex, dots and boxes <i>Ronald van Luijk, Sander van Rijnsouw</i>
363	Boekbesprekingen

Problemen | Problem section

376	Universitaire Wiskunde Competitie
380	Problemen

Rubrieken | Departments

341	Column: From Nottingham Forest <i>Jan Bouwe van den Berg</i>
348	Column: Instroom <i>Lex Zandee</i>
362	Oud Archief <i>Danny Beckers</i>

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder. **ISSN 0028-9825**

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
<http://www.math.leidenuniv.nl/~naw>

Hoofredactie

Ger Koole (koole@cs.vu.nl)
Chris Zaal (zaal@math.leidenuniv.nl)

Eindredactie

Derk Pik (drpik@math.leidenuniv.nl)

Redactie

Gerard Alberts (G.Alberts@bw.kun.nl)
Jaap Molenaar (J.Molenaar1@tue.nl)
André Ran (ran@cs.vu.nl)
Bert Zwaneveld (Bert.Zwaneveld@ou.nl)

Bureauredactie

Annelies Hafkenscheid (naw@math.leidenuniv.nl)
Maxim Hendriks (naw@math.leidenuniv.nl)

Medewerkers

Wieb Bosma (bosma@sci.kun.nl)
J.A.W. van Casteren (vcaster@wins.uia.ac.be)
Jan van de Craats (jcr@euronet.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@its.tudelft.nl)
Michael van Hartkamp (m.a.hartkamp@tue.nl)
Geertje Hek (ghek@science.uva.nl)
Teun Koetsier (teun@cs.vu.nl)
Joop Kolk (kolk@math.uu.nl)
Jan van Neerven (J.vanNeerven@its.tudelft.nl)
Mark Peletier (mark.peletier@cw.nl)
Hans Sterk (sterk@win.tue.nl)
Roel Stroeker (stroeker@few.eur.nl)
Jaap Top (J.Top@math.rug.nl)

T_EX-ondersteuning

Marco Boon (m.a.a.boon@tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@its.tudelft.nl)

Abonnementstarieven 2001/Subscription rates 2001

Nederland 90 Euro (4 nummers)
Buitenland 105 Euro (4 issues)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Corrie van Os (wg-admin@math.uu.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
tel. 030-2531430, fax 030-2518394

Exchange subscriptions

Wiskundig Genootschap Library
CWI — Centrum voor Wiskunde en Informatica
P.O. Box 94079, 1090 GB Amsterdam
The Netherlands

Advertenties

Christiaan van de Woestijne (cvdwoest@math.leidenuniv.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101

Vormgeving

Kitty Molenaar, Amsterdam

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CON_TE_XT)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Op de omslag

Schematische weergave van een vorm-, vul- en sluitmachine. Zie p. 322 en verder.

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient u elektronisch aan te bieden aan de hoofredactie, i.e. aan: koole@cs.vu.nl
Uitgebreidere informatie en auteursinstructies kunt u vinden op:
<http://www.math.leidenuniv.nl/~naw/html/auteurs.html>

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

<i>nummer</i>	<i>verschijningsdatum</i>	<i>uiterste inleverdatum kopij</i>
1	10-03-2002	06-12-2001
2	09-06-2002	07-03-2002
3	05-09-2002	06-06-2002
4	06-12-2002	06-09-2002

Wiskundig Genootschap

Het Wiskundig Genootschap is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. Het genootschap werd in 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Het is 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap.

Leden van het Wiskundig Genootschap ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor het Wiskundig Genootschap bedraagt 70 Euro per jaar en gepensioneerden betalen 35 Euro. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of HBO-opleiding, AiO's en OiO's kunnen lid worden tegen het gereduceerde tarief van 25 Euro per jaar.

Leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO kunnen aanspraak maken op een gereduceerd tarief van 50 Euro.

Members of the Société Mathématique de France, and of the American, Australian, Belgian, Indian, London and South-African Mathematical Societies pay 50 Euro instead of the full membership fee of 70 Euro a year.

Homepage

<http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Corrie van Os (wg-admin@math.uu.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
tel. 030-2531430, fax 030-2518394

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Eduard Looijenga (UU, *voorzitter*), Mark Peletier (CWI, *secretaris*), Luc Florack (TUE, *penningmeester*), Harm Bakker (RUG), Anette Kik (CWI), Mariette Knaap (Shell), Jan Karel Lenstra (TUE), Jaap Molenaar (TUE), Peter Stevenhagen (UL), Michel Vellekoop (UT).

Wiskundigen en hun mening

Op 11 september 2001 boorden zich gekaapte vliegtuigen in de twee torens van het World Trade Center en in het Pentagon. Duzenden mensen kwamen hierbij om het leven en de aanslag liet de wereld in verwarring achter. Over deze ramp in New York is in het Nieuw Archief niets terug te vinden. Dat verbaast me wel.

Enkele dagen na de aanslag vond de inauguratie plaats van mijn hoogleraar, Sjoerd Verduyn Lunel. Onder de indruk van de ramp, zoals wij eigenlijk allemaal, wijdde hij aan het begin van zijn rede enkele woorden aan de aanslag en de slachtoffers. Hij besloot zijn inleiding met de verzuchting dat “wiskunde geen geschikt kader biedt om maatschappelijke rampen, zoals die van 11 september te bestuderen.” Daar heeft hij natuurlijk gelijk in.

De wiskundige gemeenschap maakt echter deel uit van de wereld waarin deze ramp plaatsvond en zal er zeker gevolgen van ondervinden. Gevolgen voor de privacy, de communicatie, en waarschijnlijk ook voor internationale wetenschappelijke samenwerkingen. Hoe kun je daar als wiskundetijdschrift op reageren? Inmiddels hebben kranten en tijdschriften vol gestaan met diepgravende analyses over de aanslag, de achterliggende oorzaken en de impact op de samenleving. Natuurwetenschappelijke tijdschriften hebben gereageerd met artikelen over beveiliging van vliegtuigen en luchthavens, de stevigheid van wolkenkrabbers en biologische oorlogvoering (Archimedes, Natuur en Techniek, Scientific American).

Je vraagt je af of het ook nog op een andere manier kan. Het is onbevredigend dat er vanuit de exacte disciplines alleen maar op zo’n technocratische manier over is te schrijven. Begrijpelijk is deze manier van reageren wel. We zijn het niet anders gewend.

Wiskundigen zijn erin getraind alleen beweringen te doen die zij ook kunnen bewijzen. Dat kan ook in het dagelijkse leven vaak nuttig zijn, bijvoorbeeld om het hoofd koel te houden bij het nemen van beslissingen. Het kan er echter ook toe leiden dat argumenten waar men niet helemaal zeker van is, achterwege blijven en dat discussies worden vermeden over onderwerpen waar men zich niet heel erg zeker bij voelt. Onderwerpen die voor de wiskundige gemeenschap heel belangrijk kunnen zijn. Wie wil er zijn vingers aan branden?

Dit is het vierde nummer van het Nieuw Archief voor Wiskunde dat onder mijn eindredactie verschijnt. Voor één dag in de week ben ik aangesteld als eindredacteur; de andere vier dagen ben ik post-doc bij de vakgroep analyse van de Universiteit Leiden.

Als eindredacteur overleg je met auteurs over hun bijdrage. Soms moet er iets vanaf, een andere keer meen je dat een formulering kan worden aangescherpt. Het valt mij op dat dit overleg meestal veel gemakkelijker gaat bij artikelen met een wiskundig onderwerp dan bij opiniërende artikelen. Bovendien lijken Nederlandse wiskundigen niet gemakkelijk te verleiden om over maatschappelijke onderwerpen te schrijven.

Er zijn genoeg onderwerpen. Hoe belangrijk is privacy voor de beroepsmatige communicatie? In hoeverre zal emailcontact met wiskundigen in niet-westerse landen worden bemoeilijkt? Is de kloof tussen de westerse en de niet-westerse wereld weer dieper geworden? Hoe zit het met de openbaarheid van ons onderwijs? En met de onafhankelijkheid van het onderzoek? Dit zijn voorbeelden van vragen waar we een standpunt over moeten hebben, of we er verstand van hebben of niet.

Over één gevolg van de aanslagen wordt in de media al een tijd gediscussieerd. Het internet komt regelmatig ter sprake als een belangrijk communicatiekanaal voor terroristen. Geheime boodschappen kunnen worden doorgegeven, bijvoorbeeld verstopt in een afbeelding. Om dit tegen te gaan ondertekende Bush op 25 oktober de zogenaamde PATRIOT-act die het internetaanbieders verplicht om op verzoek van de politie af luisterapparatuur te installeren, ook zonder gerechtelijk bevel vooraf. Men is tevens van plan het gebruik van encryptie aan banden te leggen. Het internet is zo open dat het voor allerlei doelen misbruikt kan worden. Toch zou het een ramp zijn, en vooral voor mensen in minder ontwikkelde gebieden, wanneer het internet zou worden dichtgetimmerd om dergelijk misbruik tegen te gaan. Zo beschreef Krzysztof Apt in het vorige nummer van het Nieuw Archief de grote betekenis van het internet als literatuurbron voor de derde wereld. En voor vele onderzoekers, ook voor mij, is email van vitaal belang voor de wetenschappelijke samenwerking.

Ik hoop dat het Nieuw Archief ook het nieuwe jaar op heldere wijze zal berichten over nieuwe wiskundige ontwikkelingen. En bovenal, dat zij een podium voor uw mening zal zijn. Ik wens u een voorspoedig 2002 toe.

Derk Pik eindredacteur Nieuw Archief voor Wiskunde

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Postbus 9512, 2300 RA Leiden,

drpik@math.leidenuniv.nl

Agenda

december 2001

20 december

Wiskunde en Muziek

Najaarssymposium WG/ITW

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info <http://www.itw.nl/~itw/symposia.html>

januari 2002

5 januari

Winnen met Wiskunde

Wintersymposium Wiskundig Genootschap. Zie ook pagina 310 van dit nummer.

plaats Johan van Oldenbarnevelt Gymnasium, Amersfoort

info www.wiskgenoot.nl/wintersymposium.html

11 januari

Symposium ter ere van eredoctoraat Ian Macdonald

Sprekers: I.G. Macdonald, T.A. Springer en G.J. Heckman. Het eredoctoraat wordt uitgereikt op 8 januari.

plaats Universiteit van Amsterdam

info <http://turing.wins.uva.nl/~opdam>

11 januari

Coding, Crypto & Information Theory

EIDMA Seminar

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info <http://www.win.tue.nl/math/eidma>

14–18 januari

AIO cursus Computational Fluid Dynamics

Eerste van drie delen van een post-graduate cursus in computationele vloeistofdynamica.

Organisatie: J.M. Burgers Centrum, Delft.

plaats Technische Universiteit Delft

info <http://www.burgerscentrum.org>

15–17 januari

27th Conference on the Mathematics of Operations Research

Organisatie: Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde (LNMB). Op 17 januari een seminar over Capacity Management i.s.m. het Nederlands Genootschap voor Besliskunde (NGB).

plaats De Blijde Werelt, Lunteren

info <http://www.math.leidenuniv.nl/~lnmb>

18 januari

Nederlandse Wiskunde Olympiade

plaats op deelnemende scholen

info <http://olympiads.win.tue.nl/nwo/>

18 en 25 januari, 8 en 22 februari, 8 en 22 maart

Seminar on Tensor Categories in Mathematical Physics

plaats Universiteit van Amsterdam en Universiteit Utrecht

info <http://turing.wins.uva.nl/~npl/tcmp.html>

19 januari

Mathematische Modelleercompetitie Maastricht

plaats Universiteit Maastricht

info <http://www.math.unimaas.nl>

Cursussen CANDiensten

Algemene inleiding S-PLUS: 8-1, 12-2, 5-3, 26-3
Inleiding programmeren in S-PLUS: 9-1, 13-2, 6-3, 27-3
Inleiding Mathematica: 15-1, 5-2, 12-3
Numerical Methods for Pricing Financial Derivatives: 7/8-2
Lineaire en gegeneraliseerde lineaire modellen: 20-2
De S-PLUS grafische gebruikersinterface: aanpassen en bouwen: 21-2
Mathematica Algemeen: 26/27-2
Quantitative Financial Risk Management: 7/8-3
Survivalanalyse: 21/22-3

plaats CANDiensten, Amsterdam

info <http://www.candiensten.nl>

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

februari 2002

1 en 2 februari

□ Nationale Wiskunde Dagen

plaats Leeuwenhorst Congrescentrum, Noordwijkerhout

info <http://www.fi.uu.nl/nwd/>

8 februari

□ Jaarlijkse bijeenkomst Sociale Keuzetheorie

Lezingen door Honorata Sosnowska en Moshe Marchover.

plaats Katholieke Universiteit Brabant

info H.C.M.deSwart@kub.nl

18–22 februari

□ Studiegroep Wiskunde voor de Industrie

Zie pagina 314 van dit nummer.

plaats Universiteit van Amsterdam

info <http://www.itw.nl/~itw/symposia.html>

maart 2002

21 en 22 maart

□ Nationale Rekendagen 2002

plaats Leeuwenhorst Congrescentrum, Noordwijkerhout

info <http://www.fi.uu.nl/rekenweb/rekendagen>

22 maart

□ Europese Kangoeroe Wiskundewedstrijd

plaats op alle deelnemende scholen

info <http://www-math.sci.kun.nl/math/kangoeroe/>

22 en 23 maart

□ Finale Wiskunde A-lympiade

plaats Garderen

info www.fi.uu.nl/Alympiade

april–juni 2002

4 en 5 april

□ 38^e Nederlands Mathematisch Congres

Zie ook de nieuwsrubriek van dit Nieuw Archief. Een aanmeldformulier is los bijgevoegd.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info <http://www.win.tue.nl/nmc2002>

15–19 april

□ Computational Theories in Algebra

Eidma mini-course door prof. John J. Cannon, University of Sydney, Australia.

plaats Université Libre de Bruxelles, Belgium

info <http://www.win.tue.nl/math/eidma>

21–24 april

□ 2002 International Conference on Computational Science

Uitgenodigde sprekers: Francine Berman, Geoffrey Fox, Wolfgang Gentzsch, Bob Hertzberger, Tony Hey, Michiel Sprik, Henk van der Vorst.

plaats Universiteit van Amsterdam

info <http://www.science.uva.nl/events/ICCS2002>

22–26 april

□ Graphs, Eigenvalues and Geometric Representations

Eidma mini-course door prof. László Lovász, Microsoft Research, Redmond, Washington, USA.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info <http://www.win.tue.nl/math/eidma/>

25 april

□ Conferentie ICT in de wiskundeles

plaats Utrecht

info <http://www.aps.nl/wiskunde/X3.htm>

28 april – 2 mei

□ Eurocrypt 2002

21st Annual international conference on the theory and applications of cryptographic techniques.

plaats Okura hotel, Amsterdam

info <http://www.ec2002.tue.nl>

16 mei

□ Advanced Decision Making: de rol van kwantitatieve modellen in de praktijk

Lezingen door o.a. dr. A.H.G. Rinnooy Kan en dr. F.J.H. Don. Discussieforum o.l.v. prof.dr.ir. D. den Hertog. Organisatie: Wim Bogers Stichting.

plaats Katholieke Universiteit Brabant

info <http://www.wbscongres.nl>

27–29 mei

□ Frobenius manifolds in mathematical physics

Organisatoren: E. Looijenga, J. van de Leur, J. Stienstra, G. Heckman, R. Martini, G. Helminck en P. Kersten. Over hetzelfde onderwerp is er in mei ook een drieweekse MRI Spring School.

plaats Universiteit Twente

info <http://www.math.utwente.nl/fa/springschool>

28–31 mei

□ ACOMEN 2002

Second international conference on Advanced Computational Methods in Engineering.

plaats Katholieke Universiteit Nijmegen

info <http://cage.rug.ac.be/~acomen>

17–20 juni

□ Discrete probability

This workshop will focus on discrete probability and related areas, including combinatorics, randomized algorithms and scaling limits of discrete random structures.

plaats Eurandom, TUE

info <http://www.eurandom.tue.nl>

17–21 juni

□ 7th International Conference on p-Adic Functional Analysis

Organisatie: W. Schikhof (KUN), A. Escassut (Clermont Ferrand), C. Perez-Garcia (Santander).

plaats Universiteit Nijmegen

info <http://www.sci.kun.nl/math/p-adic2002>

23–28 juni

□ SCEE-2002

Fourth International Workshop SCEE-2002 on Scientific Computing in the Electronics Industry. Aimed at mathematicians and electronical engineers.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info <http://www.win.tue.nl/scee2002>

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar naw@math.leidenuniv.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Nederlands Mathematisch Congres 2002

Op 4 en 5 april 2002 zal in Eindhoven het 38ste Nederlands Mathematisch Congres plaatsvinden. De vier hoofdsprekers zijn L.A. Peletier (Leiden), M. Aizenman (Princeton), G.J. Woeginger (Twente) en A. Blokhuys (Eindhoven).

Slechts een keer per zes jaar worden zowel een Beeger-lezing als een Brouwer-lezing gehouden. In Eindhoven zullen Poonen en Aizenman de respectievelijke eer hebben. Maar het congres wordt ook om andere redenen bijzonder. Zo zullen we aio's vragen een presentatie te geven voor een groter publiek dan gebruikelijk in een tijd die korter is dan gebruikelijk. Een papieren versie van het aanmeldingformulier treft u los in dit nummer aan.

Voor actuele informatie en aanmelding kunt u op internet terecht: <http://www.win.tue.nl/nmc2002> Arjeh Cohen

Wintersymposium 2002

Al vele jaren organiseert het Wiskundig Genootschap op de eerste zaterdag in het kalenderjaar haar Wintersymposium. Dit symposium is in eerste instantie bedoeld voor docenten uit het voortgezet onderwijs, maar natuurlijk is iedere belangstellende van harte welkom. De bedoeling van het Wintersymposium is om het contact tussen leraren enerzijds en wiskundigen uit de academische wereld en het bedrijfsleven anderzijds te onderhouden en te verstevigen.

In een drietal voordrachten belichten ervaren sprekers facetten van het thema: *'Winnen met wiskunde' — kan de wiskunde helpen inzicht te krijgen in situaties waar sprake is van verlies dan wel winst?*

Programma

09.30–10.00 Ontvangst met koffie en thee

10.00–11.00 H. Monsuur (KIM): *Van sociale naar strategische netwerken*

11.15–12.15 G. Sierksma (RuG): *Teamsamenstelling als logistiek fenomeen*

12.15–13.30 Pauze; gezamenlijke lunch

13.30–14.30 R. Bosch (KMA): *Win-win procedures voor verdelingen*

In de eerste voordracht worden grafen gebruikt om interacties tussen entiteiten te representeren: samenwerking tussen bedrijven, links tussen websites, winst in een directe confrontatie in een toernooi. Ordeningsmethoden op grafen geven antwoord op vragen als: met welk bedrijf moet een alliantie worden gesloten en wie is de winnaar van het toernooi. In de tweede lezing wordt een relatie gelegd tussen het probleem een optimaal team samen te stellen en een transportprobleem in een netwerk. Er wordt aangetoond dat dit een probleem is waarvoor er een efficiënt algoritme bestaat. In de afsluitende lezing leren we dat de wiskunde kan helpen zaken eerlijk te verdelen, ook als de waarde niet objectief is vast te stellen.

Meer informatie

Het Wintersymposium 2002 wordt gehouden op 5 januari 2002 in het Johan van Oldenbarnevelt Gymnasium, Thorbeckeplein 1, Amersfoort. Deelname aan het symposium is gratis. Aanmelding en verdere informatie op de website van het Wiskundig Genootschap. Wie wil deelnemen aan de gezamenlijke lunch wordt verzocht voor 25 december f17,50 over te maken op gironummer 3762917 t.n.v. H. Bakker te Marum. Telefoon: 050-3633935 (overdag) of 0594-641636 ('s avonds) E-mail: h.bakker@cs.rug.nl

<http://www.wiskgenoot.nl/wintersymposium>

Harm Bakker

Wiskids gaat van start

WisKids (niet te verwarren met Wizzkids!) is een nieuw project voor het Nederlandse wiskundeonderwijs. Het is een gezamenlijk initiatief van het Wiskundig Genootschap (WG), de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) en de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken- en Wiskundeonderwijs (NVORWO).

Het doel van WisKids is het bevorderen van enthousiasme voor wiskunde bij jongens en meisjes van tien jaar en ouder. Tevens wil WisKids het imago van de wiskunde verbeteren: wiskunde is geen saai schoolvak, maar een universele taal die steeds meer facetten van de moderne samenleving ingrijpend beïnvloedt. Het project richt zich bovendien op gebruikmaking van eigentijdse communicatiemiddelen zoals het internet. WisKids is een samenhangend geheel van deelprojecten: *Ratio* (KUN), *Wiskunde biedt perspectief* (STW, NWO-EW, NVvW), stichting *Vierkant voor wiskunde*, de *Nederlandse Wiskunde Olympiade* en *Pythagoras*, wiskundetijdschrift voor jongeren. Daarnaast zijn er twee overkoepelende projecten: de wiskundevraagbaak *Wisfaq* en de *Wiskunde Scholen Prijs*, voor scholen die uitblinken in enthousiasmerend wiskundeonderwijs.

Het WisKids-project wordt gefinancierd door Axis, het Ministerie van OC&W (de afdelingen ICT en emancipatie) en de werkgeversorganisatie FME-CWM met daarnaast eigen bijdragen van de partners. Meer informatie: <http://www.fi.uu.nl/wiskids> *Heleen Verhage en Chris Zaal*



WereldWiskundeWeb boekenveiling

Het Wereldwiskunde Fonds (WwF) is een werkgroep van de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren (NVvW). Zij stelt zich tot doel het wiskundeonderwijs in derdewereldlanden te ondersteunen door middel van financiële bijdragen. Het WwF verkrijgt fondsen uit bijdragen van de leden van de NVvW en uit diverse acties, zoals de verkoop van oude en gebruikte wiskundeboeken. Ook zet zij zich in voor het wederzijds begrip. Men laat aan wiskundeleraars 'hier' zien dat er 'daar' ook collega's zijn; collega's die vaak met dezelfde problemen zitten als hier. Door middel van artikelen in *Euclides*, het vakblad voor wiskundeleraren, en diverse informatiestands geeft het WwF aan wiskundeleraren in Nederland een beeld van het wiskundeonderwijs in derdewereldlanden.

Jaarlijks organiseert het WwF op de jaardag van de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren (NVvW) een boekenmarkt waarvan de baten deels ten goede komen aan wiskundeonderwijsprojecten in de derdewereld. Dit brengt nogal wat gesleep met boeken met zich mee en bovendien is duidelijk dat lang niet alle potentiële aanbieders en potentiële kopers worden bereikt. Geïnspireerd door het succes van (boeken-)veilingen via internet rijpte bij de werkgroep het idee om deze traditionele boekenmarkt te vervangen door een veiling (bij opbod) via internet, het *WereldWiskundeWeb*: <http://www.nvww.nl/www>

Op deze site treft men het totale aanbod van de boeken die de werkgroep in de aanbieding heeft. Bedoeling is dat geïnteresseerden een bod doen op een of meer van deze boeken waarna men, indien binnen een vastgestelde periode geen hoger bod volgt, zich eigenaar mag noemen. Na betaling van de geboden bedragen en de ermee samenhangende portokosten worden de gekozen boeken verstuurd. Tijdens de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren van 17 november jongstleden is de site in gebruik genomen.

Hans Wisbrun



Wiskunde buiten je boekje

Het was wel even wennen voor de vaste bezoekers van de studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Vorig jaar werd het jubileum groots gevierd op de Uithof. Dit jaar, op 19 november, was er weer een gewone studiedag. Niet in Bilthoven, waar men jarenlang te gast was, maar in het gebouw van de Hogeschool Domstad te Utrecht. De plaats van handeling was anders, de opzet van het programma niet.

De dag begint met het eerste deel van de jaarvergadering, waarin een aantal technische agendapunten (zoals het verslag van de kascommissie) en de traditionele jaarrede van de voorzitter. Naast diverse andere punten noemde mevrouw Kollenveld het grote aantal wijzigingen in de regelingen voor het schoolexamen en het centraal examen voor de vakken in de tweede fase. Het is bijna niet bij te houden!

Het grootste deel van de dag wordt in beslag genomen door het inhoudelijk gedeelte, geopend door de plenaire openingsvoordracht. Bert Zwaneveld deed verslag van zijn promotie-onderzoek, waarin hij leerlingen en studenten op een gestructureerde manier probeert te laten reflecteren op bestudeerde leerstof. Als concrete representatie heeft hij voor kennisgrafieken gekozen. Van de leerlingen wordt gevraagd in een graaf weer te geven hoe hoofdbegrippen, subbegrippen en eigenschappen met elkaar samenhangen. De verwachting is dat leerlingen die nadenken over de structuur van het geleerde, dit beter onthouden en het ook beter in kunnen zetten bij het oplossen van (wiskundige) problemen. De eerste ervaringen wijzen uit dat leerlingen die meer wiskunde hebben geleerd ook een grotere vaardigheid hebben in het ontwerpen van kennisgrafieken, maar in de beperkte proefopzet is er nog geen grote invloed op de prestaties waar te nemen.

Voor en na de lunch krijgen de deelnemers de gelegenheid deel te nemen aan een groot scala aan workshops. We noemen een paar titels: Inzet van de grafische rekenmachine, Zebraboekjes in gebruik, De algebralijs, Examendossier in het VMBO, Laptop in de brugklas, Wiskunde in beroep. Verder is er de hele dag een info-markt waar diverse commerciële en niet-commerciële instellingen (waaronder het WG) een stand hebben ingericht.

Het laatste deel van de studiedag bestaat weer uit een plenaire lezing. Jan Essers vertelde over zijn ervaringen met betrekking tot problemen rond de aansluiting tussen middelbaar onderwijs en vervolgonderwijs. Als docent aan een lerarenopleiding is hij betrokken bij een aantal projecten waarin het contact tussen middelbare scholen, HBO en WO worden geïntensiveerd. Zo is hij zelf ingezet bij werkcolleges Analyse op de Technische Universiteit Eindhoven. In een ander project wordt hulp geboden aan docenten en leerlingen bij het bedenken en uitvoeren van praktische opdrachten. Als voorbeeld toonde hij een praktische opdracht rond het kraken van een aantal codes. Hij liet zien dat met relatief eenvoudige hulpmiddelen voor elke leerling een andere te kraken code is te genereren, waarbij ook de hoeveelheid werk bij de beoordeling binnen de perken blijft.

Als de voorzitter na deze lezing probeert de jaarvergadering te hervatten, is wel duidelijk dat de meeste deelnemers zijn gekomen voor de lezingen en de workshops. De rondvraag wordt snel afgehandeld. Het is een dag geweest met voor elk wat wils en een goede gelegenheid diverse mensen te spreken.

Harm Bakker

C.J. Kokprijsen

Uit de opbrengsten van de nalatenschap van een oud biologieleeraar in Den Haag financiert de Leidse universiteit de jaarlijkse C.J. Kokprijsen voor bijzondere onderzoeksprestaties op het gebied van de exacte wetenschappen. Op 11 oktober ontvingen vier in Leiden gepromoveerde wetenschappers deze prijs voor hun in het jaar 2000 afgeleverde proefschrift. Onder hen Jan Bouwe van den Berg, die eerder al de Stieltjesprijs voor zijn proefschrift kreeg. Als eerste was hij aan de beurt om door de rector in het zonnetje gezet te worden en aan een publiek van familie, vrienden, bestuurders en collega-onderzoekers zijn resultaten over vierde-orde differentiaalvergelijkingen toe te lichten. Zonder afschrikwekkende formules en met behulp van een knot wol en een tennisbal, die tijdens zijn voordracht bijna op de bril van de voorzitter van de jury belandde, liet hij zien wat voor interessante verschijnselen hierbij aan de orde komen. Het was het begin van een leuke en levendige middag. Alle prijswinnaars wisten het publiek te boeien, en niet alleen omdat in elke voordracht wat wiskunde zat. Op de borrel na afloop werd volop nagepraat over de pres(en)taties van de prijswinnaars. *Joost Hulshof*

Abelprijs

De Noorse regering heeft een nieuwe prijs voor wiskunde in het leven geroepen. De prijs is vergelijkbaar met de Nobelprijs voor de natuurkunde en zal jaarlijks worden toegekend aan een wiskundige van uitmuntende statuur. Op dit moment is de belangrijkste prijs voor wiskunde de medaille van het Fields-instituut. Er zijn echter belangrijke verschillen tussen deze prijs en de Abelprijs. De Fields-medaille wordt eens in de vier jaar toegekend en de wiskundige moet jonger dan veertig jaar zijn. De medaille kon om deze reden bijvoorbeeld niet aan Andrew Wiles worden toegekend.

De instelling van de Abelprijs is in augustus aangekondigd door Jens Stoltenberg, minister-president van Noorwegen. Het stichtingsfonds van 200 miljoen Noorse Kronen (ongeveer 25 miljoen Euro) wordt in 2002 door de Noorse regering geïnstalleerd en de prijs van vijfhonderdduizend Noorse Kronen zal voor het eerst worden toegekend in 2003.

Een prijs ter ere van Niels Henrik Abel (1802–1829) werd voor het eerst voorgesteld door koning Oscar de tweede van Noorwegen en

Zweden, maar werd nooit ingesteld toen in 1905 de eenheid tussen deze twee landen werd verbroken. Ondanks zijn korte en tragische leven is het werk van Abel van blijvende betekenis. Toen hij zestien jaar oud was vond hij een uitbreiding van de binomiaalformule van Euler en drie jaar later bewees hij dat er geen algemene algebraïsche oplossing te geven is voor vijfdegraads vergelijkingen.

Jens Stoltenberg verklaarde dat de Abelprijs uitdrukking wil geven aan het belang van wiskunde en dat zij als doel heeft het wetenschapsgebied op het hoogste niveau te eren. De prijs wordt ondersteund door de internationale wiskundige verenigingen. Winnaars worden uitgezocht door een onafhankelijk comité van internationaal vooraanstaande wiskundigen.

bron: Plus Online Magazine



Niels Henrik Abel, 1802–1829

Escher in Den Haag

Als voorproefje van de komende permanente Escher-expositie in het Gemeentemuseum in Den Haag, wordt 17 november een tentoonstelling over Escher geopend in Museum Het Paleis in dezelfde stad. Het Paleis is een dependance van het Gemeentemuseum.

De permanente Escher-expositie in de Schamhartvleugel van het Gemeentemuseum moet september 2002 open gaan. "We krijgen zoveel vragen voor het werk van Escher, dat we tot dit initiatief zijn gekomen", liet een woordvoerder gisteren weten.

De nieuwe tentoonstelling over grafisch kunstenaar M.C. Escher (1898–1972) lijkt veel op de expositie die in 2000 in het Gemeentemuseum over hem werd opgezet. Zo zijn er ook in Het Paleis computers opgesteld, waarmee bezoekers Escher-achtige motieven kunnen veranderen.

In de nieuwe expositie zijn volgens de zegsman ook een groot aantal schetsen opgenomen die zelden worden getoond. Hetzelfde geldt voor een tiental fotoalbums uit het bezit van de kunstenaar. Ook de toegepaste kanten van Eschers werk komen op de tentoonstelling aan bod, zoals postzegels, studies voor bankbiljetten en boeken. De tentoonstelling in Het Paleis duurt tot 8 januari.

bron: Metro (ANP)

Nieuwe biografie L.E.J. Brouwer

Dirk van Dalen heeft de nagedachtenis van L.E.J. Brouwer geëerd met een uitgebreide biografie. De twee kloeke banden, in het Engels geschreven, zijn voor select publiek: niet alleen moet men over de nodige voorkennis beschikken, tevens is een dikke beurs een vereiste. Recent heeft hij ook een voor breder publiek toegankelijke Nederlandse editie gepubliceerd (Bert Bakker, f 65,-). Vrijdag 21 september jongstleden

vond in de Gertrudis Kerk te Utrecht de overhandiging plaats van het eerste exemplaar.

Na een welkomstwoord van de Utrechtse collegevoorzitter J.G.F. Veldhuis vertelde prof.dr. N.G. de Bruijn over zijn persoonlijke herinneringen aan Brouwer. Naast het feit dat Brouwer zijn afkeur over De Bruijns benoeming te Amsterdam uitsprak in een brief aan de kersverse hoogleraar, schetste de spreker in een aantal anekdotes een beeld van Brouwers aangename en minder aangename karaktertrekken. Met name de openingszin van genoemde brief aan De Bruijn, bestaande uit maar liefst 77 woorden, zal menig aanwezige (hoewel niet letterlijk!) zich herinneren. De Utrechtse historicus prof.dr. H.W. von der Dunk bood het publiek vervolgens een blik op de complexe relatie tussen natuurwetenschap, wiskunde en samenleving, waarbij hij zich concentreerde op de periode rond de eerste wereldoorlog. Zo werden Brouwers Duitse contacten tijdens het Interbellum in een cultuurhistorische context geplaatst. De literator Michaël Zeeman bracht vervolgens een aantal *sweeping statements* ten gehore over de rol van de biografie in de geschiedschrijving van de exacte wetenschappen. Het is altijd leerzaam om te horen hoe buitenstaanders tegen jouw vakgebied aankijken. In dit geval wist Zeeman het gevoel op te roepen dat hij de ontwikkelingen in de wetenschapsgeschiedenis van de laatste kwart eeuw niet had gevolgd. Desalniettemin poneerde hij een aantal prikkelende stellingen: "De alfa-wetenschappen verheerlijken hun grootheden; bij bèta-wetenschappers overheerst de mening dat wanneer mijnheer X het niet had gedaan, dan zou mevrouw Y het na hem wel gevonden hebben. *Dus* is de biografie voor de bèta-wetenschappen minder belangrijk".

Tot slot nam de auteur zelf het woord. Na een welbespraakt dankwoord tot de sprekers en de aanwezigen te hebben gericht zorgde hij voor grote verbazing door aan te kondigen dat hij het boek had opgedragen aan een groep mensen die deze publicatie helemaal koud liet. De gelukkigen bleken zijn kleinkinderen te zijn, en de oudste onder hen (Suzanne van 6) was desondanks bereid gevonden om het eerste exemplaar in ontvangst te nemen.

Danny Beckers



Archieven tijdelijk moeilijk bereikbaar

Wiskundigen laten archieven na. Het Rijksarchief in Noordholland, dat is de Haarlemse vestiging van het Rijksarchief, heeft zich gespecialiseerd in het bewaren van wetenschappelijke archieven. Daar berusten ook een aantal archieven van wiskundigen, alsmede archieven van het Wiskundig Genootschap en van het Mathematisch Centrum. In verband met verbouwing en uitbreiding van het depot van het Rijks-

archief in Noordholland zijn deze archieven de komende maanden (tot medio 2002) niet toegankelijk. Onderzoekers die hierdoor in problemen zouden komen wordt verzocht op korte termijn contact op te nemen met de programma-manager wetenschapsarchieven, mw. drs. G.J.A.M. Bolten, RANH, Kleine Houtweg 18, 2012 CH Haarlem. Tel. 023-5172700.

Gerard Alberts

De verlamme werking van mannen

In Nederland zijn vrouwelijke studenten hun mannelijke studiegenoten sinds kort de baas. Ze zijn met meer en halen betere cijfers. Dat geldt echter niet voor alle studierichtingen. Bij wis- en natuurkunde is nog sprake van een mannelijke overheersing, die naarmate je hoger op de academische ladder komt, steeds groter wordt. Er zijn nog aardig wat vrouwelijke wiskundestudenten, maar onder wiskunde professoren wordt maar zelden een vrouw aangetroffen.

In hun artikel *A threatening intellectual environment: why females are susceptible to experiencing problem-solving deficits in the presence of males* stellen Inzicht en Ben-Zeev dat vrouwen in zo'n situatie het slachtoffer zouden kunnen zijn van een bedreigende intellectuele omgeving, waarin het stereotype dat vrouwen niet goed in wiskunde zijn, een verlamme werking op de academische prestaties van vrouwen heeft. Ze lieten vrouwelijke studenten zowel een moeilijke wiskunde test als een moeilijke taaltest maken in aanwezigheid van ofwel twee mannen ofwel twee vrouwen, die zogenaamd ook met dezelfde test bezig waren. Naderhand zouden de resultaten met het testgroepje worden besproken, zo vertelden de onderzoekers de proefpersonen.

De resultaten waren overeenkomstig de verwachtingen van Inzicht en Ben-Zeev. De wiskundetest werd door de vrouwen in 'mannengroepjes' aanzienlijk slechter gemaakt dan door de vrouwen die de test maakten in aanwezigheid van andere vrouwen. De resultaten van de taaltest daarentegen, waren in beide groepen identiek. Een tweede experiment, waarin sommig vrouwen de wiskundetest moesten doen in gezelschap van een andere vrouw én een man, liet zien dat ook in dat geval de testresultaten iets slechter waren dan van de vrouwen die de wiskunde problemen konden oplossen zonder dat ze door mannen op de vingers werden gekeken. Wellicht verdient het aanbeveling wiskundetentamens voortaan door jongens en meisjes apart te laten maken, zodat het stereotype niet de kans krijgt zijn verlamme werk te doen.

bron: De Psycholoog

Erratum septembernummer 2001

Het septembernummer van 2001 bevatte een overzichtsartikel van Henk van Tilborg over Elliptische Kromme Crypto Systemen. In de introductie van dat artikel wordt Eric Verheul (PricewaterhouseCoopers) aangehaald, die tijdens het NMC 2001 over dit onderwerp een van de hoofdvoordrachten gaf. In dit intro wordt Eric Verheul niet correct geciteerd. Tijdens het Mathematisch Congres heeft hij slechts aangegeven dat de veiligheid van Elliptische Kromme Crypto Systemen nog steeds achtervolgd wordt door onzekerheid, niet dat Elliptische Kromme Crypto Systemen achterhaald zouden zijn. In een van de komende nummers van het Nieuw Archief zal Eric Verheul een overzichtsartikel schrijven over het cryptosysteem XTR dat gebaseerd is op het conventionele discrete logaritme probleem, en dat bij de huidige veiligheidsparameters gemiddeld sneller is dan Elliptische Kromme Crypto Systemen.

De hoofdredactie

Van het WG

| WG activities

Deze rubriek is een kroniek van de activiteiten van het Wiskundig Genootschap. Van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan en toekomstige activiteiten worden aangekondigd.

Over publiceren en communiceren

Het is u wellicht opgevallen dat de Mededelingen van het Wiskundig Genootschap niet meer op papier verschijnen. Hoewel wij nog geen reacties hebben ontvangen, hebt u mogelijk vragen over deze verandering. Graag willen wij de redenen hiervoor toelichten.

De opheffing van de papieren Mededelingen is een onderdeel van een heroverweging van de communicatie tussen de WG-organisatie (NAW-redactie, bestuur, commissies) enerzijds en de leden anderzijds. De WG-organisatie verspreidt onder de leden verschillende soorten informatie, variërend van aankondigingen van voordrachten, via recensies van boeken, tot wetenschappelijke en beschouwende artikelen. Dit leidt tot variabele eisen aan vorm en snelheid van verspreiding. We hebben daarom de volgende verdeling gemaakt:

- Informatie zonder urgentie (artikelen, boekrecensies, nabesprekingen) wordt gepubliceerd in het Nieuw Archief.
- Dringender zaken, zoals de agenda (waarin aankondigingen van voordrachten en seminars), worden verzameld en aangeboden via de vernieuwde website. Deze site zal in 2002 actief worden, en gebruikers kunnen steeds de actuele gegevens in onze agenda opvragen. Deze aankondigingen worden ook in de elektronische Mededelingen opgenomen die per email aan alle leden worden verzonden (waar mogelijk).

De nadruk op snelheid voor bijvoorbeeld de agenda is niet uit de lucht gegrepen. Over de jaren heen zijn de papieren Mededelingen hiervoor minder doelmatig geworden. Bijeenkomsten worden op steeds kortere termijn georganiseerd, en steeds meer activiteiten passen daardoor niet in het publicatieschema van de papieren Mededelingen. De elektronische versie verschijnt daarom tweewekelijks.

Ook de verschuiving naar het Web is een bewuste stap. Het biedt een aantal voordelen boven andere vormen van communicatie, vooral voor een informatievoorziening die 'automatiseerbaar' is. Een treffend voorbeeld: de ledenlijst, die via de website op naam doorzoekbaar is, wordt al jaren veel gebruikt. Hieraan zijn toegevoegd:

- De reeds genoemde elektronische agenda. Een pagina op de website met de aankondigingen van voordrachten, seminars, conferenties, enzovoort. U kunt hier aankondigingen plaatsen via het bekende emailadres medwg@cw.nl, maar u kunt ook een aankondiging bij de website zelf aanmelden; in dat geval wordt deze terstond geplaatst en met de eerstvolgende rondzending meegenomen.
- Onder leiding van Wim van der Meiden en later Jaap Top heeft het WG een indrukwekkende collectie boekbesprekingen gepubliceerd in de Mededelingen en het Nieuw Archief. Van de recensies die nog in elektronische vorm beschikbaar zijn is een bestand gemaakt dat doorzoekbaar is op auteur, titel en recensent.

De beste reclame is de website zelf: ik raad u dan ook aan om een bezoek te brengen aan <http://www.wiskgenoot.nl>

Een belangrijk deel van deze ontwikkelingen wordt mogelijk gemaakt doordat de band tussen CWI en WG onlangs is versterkt. Het CWI biedt plaats en ondersteuning aan de website, en sponsort het WG verder door het verwerken van de informatie voor de elektronische Mededelingen voor zijn rekening te nemen. Voor deze steun zijn wij uiteraard dankbaar.

Ontvangt u nog geen elektronische Mededelingen van het Wiskundig Genootschap en wilt u dat wel, maak dan uw emailadres kenbaar door een email te sturen naar wiskgenoot@wiskgenoot.nl.

Mocht u nog vragen hebben, schrijft u dan naar het secretariaat: Mark Peletier, CWI, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam, of wiskgenoot@wiskgenoot.nl.



Geertje Hek

Korteweg de Vries Instituut,
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam
ghek@wins.uva.nl

Mark Peletier

Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
Mark.Peletier@cw.nl

Studiegroep Wiskunde in de industrie

Voorpret is een belangrijk ingrediënt van een geslaagde vakantie. Al is de ‘Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2002’ niet echt een vakantie, de voorpret is er niet minder om. Lezers die de Studiegroep in het verleden meegemaakt hebben zullen bij deze woorden de kriebels al voelen opkomen — hun raden we aan niet verder te lezen. Vakantieherinneringen worden door jezelf immers ook beter verwoord dan door een ander. Voor degenen voor wie dit begrip nieuw is wordt hieronder geprobeerd een deel van de voorpret over te brengen.

‘Toegepaste wiskunde’ is *en vogue*. Daar zijn goede redenen voor te geven — dienstbaarheid aan de maatschappij, aantrekkingskracht op toekomstige studenten en meer van die dingen. Vaak ontbreekt in dit soort opsommingen een essentieel element — toegepaste wiskunde is gewoon, en hier komt ‘ie, *leuk*. Wiskunde zelf is al leuk, dat zijn wij van harte met Hendrik Lenstra eens [5], maar goede toegepaste wiskunde is wat ons betreft *extra* leuk.

Temidden van de vele manieren om toegepaste wiskunde te bedrijven neemt die van de ‘Studiegroep Wiskunde met de Industrie’ een hele speciale plaats in. Onder normale omstandigheden zijn rust, contemplatie, een grondige bestudering van de literatuur en een uitgebreide toetsing aan experimentele data gewaardeerde en vaak zelfs onontbeerlijke elementen van succes. Bij de Studiegroep is dit alles anders.

Het recept

Hoe werkt het? Je brengt gedurende één week twee groepen samen:

- vijf tot zeven mensen uit de toepassingsgebieden, voornamelijk bedrijven, die ‘problemen’ hebben;
- een groep wiskundige specialisten, die gaat proberen de eerste groep met hun ‘problemen’ te helpen.

We noemen de eerste groep voor het gemak ‘industriëlen’, en de tweede ‘wiskundigen’, hoewel het onderscheid in de praktijk vaak niet zo strikt is. De wiskundige specialisten hoeven overigens geen hoogleraren te zijn en evenmin toegepaste wiskundigen. Ze kunnen evengoed aio of hogerejaars student zijn, en zich in het dagelijks leven met abstracte wiskunde bezighouden.

Een week is erg kort. De eerste dag, de maandag, is voor een groot deel gevuld met de presentaties van de industriëlen, die hun probleem uitleggen aan de wiskundigen (en hun collega-industriëlen, die overigens vaak een helder inzicht blijken te hebben in andermans problemen, en een enkele keer zelfs bijdragen aan de oplossing ervan). De laatste dag, de vrijdag, gaat op aan presentaties waarbij de wiskundigen hun bevindingen presenteren.

In drie dagen moet het echte werk dus gebeuren! In de praktijk heb je iets meer dan drie dagen, omdat tijdens de presentaties op maandag en tussen de bedrijven door de discussies meteen al op gang komen. Hiermee komen we op een belangrijk aspect van de

Studiegroepen: de combinatie van de korte tijd en de specifieke vraagstelling zorgt voor een bijzondere sfeer. Er is weinig tijd om lang en diep na te denken, of een uitgebreid literatuuronderzoek te doen. En experimenten uitvoeren is alleen mogelijk als je ze ter plekke kunt construeren (maar dat gebeurt in de praktijk wel! — zie figuur 1). Laten we eerlijk zijn, je kunt van zo’n week niet dezelfde diepgang en inzicht verwachten als bijvoorbeeld van een vierjarig promotieonderzoek.

Waarom blijkt desondanks al vele jaren (in Engeland hebben ze hier al dertig jaar erva-



Figuur 1 Een experiment: zelfgemaakte verf laten drogen. ‘Watching paint dry’ is Engels idioom voor iets dat zinloos en saai is. Het feit dat wiskundigen zich daarmee bezig hielden heeft alle kranten gehaald.



Figuur 2 De uitdaging: verwijder de kreukels uit het dak van deze tent.

ring mee) dat deze Studiegroepen nieuwe inzichten leveren, nieuwe onderzoekswegen inslaan, aanleiding geven tot nieuwe soorten wiskunde, en misschien het belangrijkste, dat in de meeste gevallen de industriële tevreden naar huis gaan, vol nieuwe ideeën en met vernieuwd élan? Het antwoord is simpel: alweer omdat het *leuk* is. Het is leuk om samen met andere geïnteresseerde wiskundigen een *ad hoc* team te vormen, samen de uitdaging aan te gaan, en samen er hard aan te trekken om het probleem zo goed mogelijk aan te pakken. En met de verenigde kennis en inzicht van je teamgenoten blij je in slechts enkele dagen een verbazingwekkend begrip te kunnen creëren van de situatie van je industrieel en het probleem helemaal als jouw probleem te gaan zien. De suggesties voor verbetering komen dan vanzelf.

Na deze wervende woorden is er ongetwijfeld één vraag die nog door het hoofd speelt: om wat voor problemen gaat het eigenlijk? We zouden met alle plezier alvast inzage geven in de problemen die in februari tijdens de Studiegroep 2002 in Amsterdam aan de orde komen. Die zijn op dit moment van schrijven nog niet bekend. In plaats daarvan beschrijven we twee problemen uit voorgaande studiegroepen.

Watching paint dry

We hadden de 'mathematicians watching paint dry' al genoemd. Dit probleem werd in Bath (UK) in 1997 aan de orde gesteld door de verfafdeling van het chemische concern ICI. De vraagstelling was simpel: de consument heeft een aantal eisen (snel klaar, geen organische oplosmiddelen, kleurvastheid) die blijken te leiden tot barsten in de verf. Er is een



Figuur 3 Een ontwikkelbaar oppervlak als oplossing van het tentprobleem.

omvangrijke basis van experimentele kennis, maar een overtuigende theoretische beschrijving van het drogen van verf op waterbasis ontbreekt. Dit was de uitdaging aan de Studiegroep.

De groep heeft tijdens de week zelf een aantal mogelijkheden op een rij gezet voor het mechanisme, of de combinatie van mechanismen, die verantwoordelijk zou kunnen zijn voor het barsten [3]. Ook zijn er tijdens de week zelf experimenten gedaan: om een gevoel te krijgen voor de relatie tussen de samenstelling van verf en het drogingsproces hebben de onderzoekers een aantal verschillende soorten nep-verf gemengd uit huishoudelijke ingrediënten, zoals talkpoeder (de vuller) en maïzena (de latex). De zelfgemaakte verf barstte in op verschillende manieren, al naar gelang de samenstelling, maar wat ze ook probeerden, de ICI-verf wilde maar niet barsten. De vragen die tijdens deze week gerezen zijn hebben inmiddels aanleiding gegeven tot nieuw lange-termijn onderzoek naar het drogen van verf [1–2].

Tentdaken

Tijdens de meest recente Nederlandse Studiegroep, in 2000 in Twente, bracht de tentenfabrikant Gerjak uit Enschede het volgende probleem: voor een gegeven metalen frame en caravan, hoe moet de stof geknipt en genaaid worden om een voortent te krijgen die mooi strak staat? De fabrikant had voor de volledigheid een frame meegenomen, dat in de tuin werd opgesteld.

In de aanpak van het probleem [4] maakte de groep gebruik van ontwikkelbare oppervlakken, waarvan de meest simpele definitie is 'dat je ze kunt construeren uit een stuk pa-

pier'. Een kegel en een cylinder zijn ontwikkelbaar, een bol niet. Het verband met het tentprobleem is duidelijk: men maakt een tent door een stuk vlak doek uit te knippen en in een vorm te vouwen. Opvallend genoeg bleken er voor het Gerjak-frame meerdere keuzen te zijn voor een dergelijk ontwikkelbaar oppervlak, en na (theoretische én experimentele!) vergelijking met andere vormen werd gekozen voor een criterium van kleinste oppervlak binnen de klasse van ontwikkelbare oppervlakken. Dit leverde een fraaie en kreukelloze tent.

De fabrikant had echter nog een tweede vraag. Veel van de tenten die zij verkopen moeten passen op verschillende frames (omdat een caravan een onderdeel van het frame vormt, en de caravans onderling verschillen). De uitdaging is dezelfde als voorheen, maar voor een gegeven klasse van frames, in plaats van voor één specifiek frame. Dit is een veel lastiger probleem, omdat kreukels niet uit te sluiten zijn. De wiskundige moet dus de vraag beantwoorden of een gegeven gekreukeld doek nog acceptabel is. Het antwoord hierop is sterk subjectief. Desondanks heeft de groep een aantal aanbevelingen kunnen doen wanneer de *excess area*, het hiaat tussen minimaal en werkelijk oppervlak, als maatstaf wordt genomen. Een aantal ideeën dat tijdens de Studiegroep gerezen is, heeft later geresulteerd in aanpassingen in de ontwerpen van de fabrikant.

Bij het verschijnen van dit artikel zijn enkele van de problemen van SWI2002 al bekend — kijk daarvoor op de website van SWI2002. Ook inschrijving is hier mogelijk. Toegepaste wiskunde: makkelijker kunnen we het niet maken, wél leuker!

Meer informatie

Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2002, 18–22 februari 2002, Amsterdam.

De Studiegroep wordt georganiseerd door het CWI en de UvA, en wordt financieel gesteund door het programma 'Wiskunde Toegepast' van STW en NWO-EW.

Informatie en aanmelding:

<http://www.cwi.nl/conferences/swi2002>

Referenties

- 1 B. W. van de Fliert and R. van der Hout, 'Stress-driven diffusion in a drying liquid paint layer', *Eur. J. Appl. Math.*, 9:447–462, 1998.
- 2 B. W. van de Fliert and R. van der Hout, 'A generalized Stefan problem in a diffusion model with evaporation', *SIAM J. Appl. Math.*, 60(4):1128–1136, 2000.
- 3 B. W. van de Fliert and C. P. Please, 'Mud-cracking' in a latex paint film'. In C. J. Budd, editor, *Proc. 30th Eur. Study Group with Industry*, 1997. <http://www.maths.bath.ac.uk/CONFERENCES/ESG197/ici.ps>
- 4 B. van 't Hof, H. Margaretha, H. Susanto and F. P. H. van Beckum, 'Caravan awnings: a geometrical problem'. In B. W. van de Fliert and G. Meinsma, editors, *Proc. 39th Eur. Study Group with Industry*, pages 45–55. Shaker Publishing BV, Maastricht, 2001.
- 5 H. W. Lenstra, 'Aeternitatem cogita'. In *Nieuw Archief voor Wiskunde*, maart 2001, vijfde serie, deel 2, nummer 1.

Floris Takens

Mathematisch Instituut, Universiteit Groningen
Postbus 800, 9700 AV Groningen
F. Takens@math.rug.nl

Afscheidsrede Floris Takens

From chaos to early warnings

Een van de grondleggers van het moderne vakgebied 'dynamische systemen', Floris Takens, werd onlangs zestig jaar. Tegelijkertijd ging hij met emeritaat. Ter ere van zijn bijdragen aan de internationale ontwikkeling van de dynamische systemen, werd in Groningen van 25–29 juni een workshop 'Global analysis of dynamical systems' georganiseerd.

Op 30 juni werd deze viering besloten met een publiek evenement in de Senaatszaal van de Universiteit Groningen. Jacob Palis, president van de International Mathematical Union, vriend en collega met wie Takens veel heeft samengewerkt, sprak in de eerste lezing zijn lof uit over het werk en de persoon van Floris Takens. De tweede lezing die dag was van Floris Takens zelf.

Het onderstaande artikel is een bewerkte versie van die rede. Takens bespreekt hoe de theorie van de niet-lineaire dynamische systemen wordt toegepast om bij een chemisch proces vroegtijdig voor klontering te waarschuwen, daar waar gewone lineaire tijdreeks-analyse faalt.

We first need to say a few words about chaos. I do not mean chaos here in the theological sense of 'the disorder of formless matter and infinite space which is supposed to have existed before the creation', but rather in the mathematical sense, which refers to a situation where the time evolution is strictly deterministic, but still, to some extent, unpredictable. I will illustrate this somewhat paradoxical state with an example: the game of billiards.

Billiards

This game is played on a table of approximately 250 cm by 125 cm, usually with 3 balls (although there are variants with 2 to 22 balls); when a ball hits a side of the table it is reflected back. The general idea is to hit one of the balls, giving it an initial velocity, such that it collides with other balls. The rules of the game give prescriptions about which balls should collide and in which order. With some experimentation one finds that it is not hard to hit a ball in such a way that it collides with a prescribed ball. What happens after this first collision, however, is harder to control. This is due to the fact that small differences in the direction of the initial velocity of the first ball lead to big differences after the first collision. This can be understood in the following way: if

the distance between the first ball (which we hit directly) and the second ball, with which the first collision is to be made, is denoted by ℓ and if the diameter of the balls is denoted by d , then, in order to realize this first collision, we need to give the first ball an initial velocity whose direction is in a sector with opening angle approximately $2d/\ell$ (radians). This is illustrated in figure 1. So a deviation in the initial direction up to d/ℓ can cause the ball to go, after the first collision, anywhere; this means that ℓ/d is a measure of the amplification of small deviations in the velocity which occurs at the first collision. We shall call this amplification factor the *scattering factor*. Note that the value ℓ/d is only a rough estimate, since, among other things, we neglected the strength of the initial velocity and took only its direction into account.

The above argument can be repeated: after the second collision the effect of a deviation of the initial velocity is multiplied by the square of the scattering factor. Et cetera. This growth of the effect of a small deviation is the reason that skill is required to play this game, and that it could become a sport.

We can imagine a frictionless game of billiards where much more collisions are possible. After the n -th collision the effect of a deviation of the initial velocity, if sufficiently small, is multiplied by the scattering factor to the n -th power; this is called *exponential growth*. It turns out that exponential growth rapidly leads to unbelievable results.² For example, if one wants to hit a ball so that it collides with nine balls in a given order, then one has to take into account even the effect of the gravitational force between the player and the balls!³ In a situation like this, where the effect of small deviations in an initial state grow exponentially with time, one speaks of *sensitive dependence on initial states*. Systems with sensitive dependence on initial states are called *chaotic*.

The same arguments can be applied to the molecular motion in a gas. Even without quantum mechanics, this rapidly leads to complete unpredictability.

General description

The fact that isolated systems, which are reasonably predictable over short periods, may be completely unpredictable over longer periods is known in other situations too. One may think of the weather. However, in the case of the weather we have a system,

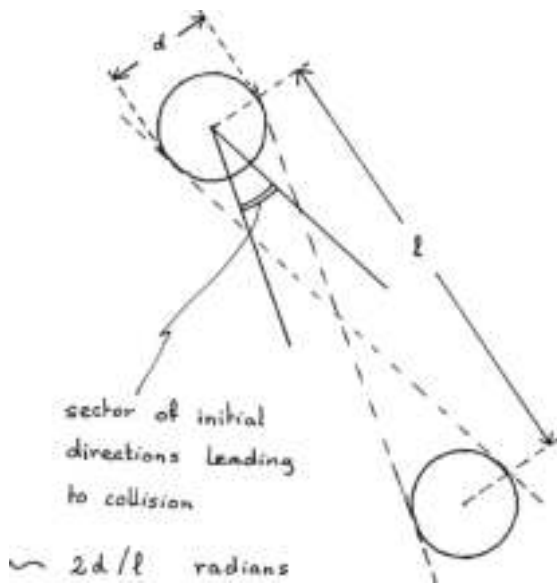


Figure 1 The game of billiards

the state of which has a much greater complexity (or dimension).

With this we mean the following. The state of a game of billiards is given by the positions of, say, three balls (that is, by six numbers) and their velocities (another, by six numbers), at least if we neglect the spinning of the balls; so the state of the game of billiards is 12 dimensional (given by 12 numbers). The state of the meteorological system, as it is represented in present day computer models, has a dimension of the order of 5,000,000. In principle, and this was the standard opinion up to a few decades ago, the unpredictability of the weather is related to the fact that its states have such a high complexity.

Around 1970, within the framework of the mathematical theory of dynamical systems, Stephen Smale and co-workers had developed a geometric theory of abstract dynamical systems with both low dimension states and with sensitive dependence on initial states.⁴ On the other hand, already in 1963 the meteorologist Edward N. Lorenz had experimentally found sensitive dependence on initial states in an extremely simplified model of the meteorological system.⁵ (In this model the states had only dimension three.) Years later it became known that these investigations were dealing with the same phenomenon, only by different means. It has now become clear that the unpredictability of the weather, at least over longer intervals than a few days, is related to sensitive dependence on initial states. This effect is known as the *Butterfly effect* after the title of a paper by Lorenz: '*Can the flap of a butterfly's wing stir up a tornado in Texas?*'. Apart from this, it is questionable whether the meteorological system should be considered as strictly deterministic.

Deterministic processes with sensitive dependence on initial states were produced as laboratory experiments. For example, in nonlinear electronic devices, chemical reactions, and also in mechanical experiments involving resonances. Also, one is now convinced that this sensitive dependence plays a role in the dynamics of our solar system, but that is on a much longer time scale.⁶ In general however, deterministic systems with low dimensional states are rare, especially outside the laboratory. Still one may expect that there are situations which can be realistically described in terms of a combination of sensitive dependence on initial states and some randomness.

Chaos, determinism, and predictability

The notions of determinism, chaos, and predictability can be illustrated in a schematic way by following the future development of an initial state or a set of initial states for a short time (say one unit of time) and also for a longer time interval, here denoted by $T \gg 1$. In figure 2 we compare the deterministic case with the stochastic case: that is the case where the state at time $t + 1$ is not completely determined by the state at time t . The indeterminacy is supposed to be completely random. These diagrams suggest that, if we cannot distinguish between nearby states, the difference between the stochastic case and the chaotic case is only small, except that in the chaotic case the short term predictability is better. This short term predictability can still be somewhat extensive: for the meteorological system it is this better predictability on the short term that makes weather forecasts better than statistical predictions such as 'the weather of tomorrow will be like the weather of today with some correction in the direction of the climatological averages for the time of the year'.

In situations where it is interesting to know how predictable the future is, one may think for instance of the financial markets, one might want to know whether one deals with randomness or with sensitive dependence on initial states. As mentioned before, pure determinism is rare, so we expect no pure sensitive dependence on initial states. However, we should be able to detect the difference between the extreme cases: 'purely random'⁷ and 'purely deterministic but with sensitive dependence on initial states'. This is a question in *time series analysis*.

A time series is a, usually long, sequence of measurements $\{x_1, x_2, \dots\}$. In terms of the game of billiards without friction mentioned earlier one may think of the position of one of the balls measured at each of the successive collisions. The question is how to decide whether such a time series is generated by a deterministic process. (In the case of such a time series from the game of billiards it will be very hard to detect the deterministic principle.)

Consider the following two examples shown in figure 3. In this case one can find out, by an hoc method, that time series (a) is predictable: Plotting for each n the point with coordinates (x_n, x_{n+1}) , one sees that x_{n+1} , for the first time series, is completely determined by x_n (within the accuracy of the figure) so that the system must be deterministic. One can even conclude that the scattering factor equals 5. Time series (b) in figure 3, on the other hand, does not reveal any dependence of x_{n+1} on x_n . In this way we detected the difference between the two time series very clearly. However, it is easy to produce examples where this ad hoc method does not work.

Linear time series

There is a systematic statistical theory dealing with time series.⁸ It describes such series in terms of autocovariances (and average values). This is what one usually calls linear time series analysis. These autocovariances contain information about the average dependence between successive elements of the time series, but these autocovariances are absolutely unable to give information about the question whether the time series is generated by a deterministic process or not. In fact, whatever the autocovariances are, one can make a deterministic process generating time series with the same autocovariances. When the original time series was generated by a stochastic process, the corresponding deterministic process has sensitive dependence on initial states. For exam-

ple, the two time series in figure 3 have equal autocovariances, the first being generated by a deterministic process with sensitive dependence on initial states, while the second is purely random.

This means that additional methods for the analysis of time series are needed if one wants to get an indication whether a given time series is generated by a deterministic process or not; such methods can be expected to also give information about the short term predictability of the time series.

Nonlinear time series and predictability

The main systematic way to analyse a time series from the deterministic point of view makes use of the so called correlation integrals $C^k(\varepsilon)$, with k a positive integer and ε a positive real number. The number $C^k(\varepsilon)$ is the probability that two randomly chosen segment of length k differ by at most ε . Although this definition was motivated by the problem of analysing deterministic systems by the time series which they produce, one can see directly that these quantities should give information in general about the predictability of a time series in the following way:

Suppose we recorded a quantity during a (long) period so as to obtain a time series $\{x_1, \dots, x_N\}$. The question is ‘how to predict the next value?’ and ‘how reliable is our prediction?’. We try to predict by analogy: we search for a segment in the past which equals, up to a small error, the final segment $x_{N-k+1}, \dots, x_N$.

We have to fix here the length k of the segment and the error ε which we are willing to allow; these quantities are to be chosen by a trial and error method. If we have found such a segment $x_m, \dots, x_{m+k-1}$ in the past, we base our prediction on the assumption that: 'what happened (approximately) in the past will happen (approximately) again'. This is why we predict that x_{N+1} will be close to x_{m+k} . Now the question is: how reliable is such a prediction? An indication can be obtained from the correlation integrals $C^k(\varepsilon)$. Namely, in making the prediction we assume that two segments of length k , which were close, say within distance ε , will stay close if they are both prolonged to length $k+1$. The probability that this will indeed happen is equal to $C^{k+1}(\varepsilon)/C^k(\varepsilon)$. So if this quantity is close to 1 then the prediction has a high probability to be correct within an error of ε , but if this quantity is close to zero, the prediction has only a very small probability of being correct within an error of ε .

The above method of prediction is rather primitive and can be improved. Still the quantities $C^{k+1}(\varepsilon)/C^k(\varepsilon)$ give a good indication of the predictability. In fact it turns out that very often $C^{k+1}(\varepsilon)/C^k(\varepsilon)$ becomes practically constant for increasing values of k (and ε fixed). So one defines the ε -entropy $H(\varepsilon)$ as

$$H(\varepsilon) = -\log(C^{k+1}(\varepsilon)/C^k(\varepsilon)).$$

The effect of ‘ $-\log$ ’ is that $H(\varepsilon) \geq 0$ and that the smaller $H(\varepsilon)$ is, the more reliable the predictions are. So $H(\varepsilon)$ is a measure for the *unpredictability*. For a time series generated by a deterministic system $H(\varepsilon)$ stays finite for decreasing ε , whereas for a time series generated by a random system, $H(\varepsilon)$ tends to infinity as ε goes to zero.

So the unpredictability, or entropy, can be estimated in terms of the way $C^k(\varepsilon)$ decreases as k increases.

Similarly, the *dimension* $D(k)$ of the states can be estimated in terms of the way $C^k(\varepsilon)$ decreases as ε tends to zero: if

$$C^k(\varepsilon) \sim \varepsilon^{D(k)}$$

for fixed k , then $D(k)$ is an indication for the dimension of the states of the system. For a time series generated by a deterministic system $D(k)$ stays bounded for increasing k and approaches the ‘real dimension’; for a time series generated by a random system, the values of $D(k)$ increase in an unbounded way. The values of $D(k)$ are also related to unpredictability: if $D(k)$ is big then $C^k(\varepsilon)$ decreases very fast with decreasing ε , which means that one needs an extremely long time series in order to find segments in the past which are sufficiently close to the ‘final segment’.

Although the question of predictability was central in the above discussion, and also played an important role in the development of the theory of nonlinear time series analysis, it now seems that the more important applications go in a somewhat different direction. There were no cases outside the laboratory where unexpected predictability was found. There have been some claims that the financial markets allowed better short term predictions with these 'nonlinear' methods, but these claims were not really substantiated. And that was to be expected one way or the other: if the method would have worked, it would have become known, many people would have used it, and that would have changed the dynamics of the markets. But in turn this would have ruined the method since it is based on the assumption of stationarity (what happened in the past will happen again).

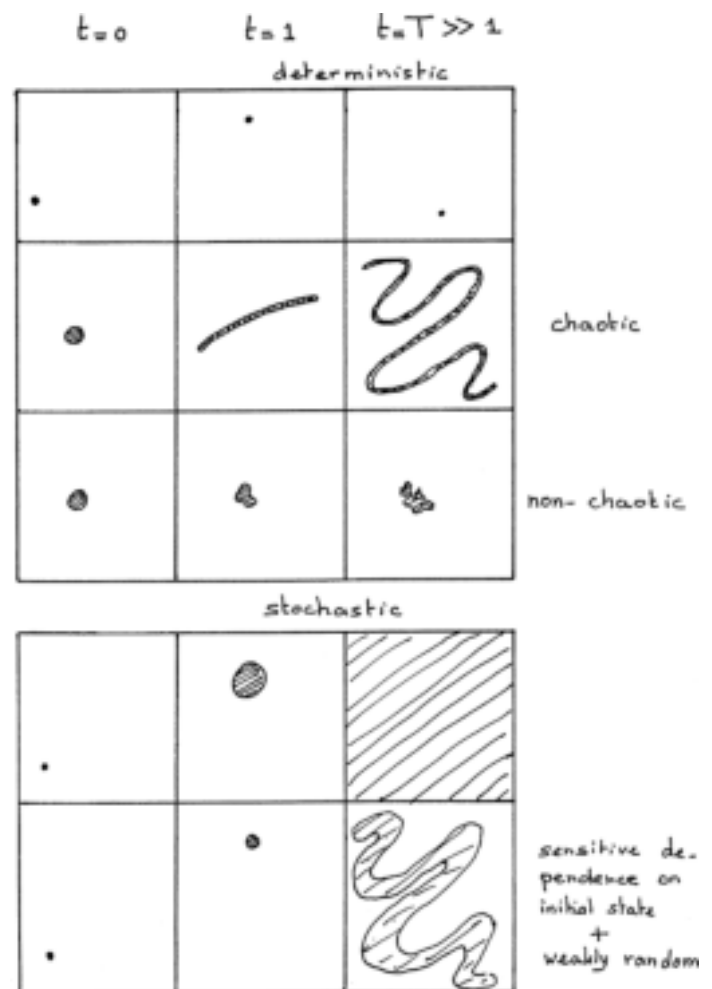


Figure 2 The behaviour of deterministic and stochastic systems

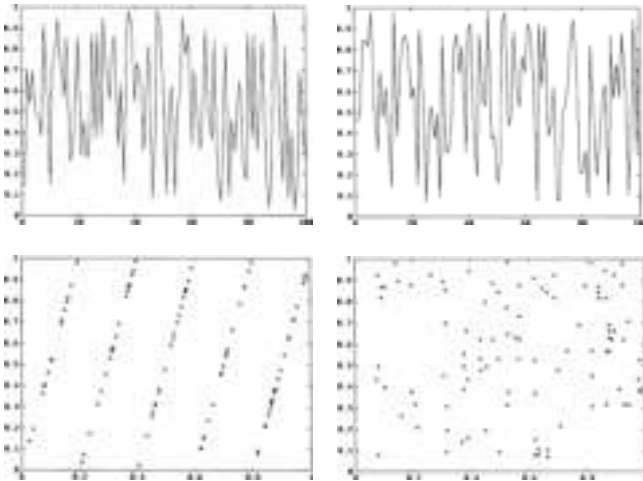


Figure 3 On top, on the left a deterministic time series, and on the right a chaotic one. Down, x_{n+1} plotted against x_n , for both cases.

Early warnings

The general goal of a system for early warnings is to detect from the recordings of a dynamical process whether some undesirable change is to be expected. We first consider the case of a chemical reactor of which a characteristic variable, like the pressure, is measured. This refers especially to so called fluid bed reactors as studied for example by the group of Van den Bleek at the Technical University of Delft. Such chemical reactors can sometimes get stuck, due to agglomeration of the reacting particles. If such an event is not avoided, then, especially in the case of big industrial reactors, it may be a big job to clean the reactor and the financial consequences can be considerable. So one is interested in a system that produces a warning, as early as possible, whenever the process shows a tendency of going wrong. False alarms should be reduced to a minimum at the same time. The obvious strategy is to analyse whether the general characteristics of the measured signal change. It turned out that the analysis in terms of autocovariances, and related quantities, do not lead to reliable results. Also these pressure signals are not predictable over time intervals which are sufficiently long for the predictions to be used directly for a warning system. What, however, turns out to be a much better characteristic of the signal is the predictability itself: a change in the entropy is a good indication that the size of the particles changes (due to agglomeration), at least for reactors of laboratory size which were used for the investigations so far.

Another situation where these correlation integral methods are used is that of the analysis of the electro encephalogram (EEG) recordings of epileptic patients. One of the objectives there is to be able to give an early warning prior to a seizure, i.e. an epileptic attack. In the last decade groups in both Germany and France have made considerable progress in predicting these seizures by applying methods based on correlation integrals.⁹ In this case, however, it is not the entropy but the dimension which serves as the most important indicator.

In both these cases, and possibly in other such applications, these correlation integral methods are applied to time series from systems which can certainly not be considered as both deterministic and having low dimensional states. This means that the mathematical theory of correlation integrals for time series from deterministic but chaotic systems is not valid. Still, it is not unreasonable to expect that these quantities, like entropy and dimension,

are meaningful beyond the domain of validity of the mathematical theory; of course, this needs experimental validation in each case. The reason why in one case (chemical reactions) one has to use the entropy and in another (epilepsy) the dimension is essentially unknown but should have its origin in the dynamical structure of these processes. This means that the construction of these early warning systems is, to a large extent, a matter of experimentation. The main mathematical contribution is the construction of quantities which are relevant in special and simple, but relevant, situations and, hence, are candidates for useful indicators in the context of these more complicated dynamical processes.

Epilogue

After this exposé related to my own mathematical investigations in the last decades, I want to say a few words about some problems which seem to threaten the mathematical profession. I am thinking of the dramatic decrease of the number of students over the last fifteen years. This is a development which is not only restricted to mathematics, neither is it restricted to the Netherlands. There are some general reasons for this decline which cannot be influenced by the mathematical (or general scientific) community, such as:

- research in mathematics, and other exact sciences, involves a lot of painstaking work, or, as we call this in Dutch, monkish work; this does not seem to fit well with the spirit of the age.
- since the end of the cold war, the urge of being ahead in high technology and basic research does not exist any more — design has become more important.

Recently, there have been many initiatives to promote the interest in mathematics of future students, which led to fruitful cooperation between universities and the institutions for secondary education. Although these initiatives are very worthwhile, and should certainly be continued, the effect does not seem to be sufficiently strong. In my opinion there are reasons to look also at other aspects of this problem. Without giving concrete solutions I want to point to two events in the recent years which, I think, one should keep in mind when thinking about the image of mathematics.

Secondary education

The first event I am thinking of is the discussion about the reform of the program of secondary schools in the Dutch parlement in 1997. In the law implementing this reform so-called profiles were introduced defining the different types of final examinations giving entrance to the university. These profiles were, and are, in order of increasing emphasis on mathematics:

1. society and culture,
2. society and economics,
3. nature and health, and
4. nature and technology.

In this discussion one of the members of parlement expressed the concern that the first profile would be too easy and, hence, would attract many students looking for an easy way out. In the answer from the government a suggestion was proposed: an amount of mathematics could be added to this first profile and, in order not to expand the number of mathematics teachers needed, this amount would be subtracted from the fourth profile. This led to a discussion in the newspapers. The representatives of professions,

for which this first profile was intended, protested on the basis that mathematics was not needed for making this profile more serious and that mathematics could be easily replaced by more relevant subjects, such as Latin. The representatives from mathematics and the exact sciences protested because they did not want to see mathematics diminished. So the whole idea disappeared.

Still the story shows something. Even the responsible politicians seem to have the idea that one of the main purposes of mathematics is to make a curriculum heavier. Given this fact it is no surprise to see that people are often proud *not* to know any mathematics: they were smart enough not to become a victim of such artificial obstacles.

This event shows in my opinion that many hours of mathematics in the secondary school curriculum is not necessarily a good thing, neither for the students nor for the mathematical profession.

Quiz master problem

Another event is the public discussion in newspapers, not only in the Netherlands, but also in the United States and Germany, about the so called *Quiz Master Problem*. I am grateful to Niels Kalma for providing copies of a substantial part of the newspaper discussion. The problem can be stated as follows:

In a quiz a candidate is confronted with three identically looking doors; behind one of the doors there is a prize. The candidate is invited to select one of the doors, which however is not yet opened. Then the quiz master opens one of the two doors which were not selected by the candidate, showing that behind that door there is no prize. Now the candidate is allowed to change the door of his preference. Then that door is opened, and if the prize is behind that door, the candidate will win it. The question is: what is the better strategy, to change or not to change ones door of preference after the quiz master has opened one door behind which there was no prize.

A correct solution of the problem as given in the German weekly *Die Zeit* is the following.

There are three possibilities with equal probability:

- *the prize is behind the selected door;*
- *the prize is behind non-selected door number one. In this case the quiz master has to open the non-selected door number two;*
- *the prize is behind non-selected door number two. In this case the quiz master has to open the non-selected door number one.*

It follows that in two of these three cases changing door leads to success; not changing door is only successful in one case. Hence changing door gives a greater probability to win.

Main sources of confusion in the discussion were arguments such as:

'Due to the quiz master opening one door, the probability of the prize being behind that door drops from 1/3 to 0; this probability moves to the door that is not opened and not selected.'

This is an unclear argument, which happens to give the right answer. It was countered by an equally unclear argument, which happens to give a wrong answer:

'Why doesn't the probability move to the selected door? By symmetry one would expect that half of this probability goes to each of the closed doors, so that for both the new probability is 1/2.'

What is missing in such arguments is a clear investigation of the notion of 'probabilities moving due to extra information' and the rules according to which these probabilities move. Such a discussion can be given, but it needs great care, since the notion of probability itself is already not free of problems. In the solution as given in *Die Zeit* such unclear notions are avoided.

Both in the discussion in Germany and in the Netherlands the general confusion was comparable. A difference was that the German *Die Zeit* resolved the discussion with a good explanation, not only of the right solution, but also explaining the reason of the confusion. In the Dutch daily newspaper *NRC Handelsblad*, which is considered to be a 'quality paper', this was beyond the available intellectual level and there the discussion was closed with the observation:

'The misunderstanding between common sense and mathematicians is clearly unbridgeable.'

This remark makes it clear that the journalist in question seems to have no idea that the essence of a mathematical argument is not that it deviates from common sense, but that it is absolutely conclusive, and hence does not make use of notions like 'probability changing due to extra information' without such notions being fully understood. Such conclusive arguments, sometimes called proofs, play a role in mathematics similar to experiments in the natural sciences. Though it seems much more solid to build on experiments than on arguments, it is a fact that the arguments used by Euclid, some 2500 years ago, are still essentially considered valid.

It shows that even those who are not proud of knowing no mathematics may not really care about the arguments they use and, hence, convey a disdain for mathematical reasoning. $\square$

References

- 1 Henk Broer, Bernd Krauskopf and Gert Vegter (Eds.), *Global Analysis of Dynamical Systems: Festschrift dedicated to Floris Takens for his 60th birthday*, Institute of Physics Publishing, 2001.
- 2 D.L. Meadows, *The limits of growth — A report of the Club of Rome on the predicament of mankind*, Universe Books, New York, 1972.
- 3 I. Ekeland, *Das Vorhersehbare und das Unvorhersehbare*, Harnak Verlag, 1985, p. 87.
- 4 S. Smale, 'Differential dynamical systems', *Bull. AMS* **73** (1967), 747–817.
- 5 E.N. Lorenz, 'Deterministic nonperiodic flow', *J. Atmos. Sci.* **20** (1963) 130–141.
- 6 See the *Bernoulli Lecture* by J. Laskar, Groningen, 2001
- 7 We did not define here this notion. It should be interpreted as generated by a stationary Gaussian process, or by an i.i.d. process.
- 8 M.B. Priestley, *Spectral analysis and time series*, Academic Press, 1981.
- 9 See C.J. Stam, *Klinische neurofysiologie, pleidooi voor een dynamische toekomst*, inaugural lecture at Vrije Universiteit Amsterdam, 2001.

Jaap Molenaar

Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
j.molenaar1@tue.nl

Inaugurele rede

Waarom werkt wiskunde

Jaap Molenaar, werkzaam bij de groep Toegepaste Analyse van de TU Eindhoven, aanvaardde op 31 mei 2001 het ambt van hoogleraar in de Toegepaste Analyse en Mathematische Fysica aan de Faculteit Toegepaste Wiskunde van de Universiteit Twente. De rede die hij daarbij uitsprak gaat over het modelleren van planeetbanen, schouders van vulmachines en gedrag van polymeren.

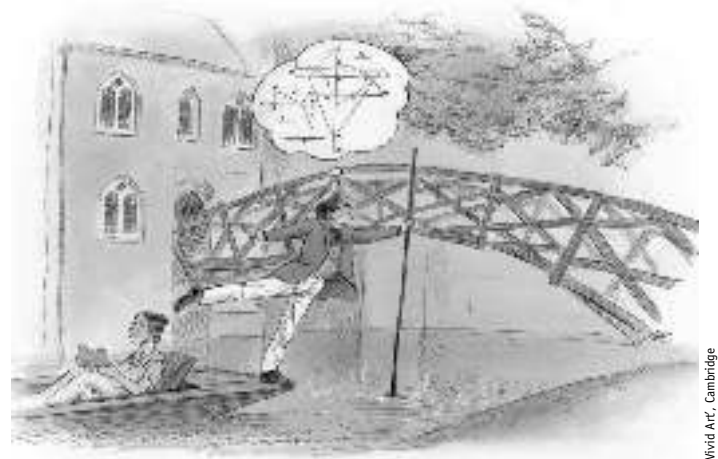
Vorig jaar liep ik voor het eerst van mijn leven rond in Cambridge, dat voornamelijk een vermaard centrum van wetenschap in het Verenigd Koninkrijk. Ergens in het centrum, bij het riviertje de Cam dat de stad doorsnijdt en waar studenten in een soort Giethoornse punters rondvaren, viel mijn oog op een eenvoudige houten brug (zie figuur 1). De constructie ervan fascineerde me meteen. Nieuwsgierig geworden kocht ik een informatiebrochure bij Queens' College en leerde daaruit dat deze koninklijke brug aangeduid wordt als de 'Mathematical Bridge' [16]. Gidsen vertellen stevast dat de wetenschappelijke reus Isaac Newton deze brug ontwierp. Wij geloven hen want het is voor deze rede van grote symbolische waarde. De eerlijkheid gebiedt echter te vermelden dat Newton stierf in 1727 en het eerste exemplaar van de brug werd gebouwd in 1747. Ik zal niet ingaan op de voordelen van de werktuigbouwkundige constructie die in deze brug is toegepast, hoewel sommigen aan de Universiteit Twente wiskunde schijnen te rekenen tot de construerende wetenschappen. Mij is dit dwaze denkbeeld een brug te ver.

De titel van deze rede brengt me er als vanzelf toe deze oratie in te delen in twee hoofdthema's:

1. Waarom werkt wiskunde in het algemeen?
2. Waarom werkt wiskunde voor polymeren?

Overigens is dezelfde tweedeling ook direct te herkennen in de omschrijving van mijn leeropdracht, die luidt: 'wiskundige modellering van kunststoffen'. Een praktijkvoorbeeld zal dienen als intermezzo en divertimento.

Laat ik vooraf vermelden dat ik me de afgelopen jaren intensief heb beziggehouden met wiskundig modelleren voor het bedrijfsleven in de vorm van contractonderzoek. Ik heb daarbij met veel plezier aan een groot aantal, zeer diverse onderwerpen gewerkt. De huidige aanstelling aan de Universiteit Twente markeert het begin van een geleidelijke overgang naar een periode waarin mijn onderzoek zich voornamelijk zal concentreren op enkele gebieden, een transformatie van generalist naar specialist dus. Het eerste gedeelte van de oratie is vooral



Figuur 1 De 'Mathematical Bridge' (Queens College, Cambridge, UK) in een cartoon die de negatieve beeldvorming rond de wiskunde bevestigt.



Jaap Molenaar

ook voor polymeren?

gebaseerd op wat ik in het verleden wijzer geworden ben, het tweede gedeelte richt zich op mijn wetenschappelijke toekomst. Omdat het modelleren van polymeren een nogal technische bezigheid is zal ik de meeste tijd besteden aan het eerste deel.

Wetenschap, wiskunde en modellen

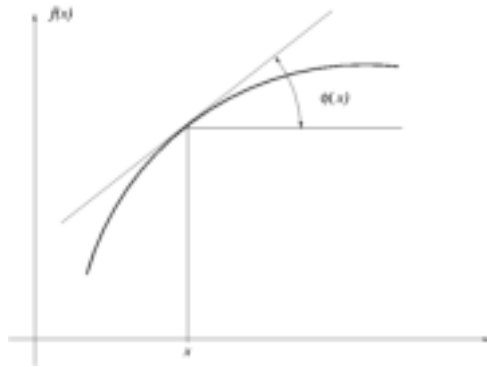
Om aard en functie van wiskundig modelleren duidelijk te maken ga ik, in filosofisch opzicht, ver terug en vraag me af wat wetenschap is. Een antwoord dat mij bevredigt luidt: wetenschap is het op een systematische manier onderzoeken van in de schepping gelegde structuren. Zie ook [7]. De eerste activiteit van een wetenschapper in een nog onontgonnen gebied zal bestaan uit observeren en classificeren: de gegevens netjes rangschikken. Een standaardvoorbeeld is de bioloog die het planten- en dierenrijk indeelt in rijken, stammen, klassen, orders, families en soorten. Maar ook een theoloog die een dogmatiek wil schrijven zal in eerste instantie niets anders doen dan de bijbelse gegevens ordenen. Overigens, ordenen is niet zo eenvoudig als het lijkt. Belangrijke vraag is uiteraard welk ordeningsprincipe de wetenschapper hanteert. De gebruikelijke indeling van de vogels op grond van uiterlijke kenmerken blijkt finaal ondersteboven te gaan als de basenvolgorde van het DNA, een moleculair kenmerk dus, als leidraad genomen wordt [14].

Verreweg het grootste deel van wetenschappelijk werk bestaat uit het modelleren van veranderingen in de tijd en plaats, de dynamica van structuren. Het modelleren van deze dynamica kan op vele manieren plaatsvinden. Altijd zal er een wetenschappelijke taal nodig zijn om relaties aan te duiden. Voor sommige gebieden is wiskunde de bij uitstek geschikte taal. Die rekenen we tot de exacte vakken. Wat is het eigene van de wiskunde? Wiskunde hangt ten nauwste samen met het

menselijk vermogen om te kunnen abstraheren. We kunnen leren tellen en als we één, twee, drie, ... uitspreken behoeven we er niet per se achteraan te zeggen of denken dat het om leden van het College van Bestuur, studenten of bezuinigingen gaat. We kunnen in termen van 'objecten' denken, waarbij alleen zekere eigenschappen ervan voor ons van belang zijn; niet of het object 'echt bestaat', gerealiseerd is in de omringende werkelijkheid. Wel moet ik daarbij onmiddellijk opmerken dat alle abstraheren in eerste instantie zijn inspiratie put uit de waargenomen werkelijkheid buiten ons. De meetkundige stoeit met abstracte punten, lijnen en vlakken omdat hij realisaties ervan voortdurend om zich heen ziet, al is geen enkele gerealiseerde lijn oneindig dun en geen enkel gerealiseerd punt verdwijnend klein. Uitgaande van de definiërende eigenschappen van een verzameling objecten is wiskunde de kunst om via logisch redeneren de daarbij behorende structuren te ontdekken. Dit leidt tot een wiskundige theorie. Als die definiërende eigenschappen goed passen bij één of ander meetbaar verschijnsel, noem ik die theorie een wiskundig model voor dat verschijnsel en noem ik dat verschijnsel een realisatie van dat model. Het generieke van de wiskunde uit zich hierin dat één wiskundig model vele realisaties kan hebben. Dezelfde vergelijkingen duiken in talloos veel verschillende gebieden op. De wiskundige brug heeft een bonte populatie aan passanten.

Wiskundig modelleren

Ik zal nooit vergeten hoe ik op de middelbare school in extase geraakte toen ik me voor het eerst bewust werd dat wiskunde de natuurlijke taal is voor de natuurkunde. In de wiskundeles werd er verteld over functies $f(x)$ waar je grafieken van kon tekenen. Als je wilde weten of f rond zekere x veel varieerde, bleek je de raakklijn aan de grafiek in dat



Figuur 2 Meetkundige interpretatie van 'afgeleide functie'

punt te moeten trekken. De helling van die raaklijn was dan een maat voor de variatie. Als u goed kijkt naar de 'wiskundige brug' in figuur 1 ziet u dat deze bestaat uit lijnen die raken aan een denkbeeldige boog. Tussen haakjes: de brug illustreert fraai het wiskundige principe dat een curve op een translatie na equivalent is met de verzameling van zijn geordende raaklijnen. En vervolgens voerde de wiskundeleraar de afgeleide functie, notatie $f'(x)$, in via de definitie:

$$f'(x) = \tan \varphi(x),$$

waarbij $\varphi(x)$ de hoek is aangegeven in figuur 2. Mooi abstract allemaal, maar waar het voor diende bleef duister. Vervolgens naar de natuurkundeles. Daar sprak de leraar op zeker moment over puntmassa's — heel vreemde objecten overigens, met gewicht maar zonder afmetingen — die een baan $x(t)$ volgden, waarbij x de positie was op tijdstip t . Als zo'n puntmassa bewoog bleek z'n snelheid $v(t)$ gegeven te worden door de afgeleide functie van $x(t)$: $v(t) = x'(t)$. Ik stond perplex: wat ik bij wiskunde in abstracto te horen kreeg, bleek bij natuurkunde een huis-, tuin-, en keukeninterpretatie te hebben. Wisten de leraren het zelf eigenlijk wel? Hadden ze het door? Van de natuurkundeleraar kon ik dat nog wel geloven, bij de wiskundeleraar had ik m'n twijfels.

Sinds die tijd heeft de combinatie van wiskunde en natuurkunde altijd mijn grote voorliefde gehad. U begrijpt mijn blijdschap over het feit dat deze zwak voor de mathematische fysica — liever spreek ik van fysische mathematica — bij mijn huidige benoeming goed tot zijn recht kan komen. Overigens, later leerde ik dat mijn extase niet erg terecht was. De infinitesimaalrekening, waartoe het differentiëren van functies behoort, is ontwikkeld door Newton en Leibniz toen deze nadachten over de basisprincipes van de mechanica. Geen wonder dat dan de ontwikkelde taal en het beschreven fenomeen goed passen. Wat echt reden tot verwondering moet geven is dat wiskundige modellen zo'n grote geldigheid blijken te bezitten. Als de basisingrediënten van een model goed aansluiten bij de essentiële kenmerken van het te beschrijven systeem, blijken alle structuren van het model te corresponderen met structuren van het systeem. Wigner vatte dit bondig samen in de titel van zijn bekende artikel *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences* [19]. De kern van wiskundig modelleren is te ontdekken welke eigenschappen van een systeem essentieel zijn.

Over de relatie tussen het beschreven systeem en het beschrijvende wiskundige model hebben al vele filosofen zich het hoofd gebroken [12]. Er zijn zelfs filosofen die zo ver gaan [11] te beweren dat alles wat ons brein aan wiskundige theorie verzint, ook ergens in het heelal een realisatie heeft. Ik betwijfel dit. Onze Schepper heeft ons uitgerust met fantasie en creativiteit — begrepen in het geschapen zijn naar Zijn beeld [20] — en daarmee kunnen wij zeer waarschijnlijk meer bedenken dan Hij zelf in de schepping heeft willen realiseren. Telkens als ik in een

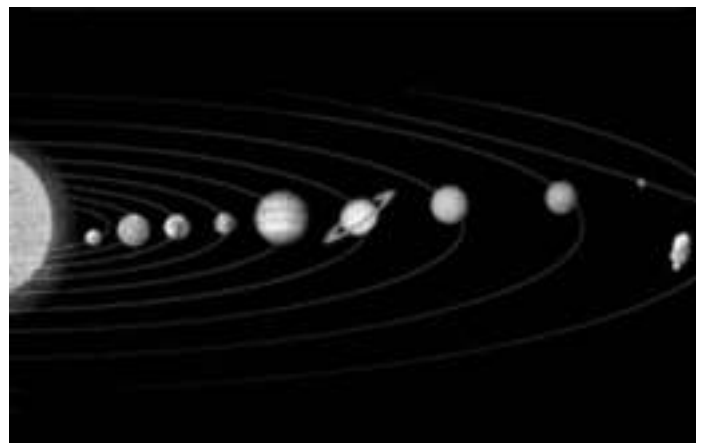
wiskundebibliotheek rondsnuffel word ik gesterkt in dit vermoeden. Trouwens, een blik in een willekeurig science-fictionboek heeft op mij hetzelfde effect.

Newton en ons planetenstelsel

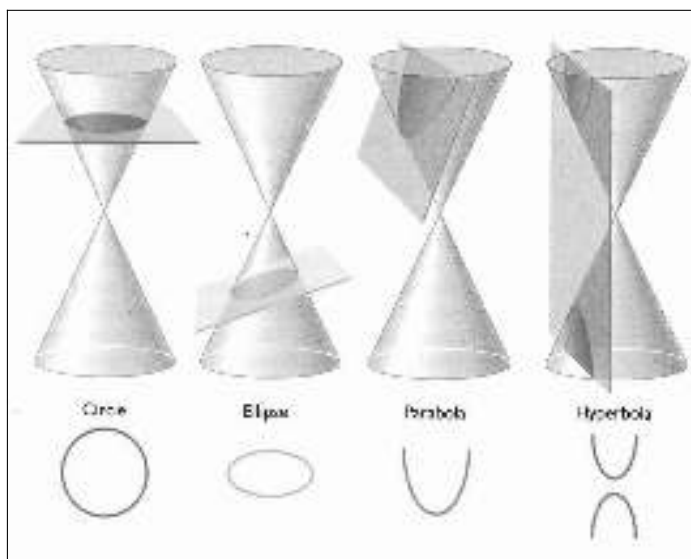
Een treffende illustratie van de kracht van wiskundig modelleren ontleen ik aan Newton. Hij kende de nauwkeurige waarnemingen van Brahe aan de planetenbewegingen en de daarop gegronde wetten van Kepler. De planeten draaien in bijna perfecte ellipsvormige banen rond de zon (zie figuur 3). Als ik aan ons planetenstelsel denk, associeer ik het onmiddellijk met het getal 2. Ik zal uitleggen waarom. De planeten blijven in de buurt van de veel zwaardere zon omdat ze daarvan een aantrekkende kracht ondervinden. Newton stelde voor het planetenstelsel een wiskundig model op met als ingrediënten de zon en planeten (gemodelleerd als puntmassa's), zijn beroemde wet $F = ma$ (kracht is massa maal versnelling) en een uitdrukking voor de kracht die twee massa's m_1 en m_2 op elkaar uitoefenen. Hij nam aan — ik zou het zelf ook zo gedaan hebben, dus daarin zit het geniale niet — dat die kracht gericht is langs de verbindingssas van de massa's en dat de grootte F_{12} de volgende vorm heeft:

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^p}.$$

Hierin is G een constante en r de afstand tussen de massa's. De parameter p is een positief getal. De precieze waarde ervan was een brandende vraag. Door middel van metingen was in de tijd van Newton de waarde van p niet te bepalen. Het is nog steeds een heel moeilijk experiment omdat we nu eenmaal lastig twee massa's kunnen isoleren van de rest van de materie in het heelal. Newton schatte de waarde van p eerst uit de baan van de maan. Later onderzocht hij welke planetenbanen zijn model toestond. Als kundig modelleerder verwaarloosde hij daarbij in eerste instantie de krachten tussen de planeten onderling. Nu, zo'n 300 jaar later, is dit nog steeds een stevige opgave voor onze studenten. Voor $p = 3$ bijvoorbeeld voorspelt het model dat een planeet of op de zon botst of zich in een onbegrensde baan van de zon verwijdert. Hij zag in dat hij alleen ellipsvormige banen vond indien hij $p = 2$ koos. Er bleek in dat geval een magnifieke verbinding te zijn tussen zijn dynamisch model en de meetkundige theorieën over kegelsneden van de oude Grieken (zie figuur 4). Het model geeft aan dat er ook parabool- en hyperboolbanen mogelijk zijn. Zoals zo vaak gebeurt tijdens modelleren: het model onthult meer structuur dan men aanvankelijk vermoedde. Newtons prestatie was een geweldige triomf voor het wiskundig modelleren. Let wel, het betreft hier een theo-



Figuur 3 Ons planetenstelsel. De bijna perfect ellipsvormige banen leidden tot de correcte modellering van de zwaartekracht.



Figuur 4 Ellipsen behoren tot de familie van de kegelsneden.

retische conclusie, gemaakt met papier en potlood, zittend achter een bureau. De gepostuleerde wet voor de zwaartekracht beschrijft voor $p = 2$ perfect één van de vier fundamentele krachten die we kennen in de natuur.

Zuivere, toegepaste en industriële wiskunde

Laten we de wiskundewereld zelf eens modelleren. Startend met classificatie constateer ik dat er grofweg gesteld drie manieren zijn om wiskunde te beoefenen: zuivere, toegepaste en industriële wiskunde (zie figuur 5). Daarmee is overigens niet gezegd dat iedere individuele wiskundige slechts in één hokje past. Van ieder hokje geef ik een korte karakterisering.

Na oefening van ons abstractievermogen kunnen wij gerust objecten definiëren waarbij er geen sprake meer is van directe inspiratie door iets buiten ons. Het bestuderen van wiskundige theorieën wordt zuivere wiskunde genoemd. De term suggereert merkwaardigerwijze dat iedere associatie van de objecten met waarneembare verschijnselen tot bezoedeling leidt. In de zuivere wiskunde ontdekt men structuren van grote schoonheid. De vreugde hierover kan mijns inziens alleen maar toenemen als dezelfde structuur ook buiten de wiskunde blijkt voor te komen. Zuivere wiskunde is 'l'art pour l'art' en een belangrijk cultureel erfgoed. Een fraaie verwoording hiervan trof ik aan in een afscheidsrede getiteld 'Pleidooi voor meer nuttelosheid' [1].

In de toegepaste wiskunde vindt men z'n inspiratie steeds van buitenaf. Men speelt met wiskundige modellen en de formules daarin hebben een niet-wiskundige interpretatie. Men concentreert zich op de analyse van generieke modellen. Toepassing daarvan is echter geen hoofddoel.

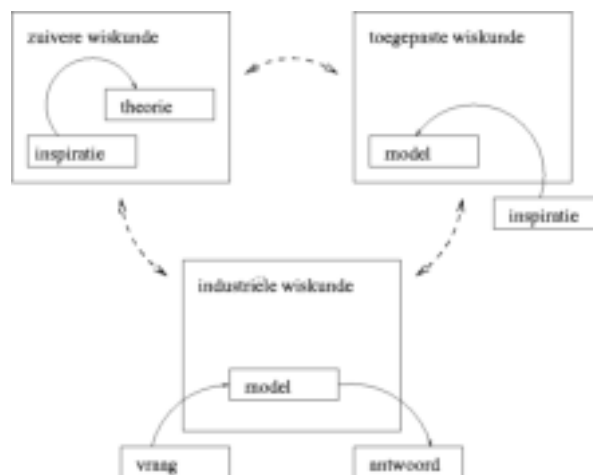
In de industriële wiskunde of bedrijfswiskunde — ingeburgerde doch nare termen, ik prefereer de term 'wiskunde toegepast' — houdt men zich bezig met het beantwoorden van heel concrete vragen met behulp van wiskundige modellen. Centraal staat niet het model, maar het beantwoorden van de vraag. Mijn ervaring is dat de hiervoor benodigde expertise zo groot is dat je dit beter niet volledig kunt overlaten aan niet-wiskundigen. Naast wiskundige expertise hebben industrieel wiskundigen nog extra eigenschappen nodig, zoals flexibiliteit en vermogen tot communicatie. Terwijl de zuiver en toegepast wiskundigen hun tijd en vernuft besteden aan het bereiken van wiskundige diepgang en daarbij introvert bezig kunnen zijn, gebruikt de industrieel

wiskundige zijn tijd en vernuft om de complexiteit van problemen te beheersen. Hij doet dat altijd in samenwerking met anderen. Bedenk dat zowel conceptualiteit als complexiteit kunnen leiden tot boeiende research. Ik moet helaas constateren dat er binnen de Nederlandse wiskundewereld vaak weinig erkenning, herkenning en waardering is voor elkaars activiteiten. Zuiver wiskundigen die neerkijken op de andere twee categorieën, industrieel wiskundigen die vinden dat toegepast wiskundigen zo onnodig lang kunnen zaniken over existentie en uniciteit, toegepast wiskundigen die zuivere wiskunde verloren tijd vinden, je komt ze allemaal tegen. Deze wat benepen hokjesgeest is niet bevorderlijk voor de beeldvorming van de wiskunde als geheel, waarbij we nog altijd moeten opboksen tegen de heersende idee dat wiskundigen wel erg knap, maar ook erg wereldvreemd en nutteloos zijn. Dat leidt tot cartoons als in figuur 1. Juist in deze tijd van dramatisch slinkende studentenaantallen is een gezamenlijk optrekken van levensbelang voor wiskundig Nederland.

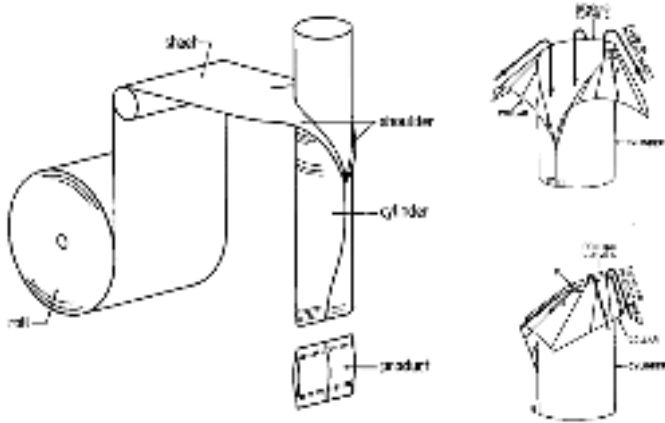
Ik vind het aardig om het verschil tussen toegepaste en industriële wiskunde te illustreren met een voorbeeld uit mijn eigen praktijk. Van daar het volgende intermezzo.

Wiskundige schouders

Het is vrijdagavond. Al maanden worstelen collega Boersma en ik met een weerbarstige vraag vanuit de verpakkingindustrie. Men had mij aangeklopt voor het ontwerpen van een onderdeel van een verpakkingmachine. Aanvankelijk liep het project op rolletjes. Collega Rienstra was komen aanzetten met een nuttig artikelje over dit onderwerp. Het benodigde wiskundige model stond ons helder voor ogen. Jammer dat die ene vraag was opgedoken. Echt zo'n vraag die door je hoofd blijft malen. Een vraag die het project nu al maanden ophield. In de verpakkingindustrie is de vorm-, vul- en sluitmachine heel populair. Het principe is weergegeven in figuur 6. Het verpakkingmateriaal — papier of polymeerfolie — bevindt zich aanvankelijk op een horizontale rol. Bij het afrollen is het vlak. Via een 'schouder' wordt het tot een verticale cilinder gevouwen. Deze transformatie kan overigens niet worden uitgevoerd zonder het materiaal ergens te knikken. De verticale naad van de cilinder wordt dichtgemaakt — ge-'sealed' is de vakterm — en ook onderaan komt er een horizontale afdichtingsnaad. Zo ontstaat er een zakje. Via een robotarm of een lopend bandje wordt het te verpakken materiaal — bijvoorbeeld snoepjes of kattenvoer — in het zakje gedeponeerd, dat vervolgens aan de bovenkant met een horizontale naad wordt afgedicht. Op zo'n machine kunnen honderden gevulde zakjes per minuut geproduceerd worden. Let u er in de



Figuur 5 Zuivere, toegepaste en industriële wiskunde



Figuur 6 Schematische weergave van een vorm-, vul- en sluitmachine. Rechts de schouder.



Figuur 7 Links en midden: de schouder getransformeerd naar het platte vlak. De driehoek met tophoek β blijft na terugtransformatie vlak (zie rechter plaatje) als de curve een discontinuïteit in de derde afgeleide bevat op het hoogste punt. Rechts: een schouder met een vlakke driehoek.

supermarkt eens op: alle zakjes met drie naden zijn op dergelijke wijze vervaardigd. Wiskunde zit werkelijk overal. Als de schouder niet exact de juiste vorm heeft, gaat het papier schuiven of kreuken en dat is ongewenst. Voor speciale maten heeft de industrie reeds min of meer ideale schoudervormen gevonden door vijlen en schaven. Maar de markt is dynamisch en vandaar de vraag aan mij of het mogelijk is bij een willekeurig type zakje een geschikte schouder te ontwerpen. Fraai is het om dan te zien hoe oeroude differentiaalmeetkunde plotseling actueel wordt. Omdat het verpakkingsmateriaal niet mag rekken en kreuken tijdens het vervormen, moeten alle afstanden behouden blijven. Dat heeft grote consequenties: het schouderoppervlak moet een 'ontwikkelbaar oppervlak' zijn. Ontwikkelbare oppervlakken behoren

tot de familie van regeloppervlakken. Dat houdt in dat het schouderoppervlak is opgebouwd uit rechte lijnen. Tot deze verrassende conclusie kan niemand komen zonder de koninklijke brug van het wiskundig modelleren te hebben bewandeld.

Schouders worden in de praktijk gemaakt uit kunststof of plaatstaal. De kunststofschouders slijten hard en daarom is er veel vraag naar de plaatstalen exemplaren. Je kunt die maken door een curve te krassen in een plaat staal: het gedeelte onder de curve wordt naar voren toe rond een cilinder gevouwen terwijl het gedeelte boven de curve naar achteren wordt gedrukt (zie figuur 7). Wij meenden alle facetten van de procedure te beheersen tot de vraag kwam of we het schouderoppervlak ook een vlakke achterrand konden geven. Dan pas zou het aanvankelijk vlakke materiaal, komend van de rol, ideaal aansluiten bij de schouder. Ik had hierover al met veel mensen gesproken. Niemand herkende dit soort problemen, maar een suggestie van collega Hendriks uit Nijmegen zette ons op het goede spoor. Uit de constructie is duidelijk dat de curve ingekrast in het staal alle informatie bevat over het geproduceerde schouderoppervlak. Als de schouder een vlakke achterrand heeft, moet hij een vlak gedeelte bevatten. Dit kan alleen als de curve één of andere discontinuïteit bevat. Dat het niet de eerste afgeleide betrof was direct duidelijk. We hadden die ochtend afgesproken dat Boersma het effect van een discontinuïteit in de tweede afgeleide zou onderzoeken, terwijl ik me zou concentreren op de derde afgeleide. Natuurlijk bekijk ik ze stiekem allebei. Gezeten aan de keukentafel heb ik de sensationele ervaring alle puzzelstukjes in elkaar te zien passen: een discontinuïteit in de derde afgeleide op het hoogste punt van de curve heeft als effect dat er in het schouderoppervlak een vlakke driehoek ontstaat. Precies wat we nodig hebben. Deze ontdekking maakt alle geploeter meer dan goed. Om het samen te vatten: de tophoek van de driehoek (zie figuur 7) wordt gegeven door:

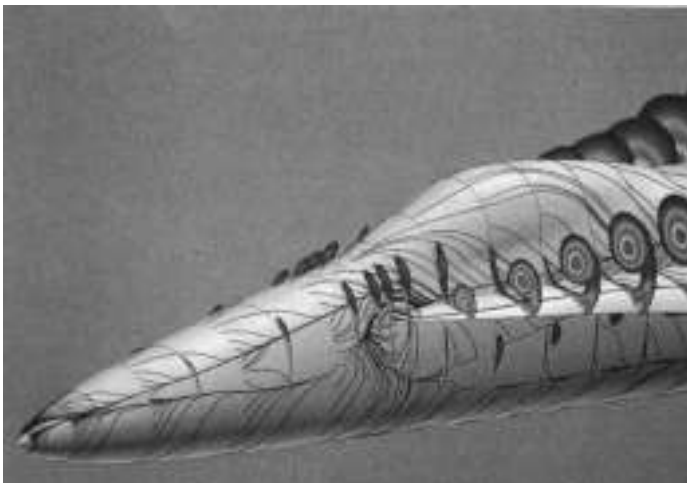
$$\beta = 2 \arctan \left[\frac{\Delta f'''}{(f'')^2 + 1} \right],$$

met de tweede afgeleide f'' en de sprong in de derde afgeleide $\Delta f'''$ geëvalueerd in het hoogste punt van f (zie [2]). Achter zo'n koele formule gaat veel emotie schuil. In figuur 7 is een schouder met zo'n vlakke driehoek getekend. De discontinuïteit heeft een onzichtbare invloed op de vorm van de curve. Een subtiliteit met grote gevolgen! We weten door dit inzicht in welke klasse functies we moeten zoeken bij schouderontwerp. Het krijgen van dit inzicht is een typische activiteit van de toegepaste wiskunde. Het daadwerkelijk uitrekenen van schouders — een lastig invers probleem — behoort typisch tot wiskunde toegepast.

Toen ik de wiskundige brug in Cambridge zag was m'n eerste reactie niet: 'oh wat mooi', maar: 'wat zou de boog van deze brug opleveren als ik er de plaatstaalconstructie op toepas?'. Uitproberen levert op dat er een schouder met veel te kleine inloophoek resulteert. Zelfs wiskundigen zien soms verbanden die er niet zijn.

Wiskunde en polymeren

Toen ik bij de faculteit Toegepaste Wiskunde van de Universiteit Twente benoemd werd, was het niet moeilijk te kiezen in welke klasse modellen ik me zou specialiseren. Reeds vele jaren geleden ben ik via samenwerking met DOW Chemical geïnteresseerd geraakt in onderzoek aan polymeren en in het bijzonder in de reologie. Dit van oorsprong griekse woord betekent letterlijk stromingsleer. Dat is een immens breed gebied. Echter in vakkringen bedoelt men met reologie specifiek het stromingsgedrag van ingewikkelde stoffen zoals polymeren. Reeds voor 1900 waren de centrale behoudswetten van de stromingsleer bekend. Zij representeren een machtig wiskundig model waarin de stromende



Figuur 8 Turbulente stroming rond een vliegtuigromp

materie als een continuüm wordt beschreven en de moleculaire details worden uitgemiddeld. De eigenschappen van de stromende stof zijn in het model opgenomen via een constitutieve relatie, een wiskundige uitdrukking die aangeeft hoe de spanningen in het betreffende materiaal samenhangen met de vervormingen. Voor bekende materialen als water en lucht voldoet een constitutieve relatie die reeds door — alweer — Newton is bedacht. Vanuit het perspectief van de reologie moet ik materialen die bestaan uit min of meer bolvormige moleculen relatief eenvoudig noemen. In vaktermen: ze gedragen zich Newtons. Dat betekent overigens niet dat de berekeningen aan zulke stromingen gesneden koek zijn. Integendeel, één van de centrale problemen in de stromingsleer van de zoste eeuw was de turbulentie. Collega Van der Vegt heeft er enige tijd geleden zijn oratie aan gewijd [15]. Een nette stroming, waarin alle deeltjes zich ongeveer parallel voortbewegen, kan omslaan in een turbulente stroming met wilde wervelingen. Draaikolkjes in een riviertje en kringelende rook zijn er typische voorbeelden van (zie ook figuur 8). Veler verwachting — ook de mijne [10] — was dat de chaostheorie, die zich sinds 1963 razendsnel ontwikkeld heeft [5], hier voor een doorbraak zou zorgen. Hoewel de chaostheorie belangrijke concepten, zoals 'vreemde aantrekker' en het onvertaaltbare 'multifractal', heeft aangedragen, confronteert turbulentie ons ook in de 21ste eeuw nog met raadsels [18].

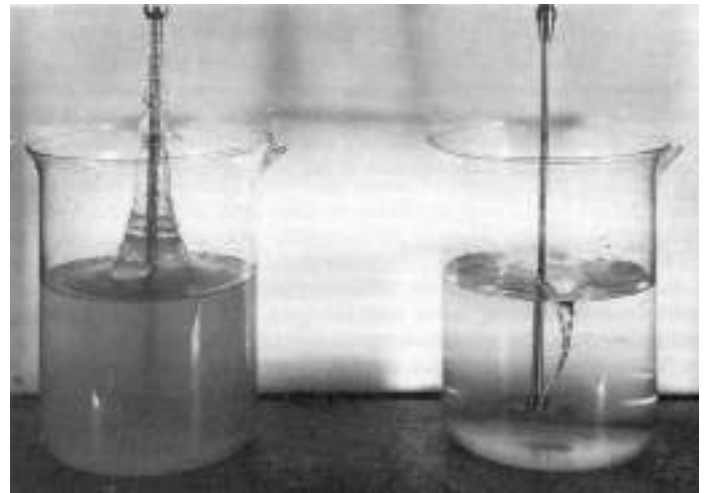


Figuur 9 Model van een polymeer

Mijn werkzaamheden aan de Universiteit Twente hebben hopelijk geen last van turbulentie. Polymeren vormen in gesmolten toestand zo'n kleverig goedje — in de vaktermen: ze zijn zo visceus — dat ze niet toekomen aan wild wervelen. Ze vertonen echter andere interessante verschijnselen tijdens het stromen. Die komen voort uit hun bijzondere moleculaire structuur. Het zijn enorm lange ketens waarin de basiseenheid, de monomeer, zich duizenden keren herhaalt (zie figuur 9). Het is duidelijk dat de interactie tussen zulke ketens een heel ander karakter heeft dan die tussen bolvormige objecten, zoals we die eerder tegenkwamen in ons planetenstelsel en in Newtonse vloeistoffen. De polymeerketens slingeren zich als extreem lange slangen rond elkaar. En denkt u nu niet dat het een statische boel is in zo'n slangenkuil. Door de thermische energie is het er een geweldig gekronkel en verandert de toestand van milliseconde tot milliseconde. Polymeren vertonen zeer onverwacht gedrag. Een standaardvoorbeeld is het Weissenbergeffect, voor het eerst gemeten in 1947, waarbij een polymeersmelt tegen de roterende roerstaaf opkruipt in plaats van tegen de wand (zie figuur 10).

Modelleren van polymeergedrag

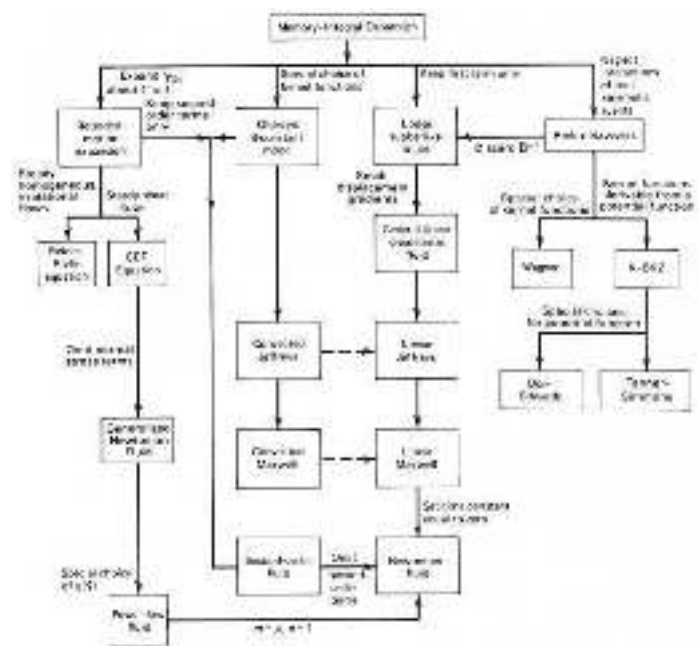
Het wiskundig modelleren van het constitutief gedrag van dergelijke complexe systemen vormt een grote uitdaging. Ze reageren niet instantaan — dat wil zeggen dat er op ieder moment een unieke relatie



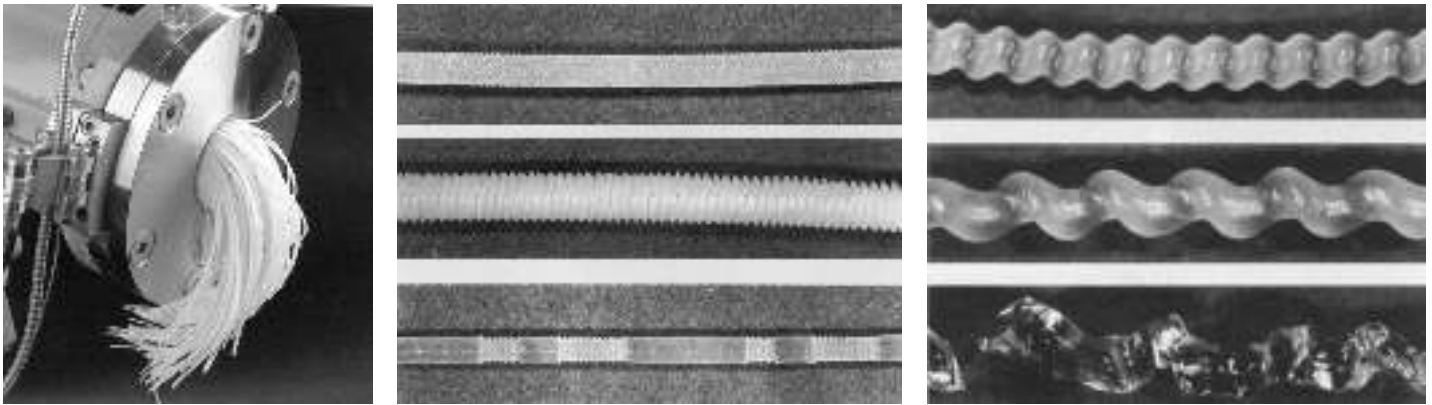
Figuur 10 Het Weissenberg-effect. Rechts Newtons gedrag, links polymeergedrag.

is tussen spanning en vervorming — maar de spanning op dit moment hangt af van de deformatiegeschiedenis van het materiaal. Of met een knipoog naar onze maatschappij: niet de waan van de dag regeert, maar de eeuwenoude cultuur spreekt een duchtig woord mee. Er bestaan reeds vele constitutieve modellen.

In figuur 11 zijn de in 1988 bekende modellen in beeld gebracht met hun onderlinge relaties. Een nogal verwarrende collectie. De kracht van een wiskundig model wordt bepaald door de mate waarin het experimentele waarnemingen kan beschrijven. Naarmate de overeenkomst beter is, gaan we ook meer waarde hechten aan de voorspellingen van een model. Bij polymeren is het aantal waargenomen verschijnselen zo uiteenlopend dat geen enkel model ze alle bevredigend beschrijft. We weten nog niet eens wat de essentiële kenmerken zijn. Aanvankelijk probeerde men min of meer op de gok allerlei constitutieve relaties op te stellen. De wiskunde bleek hierbij al snel een dominante rol te spelen. Oldroyd [13] besepte dat een constitutieve relatie alleen acceptabel is als deze voldoet aan een aantal eisen, waarvan de voornaamste is onafhankelijkheid van het gebruikte coördinatenstelsel. Al zetten we



Figuur 11 Constitutieve modellen en hun onderlinge relaties (1988)

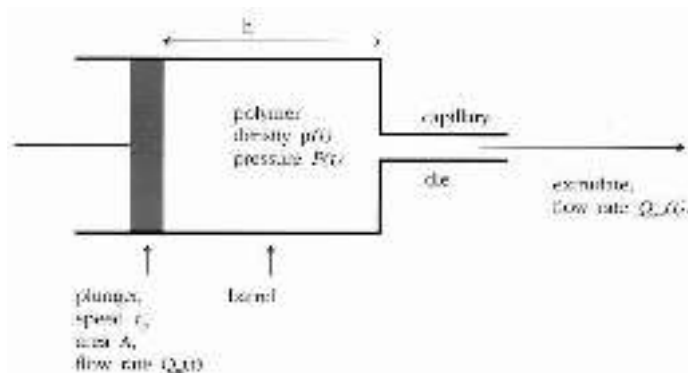


Figuur 12 Links: extrusie van polymeerdraden. Midden en rechts: vervormingen van polymeerdraden na extrusie.

de experimentele opstelling op een door de lucht vliegende, roterende schijf, de interne relaties op moleculair niveau worden er niet door beïnvloed. De wiskundige consequentie daarvan is dat de tensortaal het geëigende wiskundige dialect is voor de modellering. Met tensorrekening zal ik u niet vermoeien, maar alleen memoreren dat Einstein er bij het formuleren van de algemene relativiteitstheorie grote baat bij gehad heeft.

Reptatietheorie

Natuurlijk komen de beste modellen niet voort uit lukraak mogelijkheden proberen, maar door het in rekening brengen van de onderliggende structuur. Het is voor de kunst van het modelleren essentieel goed te beseffen welke afmetingen, oftewel schaal het te beschrijven systeem heeft. De schaal van een planetenstelsel is totaal verschillend van de schaal van ons dagelijks leven, die op zijn beurt weer reusachtig groot is ten opzichte van de moleculaire schaal. Deze verschillende schaalniveaus hebben eigen wetmatigheden [6]. Eigenschappen op een zeker niveau komen in modellen één niveau hoger terug op een globale manier, na toepassing van een middelingsprocedure. In de reologie staat deze overgang van de moleculaire wereld naar het niveau van de continuümmechanica volop in de belangstelling. Een pionier op dit gebied is De Gennes die met grote fantasie en kunde een model opstelde voor de dynamica van een slang in een propvolle slangenkuil [4]. De aanpak is bekend onder de naam *reptatietheorie*. U herkent daarin dezelfde stam als in 'reptiel'; het is afkomstig van het latijnse 'reptare' dat sluipen betekent. Het betreft hier geen oppervlakkig geknutsel: De Gennes ontving voor zijn bijdragen aan het vakgebied de Nobelprijs. Voor ervaren modelleerders zal het geen verwondering wekken dat in reptatietheorie de diffusievergelijking een grote rol speelt.



Figuur 13 Sterk geschematiseerde doorsnede van een extruder

Onderzoek aan polymeerextrusie

Reptatietheorie zal zeker een belangrijke plaats innemen in mijn onderzoek. Dat onderzoek richt zich vooreerst op het wiskundig modelleren van merkwaardige verschijnselen bij extrusie van polymeren. In figuur 13 is een dwarsdoorsnede van een sterk geschematiseerde extruder getekend.

We zien hier een soort slagroomsput gevuld met gesmolten polymeer. Bij lage snelheden van de zuiger komt het als gladde pasta uit de tuit (zie figuur 12). Op enige zwelling direct na het uittreden na is er niets bijzonders aan de hand. Voeren we de snelheid van de zuiger op, dan kan het oppervlak van het extrudaat grillige of regelmatige ribbels gaan vertonen (zie figuur 12). En wat voor slagroom wel een aardig effect vormt, is voor de polymeerindustrie een ramp. Men noemt de oppervlakteruwheid 'sharkskin' oftewel haaien huid, omdat de huid van een haai vanwege placoidschubben eenzelfde ruwheid vertoont. Een ander effect dat kan optreden is het 'spurteffect': de smelt komt pulserend uit de tuit. Of nog erger, het komt er geheel verfrommeld uit. De volgorde waarin deze verschijnselen optreden hangt af van de structuur van het polymeer en de geometrie van de extruder. Reologen duiden deze verschijnselen allemaal aan als instabiliteiten. Met het wiskundige begrip instabiliteit heeft dat niet veel te maken, wel met het begrip bifurcatie: als de zuigersnelheid wordt opgevoerd, kan het systeem bij een kritische snelheid plotseling een ander gedrag gaan vertonen. Hoewel de verschijnselen al meer dan 50 jaar bekend zijn, is men er nog niet zeker van welke mechanismen precies een rol spelen. Er is dringend behoefte aan een goed wiskundig model voor polymeerextrusie. Zo'n model moet niet alleen de diversiteit aan verschijnselen kunnen beschrijven, maar ook aangeven hoe de kritische waarden afhangen van de moleculaire structuur en de extrudergeometrie. Die kennis zou het mogelijk moeten maken polymeren te ontwerpen met hoge kritische waarden en dus hoge productiesnelheden. Via het door de Europese Unie gefinancierde project Postponing Polymer Processing Instabilities (3PI) werk ik op dit onderwerp samen met negen partners in Europa. Wiskunde speelt hierin een sleutelrol.

Slipcondities

Mijn onderzoek van de afgelopen jaren leidde tot de conclusie dat ook de meest geavanceerde constitutieve modellen niet geschikt zijn om een verschijnsel als het spurteffect te beschrijven. Bij deze spannende zoektocht samen met promovendus den Doelder [3] bleek dat er een ingrediënt ontbrak aan onze modellering. Zoals gebruikelijk waren we begonnen met te veronderstellen dat de snelheid van de smelt aan de wand nul is. Het bleek dat we voor het modelleren van het spurteffect moesten toestaan dat er slip optreedt langs de wand. Experimenten,

waarin de gladheid van de wand gevarieerd wordt, bevestigen dit [17]. Maar het is nog niet duidelijk hoe deze slip gemodelleerd moet worden. Naast de bekende Coulombse wrijving treedt er het effect op dat een keten zich op één of meer plaatsen kan hechten aan de wand. De verstrengeling van de vastzittende ketens met de andere ketens zorgt voor een wrijving die sterk af zal hangen van de locale configuratie. Als de spanning dicht bij de wand oploopt, kunnen de aan de wand gehechte ketens losraken, breken en/of 'ontstrengelen' van hun buurketens. Een scenario dat het spurteffect zou kunnen verklaren is als volgt. Als de spanning aan de wand hoog oploopt, 'ontstrengelen' veel ketens tegelijk, wat op continuïteitsniveau geïnterpreteerd moet worden als slip aan de wand. Door deze slip zal de spanning zich snel ontladen, waarna er opnieuw verstrengeling optreedt. Als dit zich regelmatig herhaalt, zal dit leiden tot pulserend gedrag. Of dit inderdaad tot een bevredigend model leidt is het onderwerp van een promotieonderzoek waarvoor zeer onlangs financiering van de Stichting Technische Wetenschappen is verkregen. Het aardige van het project is dat er twee aio-plaatsen beschikbaar zijn gekomen, één bij Toegepaste Wiskunde en één bij Technische Natuurkunde. Zodoende zal het project een brede opzet hebben, van het opstellen en analyseren van wiskundige modellen tot en met het uitvoeren van experimenten. De wiskundige analyse van modellen gebaseerd op de standaard geen-slipconditie is al lastig. De nog te ontwikkelen slipcondities zullen het er niet gemakkelij-

ker op maken. Maar dat zal het plezier niet temperen. In Intermediair stond een verslag van een vorig jaar aan de Faculteit Toegepaste Wiskunde georganiseerde Studiegroep van wiskundigen [8]. De journalist tekende uit de mond van één der deelnemers de kreet op: 'Ha, lekker een probleem'. Dat karakteriseert de wetenschappelijke grondhouding prima.

Besluit

Volgens de regelen der kunst moet ik nu weer terugkomen op mijn inleiding. De wiskundige brug in Cambridge is in hout uitgevoerd en moest in 1866 en 1905 geheel vernieuwd worden. Misschien dat de chemische industrie, als eerbetoon aan de wiskunde, hem bij de volgende beurt wel in kunststof wil uitvoeren.

Tenslotte, u vraagt zich nu ongetwijfeld af of ik wel antwoord heb gegeven op de vraag in de titel van deze oratie. Laat ik er ronduit voor uitkomen: natuurlijk heb ik geen antwoord op de vraag waarom God onze Schepper zoveel wiskundige structuren in Zijn schepping gelegd heeft. Wetenschap geeft nooit antwoord op 'waarom'-vragen en uit andere bronnen weet ik het ook niet. Laten we als wetenschappers, bij alle theoretiseren, observeren, classificeren, modelleren, analyseren en publiceren, het verwonderen en vooral het bewonderen niet vergeten.

Literatuur

- 1 A. van den Beukel, *Pleidooi voor meer nuttelosheid*, afscheidsrede TUD, 7 februari 1997.
- 2 J. Boersma en J. Molenaar, 'Geometry of the shoulder of a packaging machine', *SIAM Review*, 37, no. 3, 1995, pag. 406–422.
- 3 C.F.J. den Doelder, *Design and Implementation of Polymer Melt Fracture Models*, Ph.D. thesis, Eindhoven University of Technology, ISBN 90-386-0701-6, 1999.
- 4 P.G. de Gennes, 'Reptation of a Polymer Chain in the Presence of Fixed Obstacles', *J. Chem. Phys.*, Vol. 55, no. 2, pag. 572–579, 1971.
- 5 G. Gleick, *Chaos, the making of a new science*, ISBN 0-14-00-9250-1, Penguin Books, 1988.
- 6 P. Jensen, 'Particle Physics and Our Everyday World', *Physics Today*, July 1998, pag. 58–59.
- 7 P.W. Kasteleyn, *Op zoek naar structuren*, inaugurale rede RUL, 5 juni 1964.
- 8 H. Klomp, 'Wiskundig orakel helpt Shell', *Intermediair*, 44, 2 november 2000, pag. 109.
- 9 R.M.M. Mattheij en J. Molenaar, 'Mathematics and Industry: Contamination or Fertilization?', *Nieuw Archief voor de Wiskunde*, 4e serie, deel 4, no. 3, november 1986, pag. 245–254 (ISSN 0028-9825).
- 10 J. Molenaar, J. Herweijer en W. van de Water, 'Negative dimensions of the turbulent dissipation field', *Phys. Rev. E*, Vol. 52, Part A, July 1995, pag. 496–509.
- 11 D.E. Neuenschwander, 'Does Any Piece of Mathematics Exist for which there is no Application whatsoever in Physics?', *Am. J. Phys.*, 63(12), 1995, pag. 1065. Zie ook het (ontkennende) antwoord op deze vraag van A.C. de la Torre en R. Zamorano, *Am. J. Phys.*, 69(2), 2001, pag. 103.
- 12 G.Y. Nieuwland, 'Do mathematical methods tell the truth', *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5e serie, deel 1, nr. 4, december 2000, pag. 406–411, en deel 2, nr. 1, maart 2001, pag. 59–64.
- 13 J.G. Oldroyd, 'An approach to non-Newtonian fluid mechanics', *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 14, 1984, pag. 9–46.
- 14 M. van Tuinen, 'Een moleculaire kijk op vogelevolutie', *Natuur en Techniek*, februari 2001, pag. 32–37.
- 15 J.J.W. van der Vegt, *Wiskundige simulaties als stromingsleerlaboratorium*, inaugurale rede Universiteit Twente, 9 december 1999.
- 16 R. Walker, *The History of the Mathematical Bridge*, University Press, Cambridge, zonder jaartal. Zie ook de website: www.quns.cam.ac.uk/Queens/Images/WinBridg.html
- 17 S.Q. Wang, P.A. Drda, 'Stick-slip transition in capillary flow of linear Polyethylene: 3. Surface conditions', *Rheol. Acta*, 36, 1997, pag. 128–134.
- 18 W. van de Water, *Stroming in Wanorde*, inaugurale rede KUN, 23 februari 2001.
- 19 E.P. Wigner, 'The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences', *Commun. Pure Appl. Math.* 13, 1960, pag. 1–14.
- 20 Genesis 1:26.

Wim Veldman

Subfaculteit Wiskunde, Katholieke Universiteit Nijmegen
Postbus 9010, 6500 GL Nijmegen
veldman@sci.kun.nl

Overzichtsartikel

Bijna de waaier

Voor L.E.J. Brouwer is elke functie die $[0, 1]$ afbeeldt in $\mathbb{R}$ uniform continu. In dit artikel wordt geschetst hoe hij zich van de juistheid van deze stelling overtuigde. De auteur maakt melding van kanteekeningen die Kleene en Bishop bij Brouwers bewijs maakten en noemt enkele conclusies die Brouwer ook had kunnen trekken. Dit artikel is een herziene versie van [23], dat verscheen in het Liber Amicorum, uitgebracht ter gelegenheid van de vijftenzestigste verjaardag van Arnoud van Rooij.

De uniforme-continuïteitsstelling is een hoeksteen van de reële analyse, en een juweel.

Stelling. *Zij f een functie van het reële gesloten segment $[0, 1]$ naar de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen, en zij m een natuurlijk getal. Als er voor elke x in $[0, 1]$ een natuurlijk getal n bestaat zó, dat voor alle y in $[0, 1]$, als $|x - y| < \frac{1}{2^n}$, dan $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2^{m+1}}$, dan bestaat er een natuurlijk getal n zó, dat voor alle x, y in $[0, 1]$, als $|x - y| < \frac{1}{2^n}$, dan $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2^m}$. Dus: als f in elk punt van $[0, 1]$ continu is, dan is f gelijkmatig (uniform) continu op $[0, 1]$.*

Het bewijs wordt meestal uit het ongerijmde gegeven, bijvoorbeeld als volgt.

Neem eens aan dat we, onder de gegeven omstandigheden, voor zekere m geen geschikte n kunnen vinden. We maken twee rijen $x_0, x_1, \dots$ en $y_0, y_1, \dots$ van punten van $[0, 1]$ zó, dat, voor elke i , $|x_i - y_i| < \frac{1}{2^i}$ en $|f(x_i) - f(y_i)| \geq \frac{1}{2^m}$. Dan zoeken we een punt x van $[0, 1]$ waar de rij $x_0, x_1, x_2, \dots$ zich ophoopt, dat wil zeggen voor elke p bestaat i zó, dat $i > p$ en $|x - x_i| < \frac{1}{2^p}$. Vervolgens bepalen we n zó, dat voor alle y in $[0, 1]$, als $|x - y| < \frac{1}{2^n}$,

dan $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2^{m+1}}$. Tenslotte berekenen we i zó, dat $i > n$ en $|x - x_i| < \frac{1}{2^{n+1}}$. We zien nu: $|x - y_i| < |x - x_i| + |x_i - y_i| < \frac{1}{2^n}$ dus: $|f(x_i) - f(y_i)| < |f(x_i) - f(x)| + |f(y_i) - f(x)| < \frac{1}{2^m}$. Tegenspraak. $\square$

Deze fascinerende redenering biedt geen spoor van een aanwijzing hoe we te werk moeten gaan wanneer we, bij gegeven m , daadwerkelijk een passende n willen vinden. We leren alleen dat de veronderstelling dat zo'n getal niet bestaat tot tegenspraak voert. Bij nader toezien slaagt het bewijs niet eens in deze bescheiden opzet. Het doet een beroep op de stelling van Bolzano-Weierstrass die zegt dat elke begrensde rij reële getallen een ophopingspunt heeft.

Er zijn echter oneindige rijen van punten van $[0, 1]$ waarbij het bepalen van de plaats van een ophopingspunt een onbegonnen zaak is. Hier is een voorbeeld. Laat $d : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, 9\}$ de decimaalontwikkeling van π zijn, dus: $\pi = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} d(n) \cdot 10^{-n}$. We definiëren nu een rij $x_0, x_1, \dots$ van punten van $[0, 1]$. Voor iedere n , als er geen $i < n$ bestaat zó, dat $d(i) = d(i+1) = \dots = d(i+9) = 9$, dan $x_n := 0$, en als dat wel zo is, dan $x_n := 1$. Wie met nauwkeurigheid < 1 een ophopingspunt van deze rij kan aangeven, weet óf, als zijn punt groter is dan 0, dat er een aaneengesloten blok van tien negens in de decimaalontwikkeling van π optreedt, óf, als zijn punt kleiner is dan 1, dat dat niet zo is.

Zo iemand kan dus een tot nu toe onopgeloste vraag beantwoorden. Mocht die vraag morgen beslist worden, doordat zo'n blok gevonden wordt, dan verliest het voorbeeld niets aan kracht. We kunnen het immers eindeloos variëren: is er een blok van elf negens in de decimaalontwikkeling van π ? Is er een blok van

stelling

twaalf negens in de decimaalontwikkeling van π ? Enzovoort. Een voorbeeld als dit — Brouwer maakt er tientallen, tegen allerlei klassieke resultaten — laat zien dat de aangevochten stelling onjuist en ongegrond is wanneer we de mededeling die zij doet constructief opvatten, maar (nog) niet dat zij, indien zo begrepen, tot tegenspraak voert; wie de stelling blijft volhouden is, om een woord van Johan de Longh te gebruiken, *vermetel*: zijn moed is roekeloosheid.

Het feit dat een klassieke stelling geen constructieve lezing toelaat is van groot belang, ook voor wie zich door Brouwer onheus behandeld voelt en zegt: “Maar ik had de stelling zo niet bedoeld”. De vraag hoe je de stelling dan wel bedoeld zou kunnen hebben is niet eenvoudig te beantwoorden.

Zolang we niet beschikken over een constructief steekhoudend bewijs van de uniforme-continuïteitsstelling moeten we vrezen dat ook deze stelling door een geschikt tegenvoorbeeld aan het wankelen kan worden gebracht.

De schatkamer van de analyse bevat meer edelstenen, zoals de stelling van de hoogste waarde:

Stelling. *Zij f een functie van $[0, 1]$ naar $\mathbf{R}$ die in elk punt van $[0, 1]$ continu is. Er bestaat x in $[0, 1]$ zodat voor alle y in $[0, 1]$, $f(y) \leq f(x)$.*

De stelling kan, net als de stelling van Bolzano-Weierstrass, worden bewezen met de vaak toepasbare methode van voortgaande tweedeling.

We definiëren $x_0 := 0$, en voor elk natuurlijk getal n , als er voor elke y in $[x_n + \frac{1}{2^{n+1}}, x_n + \frac{1}{2^n}]$ een z in $[x_n, x_n + \frac{1}{2^{n+1}}]$ bestaat zó, dat $f(y) < f(z)$, dan $x_{n+1} := x_n$ en als dat niet zo is, dan

$x_{n+1} := x_n + \frac{1}{2^{n+1}}$. We stellen eerst vast dat voor elke n , voor elke y in $[x_n, x_n + \frac{1}{2^n}]$ een z in $[x_{n+1}, x_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}]$ bestaat zó, dat $f(y) \leq f(z)$, en dan, inductief, dat er voor elke y in $[0, 1]$, voor elke n een z in $[x_n, x_n + \frac{1}{2^n}]$ bestaat zó, dat $f(y) \leq f(z)$.

De rij $x_0, x_1, \dots$ is convergent, noem de limiet x . We laten zien dat voor alle y in $[0, 1]$, $f(y) \leq f(x)$. Stel dat, voor zekere y in $[0, 1]$, $f(y) > f(x)$; f is continu in x en we bepalen n zó, dat voor alle z in $[0, 1]$, als $|x - z| < \frac{1}{2^n}$, dan $f(y) > f(z)$. Maar dan voor alle z in $[x_{n+1}, x_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}]$, $f(y) > f(z)$, terwijl er een z in $[x_{n+1}, x_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}]$ bestaat zó, dat $f(y) \leq f(z)$. Tegenspraak. $\square$

Het is niet erg dat in het laatste deel van dit bewijs uit het ongerijmde wordt geredeneerd. Wie wil aantonen, voor zekere reële

*Maguer, señor Quijote, que sandeces
vos tengan el cerbelo derrumbado,
nunca seréis de alguno reprochado
por home de obras viles y soeces.
Serán vuesas fazañas los joeces,
([9], p. 19)*

*Hoewel het velen, Don Quichot, moet spijten,
Uw brein omfloerst te zien door dwaze dromen,
Zo zal, dat g' ooit iets laags hebt ondernomen,
Toch zeker nimmer iemand U verwijten.
Uw heldendaden zullen voor u pleiten,
([10], p. 41)*

getallen a, b , dat $a \leq b$, kan niet beter doen dan laten zien dat de vooronderstelling dat $b < a$ tot tegenspraak leidt. Het is wel erg dat in het eerste deel een onuitvoerbare constructie wordt beschreven. Wie weet uit te maken of het waar is dat voor elke y in $[\frac{1}{2}, 1]$ een z in $[0, \frac{1}{2}]$ bestaat met de eigenschap: $f(y) \leq f(z)$? Alleen een Don Quichot zou het wagen deze 'constructie' in het werkelijke leven na te spelen.

De stelling van de hoogste waarde belooft het onmogelijke. Het volgende voorbeeld maakt dit duidelijk. Laten we eerst afspreken dat een *reëel getal* x voor ons niets anders is dan een rij $x(0), x(1), \dots$ van rationale getallen die aan de voorwaarde van Cauchy voldoet, dat wil zeggen voor elke m bestaat er een n zó, dat voor elke p , $|x(n+p) - x(n)| < \frac{1}{2^m}$. Bekijk opnieuw de decimaalontwikkeling $d: \mathbf{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, 9\}$ van π . We maken een reëel getal x als volgt. We definiëren $x(0) := 0$, en voor elke n , als $x(n) = 0$ en $d(n) = d(n+1) = \dots = d(n+9)$, dan $x(n+1) := (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n}$, zo niet, dan $x(n+1) := x(n)$. Het getal x heeft een erg kleine absolute waarde en we kunnen niet uitmaken of het gelijk is aan 0, of groter dan 0, of kleiner dan 0. We zeggen wel dat x zweeft om 0. Zij f de functie van $[0, 1]$ naar $\mathbf{R}$ die wordt vastgelegd door de eisen: $f(0) = f(1) = 0$, en $f(\frac{1}{2}) = x$, en f is lineair op het segment $[0, \frac{1}{2}]$ en ook op het segment $[\frac{1}{2}, 1]$. Stel dat f een maximale waarde aanneemt in het punt z . Als $|\frac{1}{2} - z| < \frac{1}{2}$, dan is x niet negatief, en als $|\frac{1}{2} - z| > \frac{1}{4}$, dan is x niet positief. Er is niemand die zo'n punt z met nauwkeurigheid $< \frac{1}{2}$ weet te benaderen.

Tegen de nu gewekte verwachting in heeft Brouwer in 1923 de uniforme-continuïteitsstelling, en zelfs iets meer dan die stelling, op zijn eigen intuïtionistische manier bewezen, zie [5]. Hij werd geleid door het besef dat je veel moet weten voor je met reden kunt zeggen dat een functie van $[0, 1]$ naar $\mathbf{R}$ in elk punt van $[0, 1]$ echt uitgerekend kan worden. Zoveel, dat je in die wetenschap een basis vindt voor de conclusie van de uniforme-continuïteitsstelling.

Een eerste aanwijzing voor de juistheid van deze gedachte is de opmerking dat een functie die een discontinuïteit vertoont, niet werkelijk in elk punt van $[0, 1]$ kan worden uitgerekend. Denk bijvoorbeeld aan de functie g van $[0, 1]$ naar $\mathbf{R}$ zó, dat voor alle y , als $y < \frac{1}{2}$, dan $g(y) = 0$ en als $y \geq \frac{1}{2}$, dan $g(y) = 0$. De functie g kan niet worden uitgerekend in een punt dat zweeft om $\frac{1}{2}$.

Brouwer komt tot de slotsom dat de volgende uitspraken juist zijn, ook naar zijn eigen strenge maatstaven.

Stelling 1. *Elke functie van $[0, 1]$ naar $\mathbf{R}$ is continu in elk punt van $[0, 1]$.*

Stelling 2. *Elke functie van $[0, 1]$ naar $\mathbf{R}$ die continu is in elk punt van $[0, 1]$ is gelijkmatig continu op $[0, 1]$.*

Stelling 3. *Bij elke functie f van $[0, 1]$ naar $\mathbf{R}$ kunnen we een getal M bepalen zó, dat (i) voor alle y in $[0, 1]$, $f(y) \leq M$, en (ii) voor elke n bestaat y in $[0, 1]$ zó, dat $f(y) > M - \frac{1}{2^n}$.*

Het is niet moeilijk stelling 3, een stelling die iets goed maakt van het verlies van de onjuist gebleken stelling van de hoogste waarde, af te leiden uit de stellingen 1 en 2. Dat gaat als volgt.

Zij f een functie van $[0, 1]$ naar $\mathbf{R}$. Definiëer een rij $m_0, m_1, \dots$ van reële getallen: voor elke k , $m_k := \max_{i \leq 2^k} f(\frac{i}{2^k})$. Laat zien dat

de rij $m_0, m_1, \dots$ convergeert, noem de limiet M en merk op dat M aan de eisen voldoet. $\square$

In de volgende paragraaf laten we zien op welke gronden Brouwer zijn stellingen 1 en 2 baseert. Brouwers bewijs laat zien dat ze niet alleen gelden voor functies die gedefiniëerd zijn op $[0, 1]$ maar voor alle functies waarvan het definitiegebied, net als $[0, 1]$, gesloten en begrensd is, en ook gecatalogiseerd, dat wil zeggen, het is mogelijk voor elk punt in $\mathbf{R}$ de afstand van dat punt tot de verzameling te bepalen. De zogenaamde *waaierstelling* speelt een sleutelrol. We geven ook een bewijs van Brouwers mooie maar weinig bekende stelling over het bestaan van voorwaartsgerichte minima.

In de laatste paragraaf leggen we uit dat woorden als 'eindig' en 'uniform-continu' in de intuïtionistische wiskunde op vele manieren kunnen worden begrepen. We bewijzen, met Brouwers eigen middelen, afschaduwingen van zijn resultaten: de bijna-waaierstelling en de bijna-uniforme-continuïteitsstelling. Het zijn maar schimmen van Brouwers trotse uitspraken; hun conclusies, ofschoon vaker te verkrijgen, zijn zwakker en minder nuttig. Even goed zijn het ook, net als Brouwers stellingen, mogelijke intuïtionistische lezingen van niet-intuïtionistische en daarom niet onmiddellijk begrijpelijke stellingen.

We laten ook zien dat een door Thierry Coquand voor het eerst bewezen principe van open inductie uit de bijna-waaierstelling kan worden afgeleid.

Brouwers tweeledig inzicht

De verzameling $\mathbf{N}$ van de natuurlijke getallen is nooit af. Het is een goed begrepen plan om achtereenvolgens te produceren: $0, 1, 2, \dots$

Op dezelfde manier is elke oneindige rij α van natuurlijke getallen altijd onvoltooid, een project dat steeds verder wordt uitgevoerd: $\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \dots$

Brouwer, min of meer gedwongen door het diagonaalargument van Cantor, liet zijn fantasie gaan over de vele vormen die zo'n project kan aannemen. Het kan zijn dat het project bestaat in het gehoorzaam volgen van de instructies van een algoritme; zoals de decimaalontwikkeling d van π :

$$d(0) = 1, \quad d(1) = 4, \quad d(2) = 1, \quad \dots$$

Het algoritme kan natuurlijk heel eenvoudig zijn:

$$\underline{0}(0) = 0, \quad \underline{0}(1) = 0, \quad \underline{0}(2) = 0, \quad \dots,$$

dus steeds dezelfde uitkomst.

Brouwer bedacht: ik kan ook met mezelf een afspraak maken, zoals: voor elke n , $\alpha(n) := 1$ als ik op het moment dat ik $\alpha(n)$ moet produceren een bewijs gevonden heb dat er geen aaneengesloten blok van 10 negens optreedt in de rij d , en anders $\alpha(n) := 0$. Een beetje raar. Maar in plaats van in te gaan op de haken en ogen die aan deze afspraak kleven, kunnen we beter, met Brouwer, een verdere stap zetten en toelaten dat we niet weten welke regel of afspraak aan de rij ten grondslag ligt, ja dat die regel of afspraak misschien niet eens bestaan. Het komt er alleen op aan dat er steeds een volgende waarde geproduceerd wordt, maar ik, die de rij maak, mag de waarde zelf kiezen.

We schrijven $\mathcal{N}$ voor de verzameling van alle oneindige rijen natuurlijke getallen. We gebruiken het woord 'verzameling', maar

we moeten ons niet voorstellen, zoals soms bij het nadenken over verzamelingen wordt gesuggereerd, dat $\mathcal{N}$ als het ware het resultaat is van het bijeensprokkelen van haar elementen; $\mathcal{N}$ is eerder te vergelijken met een weefgetouw, een stramien, waarop we allerlei mooie rijen zullen kunnen borduren of uitvoeren.

We schrijven $\mathbf{N}^*$ voor de verzameling van alle eindige rijtjes natuurlijke getallen.

Zij α een element van $\mathcal{N}$ en s een element van $\mathbf{N}^*$. Als er een natuurlijk getal n bestaat zó, dat $s = \langle \alpha(0), \dots, \alpha(n-1) \rangle$ zeggen we: α begint met s , of: α gaat door s , of: s bevat α , of: s is een beginstuk van α .

Continuïteitsbeginsel van Brouwer. Zij R een deelverzameling van $\mathcal{N} \times \mathbf{N}$. In plaats van: ' $\langle \alpha, n \rangle \in R$ ' schrijven we: ' $\alpha R n$ '. Neem aan dat we bij elke rij α een natuurlijk getal n kunnen bepalen zodat $\alpha R n$. Dan kunnen we bij elke rij α natuurlijke getallen m, n bepalen zó, dat voor elke rij β , als β begint met $\langle \alpha(0), \dots, \alpha(m-1) \rangle$, dan $\beta R n$.

Want, zo houden we onszelf voor, hoe de rij α ons ook gegeven wordt, we kunnen een natuurlijk getal n vinden dat geschikt is voor α . En elke rij, zelfs een heel saaie rij zoals de rij $\underline{0}$, zou het resultaat kunnen zijn van een reeks vrije keuzen. En als α in vrijheid ontstaat komt het getal n dat geschikt is voor α , aan het licht



L.E.J. Brouwer aan het strand

op een ogenblik dat over nog maar eindig veel waarden van α beslist is.

Het zojuist gegeven argument is niet een bewijs dat Brouwers beginsel tot andere inzichten reduceert, het is een poging onszelf en anderen ertoe over te halen dit beginsel als axioma aan te nemen.

We hebben behoefte aan een iets algemenere versie van het continuïteitsbeginsel. Zij X een deelverzameling van $\mathcal{N}$. We noemen X een *spreiding* als X gesloten is, dat wil zeggen elke oneindige rij waarvan elk beginstuk een element van X bevat, behoort zelf tot X , en we bovendien voor elke s in $\mathbf{N}^*$ kunnen beslissen of s een element van X bevat of niet.

Continuïteitsbeginsel van Brouwer, uitgebreide versie. Zij X een spreiding en R een deelverzameling van $X \times \mathbf{N}$. Neem aan dat we bij elke α in X een natuurlijk getal n kunnen bepalen zodat $\alpha R n$. Dan kunnen we bij elke α in X natuurlijke getallen m, n bepalen zó, dat voor elke β in X , als β begint met $\langle \alpha(0), \dots, \alpha(m-1) \rangle$, dan $\beta R n$.

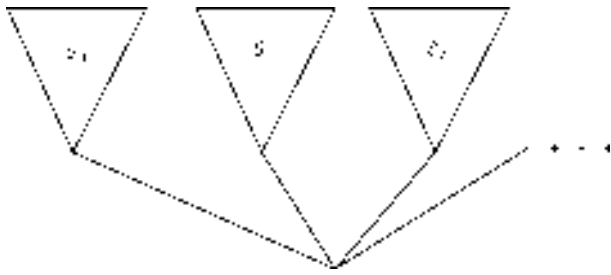
In het vervolg maken we gebruik van een vaste aftelling ρ van de verzameling $\mathbf{Q}$ van de rationale getallen. We noemen een element α van $\mathcal{N}$ een *reëel getal* als de rij $\rho(\alpha(0)), \rho(\alpha(1)), \dots$ aan de voorwaarde van Cauchy voldoet. We noemen een element α van $\mathcal{N}$ een *canoniek reëel getal* als, voor elke n in $\mathbf{N}$, $|\rho(\alpha(n)) - \rho(\alpha(n+1))| < \frac{1}{2^{n+2}}$. Een canoniek reëel getal kunnen we ons voorstellen als een rij $(\rho(\alpha(0)) - \frac{1}{2}, \rho(\alpha(0)) + \frac{1}{2}), (\rho(\alpha(1)) - \frac{1}{4}, \rho(\alpha(1)) + \frac{1}{4}), \dots$ van open rationale intervallen, waarbij $\rho(\alpha(0)) - \frac{1}{2} < \rho(\alpha(1)) - \frac{1}{4} < \dots$ en $\rho(\alpha(0)) + \frac{1}{2} > \rho(\alpha(1)) + \frac{1}{4} > \dots$. Elk van deze intervallen 'bevat' het reële getal α en kan een *benadering* van α genoemd worden. De verzameling van de canonieke reële getallen noemen we $\mathbf{R}$; $\mathbf{R}$ is een spreiding.

Voor alle α, β in $\mathbf{R}$ definiëren we: α valt reëel samen met β , notatie: $\alpha \equiv_{\mathbf{R}} \beta$, dan en slechts dan als, voor elke n , $|\rho(\alpha(n)) - \rho(\beta(n))| < \frac{1}{2^n}$.

Laten X, Y deelverzamelingen zijn van $\mathbf{R}$. We zeggen dat X een *reële deelverzameling* van Y is dan en slechts dan als voor elke α in X een β in Y bestaat zó, dat $\alpha \equiv_{\mathbf{R}} \beta$. We zeggen dat X *reëel samenvalt* met Y dan en slechts dan als X een reële deelverzameling is van Y en Y op zijn beurt een reële deelverzameling is van X . Een functie f van X naar $\mathbf{R}$ is een *reële functie* als voor α, β in X , als $\alpha \equiv_{\mathbf{R}} \beta$, dan $f(\alpha) \equiv_{\mathbf{R}} f(\beta)$.

De operaties 'optellen', 'aftrekken' en 'absolute waarde' worden gedefiniëerd zoals men zou verwachten. We vermelden dat voor alle α, β in $\mathbf{R}$, α reëel-kleiner wordt genoemd dan β , notatie: $\alpha <_{\mathbf{R}} \beta$, dan en slechts dan als we een n in $\mathbf{N}$ kunnen uitrekenen zó, dat $\rho(\alpha(n)) + \frac{1}{2^n} \leq \rho(\beta(n))$. We gaan niet in op de voor de hand liggende definitie van een natuurlijke inbedding van $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$. Merk op dat we voor ieder canoniek reëel getal α en voor elk natuurlijk getal n een natuurlijk getal m kunnen bepalen met de eigenschap dat voor ieder canoniek reëel getal β , als $|\alpha - \beta| < \frac{1}{2^m}$, dan bestaat er een canoniek reëel getal γ door $\langle \alpha(0), \dots, \alpha(n-1) \rangle$ dat reëel samenvalt met β . Het is voldoende m zo te kiezen dat $\frac{1}{2^m}$ kleiner is dan zowel $\rho(\alpha(n)) - \rho(\alpha(n-1)) + \frac{1}{2^{n+1}}$ als $\rho(\alpha(n-1)) - \rho(\alpha(n)) + \frac{1}{2^{n+1}}$.

Continuïteitsstelling. Zij X een spreiding en een verzameling reële getallen. Neem aan dat we voor elke α in X , voor elke n in $\mathbf{N}$, een m in $\mathbf{N}$ kunnen bepalen zó, dat voor elke β in X , als $|\alpha - \beta| < \frac{1}{2^m}$, er een γ in X is die door $\langle \alpha(0), \dots, \alpha(n-1) \rangle$ gaat en reëel samenvalt met β .



Figuur 1 De constructie van een stomp S uit een rij $S_0, S_1, \dots$ van eerder geconstrueerde stompen.

Dan is elke reële functie met definitiegebied X continu in elk punt van X . In het bijzonder is elke overal op $\mathbf{R}$ gedefiniëerde reële functie in elk punt continu.

Bewijs. Zij α een element van X en p een natuurlijk getal. Met behulp van het continuïteitsbeginsel bepalen we n in $\mathbf{N}$ zó, dat voor elke β in X , als β gaat door $\langle \alpha(0), \dots, \alpha(n-1) \rangle$, dan $(f(\alpha))(p) = (f(\beta))(p)$ dus $|f(\alpha) - f(\beta)| < \frac{1}{2^p}$. Vervolgens bepalen we m in $\mathbf{N}$ zó, dat voor elke β in X , als $|\alpha - \beta| < \frac{1}{2^m}$, dan is er een γ die door $\langle \alpha(0), \dots, \alpha(n-1) \rangle$ gaat en reëel samenvalt met β , dus $|f(\alpha) - f(\gamma)| < \frac{1}{2^p}$ en $f(\gamma) \equiv_{\mathbf{R}} f(\beta)$, dus $|f(\alpha) - f(\beta)| < \frac{1}{2^p}$. $\square$

Het uitspreken van het continuïteitsprincipe is de eerste stap die Brouwer zet in zijn analyse van het begrip ‘overal op $\mathbf{R}$ gedefiniëerde functie’. Zijn tweede stap is zo mogelijk nog gewaagder. We definiëren eerst het begrip ‘stomp’. Elke stomp is een beslisbare deelverzameling van de verzameling $\mathbf{N}^*$ van eindige rijtjes natuurlijke getallen. $\mathbf{N}^*$ bevat precies één element van lengte 0, het lege rijtje, notatie: $\langle \rangle$.

Voor alle s, t in $\mathbf{N}^*$ is $s * t$ het element van $\mathbf{N}^*$ dat we verkrijgen door het rijtje t achter het rijtje s te plaatsen. We noemen het rijtje s een *beginstuk* van het rijtje $s * t$. Voor elke s in $\mathbf{N}^*$, en elke deelverzameling A van $\mathbf{N}^*$ definiëren we: $s * A := \{s * t \mid t \in A\}$. De verzameling van de stompen wordt gegeven door middel van de volgende inductieve definitie:

- i. De verzameling $\{\langle \rangle\}$ is een stomp.
- ii. Is $S_0, S_1, \dots$ een rij van stompen, dan is ook de verzameling

$$S := \{\langle \rangle\} \cup \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \langle n \rangle * S_n$$

een stomp. We noemen $S_0, S_1, \dots$ de *onmiddellijke deelstompen* van de stomp S (zie figuur 1).

- iii. Elke stomp wordt verkregen uit de basisstomp $\{\langle \rangle\}$ door het herhaald toepassen van de constructiestap (ii).

Voor elke s in $\mathbf{N}^*$ die niet het lege rijtje is kunnen we t in $\mathbf{N}^*$ en n in $\mathbf{N}$ bepalen zó, dat $s = t * \langle n \rangle$. We noemen t de *onmiddellijke voorganger* van s . Voor elke stomp S , voor elke s in $\mathbf{N}^*$ definiëren we s behoort net niet tot $S := s$ behoort niet tot S en de onmiddellijke voorganger van s behoort wel tot S . Voor elke stomp S is de verzameling van alle s in $\mathbf{N}^*$ die net niet tot S behoren, een beslisbare deelverzameling van $\mathbf{N}^*$.

Vervolgens definiëren we het begrip ‘barrière’. Een deelverzameling B van $\mathbf{N}^*$ is een *barrière* (in $\mathcal{N}$) dan en slechts dan als elke oneindige rij α een beginstuk $\langle \alpha(0), \dots, \alpha(n-1) \rangle$ heeft dat tot B behoort, we zeggen dan wel: α ontmoet B . We eisen niet dat we voor elk element van $\mathbf{N}^*$ kunnen uitmaken of het tot de verzameling B behoort of niet.

These van Brouwer. Bij elke barrière B in $\mathcal{N}$ kunnen we een stomp S bepalen zó, dat $B \cap S$ een barrière is in $\mathcal{N}$.

Brouwer bepleit zijn these met het volgende argument. Indien we weten dat B een barrière is in $\mathcal{N}$, kunnen we een ‘canoniek’ bewijs maken van dit feit. De uitgangspunten van dit canonieke bewijs zijn mededelingen van de vorm: s behoort tot B , dus elke rij door s ontmoet B . Redeneerstappen zijn er in twee soorten:

- i. stappen met oneindig veel premissen: elke rij door $s * \langle 0 \rangle$ ontmoet B , elke rij door $s * \langle 1 \rangle$ ontmoet B , ... dus: elke rij door s ontmoet B .
- ii. stappen ‘achteruit’, met maar één premisse, bijvoorbeeld: elke rij door s ontmoet B dus: elke rij door $s * \langle 17 \rangle$ ontmoet B .

De conclusie is: elke rij door $\langle \rangle$ ontmoet B dus: B is een barrière in $\mathcal{N}$.

Zo’n canoniek bewijs heeft zelf de structuur van een stomp. Het is, net als trouwens elk ‘eenvoudig’ bewijs door volledige inductie, zie [16], een oneindige constructie, die in de geest moet worden uitgevoerd, ook al kan die constructie soms worden opgeroepen door een eindige tekst. De conclusie van Brouwers These wordt verkregen door de stomp die met dit bewijs wordt gegeven als raamwerk voor een nieuwe redenering te benutten. De nieuwe redenering is opgebouwd uit beweringen van de vorm: “er is een stomp S zodat $S \cap B$ een barrière is in de verzameling van alle elementen van $\mathcal{N}$ die door s gaan”.

Zowel het continuïteitsbeginsel als de These van Brouwer zijn voor Brouwer op inzicht gebaseerde axioma’s voor de intuitionistische analyse. Wie ze met klassieke ogen leest, iets wat voor Brouwer onvoorstelbaar is, moet opmerken dat de These van Brouwer ‘waar’ is en het continuïteitsbeginsel ‘niet waar’.

Zij X een deelverzameling van $\mathcal{N}$ en B een deelverzameling van $\mathbf{N}^*$. We zeggen: B is een *barrière* in X als elke α in X de verzameling B ontmoet. Zij X een spreiding. We noemen X een *waaier* als er voor iedere s in $\mathbf{N}^*$ maar eindig veel natuurlijke getallen n bestaan zó, dat $s * \langle n \rangle$ een element van X bevat.

Lemma 4. Voor elke stomp S en voor elke waaier W is de verzameling van alle s in $\mathbf{N}^*$ die een element van W bevatten en net niet tot S behoren eindig.

Bewijs. We bewijzen dit met (transfinitie) inductie over de verzameling van de stompen. Het lemma is juist indien S de basisstomp $\{\langle \rangle\}$ is. Neem nu aan dat $S_0, S_1, \dots$ een rij van stompen is en dat het lemma juist is voor elke van de stompen $S_0, S_1, \dots$. Vorm $S := \{\langle \rangle\} \cup \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \langle n \rangle * S_n$ en laat W een waaier zijn. Merk op dat voor iedere n in $\mathbf{N}$, als $\langle n \rangle$ een element van W bevat, dan zijn er maar eindig veel s in $\mathbf{N}^*$ die net niet tot S_n behoren zodat $\langle n \rangle * s$ een element van W bevat. Maar er zijn maar eindig veel n in $\mathbf{N}$ zó, dat $\langle n \rangle$ een element van W bevat. Dus er zijn maar eindig veel s in $\mathbf{N}^*$ die een element van W bevatten en net niet tot S behoren. $\square$

Waaierstelling. Zij W een waaier en B een barrière in W .

- i. Er bestaat een eindige deelverzameling B' van B zó, dat B' een barrière is in W .
- ii. Er bestaat een natuurlijk getal n zodat elke α in W een beginstuk van lengte $\leq n$ bezit dat tot B behoort.

Bewijs. (i) Vorm $B^+ := B \cup \{s \mid s \in \mathbf{N}^* \mid s \text{ bevat geen element van } W\}$ en merk op dat B^+ een barrière is in $\mathcal{N}$. Bepaal een stomp S zó, dat $B^+ \cap S$ een barrière is in $\mathcal{N}$. Zij C de (eindige) verzameling van alle elementen van $\mathbf{N}^*$ die net niet tot S behoren en een element van W bevatten. Kies bij elke s in C een beginstuk b_s in B en definiëer: $B' := \{b_s \mid s \in C\}$.

(ii) is een eenvoudig gevolg van (i). $\square$

Uniforme-continuïteitsstelling. Zij X een (reële) verzameling van reële getallen die reël samenvalt met een deelwaaier W van $\mathbf{R}$ en zij f een (reële) functie van X naar $\mathbf{R}$. Als f in elk punt van X continu is, dan is f gelijkmatig continu op X .

Bewijs. Zij $m \in \mathbf{N}$. Laat B de verzameling zijn van alle eindige rijtjes $s = \langle s(0), \dots, s(n-1) \rangle$ in $\mathbf{N}^*$ zó, dat voor alle α, β in X , als $|\rho(s(n-1)) - \alpha| < \frac{1}{2^m}$ en $|\rho(s(n-1)) - \beta| < \frac{1}{2^m}$, dan $|f(\alpha) - f(\beta)| < \frac{1}{2^m}$. B is een barrière in W . Bepaal een eindige deelverzameling B' van B die een barrière is in W . Bereken een natuurlijk getal q zó, dat, voor elke n , voor elke $s = \langle s(0), \dots, s(n-1) \rangle$ in B' , voor elke p zó, dat $s * \langle p \rangle$ een element van W bevat, het getal $\frac{1}{2^q}$ kleiner is dan zowel $\rho(s(n-1)) - \rho(p) + \frac{1}{2^{n+1}}$ als $\rho(p) - \rho(s(n-1)) + \frac{1}{2^{n+1}}$. Merk nu op: voor alle α, β in X , als $|\alpha - \beta| < \frac{1}{2^q}$, dan bestaat $s = \langle s(0), \dots, s(n-1) \rangle$ in B' zó, dat $|\rho(s(n-1)) - \alpha| < \frac{1}{2^n}$ en $|\rho(s(n-1)) - \beta| < \frac{1}{2^n}$, dus $|f(\alpha) - f(\beta)| < \frac{1}{2^m}$. $\square$

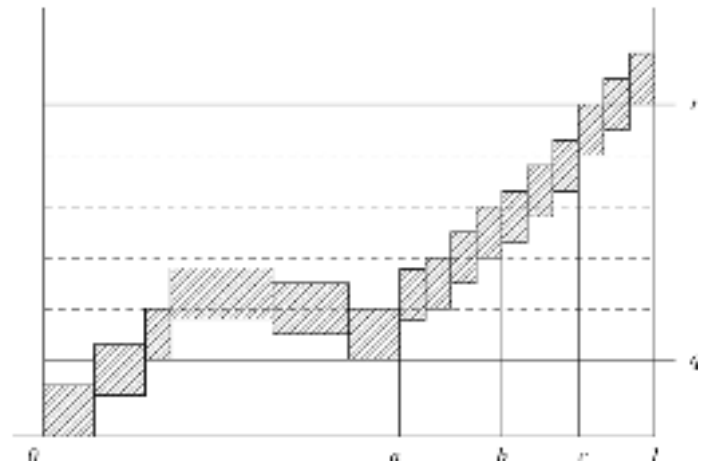
Zij X een (reële) deelverzameling van $\mathbf{R}$. De afsluiting van X , notatie $\bar{X}$, is de verzameling van alle α in $\mathbf{R}$ met de eigenschap dat er voor elke n in $\mathbf{N}$ een β in X bestaat zó, dat $|\alpha - \beta| < \frac{1}{2^n}$. We noemen X gesloten als X reël samenvalt met $\bar{X}$. Niet elke gesloten en begrensde deelverzameling X van $\mathbf{R}$ valt reël samen met een waaier. Brouwer heeft laten zien dat een gesloten deelverzameling X van $\mathbf{R}$ reël samenvalt met een waaier dan en slechts dan als er een rij $q_0, q_1, \dots$ van rationale getallen bestaat die X bebakent of catalogiseert, dat wil zeggen er is een stijgende rij $n_0, n_1, \dots$ van natuurlijke getallen zó, dat $n_0 = 0$ en voor elke k , (i) voor elke i , als $n_k \leq i < n_{k+1}$ dan bestaat x in X zó, dat $|x - q_i| < \frac{1}{2^{2^k}}$ en (ii) voor elke x in X bestaat i zó, dat $n_k \leq i < n_{k+1}$ en $|x - q_i| < \frac{1}{2^{2^k}}$. Het is niet moeilijk te zien dat als zulke rijen $q_0, q_1, \dots$ en $n_0, n_1, \dots$ gegeven zijn, de verzameling X reël samenvalt met de waaier W die bestaat uit alle rijen α in $\mathbf{R}$ zó, dat, voor elke k , een i bestaat met de eigenschap $i \leq n_{k+1}$ en $\rho(\alpha(k)) = q_i$.

Een deelverzameling X van $\mathbf{R}$ laat een bebakening toe dan en slechts dan als X begrensd is en we voor ieder reël getal z de afstand van het punt z tot de verzameling X kunnen bepalen, dat wil zeggen we kunnen een reël getal a berekenen zó, dat:

- i. voor elke y in X , $|y - z| \geq a$ en
- ii. voor elke n in $\mathbf{N}$ bestaat y in X zodat $|y - z| \leq a + \frac{1}{2^n}$.

Brouwer noemt gesloten deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ die een bebakening toelaten gecatalogiseerd-compact.

Een belangrijk gevolg van de uniforme-continuïteitsstelling is het feit dat elke (continue) functie van het gesloten segment $[0, 1]$ naar $\mathbf{R}$ Riemann-integreerbaar is. Brouwer scheppte ook genoeg in de volgende toepassing, zie [5] en [8].



Figuur 2 Een rationale-blokkenband van de hoogte $\frac{1}{5}(r-q)$ die de functie f bevat.

Stelling 5 (over het bestaan van voorwaartsgerichte minima).

Zij f een reële (gelijkmatig continue) functie van $[0, 1]$ naar $\mathbf{R}$ zó, dat $f(0) < f(1)$. Dan geldt:

- i. Voor alle rationale getallen q, r zó, dat $f(0) < q < r < f(1)$ kunnen we rationale getallen a, b en c construeren zó, dat $0 < a < b < c < 1$ en $q < f(a) < f(b) < f(c) < r$ en voor alle y in $[0, 1]$, als $b \leq y$, dan $f(a) + \frac{1}{5}(r-q) \leq f(y)$ en als $c \leq y$, dan $f(b) + \frac{1}{5}(r-q) \leq f(y)$. Merk op dat $b-a < \frac{1}{2}$ of $c-b < \frac{1}{2}$.
- ii. Voor alle rationale getallen q, r zó, dat $f(0) < q < r < f(1)$ kunnen we een reël getal x construeren zó, dat $q < f(x) < r$ en voor alle y in $[0, 1]$, als $x < y$, dan $f(x) < f(y)$.

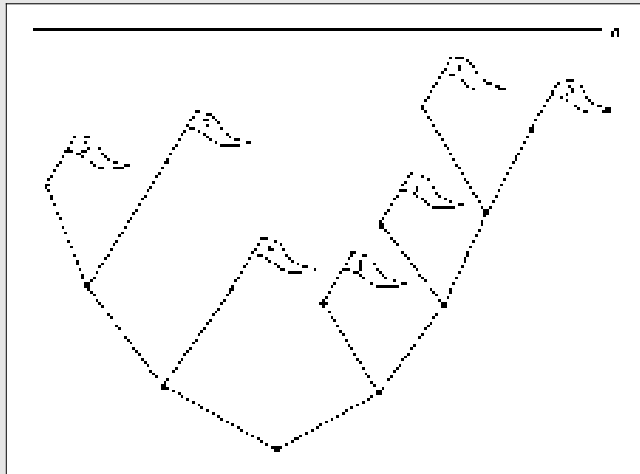
Bewijs. (i) Gebruikmakend van de gelijkmatige continuïteit van f construeren we een rationale-blokkenband van de hoogte $\frac{1}{5}(r-q)$ die de functie f bevat, zie figuur 2. Dat wil zeggen, we bepalen n in $\mathbf{N}$ en twee rijtjes rationale getallen $\langle s_0, \dots, s_{n-1}, s_n \rangle$ en $\langle t_0, \dots, t_{n-1} \rangle$ zodat $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{n-1} < s_n = 1$ en voor elke x in $[0, 1]$, voor elke $i < n$, als x behoort tot $[s_i, s_{i+1}]$, dan behoort $f(x)$ tot $[t_i, t_i + \frac{1}{5}(r-q)]$. We bepalen $i_0 :=$ het grootste getal $i < n$ zó, dat $t_i \leq q$, en $i_1 :=$ het grootste getal $i < n$ zó, dat $t_i \leq q + \frac{2}{5}(r-q)$ en $i_2 :=$ het grootste getal $i < n$ zó, dat $t_i \leq q + \frac{4}{5}(r-q)$ en merken op: $i_0 < i_1 < i_2$. We definiëren $a := s_{i_0+1}$ en $b := s_{i_1+1}$ en $c := s_{i_2+1}$. Dan $q < f(a) \leq q + \frac{1}{5}(r-q)$ en $q + \frac{2}{5}(r-q) < f(b) \leq q + \frac{3}{5}(r-q)$ en $q + \frac{4}{5}(r-q) \leq f(c) < r$, en voor elke y in $[0, 1]$ als $y \geq b$, dan $f(y) > q + \frac{2}{5}(r-q)$ en dus $f(y) > f(a) + \frac{1}{5}(r-q)$, en als $y \geq c$, dan $f(y) \geq q + \frac{4}{5}(r-q)$ en dus $f(y) \geq f(b) + \frac{1}{5}(r-q)$.

(ii) Door (i) steeds opnieuw toe te passen, ook voor andere gesloten segmenten dan $[0, 1]$, construeren we twee rijen $a_0, a_1, \dots$ en $b_0, b_1, \dots$ van rationale getallen en een rij $e_0, e_1, \dots$ van positieve rationale getallen zó, dat $a_0 = 0$ en $b_0 = 1$ en $e_0 < f(1) - f(0)$ en voor alle n , $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$ en $b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{2}(b_n - a_n)$, en $f(a_n) < f(a_{n+1}) < f(b_{n+1}) < f(b_n)$ en voor alle y in $[a_n, b_n]$, als $y \geq b_{n+1}$, dan $f(a_{n+1}) + e_{n+1} \leq f(y)$. Bovendien zorgen we er voor dat, voor elke n , $f(b_{n+1}) < f(a_n) + e_n$. De rij $a_0, a_1, \dots$ is dus een canoniek reël getal dat samenvalt met het canonieke reële getal $b_0, b_1, \dots$.

Noem dit getal x . We beweren: voor elke y in $[0, 1]$, als $x < y$, dan $f(x) < f(y)$. Want, stel $x < y$. Bepaal n in $\mathbf{N}$ zodat $b_n < y$. Dan: $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(b_k) < f(b_{n+1}) < f(a_n) + e_n \leq f(y)$. $\square$

Over de waaierstelling

Een belangrijk voorbeeld van een waaier is de verzameling $\mathcal{C}$ van alle oneindige rijen natuurlijke getallen die slechts de waarden 0 en 1 aannemen; $\mathcal{C}$ wordt wel de ruimte van Cantor genoemd. Stel dat B een barrière is in $\mathcal{C}$, dat wil zeggen elke rij α in $\mathcal{C}$ heeft een beginstuk dat tot B behoort. De waaierstelling leert nu dat we een n in $\mathbb{N}$ zullen kunnen bepalen zó, dat elke rij α in $\mathcal{C}$ een beginstuk van lengte hoogstens n bezit dat tot B behoort.



Wie zijn klassieke (troebele) bril niet heeft afgezet, herkent in de waaierstelling het lemma van D. König, zie [15]. Een speciaal geval van dit lemma kunnen we zo formuleren.

Lemma. *Stel dat B een deelverzameling is van $\mathbb{N}^*$ en dat geen enkele eindige deelverzameling B' van B een barrière is in $\mathcal{C}$. Dan is B zelf niet een barrière in $\mathcal{C}$, dat wil zeggen we kunnen een oneindige rij α in $\mathcal{C}$ bepalen zó, dat geen enkel beginstuk van α tot B behoort.*

Deze mededeling is — van een constructief standpunt — even onjuist als de stelling van Bolzano-Weierstrass. Brouwers waaierstelling is, ook in constructivistische kring, niet onomstreden. E. Bishop, die wel van mening was dat Brouwers kritiek een ernstig feit aan het licht had gebracht dat schreeuwde om maatregelen, kon Brouwers voorstellen voor nieuwe axioma's niet begrijpen. In [1] en [2] verdedigt hij een 'rechttoe-rechtaan-realistische' constructieve wiskunde, zonder 'half-mystieke' elementen.

In [13] liet S.C. Kleene zien dat de waaierstelling zich niet verdraagt met een algoritmische opvatting van het continuüm. Er bestaat een Turing-berekenbare deelverzameling B van $\mathbb{N}^*$ zó, dat elke Turing-berekenbare functie α in $\mathcal{C}$ de verzameling B ontmoet en we bij elke eindige deelverzameling B' van B een Turing-berekenbare functie α in $\mathcal{C}$ kunnen aanwijzen die B' niet ontmoet. Kleene beseftte overigens heel goed dat Brouwers opvatting van het continuüm niet de algoritmische was en respecteerde Brouwers standpunt.

Natuurlijk kan men, voor functies f van $[0, 1]$ naar $\mathbb{R}$ zodat $f(0) < f(1)$, op dezelfde manier het bestaan van achterwaartsgerichte maxima bewijzen, en voor functies f van $[0, 1]$ naar $\mathbb{R}$ zodat $f(0) > f(1)$, het bestaan van voorwaartsgerichte maxima en achterwaartsgerichte minima.

Bijna de uniforme-continuïteitsstelling

Zij A een beslisbare deelverzameling van $\mathbb{N}$. We stellen ons voor dat we de karakteristieke functie van de verzameling A ,

$$\chi_A(0), \chi_A(1), \dots$$

stap voor stap uitrekenen. We noemen A *eindig* als we een natuurlijk getal n kunnen aangeven zó, dat voor elke $m > n$, $\chi_A(m) = 0$. We noemen A *uitgesteld-eindig* als voor elke n , indien n in A , dan is A eindig.

Indien we te horen krijgen dat een verzameling A uitgesteld-eindig is, weten we niet meteen wat het aantal elementen van A is. We moeten wachten tot in de rij

$$\chi_A(0), \chi_A(1), \dots$$

een eerste positieve beslissing valt, dan wordt het aantal elementen van A pas onthuld.

Hier zijn twee voorbeelden van een uitgesteld-eindige beslisbare deelverzameling van $\mathbb{N}$ waarvan we niet weten dat zij eindig is: $A_0 := \{n \mid n \in \mathbb{N} \mid d(n) = d(n+1) = \dots = d(n+9) = 9 \text{ en er is geen } j < n \text{ zodat } d(j) = d(j+1) = \dots = d(j+9) = 9\}$, en $A_1 := \{j \mid j \in \mathbb{N} \mid \text{er bestaat } n \text{ in } A_0 \text{ zo dat } n < j < 2n\}$. Hier is d opnieuw de decimaalontwikkeling van π . Merk op dat de verzameling A_0 hoogstens één element heeft, terwijl we niet in staat zijn een bovengrens aan te geven voor het aantal elementen van A_1 .

We kunnen verder gaan. We noemen A *uitgesteld-uitgesteld-eindig* als voor elke n , indien n in A , dan is A uitgesteld-eindig. Hier is een voorbeeld van een uitgesteld-uitgesteld-eindige beslisbare deelverzameling van $\mathbb{N}$ waarvan we niet weten dat zij uitgesteld-eindig is: $A_2 := \{n \mid n \in \mathbb{N} \mid d(n) = d(n+1) = \dots = d(n+9) = 9 \text{ en er is hoogstens één } j < n \text{ zo dat } d(j) = d(j+1) = \dots = d(j+9) = 0\}$.

De operatie 'uitstellen' kan een transfiniet aantal keren worden geïtereerd. Voor elke stomp S , voor elke beslisbare deelverzameling A van $\mathbb{N}$, definiëren we de uitspraak: A is *uitgesteld- S -eindig* op de volgende manier:

- i. A is uitgesteld- $\{\langle \rangle\}$ -eindig := A is eindig
- ii. voor elke rij stompen $S_0, S_1, \dots$ vormen we $S := \{\langle \rangle\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \langle n \rangle * S_n$ en we definiëren: A is uitgesteld- S -eindig := Voor elke n , als $n \in A$, dan bestaat p zó, dat A is uitgesteld- S_p -eindig.

Nu blijkt, voor alle stompen S, T , als S een onmiddellijke deelstomp is van T , dan is elke uitgesteld- S -eindige verzameling uitgesteld- T -eindig. Met behulp van het continuïteitsbeginsel kan men aantonen, voor alle stompen S, T , als S een onmiddellijke deelstomp is van T , dan is niet elke uitgesteld- T -eindige verzameling uitgesteld- S -eindig. We definiëren ook nog:

A is *bijna-eindig* := bij elke strikt stijgende rij $n_0, n_1, \dots$ van natuurlijke getallen kunnen we k uitrekenen zó, dat $n_k \notin A$.

Dit is een zwak en alomvattend begrip. Uit de These van Brouwer volgt: voor elke beslisbare deelverzameling A van $\mathbb{N}$, A is bijna-eindig dan en slechts dan als er een stomp S bestaat zó, dat A is uitgesteld- S -eindig. Deze dingen worden uit de doeken gedaan in [18], [19] en [22].

Lemma 6 (over bijna-eindige verzamelingen).

- Voor alle beslisbare deelverzamelingen A, B van $\mathbf{N}$, als A, B beide bijna-eindig zijn, dan is ook $A \cup B$ bijna-eindig.
- Voor elk eindig rijtje $A_0, \dots, A_{k-1}$ van beslisbare deelverzamelingen van $\mathbf{N}$, als elk van de verzamelingen $A_0, \dots, A_{k-1}$ bijna-eindig is, dan is $\bigcup_{i < k} A_i$ bijna-eindig.
- Zij $E_0, E_1, \dots$ een rij beslisbare deelverzamelingen van $\mathbf{N}$ zó, dat $\mathbf{N} = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} E_k$. Zij A een beslisbare deelverzameling van $\mathbf{N}$ zó, dat voor elke k de verzameling $A \cap E_k$ bijna-eindig is. Neem ook aan dat we voor elke strikt-stijgende rij $n_0, n_1, \dots$ van natuurlijke getallen k kunnen uitrekenen zó, dat $A \cap E_{n_k} = \emptyset$. Dan is A bijna-eindig.

Bewijs. (i) Zij $n_0, n_1, \dots$ een strikt-stijgende rij natuurlijke getallen. Bepaal een deelrij $n_{i_0}, n_{i_1}, \dots$ van de rij $n_0, n_1, \dots$ zó, dat voor elke k , $n_{i_k} \notin A$. Bepaal k zó, dat $n_{i_k} \notin B$. Dan $n_{i_k} \notin A \cup B$.

(ii) Dit is een gevolg van (i).

(iii) Zij $n_0, n_1, \dots$ een strikt-stijgende rij natuurlijke getallen. Maak nu twee rijen $i_0, i_1, \dots$ en $k_0, k_1, \dots$ van natuurlijke getallen. Definiëer $i_0 = 0$ en bepaal k_0 zó, dat $n = n_{i_0} \in E_{k_0}$. Bepaal i_1 zó, dat $i_0 < i_1$ en $n_{i_1} \notin A$ of $n_{i_1} \notin E_{k_0}$. Bepaal k_1 zó, dat $k_1 \neq k_0$ en $n_{i_1} \notin A$ of $n_{i_1} \in E_{k_1}$. Bepaal i_2 zó, dat $i_1 < i_2$ en $n_{i_2} \notin A$ of $n_{i_2} \notin E_{k_0} \cup E_{k_1}$. Bepaal k_2 zó, dat $k_2 \notin \{k_0, k_1\}$ en $n_{i_2} \notin A$ of $n_{i_2} \in E_{k_j}$. Ga zo verder. De rij $i_0, i_1, \dots$ is strikt stijgend en de rij $k_0, k_1, \dots$ is eeneenduidig. We weten voor elke j , $n_{i_j} \notin A$ of $n_{i_j} \in E_{k_j}$. Bepaal j zó, dat $A \cap E_{k_j} = \emptyset$ en concludeer: $n_{i_j} \notin A$. $\square$

Zij X een spreiding. We noemen X een *bijna-waaier* als, voor iedere s in $\mathbf{N}^*$, de verzameling van alle natuurlijke getallen n zodat $s * \langle n \rangle$ een element van X bevat een beslisbare en bijna-eindige deelverzameling van $\mathbf{N}$ is.

Laat A een beslisbare deelverzameling zijn van $\mathbf{N}^*$; A is *bijna-eindig* als we bij elke eeneenduidige rij $s_0, s_1, \dots$ van elementen van $\mathbf{N}^*$, een k kunnen bepalen zó, dat s_k niet tot A behoort.

Lemma 7. Voor elke stomp S , voor elke bijna-waaier W : de verzameling van alle s in $\mathbf{N}^*$ die net niet tot S behoren en een element van W bevatten is een bijna-eindige deelverzameling van $\mathbf{N}^*$.

Bewijs. Het bewijs volgt het patroon van het bewijs van lemma 4 en maakt gebruik van lemma 6(iii). We laten de details aan de lezer over. $\square$

Bijna-waaierstelling. Zij W een bijna-waaier en B een barrière in W .

- Er bestaat een bijna-eindige deelverzameling B' van B zó, dat B' een barrière is in W .
- Voor elke rij $s_0, s_1, \dots$ van elementen van $\mathbf{N}^*$, als, voor iedere n , s_n een element van W bevat en $\text{lengte}(s_n) = n$, dan kunnen we k in $\mathbf{N}$ bepalen zó, dat s_k een beginstuk heeft dat tot B behoort.

Bewijs. (i) Het bewijs volgt het patroon van het bewijs van de waaierstelling deel (i) en maakt gebruik van lemma 7. We laten de details aan de lezer over.

(ii) Zij B' een bijna-eindige deelverzameling van B die een barrière is in W . Voor elke n bepalen we b_n in B' zodat b_n een beginstuk is van s_n of s_n een beginstuk is van b_n . We bepalen een strikt stijgende rij $i_0, i_1, \dots$ zó, dat voor elke k , $i_{k+1} > \text{lengte}(b_{i_k})$. Omdat B' bijna-eindig is, kunnen we k, l bepalen zó, dat $k < l$ en $b_{i_k} = b_{i_l}$. Maar dan heeft s_{i_l} een beginstuk dat tot B' behoort. $\square$



Errett Bishop



Stephen Kleene

foto: Dirk van Dalen

Het spel van de eindeloze verfijning kan ook met andere begrippen dan het begrip 'eindig' gespeeld worden. Hier zijn twee voorbeelden, nauwelijks meer dan suggesties.

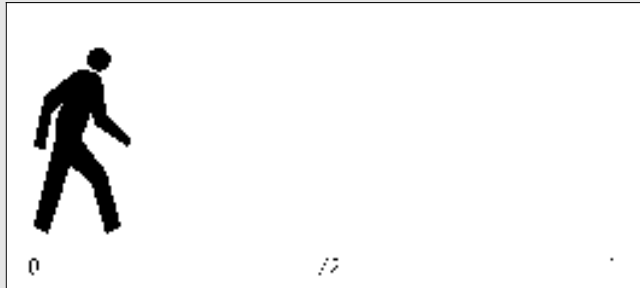
Voorbeeld 1. Zij $x_0, x_1, \dots$ een rij reële getallen. De rij $x_0, x_1, \dots$ is *begrensd* als we M in $\mathbf{N}$ kunnen aangeven zodat, voor alle n , $|x_n| \leq M$. De rij $x_0, x_1, \dots$ is *misschien-begrensd* als we M in $\mathbf{N}$ kunnen aangeven, zó, dat voor alle n , als $|x_n| > M$, dan is de rij $x_0, x_1, \dots$ begrensd. De rij $x_0, x_1, \dots$ is *misschien-misschien-begrensd* als we M in $\mathbf{N}$ kunnen aangeven zó, dat voor elke n als $|x_n| > M$, dan is de rij $x_0, x_1, \dots$ misschien-begrensd. De lezer ziet nu wel aankomen hoe we verdere iteraties van 'misschien' kunnen definiëren. We definiëren ook nog: de rij $x_0, x_1, \dots$ is *bijna-begrensd* als we voor elke strikt-stijgende rij $n_0, n_1, \dots$ van natuurlijke getallen k kunnen berekenen zó, dat $|x_{n_k}| \leq k$. Dit laatste begrip is heel zwak en het omvat de eerder genoemde begrippen.

Voorbeeld 2. Zij X een deelverzameling van $\mathbf{R}$ en f een reële functie van X naar $\mathbf{R}$. Zij e een positief rationaal getal. We zeggen dat f *e-gelijkmatig-continu* is op X als we n kunnen bepalen zó, dat voor alle x, y in X , als $|x - y| < \frac{1}{2^n}$, dan $|f(x) - f(y)| < e$; f is *e-misschien-gelijkmatig-continu* op X als we n kunnen bepalen zó, dat voor alle x, y in X , als $|x - y| < \frac{1}{2^n}$ en $|f(x) - f(y)| \geq e$, dan is f *e-gelijkmatig-continu* op X ; f is *e-misschien-misschien-gelijkmatig-continu* op X als we n kunnen bepalen zó, dat voor alle x, y in X , als $|x - y| < \frac{1}{2^n}$ en $|f(x) - f(y)| \geq e$, dan is f *e-misschien-gelijkmatig-continu* op X . We laten het aan de lezer over verdere iteraties te definiëren. We zeggen dat f *e-bijna-gelijkmatig-continu* is op X als we bij alle rijen $x_0, x_1, \dots$ en $y_0, y_1, \dots$ van punten van X , k kunnen uitrekenen zó, dat: als $|x_k - y_k| < \frac{1}{2^k}$, dan $|f(x_k) - f(y_k)| < e$; f is *bijna-gelijkmatig-continu* op X als, voor elk positief rationaal getal e , f is *e-bijna-gelijkmatig-continu* op X . Dit laatste begrip is heel zwak en het omvat de eerder genoemde begrippen.

Bijna-uniforme-continuïteitsstelling. Zij X een (reële) verzameling van reële getallen die reël samenvaalt met een deel-bijna-waaier W van $\mathbf{R}$ en zij f een (reële) functie van X naar $\mathbf{R}$. Als f in elk punt van X continu is, dan is f bijna-gelijkmatig-continu op X .

Opnieuw: Achilles

Het door Thierry Coquand bewezen principe van open inductie is een verrassend resultaat.



Achilles loopt van links naar rechts en begint in 0. We weten:

- i. Voor elk punt x , als Achilles x bereikt, dan is er een punt y rechts van x dat ook door Achilles bereikt wordt.
- ii. Voor elk punt x , Achilles bereikt x dan en slechts dan als Achilles elk punt y links van x bereikt.

Coquand verzekert ons nu dat Achilles zeker aankomt in 1. Wie alleen naar Achilles kijkt, zonder veel na te denken, begrijpt dat niet meteen. Als de rij van de stappen van Achilles er zo uit ziet:

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{7}{8}, \quad \dots \quad \text{en dus } 1,$$

gaat het wel goed, maar misschien neemt Achilles kleinere stappen. Loopt Achilles wel hard genoeg? Verkeert hij niet in fundamentele onzekerheid ooit ergens veilig aan te komen? Als we willen laten zien dat hij zeker in 1 komt, moeten we er ons eerst van overtuigen dat hij zeker in $\frac{1}{2}$ komt. Maar dan ...

Bewijs. Zij e een positief rationaal getal. Laat B de verzameling zijn van alle eindige rijtjes $s = \langle s(0), \dots, s(n-1) \rangle$ in $\mathbf{N}^*$ zó, dat voor alle α, β in X , als $|\rho(s(n-1)) - \alpha| < \frac{1}{2^n}$ en $|\rho(s(n-1)) - \beta| < \frac{1}{2^n}$, dan $|f(\alpha) - f(\beta)| < e$. B is een barrière in W . We bepalen een bijna-eindige deelverzameling B' van B die barrière is in W . Laten $x_0, x_1, \dots$ en $y_0, y_1, \dots$ rijen van elementen van W zijn. Voor elke k bepalen we een beginstuk s_k van x_k dat tot B' behoort en natuurlijke getallen n_k en q_k zó, dat $s_k = \langle x_k(0), \dots, x_k(n_k-1) \rangle$ en voor elke y in W , als $|x_k - y| < \frac{1}{2^{q_k}}$, dan $|x_k(n_k-1) - y| < \frac{1}{2^{n_k}}$ en dus $|f(x_k) - f(y)| < e$. We zorgen er voor dat voor alle k en l met $s_k = s_l$ geldt $q_k = q_l$. We bekijken de rij $q_0, q_1, \dots$. We definiëren de uitspraak QED (quod est demonstrandum — hetgeen we nog moeten bewijzen), als volgt:

QED: er bestaat k zó, dat $q_k < k$.

We maken nu een strikt-stijgende rij $n_0, n_1, \dots$ van natuurlijke getallen, zó, dat voor elke i , $q_{n_i} < q_{n_{i+1}}$ of QED. B' is bijna eindig en daarom kunnen we i, j bepalen zó, dat $i < j$ en $s_{n_i} = s_{n_j}$, dus $q_{n_i} = q_{n_j}$, dus QED, dus er bestaat k zó, dat $q_k < k$, en daarom: als $|x_k - y_k| < \frac{1}{2^k}$, dan $|x_k - y_k| < \frac{1}{2^{q_k}}$ en $|f(x_k) - f(y_k)| < e$. $\square$

Stelling 8. Zij $x_0, x_1, \dots$ een bijna-begrensde rij canonieke reële getallen. De verzameling $\{x_0, x_1, \dots\}$ valt reël samen met een bijna-waaier.

Bewijs. We definiëren een beslisbare deelverzameling C van $\mathbf{N}^*$. Het lege rijtje $\langle \rangle$ behoort tot C . Voor elk rijtje van de vorm $\langle n \rangle$ spreken we af: $\langle n \rangle$ behoort tot C dan en slechts dan als er $j \leq n$ bestaat zó, dat $|\rho(n) - x_j(2)| < \frac{1}{4}$ en voor alle $i < n$, als $\langle i \rangle$ tot C behoort, dan $|\rho(i) - \rho(n)| \geq \frac{1}{4}$. Voor elk niet-leeg rijtje $t = \langle t(0), \dots, t(k-1) \rangle$ in $\mathbf{N}^*$, voor elke n , spreken we af: $t * \langle n \rangle$ behoort tot C dan en slechts dan als t tot C behoort en er bestaat $j \leq n$ zó, dat $|\rho(n) - x_j(k+2)| < \frac{1}{2^{k+2}}$ en $|\rho(t(k-1)) - \rho(n)| < \frac{1}{2^{k+1}}$ en er is geen $i < n$ zó, dat $t * \langle i \rangle$ tot C behoort en $|\rho(i) - \rho(n)| < \frac{1}{2^{k+2}}$.

Zij W de verzameling van alle α in $\mathcal{N}$ waarvan elk beginstuk tot C behoort. W is een bijna-waaier en een deelspreiding van $\mathbf{R}$ die reël-samenvalt met $\{x_0, x_1, \dots\}$. $\square$

Zij A een deelverzameling van $\mathbf{R}$. We noemen A open dan en slechts dan als er rijen $q_0, q_1, \dots$ en $r_0, r_1, \dots$ van rationale getallen bestaan zó, dat voor elke x in $\mathbf{R}$, x behoort tot A dan en slechts dan als er een n in $\mathbf{N}$ bestaat zodat $q_n < x < r_n$.

Zij A een deelverzameling van $[0, 1]$. We noemen A open dan en slechts dan er een open deelverzameling B van $\mathbf{R}$ bestaat zó, dat $A = B \cap [0, 1]$.

Stelling 9 (principe van Open Inductie, Th. Coquand, zie [21]).

Zij A een open deelverzameling van $[0, 1]$. Stel voor elke x in $[0, 1]$, als voor elke $y < x$, $y \in A$, dan $x \in A$. Dan: $[0, 1] = A$.

Bewijs. Laten $q_0, q_1, \dots$ en $r_0, r_1, \dots$ rijen rationale getallen zijn zó, dat voor elke x in $\mathbf{R}$, $x \in A$ dan en slechts dan als we n kunnen bepalen zodat $q_n < x < r_n$. Voor elke x in $[0, 1]$: $[0, x]$ valt samen met een waaier, dus $[0, x] \subseteq A$ dan en slechts dan als er n in $\mathbf{N}$ bestaat zó, dat $[0, x] \subseteq \bigcup_{i < n} (q_i, r_i)$. We nemen aan: $q_0 < 0 < r_0$.

We definiëren een rij $x_0, x_1, \dots$ van punten van $[0, 1]$ als volgt. Voor elke n , $x_n :=$ het grootste rationale getal x zó, dat $[0, x] \subseteq \bigcup_{i < n} (q_i, r_i)$. Het is niet moeilijk te zien dat x_n goed gedefinieerd is, en dat voor iedere n , $x_n \leq x_{n+1}$, en dat de verzameling van alle x in $[0, 1]$ zó, dat $[0, x] \subseteq A$ samenvalt met $\{x_0, x_1, \dots\}$. Zij W een deel-bijna-waaier van $\mathbf{R}$ die reël samenvalt met $\{x_0, x_1, \dots\}$. Zij B de verzameling van alle eindige rijtjes $s = \langle s(0), \dots, s(n-1) \rangle$ in $\mathbf{N}^*$ zó, dat we $j < n$ kunnen bepalen met de eigenschap dat $q_j < \rho(s(n-1)) < r_j$; B is een barrière in W . We bepalen een bijna-eindige deelverzameling B' van B die barrière is in W .

We definiëren nu een rij $z_0, z_1, \dots$ van punten van W en een rij $s_0, s_1, \dots$ van elementen van B' , als volgt: $z_0 := 0$. Zij $s_0 = \langle s_0(0), \dots, s_0(n_0-1) \rangle$ het kortste beginstuk van z_0 dat tot B' behoort. Bepaal j_0 zó, dat $q_{j_0} < \rho(s_0(n_0-1)) < r_{j_0}$. Merk op dat $[0, r_{j_0}] \subseteq A$ en bepaal een element z_1 van W dat samenvalt met r_{j_0} . Indien $z_1 \geq 1$, definiëren we, voor elke $n > 0$, $z_{n+1} := z_n$ en $s_n := s_0$. Indien $z_1 < 1$ bepalen we het kortste beginstuk van z_1 dat tot B' behoort en noemen dit $s_1 = \langle s_1(0), \dots, s_1(n_1-1) \rangle$. Bepaal j_1 zó, dat $q_{j_1} < \rho(s_1(n_1-1)) < r_{j_1}$. Merk op dat $[0, r_{j_1}] \subseteq A$ en laat z_2 een element van W zijn dat samenvalt met r_{j_1} . Indien $z_2 \geq 1$, definiëren we, voor elke $n > 1$, $z_{n+1} := z_n$ en $s_n := s_1$. Indien $z_2 < 1$, bepalen we het kortste beginstuk van z_2 dat tot B' behoort en noemen dit s_2 . Zo gaan we verder. Omdat B' bijna-eindig is, bestaat n zo dat $s_{n+1} = s_n$ en dus $z_{n+1} \geq 1$ en dus $[0, 1] \subseteq A$. $\square$

Borels bewijs van de stelling van Heine-Borel

In [3] bewijst E. Borel de stelling van Heine-Borel op de volgende manier. Iedere overdekking van $[0, 1]$ door aftelbaar veel open intervallen heeft een eindige deel-overdekking. Immers, laat (a_0, b_0) een interval zijn uit de gegeven overdekking dat 0 bevat, laat (a_1, b_1) een interval zijn dat b_0 bevat, laat (a_2, b_2) een interval zijn dat b_1 bevat, ..., laat b_ω de limiet zijn van de rij $b_0, b_1, \dots$, laat $(a_{\omega+1}, b_{\omega+1})$ een interval zijn dat b_ω bevat, laat $(a_{\omega+2}, b_{\omega+2})$ een interval zijn dat $b_{\omega+1}$ bevat, ..., ga zo verder, alle aftelbare ordinaalgetallen langs. We stoppen zodra we een aftelbaar ordinaalgetal α vinden met de eigenschap $b_\alpha \geq 1$. Merk op dat we zeker zullen stoppen omdat er overaftelbaar veel aftelbare ordinaalgetallen zijn. Zouden we nooit stoppen, dan gold, voor elk aftelbaar ordinaalgetal α , $b_{\alpha+1} > b_\alpha$. Maar voor elk natuurlijk getal k kunnen er niet meer dan k aftelbare ordinaalgetallen α zijn met de eigenschap $b_{\alpha+1} > b_\alpha + \frac{1}{k}$.

Ook kunnen we bewijzen, voor elk aftelbaar ordinaalgetal α , dat het interval $[0, b_\alpha]$ overdekt wordt door eindig veel interval-

len uit de gegeven overdekking van $[0, 1]$. Dat doen we met inductie langs de ordinaalgetallen. Het geldt bijvoorbeeld ook voor $[0, b_\omega]$: we rekenen k_0 uit zó, dat $a_{\omega+1} < b_{k_0}$ en merken op dat $[0, b_\omega]$ wordt overdekt door: $(a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots, (a_{k_0}, b_{k_0})$ en $(a_{\omega+1}, b_{\omega+1})$. We concluderen dat ook $[0, 1]$ zelf door eindig veel intervallen uit de gegeven overdekking overdekt wordt.

Borel geeft in de eerste helft van dit bewijs een niet-constructief argument voor het principe van Open Inductie. Met kennelijk genoeg maakt hij gebruik van de aftelbare ordinaalgetallen, ongeveer twintig jaar eerder ontdekt door Cantor, zie [11]. $\Leftarrow$

Dankwoord

De redactie bedankt prof. Dirk van Dalen van de Universiteit Utrecht en prof. Douglas Bridges van de University of Canterbury, Nieuw Zeeland voor het ter beschikking stellen van het fotomateriaal.

Referenties

- 1 E.A. Bishop, *Foundations of constructive analysis*, McGraw Hill, New York, 1967.
- 2 E.A. Bishop and D.S. Bridges, *Constructive analysis*, Springer, Heidelberg & New York, 1985.
- 3 E. Borel, 'Sur quelques points de la théorie des fonctions', *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* (3)12 (1895), pp. 9–55, ook in [4], pp. 239–287.
- 4 *Oeuvres de Émile Borel*, Tome 1, Éditions du Centre National de Recherche Scientifique, Paris, 1972.
- 5 L.E.J. Brouwer, 'Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten', Erster Teil, 'Stetigkeit, Messbarkeit, Derivierbarkeit', *Kon. Ned. Ak. Wet. Verhandelingen*, 1ste sectie 13 nr. 2 (1923) (ook in [7], pp. 246–267).
- 6 L.E.J. Brouwer, 'Über Definitionsbereiche von Funktionen', *Math. Annalen* 97 (1927), pp. 60–75 (ook in [7], pp. 390–405).
- 7 L.E.J. Brouwer, *Collected Works, Volume I: Philosophy and Foundations of Mathematics*, North Holland, Amsterdam-Oxford, 1975 [edited by A. Heyting].
- 8 L.E.J. Brouwer, *Intuitionismus*, Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1992 [herausgegeben, eingeleitet und kommentiert von D. van Dalen].
- 9 Miguel de Cervantes Saavedra, *El ingenioso hidalgo Don Quijote de la Mancha*, Primera Parte, Espasa-Calpe, S.A., Madrid, 1966.
- 10 Miguel de Cervantes Saavedra, *De geestrijke ridder Don Quichot van de Mancha*, Querido, Amsterdam, 1963 [vertaald, ingeleid en toegelicht door J.W.F. Werumeus Buning en C.F.A. van Dam].
- 11 M. Hallett, 'Towards a Theory of Mathematical Research Programmes', *The British Journal for the Philosophy of Science* 30 (1979), pp. 1–25 and pp. 135–159.
- 12 W.A. Howard and G. Kreisel, 'Transfinite induction and bar induction of types zero and one, and the role of continuity in intuitionistic analysis', *The Journal of Symbolic Logic* 31 (1966), pp. 325–358.
- 13 S.C. Kleene, 'Recursive functions and intuitionistic mathematics', *Int. Congr. Math.* 1950, Cambridge MA, volume I (1952), pp. 679–685.
- 14 S.C. Kleene and R.E. Vesley, *The Foundations of Intuitionistic Mathematics, especially in relation to recursive functions*, North Holland, Amsterdam, 1965.
- 15 D. König, 'Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche', *Acta Univ. Szeged, Sect. Math.* 3 (1927), pp. 121–130.
- 16 H. Poincaré, 'Sur la nature du raisonnement mathématique', in: *La Science et l'Hypothèse*, Flammarion, Paris, 1968, (1902).
- 17 W. Veldman, *On the continuity of functions in intuitionistic real analysis*, Report no. 8210, Department of Mathematics, University of Nijmegen, 1982.
- 18 W. Veldman, 'Some intuitionistic variations on the notion of a finite set of natural numbers', in: H.C.M. de Swart, L.J.M. Bergmans (ed.), *Perspectives on Negation, Essays in honour of Johan J. de Jongh on his 80th birthday*, Tilburg University Press, Tilburg, 1995, pp. 177–202.
- 19 W. Veldman, 'On sets enclosed between a set and its double complement', in: A. Cantini (ed.), *Logic and Foundations of Mathematics, Proceedings Xth International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science, Florence, 1995, Volume III*, Kluwer, Dordrecht, 1999, pp. 143–154.
- 20 W. Veldman, 'Understanding and using Brouwer's Continuity Principle', in: U. Berger, H. Osswald, P.A. Schuster (eds.), *Reuniting the Antipodes, constructive and non-standard views of the continuum, Proceedings of a symposium held in San Servolo / Venice, 1999*, Kluwer, Dordrecht, 2001, pp. 285–302.
- 21 W. Veldman, *An intuitionistic proof of Kruskal's Theorem*, Report no. 0017, Department of Mathematics, University of Nijmegen, 2000.
- 22 W. Veldman, *The Borel hierarchy and the projective hierarchy in intuitionistic mathematics*, Report no. 0103, Department of Mathematics, University of Nijmegen, 2001.
- 23 W. Veldman, 'Bijna de waaierstelling', in: W. Schikhof, D. Beckers, O. van Gaans, S. Teerenstra (ed.), *Circumspice, Various papers in and around mathematics in honor of Arnoud van Rooij*, Department of Mathematics, University of Nijmegen, 2001, pp. 301–315.

Imme van den Berg

Departamentado de Matemática

CLAV, Universidade de Évora, 7001 Évora Codex Portugal

ivdb@dmf.uevora.pt

Letters to the editor

Oscillations of the Taylor polynomials of the sine function

In *Nieuw Archief voor Wiskunde*, december 2000, F. Rothe gives a first-order estimation of the number of zeros N_ω of a Taylorpolynomial P_ω of the sine function of high order ω , i.e. $N_\omega \sim \frac{2}{\pi e} \cdot \omega$. The asymptotic formula is proved by joining to the common upper bound of the remainder a sufficiently close lower bound. The bound and its derivation are clearly ad-hoc.

It seems to me that the result is a straightforward corollary to two general formulae for remainders of Taylor expansions I derived in [1, Proposition 3.2, Theorem 3.5] and [2, Theorem 3.11 and Chapter 3.4]. The formulae belong to nonstandard analysis, which makes them somewhat particular. However, the formulae contain two parameters, index and place. It is not natural to let one of the parameters go to infinity, or to couple them, so the formulae cannot be translated directly to standard formulae.

The formulae were derived within Internal Set Theory (IST) of E. Nelson. In this axiomatic system, which is consistent with classical set theory, the set $\mathbf{R}$ contains infinitesimals and infinitely large or unlimited numbers. Below I use some symbols of nonstandard asymptotics: $\emptyset$, the 'unknown' infinitesimal, $\mathbb{L}$ the 'unknown' limited number, $\textcircled{a}$ the 'unknown' appreciable number, analogous to respectively $o(1)$, $O(1)$ and $O_s(1)$. An up-to-date introduction to IST is given in [3].

In the case of the sine function, the first formula is the following. Let $R_{\omega-2}(x)$ be the remainder

$$\sin x - \sum_{n=0}^{(\omega-3)/2} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

such that the first neglected term $(-1)^{\omega} \frac{x^\omega}{\omega!}$ is of (odd) degree ω . Then, for all real x , limited or unlimited

$$R_{\omega-2}(x) = \frac{(1 + \emptyset)}{1 + (x/\omega)^2} \cdot (-1)^\omega \frac{x^\omega}{\omega!}. \quad (1)$$

The second formula gives the remainder for

the special values $x = \omega' + u$ with $\omega' = \frac{\omega}{e} + \frac{1}{2e} \log \omega$ and u limited. Then

$$R_{\omega-2}(\omega' + u) \simeq (-1)^\omega \frac{e^{eu}}{\sqrt{2\pi}(1 + \frac{1}{e^2})}. \quad (2)$$

Applied to the cosine function, the formulae are identical, for even ω .

We consider only positive x and claim that the distance between the last zero of the Taylor polynomial $P_{\omega-2}$ and ω' is limited. Notice that, firstly,

$$F(x) \equiv \frac{1}{1 + (x/\omega)^2} \cdot (-1)^\omega \frac{x^\omega}{\omega!}$$

is monotonous in x , and, secondly that formula (2) implies that if u passes through all limited values, $F(\omega' + u)$ passes through all appreciable values. Hence it follows from the monotony of $F(x)$ that $F(x)$ is infinitesimal for $x = \omega' + u$ with u negative unlimited, appreciable for $x = \omega' + u$ with u limited, and unlimited for $x = \omega' + u$ with u positive unlimited. The same partition holds for the remainder, since $R_{\omega-2}(x) = (1 + \emptyset)F(x)$.

As long as the remainder of the sine function is infinitesimal, the Taylor polynomial has a zero infinitely close to every zero of the sine function $k\pi$, with integer k . In fact, there is only one zero, for the polynomial $P_{\omega-2}$ is transversal to the x -axis: the derivative of the polynomial is the Taylor polynomial of degree $\omega - 3$ of the cosine function, and because formula (1) is also valid for the cosine function, one has $P'_{\omega-2}(x) \simeq \cos(x) \simeq \pm 1$ for all $x \simeq k\pi$. If the remainder of the sine function is unlimited, the distance between $P_{\omega-2}$ and the x -axis is also unlimited, and no more zeros can occur. We conclude that the last zero is of the form $\omega' + u$ with u limited. It could be determined individually for most ω up to an infinitesimal, using formula (2).

We see that the number of positive zeros is $(\omega' + \mathbb{L})/\pi$, and by symmetry

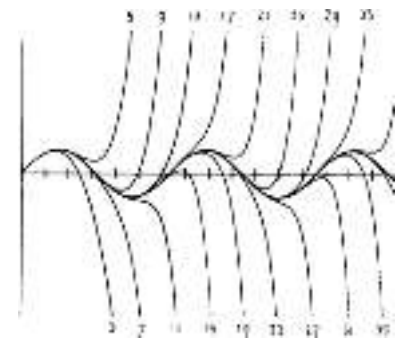
$$N_{\omega-2} = \frac{2}{\pi e} \cdot \omega + \frac{1}{\pi e} \cdot \log \omega + \mathbb{L}.$$

The same expression holds for N_ω .

The problem in question is somewhat anecdotal, but the formulae behind are not. Formulae (1) and (2) hold under very general conditions, implying that the remainder as a function of the distance to the origine is locally exponential such as in (2), and that the series is locally exponential (geometric) as a function of the index; indeed, we recognize in (1) the remainder of a geometric series with ratio $-\left(\frac{x}{\omega}\right)^2$. Finally we mention that that the crucial values $x = \omega' + \mathbb{L}$ may be determined from (1), by solving the external equation

$$\frac{(1 + \emptyset)}{1 + (x/\omega)^2} \cdot \frac{x^\omega}{\omega!} = \textcircled{a},$$

which can be effectuated using systematic, algebraic methods based on the external numbers of [3] and [4].



The sine function approximated by the polynomials of its Taylor series.

References

1. I.P. van den Berg, *Un point de vue nonstandard sur les développements en série de Taylor*, Astérisque 110, p. 209–223 (1983).
2. I.P. van den Berg, *Nonstandard Asymptotic Analysis*, Springer Lecture Notes in Mathematics 1249, p. 187 (1987).
3. F. Diener, M. Diener (ed.), *Nonstandard Analysis in Practice*, Springer universitext, (1995), in particular Chapter 7: F. Koudjeti, I.P. van den Berg, *Neutrices, external numbers and external calculus*.
4. F. Koudjeti, *Elements of external calculus, with an application to mathematical finance*, Thesis, Groningen, Labyrinth Publications, Capelle a/d IJssel, (1995).

Jan Bouwe van den Berg

Division of Theoretical Mechanics, University of Nottingham

Nottingham NG7 2RD, United Kingdom

Jan.Bouwe@nottingham.ac.uk

Column Wiskundigen in den vreemde

From Nottingham Forest

December 2000 promoveerde Jan Bouwe van den Berg aan de Universiteit Leiden. In januari werd hij voor de tijdsduur van twee jaar EPSRC-research fellow (Engineering and Physical Sciences Research Council) aan the University of Nottingham (UK). Een jaar lang houdt hij ons op de hoogte van zijn avonturen in Nottingham Forest.

Een tijdje in je eentje in het buitenland verblijven zet bijna onherroepelijk aan tot reflectie. Dat was zo toen ik tijdens mijn studie een half jaar naar Frankrijk ging en dat is nu weer zo. Alleen al om die reden zou ik het iedereen aanraden. Ik merk (en niet alleen bij mezelf) dat het enorm veel voldoening geeft om geheel op jezelf aangewezen te zijn en te merken dat je dat overleeft. Sterker nog, dat je een leuke tijd kunt hebben. Het helpt natuurlijk dat de meeste Engelsen ontzettend aardig zijn en snel bereid zijn je bij hun drinkgelag te betrekken. Natuurlijk is niet alles fantastisch; het grootste nadeel in Nottingham is dat Engelsen het persoonlijke gesprek schuwen. Tenzij ze voldoende drank op hebben, dan wil het nog wel eens wat worden.

Maar uiteraard hebben Nederlanders net zulke vreemde trekjes. Bovendien zijn er eigenlijk veel meer overeenkomsten dan verschillen tussen Nederland en Engeland. Allebei denken ze dat ze wel even wereldkampioen voetbal zullen worden, al is dat voor het Nederlands elftal op de lange baan geschoven. Dat wordt mij natuurlijk voortdurend onder de neus gewreven (gelukkig heeft het Nederlands cricketteam zich wel voor het WK geplaatst en cricket wordt hier nog belangrijker gevonden dan voetbal). Engelsen en Nederlanders klagen even hard dat hun benzineprijzen de hoogste van de hele wereld zijn. En de befaamde kop boven het maaiveld, die vaak zo typisch Nederlands wordt gevonden, heeft hier een vergelijkbare variant. De ene dag wordt Tony Blair of David Beckham als een halfgod de hemel in geprezen, de volgende dag heeft hij alles helemaal verkeerd gedaan en heeft hij geen enkel krediet meer. Ook de Engelsen willen de menselijke feilbaarheid benadrukt zien en de tabloids springen hier gretig op in.

Meer nog dan tot reflectie over de wereld om je heen, word je gedwongen over jezelf na te denken. Een van de vragen die naar voren komt is wat het onderzoek dat je doet nou eigenlijk voorstelt. Ik vermoed dat elke wiskundige zulke periodes van twijfel doormaakt. Je ziet al die ontzettend slimme mensen om je heen die allemaal mooie stellingen bewijzen over heel moeilijke dingen, terwijl wat je zelf doet wel aardig is maar ook heel triviaal als je het eenmaal begrijpt. Gisteravond in de pub uitte een van de promovendi hier diezelfde twijfel. Omdat ik het al eerder heb meegemaakt, en misschien omdat ik toch enige voldoening heb kunnen ontlenen aan

het voltooien van mijn proefschrift, is het nu als postdoc iets makkelijker om dat te relativeren dan als promovendus. De twijfel wordt nog versterkt doordat je als promovendus vaak het gevoel hebt dat de universiteit je niet echt serieus neemt. Om te beginnen zit je met drie AIO's op een tweepersoons kamer. Daarnaast verdienen je lef-tijdsgenoten in het bedrijfsleven al snel het dubbele van wat jij verdient. Universiteiten doen bovendien voortdurend pogingen om de AIO-salarissen in beurzen om te zetten met het argument dat promoveren meer opleiding dan werk is. De begeleiding van promovendi is echter in het algemeen zo beperkt dat dit argument onmogelijk staande te houden is. Ten slotte is het uitzicht op een vaste baan bij een universiteit twijfelachtig zo niet nihil, zodat onder promovendi en postdocs het belangrijkste gespreksonderwerp is waar je volgend jaar denkt te werken.

Dat is overigens in Nottingham net zo als in Leiden en van promovendi aan andere universiteiten hoor ik niet anders. Ik weet wel dat deze klachten zo oud zijn als de weg naar Rome. Het opvallende is dat het merendeel van de academici met een vaste aanstelling er totaal anders tegenaan kijkt. Telkens weer krijg je te horen dat je toch jong bent, dat wiskunde toch een leuk vak is en dat je je toch nog geen zorgen hoeft te maken over geld of een vaste baan. En elke keer denk je: dat is makkelijk praten als je een goedbetaalde vaste baan hebt.

Gezien de problemen die universiteiten hebben met het werven van promovendi zou je verwachten dat met wat moderner personeelsbeleid het promotieonderzoek aantrekkelijker wordt gemaakt. Mensen die totaal gefascineerd zijn door wiskunde zullen onder alle omstandigheden wel gaan promoveren, maar de meeste afstuderende wiskundigen hebben meerdere pijlen op hun boog en zullen een afweging maken tussen universiteit en bedrijfsleven. En in vele opzichten is het bedrijfsleven zeker zo aantrekkelijk. Het werk is er afwisselend en op resultaat gericht en er is structureel aandacht voor ontplooiing en begeleiding. Maar aan de universiteit is vergelijken met het bedrijfsleven vloeken in de kerk; een universiteit is immers geen bedrijf. En de vrees voor toename van bureaucratische rompslomp is zo groot dat bestaande oneffenheden in de organisatie op de koop toe worden genomen.

Maar goed, ik moet me niet al te druk maken over promovendi. Als postdoc wordt het tijd om de overgang te maken. Ik beweer nu al dat het heel wat waard is om in alle vrijheid wiskundig onderzoek te kunnen doen. Dus binnenkort zeg ik waarschijnlijk ook dat je je altijd later nog druk kunt maken over het vinden van een baan. Er zijn tenslotte belangrijker zaken in de wereld.



Arthur Veldman

Instituut voor Wiskunde en Informatica
 Rijksuniversiteit Groningen
 Postbus 800, 9700 AV Groningen
 veldman@math.rug.nl

Roel Verstappen

Instituut voor Wiskunde en Informatica
 Rijksuniversiteit Groningen
 Postbus 800, 9700 AV Groningen
 verstappen@math.rug.nl

Turbulentie, golfballetjes en discrete afgeleiden

Waarom heeft een golfballetje kuiltes maar trekt een schaatser juist een zo glad mogelijk pak aan? Hoe bepaal je van een kromme waarvan drie punten zijn gegeven een bruikbare helling in het middelste punt? Twee vragen die ogenschijnlijk niets met elkaar te maken hebben maar die, zoals dit artikel laat zien, via het onderzoek aan turbulentie bij elkaar komen.

Als je op een winderige herfst dag naar buiten kijkt, zie je de valende bladeren op een grillige manier door de lucht dwarrelen — de bladeren visualiseren de turbulente stroming die door de wind wordt opgewekt. Dit wanordelijke stromingspatroon staat tegenover het rustige patroon van een gelaagde, laminaire stroming waarin alle luchtdeeltjes strak in het gelid lijken te bewegen. Leonardo da Vinci was vijf eeuwen geleden al geïntrigeerd door het grillige gedrag van een turbulente stroming, en heeft daar schetsen van gemaakt, zoals figuur 1.

Stroperige lucht

Om enig gevoel te krijgen hoe turbulentie ontstaat beginnen we met de vergelijking die het gedrag van een stroming beschrijft — deze is reeds in de eerste helft van de 19^e eeuw opgesteld door Claude Navier (1822) en George Stokes (1845). 'Hun' vergelijking beschrijft behoud van impuls volgens de Tweede Wet van Newton en ziet er in dimensieloze vorm uit als

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u}}_{\text{convectie}} = -\text{grad } p + \underbrace{\frac{1}{Re} \text{div grad } \mathbf{u}}_{\text{diffusie}}.$$

Daarnaast geldt behoud van massa: $\text{div } \mathbf{u} = 0$.

In bovenstaande behoudswetten stelt $\mathbf{u}$ de snelheidsvector voor en p de geschaalde druk. Verder is Re een dimensieloos kental, geïntroduceerd door Osborne Reynolds (1883) als $Re = \rho UL / \mu$; hierin zijn U en L karakteristieke maten voor de snelheid van de stroming en de lengte van het omstroomde object, ρ is de dichtheid van het stromende medium (onsamendrukbaar verondersteld), terwijl μ de (constante) moleculaire viscositeit is. Het Reynoldsgetal, beter gezegd zijn omgekeerde, geeft ruwweg aan hoe belangrijk de viskeuze krachten (diffusie) zijn ten opzichte van de traagheidskrachten (convectie): hoe kleiner Re , hoe belangrijker de viskeuze krachten (dat wil zeggen hoe stroperiger de vloeistof).

	medium	snelheid in km/u	Reynolds
golfbal	lucht	250	$2 \cdot 10^5$
schaatser	lucht	40	$5 \cdot 10^5$
zwemmer	water	5	$2 \cdot 10^6$
auto	lucht	80	$5 \cdot 10^6$
haai	water	20	$2 \cdot 10^7$
vliegtuig	lucht	900	$5 \cdot 10^7$
schip	water	20	tot 10^9

Tabel 1 Reynoldsgetalen, in de praktijk.

Voor veel stromingen is Re erg groot (zie tabel 1), hetgeen de indruk wekt dat viskeuze krachten meestal niet belangrijk zijn. Dit heeft onderzoekers lange tijd op het verkeerde been gezet, maar aan het begin van de 20^e eeuw ontdekten Ludwig Prandtl en zijn collega's dat vlak langs de wand van een omstroomd lichaam vis-

cositeit wel degelijk een invloed heeft met grote gevolgen: zonder deze stroperigheid zou een fietser geen last hebben van tegenwind, maar ook zouden vogels (en vliegtuigen) niet kunnen vliegen!

Het is in deze dunne grenslaag dat een stroming al of niet turbulent wordt. Dit hangt af van de grootte van het Reynoldsgetal: hoe groter Re , hoe makkelijker turbulent. Ook ruwheid van de wand helpt om een stroming turbulent te maken — daar komen we straks op terug. Wat verder opvalt in tabel 1 is dat stromingen in lucht een lager Reynoldsgetal hebben dan soortgelijke stromingen in water. Met andere woorden, lucht is stroperiger dan water! Het mag tegen je gevoel in zijn, maar het klopt wel: de moleculaire viscositeit μ van lucht is ongeveer honderd keer kleiner dan die van water, maar omdat de dichtheid ρ van lucht duizend keer kleiner is, is de relatieve invloed van de viscositeit in lucht zo'n tien keer groter dan in water.

Energiecascade

Turbulentie wordt gecreëerd door de convectieve termen in de Navier-Stokes vergelijking. Om dit te illustreren, nemen we aan dat er in de x -component van de snelheid een golfje (wervel) zit van de vorm $u = \sin \omega x$, en laat de overige snelheidscomponenten voor de eenvoud gelijk nul zijn. Als we de convectieve term in de x -component van de Navier-Stokes vergelijking uitschrijven verschijnt onder andere de volgende bijdrage

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \omega \sin \omega x \cos \omega x = \frac{1}{2} \omega \sin 2\omega x.$$

Deze term heeft een twee keer zo hoge frequentie en daarmee een twee keer kleinere golflengte. Via de tijdsafgeleide komt deze kortere golf daarna in de snelheid zelf terecht. Dit proces kun je voortzetten, en er ontstaan steeds kleinere schalen in de stroming. Deze 'cascade' van grote wervels naar kleine wervels stopt pas wanneer de diffusieve term in de Navier-Stokes vergelijking ingrijpt. Deze is in ons voorbeeld gelijk aan

$$\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{Re} \sin \omega x,$$

en we zien dat voor toenemende frequenties (kortere golven) deze term kwadratisch groeit, terwijl de convectieve term 'slechts' lineair groeit. Als ω groter wordt, wordt de diffusieve term dus belangrijker, en zodra $\omega \sim Re$ is deze ongeveer even groot als de convectieve term. Beide bijdragen kunnen elkaar gaan compenseren, zodat in de tijdsafgeleide geen hogere frequenties meer ontstaan: we zijn bij de kleinste schaal aangekomen. Dit proces heeft de meteoroloog Lewis Fry Richardson in 1922 verwoord als:

*Big whirls have little whirls,
Which feed on their velocity,
And little whirls have lesser whirls,
And so on to viscosity.*

Bovenstaande afleiding is wat heuristisch en suggereert dat de kleinste lengteschalen zich gedragen als $1/Re$; dit is dan ook niet helemaal juist. Kolmogorov heeft in 1941 beargumenteerd dat de diffusieve term op een iets grotere schaal, evenredig met $Re^{-3/4}$, al voldoende invloed heeft om de cascade naar steeds kleinere schalen te beëindigen (zie bijvoorbeeld [1]).

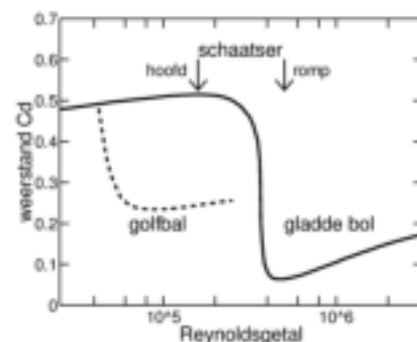


Figuur 1 Leonardo da Vinci: schets van een turbulente stroming

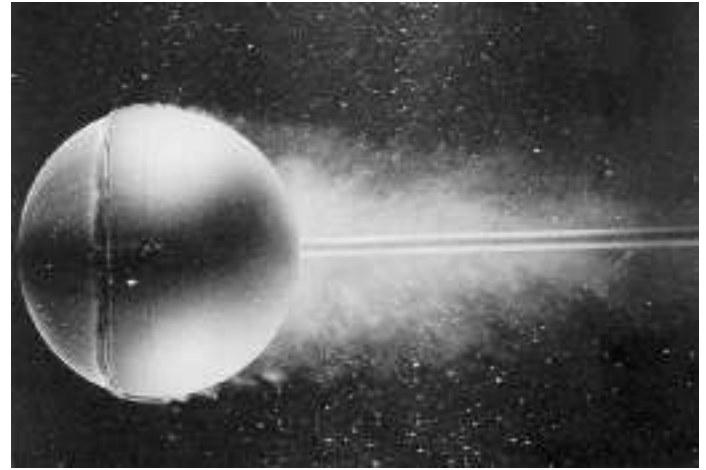
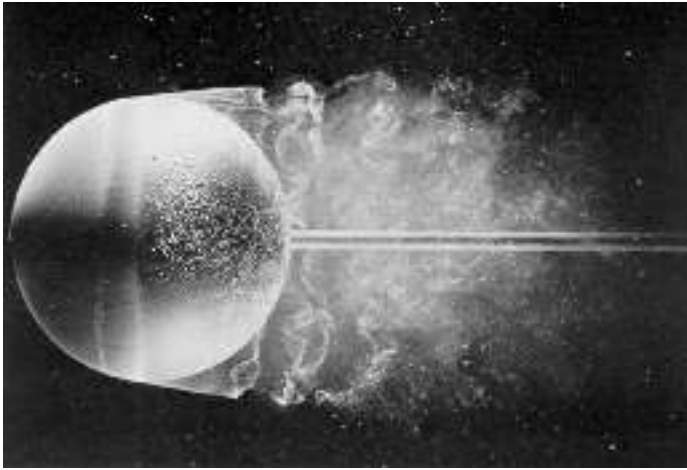
Voor- en nadelen van turbulentie

Turbulentie betekent beweging en dus energie, en die moet ergens vandaan komen. Vandaar dat turbulente stroming tot een hoger energieverbruik leidt bij alles wat rijdt, vaart of vliegt. Met name in de vliegtuigwereld worden pogingen gedaan om een stroming zo lang mogelijk laminair te houden. Ook de gladde schaatspakken, zo'n kwart eeuw geleden door Franz Krienbühl geïntroduceerd, zijn bedoeld om turbulentie zoveel mogelijk te voorkomen — hierover straks meer. Maar turbulentie heeft ook zijn voordelen. In verwarmingsketels en verbrandingsmotoren zorgt het voor een betere menging van het brandstof-lucht mengsel en daardoor voor een efficiëntere verbranding. En ook in de sport vervult turbulentie soms een nuttige functie.

Kijk, om dit te begrijpen, allereerst naar figuur 2, waarin de weerstand van een bol als functie van het Reynoldsgetal wordt getoond. Wat opvalt is dat rond $Re = 300000$ de weerstand plotseling sterk afneemt, met een factor zes ongeveer. Wat is hier aan de hand? Voor kleinere Re is de grenslaag rond de bol laminair. Dit klinkt gunstig, maar een laminaire stroming is slecht in staat om de ronding van het oppervlak te volgen en de stroming laat vroegtijdig los; er ontstaat een dik zog waardoor de luchtweerstand relatief groot is. Voor grotere Re wordt de grenslaag 'op tijd' turbulent (dit gaat ten koste van wat extra weerstand), maar daarna kan de stroming de ronding beter volgen, zodat het zog



Figuur 2 Stromingsweerstand van bolachtige lichamen als functie van het Reynoldsgetal



Figuur 3 Verschil in stroming tussen een laminaire (links) en een turbulente grenslaag (rechts) [2]

dunner wordt en de weerstand flink vermindert. Figuur 3 toont twee opnames van de stroming rond een bol, waarbij in de ene opname de grenslaag laminair is, terwijl deze in de andere kunstmatig turbulent is gemaakt (met een plakbandje op het oppervlak). Het grote verschil in zogdijkte is goed zichtbaar.

Sport en turbulentie

Bij een golfballetje wordt van dit effect gebruik gemaakt. De stroming rond het balletje heeft een Reynoldsgetal rond 200000, hetgeen niet genoeg is om de stroming uit zichzelf turbulent te maken. Door nu kuiltes aan te brengen in het oppervlak van het balletje (figuur 4) forceert men de stroming om turbulent te worden. Hierdoor blijft de stroming langer aanliggen, met als gevolg dat de luchtweerstand ongeveer halveert en je het balletje veel verder weg kunt slaan [3–4]. De kunst bij dit alles is om de stroming zo lang mogelijk laminair te houden, en op het laatste moment — vlak voordat de laminaire stroming zou willen loslaten — de omslag naar turbulent te bewerkstelligen.

Ook in de schaatssport kent men dit effect. Krienbühl's gladde schaatspak zorgt er in eerste instantie voor dat de stroming langer laminair blijft, met het bijbehorende gunstige gevolg voor de aerodynamische weerstand. Gelukkig is de romp van een schaatser lang genoeg om de stroming, ook bij een glad pak, op tijd turbulent te laten worden — herinner de lengteschaal L in de definitie van Re — en voortijdige loslating wordt zo vermeden. Maar een mensenhoofd is wat kleiner, en daarmee de corresponderende waarde van Re , die onder de grens komt waar de stroming van nature omslaat (figuur 2). Sommige schaatserers brengen dan ook strips aan op hun voorhoofd om de stroming te helpen turbulent te worden (zie bijvoorbeeld [5]).



Figuur 4 Golfballetjes uit het eind van de 19de eeuw

Rekenen en modelleren

Wanneer je gedetailleerd wilt rekenen aan turbulente stromingen is het noodzakelijk om rekenrooster en tijdstap aan te passen aan de kleinste schaal in de stroming — dit heet directe numerieke simulatie (DNS). Kolmogorov's hypothese stelt dat de kleinste wervels schalen met $Re^{-3/4}$, met een bijbehorende tijdschaal $Re^{-1/2}$. Als gevolg groeit, in drie dimensies, de rekencomplexiteit van een turbulente stroming evenredig met

$$(Re^{3/4})^3 \times Re^{1/2} = Re^{11/4}.$$

Dus een tien keer hoger Reynoldsgetal betekent dat de berekening bijna duizend keer lastiger wordt! Tabel 2 geeft een indicatie van de benodigde rekenkracht voor het uitvoeren van directe numerieke simulaties van turbulente stromingen. Ter vergelijking, de nieuwe nationale supercomputer die onlangs bij SARA in Amsterdam is geïnstalleerd heeft een theoretische topsnelheid van 1 Tflo/s. Een berekening van de stroming rond een golfballetje is daarop (net) haalbaar, maar voor de andere toepassingen zullen we veel geduld nodig hebben.

	<i>golfbal</i>	<i>zwemmer</i>	<i>haai</i>
Reynoldsgetal	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^7$
roosterpunten	10^9	$3 \cdot 10^{11}$	10^{14}
bewerkingen (flops)	10^{17}	10^{20}	10^{23}
rekensnelheid	100 Gflo/s	100 Tflo/s	100 Pflo/s
(300 uur/som)			
geheugen	100 Gbyte	30 Tbyte	10 Pbyte

Tabel 2 Rekeninspanning, vereist voor directe numerieke simulatie van turbulentie (flops=floating-point operaties; G=giga= 10^9 ; T=tera= 10^{12} ; P=peta= 10^{15}).

Vandaar dat in de ingenieurspraktijk de turbulente details van een stroming worden gemodelleerd. Hierbij wordt geprobeerd met behulp van geschikt gekozen vergelijkingen, op een globale manier de invloed van de turbulentie op de stroming te beschrijven, zonder alle details zelf uit te hoeven rekenen. Met onze, nog altijd beperkte, kennis van turbulentie toont de praktijk een zeer uitgebreid scala aan turbulentiemodellen, die onderling verschillen in het deel van de turbulente lengte- en tijdschalen dat wordt gemodelleerd. Veel voorkomende strategieën zijn RaNS (Reynolds-gemiddeld Navier-Stokes) waarin alle effecten van turbulentie worden gemodelleerd, en LES (large eddy simulatie) waarin de grote turbulente wervels (eddies) in de stroming

door het rekenrooster worden opgelost en alleen de kleinste details worden gemodelleerd. Omdat er nu met een (veel) grover rekenrooster kan worden volstaan, wordt de rekeninspanning ten opzichte van tabel 2 enkele ordes kleiner, maar de betrouwbaarheid van de resultaten neemt af. Met name zodra de stroming recirculatiegebieden gaat vertonen (wervels) worden de details van turbulentie een stuk belangrijker en laat de modellering nog vaak te wensen over. Voorbeelden zijn de turbulente menging in de verwarmingsketel bij u thuis of in de motor van uw auto, en ook de stroming rond een golfballetje of een schaatser valt in de categorie waar turbulentiemodellering tot op heden tekort schiet.

En als je dan toch een betrouwbaar antwoord wilt, is het enige dat rest een berekening uit te voeren met alle details erop en eraan, en dus met bovengenoemd kostbaar prijskaartje! Echter, tegelijkertijd ligt er hier voor numeriek wiskundigen een grote uitdaging en daar gaat het vervolg van dit artikel over.

Discrete afgeleiden

Om de essentie van turbulentie, ook numeriek, goed te beschrijven moet de turbulente energiecascade via de convectieve term in de Navier-Stokes vergelijking nauwkeurig behandeld worden. Deze cascade eindigt als de diffusie door moleculaire viscositeit in evenwicht is met het convectief transport naar kleinere lengteschalen. Het is ongewenst als numerieke onnauwkeurigheden zich met deze subtiele balans tussen convectie en diffusie gaan bemoeien.

Aangezien convectie wordt beschreven door een eerste-orde afgeleide, leidt dit tot de ogenschijnlijk simpele vraag hoe je een eerste afgeleide discreet zou moeten benaderen. Wiskundiger geformuleerd: Gegeven een drietal punten (x_-, y_-) , (x_0, y_0) , (x_+, y_+) waar een gladde kromme $y = f(x)$ doorheen gaat; gevraagd een schatting voor de helling van de kromme in het middelste punt, dat wil zeggen $f'(x_0)$ (zie figuur 5).

Bijna elk schoolboek zal zeggen dat je voor de beide buurpunten een Taylorreeks moet opschrijven en deze zo moet combineren dat zoveel mogelijk termen wegvallen. Het resultaat na enig cijferwerk ziet eruit als

$$f'(x_0) \approx \frac{h_-^2 y_+ + (h_+^2 - h_-^2) y_0 - h_+^2 y_-}{h_+ h_- (h_+ + h_-)}, \quad (1)$$

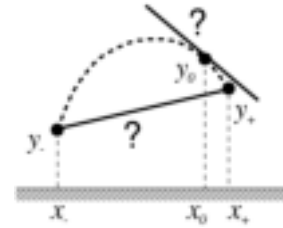
met $h_+ = x_+ - x_0$ en $h_- = x_0 - x_-$. Trouwens, je komt op dezelfde formule wanneer je door dit drietal punten een parabool legt. Deze formule is geïnspireerd door het minimaliseren van de lokale afbreekfout. Maar is dit een criterium met een fysische achtergrond? Denkend aan de convectieve energiecascade die pas eindigt na ingrijpen van de diffusie op de kleinste schalen, zou je eigenlijk willen dat ook in gediscretiseerde vorm convectie energiebehoudend is. En dit is een heel ander soort criterium voor discretisatie van een afgeleide. Laten we eens kijken welke gevolgen dit heeft.

Energiebehoud en symmetrie

Om discreet energiebehoud te analyseren bekijken we een in de ruimte gediscretiseerd dynamisch systeem

$$\frac{d\phi_h}{dt} - L_h \phi_h = 0, \quad (2)$$

waarin ϕ_h is gedefinieerd in de punten van het rekenrooster, ter-



Figuur 5 Twee manieren om de helling van een kromme te schatten. Welke is beter en waarom?

wijl L_h de discretisatie van de ruimtelijke afgeleiden representeert. Analooog aan de kinetische energie ($\frac{1}{2}mv^2$) kan de energie van de oplossing van (2) gedefinieerd worden als $\|\phi_h\|_h^2 \equiv \phi_h^* \Omega \phi_h$, waarbij Ω een (reële) diagonaal matrix is die de grootte van de roostercellen weergeeft. Deze 'kinetische' energie evolueert in de tijd volgens

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\phi_h\|_h^2 &= (L_h \phi_h)^* \Omega \phi_h + \phi_h^* \Omega L_h \phi_h \\ &= \phi_h^* ((\Omega L_h)^* + \Omega L_h) \phi_h. \end{aligned} \quad (3)$$

Het rechterlid is nul, dat wil zeggen dat de energie wordt behouden, dan en slechts dan als ΩL_h scheef-symmetrisch is.

Energiebehoud tijdens de convectieve energiecascade vereist derhalve dat de discretisatie van convectie scheef-symmetrisch is. We zien echter meteen dat de traditionele discretisatie (1) zeker niet scheef-symmetrisch is, omdat op een niet-uniform rooster de diagonaal (waar de coëfficiënt van y_0 staat) niet nul is. De alternatieve schatting voor de helling aangegeven in figuur 5, simpelweg een rechte lijn trekken tussen de beide buurpunten, leidt tot de volgende discretisatie

$$f'(x_0) \approx \frac{y_+ - y_-}{x_+ - x_-} = \frac{y_+ - y_-}{h_+ + h_-}. \quad (4)$$

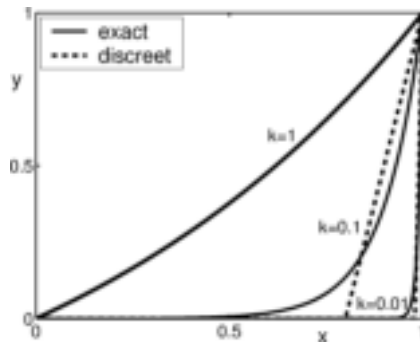
Het is duidelijk dat na schaling met de noemer, door $\Omega = h_+ + h_-$ te kiezen, nu wel een scheef-symmetrische bijdrage tot de coëfficiëntenmatrix ΩL_h ontstaat, alleen krijg je hierbij niet meteen een gevoel van hoge nauwkeurigheid. Welke van deze twee effecten in de praktijk domineert zullen we straks gaan onderzoeken.

De discretisatie van een tweede-orde afgeleide is meer eenduidig. Het interpoleren met een parabool (het zo gunstig mogelijk combineren van Taylorreeksen) leidt tot de volgende formule

$$f''(x_0) \approx \frac{h_- y_+ - (h_+ + h_-) y_0 + h_+ y_-}{\frac{1}{2} h_+ h_- (h_+ + h_-)}.$$

Deze uitdrukking levert, na eerder gebruikte schaling, een symmetrisch negatief-definiet bijdrage tot de coëfficiëntenmatrix — geheel in lijn met de analytische eigenschappen van diffusie. In combinatie met een scheef-symmetrische discretisatie van convectie, toont (3) dat de discrete energie afneemt en het discrete dynamische systeem stabiel is — er is dus geen aanleiding om naar een andere diffusieve discretisatie te zoeken. In wiskundiger termen liggen in deze situatie alle eigenwaarden van de coëfficiëntenmatrix in het stabiele halfvlak, zodat in het bijzonder deze matrix niet singulier kan worden.

Deze laatste eigenschap blijkt belangrijk te zijn wanneer we naar de relatie tussen globale en lokale fout kijken. Beschouw hier toe een continue stationaire vergelijking $L\phi = f$ met als discrete benadering $L_h \phi_h = f_h$. De globale discretisatiefout $\phi - \phi_h = L_h^{-1} \tau_h$ is het product van de lokale afbreekfout $\tau_h (\equiv L_h \phi - f_h)$ en



Figuur 6 De oplossing van de convectie-diffusie vergelijking voor afnemende waarden van de diffusiecoëfficiënt k . De onderbroken lijn geeft de discrete oplossing weer, behorend bij de symmetriebewarende discretisatie op een rooster met slechts één inwendig roosterpunt (gelegen in $x = 1 - 2k$).

de inverse van de gediscetiseerde operator L_h . Hierdoor kan een zich slecht gedragende inverse gunstige eigenschappen van een afbreekfout tenietdoen.

Testcase convectie-diffusie

Tot dusver zijn de overwegingen voornamelijk kwalitatief van aard geweest. Het kwantitatieve verschil tussen beide convectieve discretisaties maken we zichtbaar met een concreet voorbeeld: een eendimensionale convectie-diffusievergelijking

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \quad (5)$$

op het interval $x \in [0, 1]$ met randvoorwaarden $\phi(0) = 0$ en $\phi(1) = 1$. De oplossingen van deze vergelijking zien eruit als in figuur 6; ze vertonen een grenslaagkarakter met dikte k .

Eerst een kleine smaakmaker. Met een approximatiethoretisch oog zou je de analytische oplossing voor kleine k heel aardig moeten kunnen benaderen met twee rechte lijnstukken: een horizontale lijn en een lijn steil omhoog, met slechts één inwendig roosterpunt ergens op een afstand $O(k)$ vanaf $x = 1$. Zouden er ook discretisatieformules bestaan waar zo'n benadering als oplossing uitkomt? Daarom tonen we voor de aardigheid in figuur 6 ook de discrete oplossing van (5) voor de symmetriebewarende methode (4) bij gebruik van een rekenrooster met slechts één (!) inwendig punt. Als dit punt ligt in $x = 1 - 2k$ dan geeft deze discretisatie een heel aardig resultaat. Bereken zelf eens de oplossing voor de methode uit (1) en constateer dat deze er veel minder fraai uitziet.

Na dit intrigerende succesje van de symmetriebewarende discretisatie presenteren we nu een hogere-orde variant hiervan, waarna we beide varianten aan een vergelijking met de traditionele Lagrange aanpak zullen onderwerpen. Om ruimte te besparen laten we details van de afleiding hier achterwege (zie bijv. [6–7]) en geven alleen de betreffende discretisatieformules

$$\begin{aligned} \Omega_i \frac{\partial \phi}{\partial x} &\approx \frac{1}{2}(-\phi_{i+2} + 8\phi_{i+1} - 8\phi_{i-1} + \phi_{i-2}), \\ \Omega_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &\approx 8 \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) - \\ &\quad \left(\frac{\phi_{i+2} - \phi_i}{x_{i+2} - x_i} - \frac{\phi_i - \phi_{i-2}}{x_i - x_{i-2}} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

met

$$\Omega_i = \frac{1}{2}(-x_{i+2} + 8x_{i+1} - 8x_{i-1} + x_{i-2}).$$

In één oogopslag is duidelijk dat de bijdrage van (6) tot de coëfficiëntenmatrix inderdaad scheef-symmetrisch is. Op uniforme roosters staat hier de gewone vierde-orde methode gebaseerd op Lagrange interpolatie, maar op niet-uniforme roosters verschilt de methode aanzienlijk! Om dit te demonstreren gaan we (5) oplossen op een glad rekenrooster met een constante rekkingsfactor tussen twee opeenvolgende mazen (op minder regelmatige roosters zijn de bevindingen trouwens vergelijkbaar [7–8]). We zorgen ervoor dat de helft van de roostercellen in de grenslaag ligt, hier gedefinieerd als het interval $[1 - 10k, 1]$.

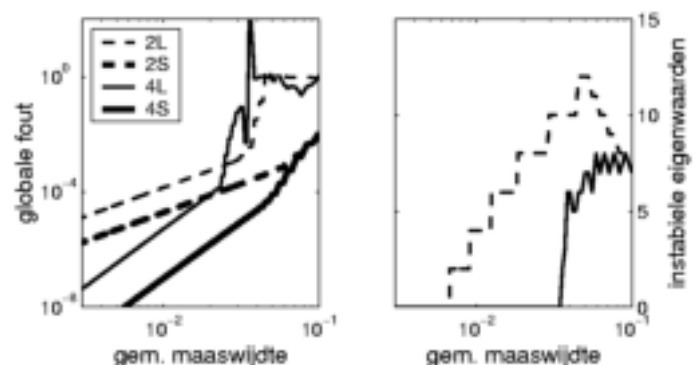
Figuur 7 (links) toont, als functie van de gemiddelde maaswijdte, de discrete fout $\|\phi_h - \phi_{\text{exact}}\|_h$ voor vier discretisatiemethoden (bij $k = 0.001$):

- (2L) de traditionele tweede-orde Lagrange methode;
- (2S) de tweede-orde symmetriebewarende methode;
- (4L) de traditionele vierde-orde Lagrange methode;
- (4S) de vierde-orde symmetriebewarende methode.

Opvallend is dat op relatief grove (en fors gerekte) roosters de Lagrangemethoden slecht presteren. De vierde-orde methode is hier zelfs inferieur aan zijn tweede-orde bloedverwant. De pieken in de fout worden veroorzaakt door een coëfficiëntenmatrix die bijna singulier is. Voor grove roosters ligt een aantal eigenwaarden in het instabiele halfvlak (zie figuur 7, rechts). Bij roosterverfijning schuiven deze naar het stabiele halfvlak, waarbij ze de imaginair-as soms vlakbij de oorsprong passeren met (bijna) singulariteit tot gevolg. Even terzijde: zolang er nog eigenwaarden in het instabiele halfvlak liggen kun je tijdsintegratie van (5), of iteratief oplossen van het stationaire probleem, wel vergeten. De gepresenteerde resultaten zijn dan ook via een directe oplosmethode verkregen.

In schril contrast hiermee gedraagt de symmetriebewarende discretisatie zich veel goedmoediger. De discretisatiefout is voor alle roosters regelmatig en beduidend kleiner dan bij de traditionele aanpak. In figuur 7 is af te lezen dat om een discretisatiefout in de orde van 10^{-4} te krijgen, de maaswijdte van het rooster ruwweg twee à drie keer grover kan worden gekozen. Bij instationaire driedimensionale problemen betekent dat een efficiëntiewinst van een à twee ordes voor de symmetriebewarende methode. Bovendien liggen de eigenwaarden van de coëfficiëntenmatrix altijd in het stabiele halfvlak, zodat het volledige arsenaal aan iteratieve tijdsintegratiemethoden toegepast kan worden.

Ter verdere positionering van de symmetriebewarende discre-

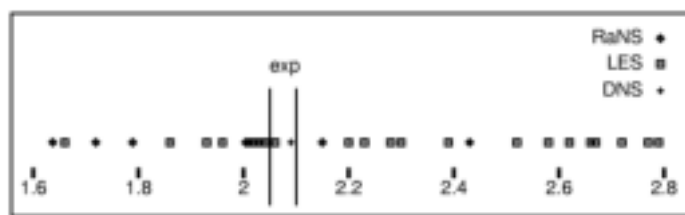


Figuur 7 Links het gedrag van de globale fout bij roosterverfijning van de convectie-diffusievergelijking ($k = 0.001$) voor de traditionele Lagrangemethode (L) en voor de symmetriebewarende methode (S). Rechts het aantal eigenwaarden in het instabiele halfvlak bij de Lagrange methode.

tisatiemethode nog een paar opmerkingen. Allereerst kan deze methode worden afgeleid in een eindige-volume raamwerk [7], waardoor voor stromingsproblemen, naast discreet convectief energiebehoud, ook discreet impulsbehoud geldt. Ook is de methode af te leiden via een coördinatentransformatie. Tenslotte past de 2e-orde variant (4) in een eindige-elementen (Galerkin) kader [8].

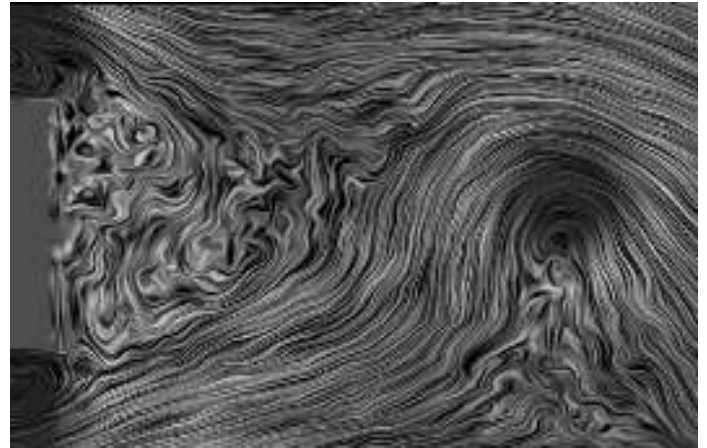
Toepassing bij DNS

Het stabiele gedrag van de symmetriebewarende discretisatiemethode op grovere roosters maakt deze een ideale kandidaat voor het uitvoeren van directe numerieke simulaties van turbulentie (DNS), waar gewoekerd moet worden met roosterpunten (zie tabel 1). Als voorbeeld bespreken we hier de stroming rond een rechthoekig blokje bij een Reynoldsgetal van 22000. Figuur 9 toont een snapshot van het snelheidsveld.



Figuur 8 Weerstand van een blokje zoals berekend door diverse RaNS, LES en DNS methoden, vergeleken met het experiment. Merk de grote spreiding op in de gevonden waarden, veroorzaakt door turbulentiemodellering en numerieke discretisatiefouten; de symmetriebewarende DNS berekening komt goed overeen met het experiment.

De resultaten van deze stromingsberekening zijn gevalideerd met behulp van experimenten, en langs deze weg kunnen we de kwaliteit van de numerieke aanpak vaststellen. Ook is deze stroming onderwerp geweest van een aantal workshops voor LES en DNS, zodat er veel vergelijkingsmateriaal met andere rekenmethoden aanwezig is; figuur 8 geeft daarvan een samenvatting. Horizontaal uitgezet staat hier de weerstand van het blokje zoals gevonden door de diverse rekenmethoden (RaNS, LES en DNS); ook de experimenteel gevonden waarde is aangegeven. Een grote spreiding valt op, die veroorzaakt wordt door onnauwkeurigheden in de turbulentiemodellering en door numerieke discretisatiefouten. Het DNS antwoord (zonder modellering en met een symmetriebewarende discretisatie) komt uit binnen de experimentele onnauwkeurigheid. Het rooster gebruikt voor DNS is



Figuur 9 Computersimulatie van de turbulente stroming achter een blokje. Visualisatie door middel van de 'spot noise' methode [8].

vergelijkbaar met de roosters van de andere methoden (hier profileren we van de winst in maaswijdte die hierboven is voorspeld), waarmee de kracht van de symmetriebewarende discretisatie is aangetoond.

Toekomst

In 1932 heeft Sir Horace Lamb, die toen 83 was, gezegd:

"I am an old man now, and when I die and go to heaven there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantumelectrodynamics, and the other is the turbulent motion of fluids. And about the former I am rather optimistic."

Het beeld dat Lamb schetst biedt, tot op de dag van vandaag, een grote uitdaging voor zowel fysici als (numeriek) wiskundigen. De afgelopen jaren is het begrip achter de numerieke wiskunde gestaag gegroeid. In dit verhaal hebben we gezien dat een tegendraadse numerieke aanpak tot succes kan leiden. Ons antwoord op de vraag in het onderschrift van figuur 5 zal u inmiddels duidelijk zijn, en wie weet welke positieve verrassingen de numerieke wiskunde nog meer in petto heeft. Met dergelijke sprongen voorwaarts worden meer en meer complexe turbulente stromingen toegankelijk voor computersimulaties, waarvan de resultaten zullen helpen om de geheimen van turbulentie verder te ontsluiten.

Literatuur

- 1 F.T.M. Nieuwstadt, *Turbulentie*, Epsilon Uitgaven nr. 24, Utrecht, 1992.
- 2 M. van Dyke, *An album of fluid motion*, The Parabolic Press, Stanford, 1982.
- 3 T.P. Jorgensen, *The Physics of Golf*, services.golfweb.com/library/books/pog/pog1.html.
- 4 P. Moin and J. Kim, Tackling turbulence with supercomputers. *Scientific American*, January 1997, 46–52.
- 5 home.conceptsf.nl/~rivala/ribb_sch.htm
- 6 R.W.C.P. Verstappen and A.E.P. Veldman, Spectro-consistent discretization of Navier-Stokes: a challenge to RANS and LES. *J. Engng. Math.*, 34:163–179, 1998.
- 7 A.E.P. Veldman and R.W.C.P. Verstappen, Higher-order discretization methods for CFD. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 17:195–204, 1999.
- 8 A.E.P. Veldman and K. Rinzeema, Playing with nonuniform grids. *J. Engng. Math.*, 26:119–130, 1991.
- 9 W. de Leeuw, *Presentation and Exploration of Flow Data*. PhD thesis, Delft University of Technology, 1997.

Lex Zandee

Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek
Postbus 93138, 2509 AC Den Haag
zandee@nwo.nl

Column Instroom

De voordeur van de wiskunde

De positie van het wiskunde-onderzoek in Nederland wordt bedreigd door de aanhoudende terugval van nieuwe wiskunde-studenten. Dit geldt voor alle bèta-vakken, maar in de wiskunde is de terugval dramatisch. Lex Zandee, medewerker voor wiskunde bij het gebiedsbestuur Exacte Wetenschappen, is onder andere verantwoordelijk voor het NWO-project 'Leraar In Onderzoek'. Met dit project hoopt de NWO de onbekendheid van de middelbareschool-leerling met het wiskundige onderzoek tegen te gaan.

In de roerige zestiger jaren kwam ik voor het eerst met universitaire wiskunde in aanraking op de Gemeentelijke Universiteit Amsterdam als student wis- en natuurkunde. Eigenlijk interesseerde alleen de natuurkunde mij, maar ja, ik had me al ingeschreven toen ik te horen kreeg dat de eerste twee jaar net zoveel colleges wiskunde als natuurkunde op het programma stonden. Terwijl mijn vroegere klasgenoten vol waren van de Maagdenhuisbezetting, zat ik om acht uur 's ochtends in de harde bankjes op het Mathematisch Instituut in de Amsterdamse Roeterstraat te luisteren naar colleges analyse; een dubbeluur nog wel, gegeven door Dr. (later Professor) H. Jager, en lineaire algebra van Prof. N.H. Kuiper. Er was geen weg terug, want mijn ouders zouden van mij geen spijtoptanten-gedrag accepteren.

De tentamens hadden een 'killer'-reputatie, dus om die te vermijden volgde ik de wiskundepractica, die bij succesvolle afronding vrijstelling voor het tentamen gaven. Ik heb de vergeelde briefjes, onder andere ondertekend door H.W. Lenstra en M. Hazewinkel, onlangs nog eens van zolder te voorschijn gehaald. Voor elk vak zat in mijn cijfers een duidelijk patroon. Het eerst behaalde resultaat was matig, maar gedurende het jaar was er steeds vooruitgang en door goed te scoren op het eind was het gemiddelde lang niet slecht. Wat er gebeurde was dat de wiskundige opgaven me in het begin afschrokken, maar door het jaar heen was ik er plezier in gaan krijgen door de fascinerende wereld erachter te zien. Die liet me uiteindelijk niet meer los. Kortom, door de voordeur van de natuurkunde wist de wiskunde toch iemand voor zich te winnen. Na mijn studietijd heb ik vijftientig jaar lang aan toepassingen van de wiskunde binnen het bedrijfsleven gewerkt. Het contact daar met universitaire wiskundigen was plotseling weer nihil, vele jaren lang.

Sinds 2001 werk ik bij de Nederlandse organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO), voor het gebiedsbestuur Exacte Wetenschappen. Nieuw bij NWO, leken ervaringen van meer dan dertig jaar geleden op de UVA dit jaar bij mij terug te komen. Opnieuw schrok ik van de taal en complexiteit van de fundamentele wiskunde, een wetenschapsgebied dat wel heel ver van het dagelijkse leven

lijkt te staan. Dit jaar heeft NWO voor de exacte wetenschappen een nieuw strategieplan 2002–2005 gepubliceerd. De strategie bouwt voort op het in 1999 verschenen rapport *Wiskunde op Raakvlakken* van de Adviescommissie Wiskunde. Het beschrijft hoe wiskundigen betrokken zijn bij belangrijke problemen die komen vanuit de samenleving, zoals het modelleren van klimaat effecten, de ontrafeling van levensprocessen en de verwerking van grote hoeveelheden gegevens in de gezondheidszorg en telecommunicatie. Dit onderzoekswerk geschiedt zowel in de universitaire sfeer als in het bedrijfsleven. Belangrijke vorderingen in de wiskunde zijn te verwachten op raakvlakken met andere disciplines. Daarom wil NWO, waar mogelijk, wiskundige programma's stimuleren over thema's die hieraan vorm geven. Gekozen is onder meer voor de onderwerpen Mathematische Biologie en Financiële Wiskunde. Soms hoor ik echter vanuit de universiteiten de angst naar voren komen dat de keuze voor wiskunde op raakvlakken een onderwaardering voor de fundamentele wiskunde inhoudt.

Verbetering van de zichtbaarheid van de wiskunde in het bedrijfsleven is van groot belang, onder andere om de jeugd een toekomstbeeld te geven dat past bij een studie wiskunde. Maar ook dienen we de zichtbaarheid van de universitaire wiskunde te vergroten. Hier komen de onderwerpen van NWO prima van pas. Onze jeugd is geïnteresseerd in vele onderwerpen tegelijk en in de onderlinge samenhang. Ze zijn vaak niet bereid op jonge leeftijd al voor één discipline, bijvoorbeeld wiskunde, te kiezen.

NWO probeert op verschillende manieren contacten tussen universitaire wiskunde-onderzoekers en het middelbare schoolonderwijs te bevorderen. Eén daarvan loopt via het programma *Leraar in Onderzoek*. In het kader van dit programma verricht een groep leraren onderzoek in de wiskunde aan een universiteit, gedurende 1 dag per week. Ze komen met allerlei wiskundige onderwerpen in aanraking en stralen hun enthousiasme automatisch uit als ze weer voor de klas staan. Een ander succesvol initiatief is de vakantiecursus voor leraren, ook door NWO gesponsord, die al heel wat jaren op het CWI en de TUE wordt georganiseerd. Dat enthousiasme weer terug te brengen bij de leraren, na alle demotiverende maatregelen van de afgelopen tien jaar, lijkt mij een essentiële voorwaarde om de instroom weer te laten toenemen.

En wat die voordeur van de wiskunde betreft: de onderwerpen in de NWO strategienota zijn gekozen vanuit maatschappelijke belangrijk geachte vraagstellingen. Wie daardoor aangetrokken wordt komt vanzelf in aanraking met de fascinerende wereld van de fundamentele wiskunde daarachter.



Michiel Kolman

Elsevier Science

Postbus 211, 1000 AE Amsterdam

m.kolman@elsevier.nl

Opinion Serials crisis

Free publishing?

The advent of the internet has brought great changes to the practice of scientific research. In the September issue of the *Nieuw Archief*, Krzysztof Apt argued that free access to scientific literature is both desirable and economically feasible, and he signalled a growing number of initiatives in various forms of 'free publishing'. Michiel Kolman, Publishing Director, Mathematics & Computer Science of Elsevier Science, puts forth his view on how the internet will affect the future of scientific publishing.

Krzysztof Apt wrote an interesting article in *Nieuw Archief voor Wiskunde* as well as in the *Communications of the ACM* putting forward his personal view that the scientific community will benefit from a proliferation of free scientific journals. We are grateful for the opportunity to respond.

Free versus subscription-supported publishing

Elsevier Science welcomes new initiatives in the area of scientific publishing, including the so-called 'free' scientific journals. It keeps us on our toes, so to say. Some are indeed low cost and tailor-made solutions for specific segments of the science community. We feel we can learn from them, and their successes are inspirational. It should be noted that some of these community-inspired initiatives are thriving (like the Journal in High-Energy Physics (JHEP) and the Journal of Artificial Intelligence Research (JAIR)), while others are not, and both the success stories and the disappointments are educational.

It is important to understand what free means in this context. The originators of free journals often do not take into account all the sources of support that they need to publish: their time, the time of any others who assist, the cost of equipment, office space and materiel, as well as the overhead of the institution they inhabit. Grants from foundations must be included here as well as any subsidies given to the operation. Together the monetary value of all these elements constitute the true cost of the operation.

It is also important to put the scale of these new initiatives in perspective: we are talking about a couple of dozen e-journals, which are typically small (on the order of 50 articles per year, with a few exceptions). Annually, over one million articles are published in about 12,000 peer-reviewed scholarly and academic journals worldwide. On average these journals contain 100 articles per annum. By comparison, Elsevier Science publishes 1400 journals, which corresponds to 200,000 articles annually. So-called free scientific journals serve a useful function but could they really replace all these traditional journals (from both society publishers and commercial publishers) considering the sheer size and thus scale of the operation involved?

Continuity and long-term archiving

Much of publishing involves voluntary work (for example, the referees, who play a crucial role, more often work for free than paid), but to have the publishing process solely rely on volunteers (as in the case of the so-called free science journals), is not realistic. It places many

important issues in the hands of the self-appointed volunteers alone. And it is the sole reliance on volunteers which has been the main culprit in the demise of most self-published journals historically and in the present. Of course, researchers can be very successful publishers (the publishing staff at the major publishers, all highly educated, many with PhDs, attest to that), but publishing is not their sole *raison d'être*. Researchers expertise and priorities lie in the areas of scientific research, teaching and academic administration. It is the publishers professional expertise at creating the supportive environment in which editors and referees can function well, and concentration on operational and management issues that allows for the continuity of these journals. ("Editors can come and go, but the publishers stay".) The major publishers are stable while editors come and go as their interest change and they pursue changes in their academic career paths.

At Elsevier Science we are proud that we launched journals decades ago, that we invested heavily in these journals to make them a success, and that we continue to publish many high-quality journals today, also in Math and Computer Science. This would simply not have been possible with only community-supported volunteers, certainly not for 1400 journals, and it cannot be realistic for the whole scientific literature.

Professional publishing entails more than just the peer-review process and making the accepted articles available on-line, important as these two aspects may be. Archiving is crucial and all publishers agree that the information has to be stored in a medium independent format. At Elsevier Science we opted for a Standard Generalized Markup Language (SGML) repository, which now goes back to 1995. Community initiatives, almost without exception, fail to address this archiving issue. We invested heavily in our archive and are very busy expanding it back in time so that wherever possible our journals are available to volume one, issue one (some more than a century old). For our math program we hope to have the complete backfiles available on-line at the end of 2002.

Integration and interlinking of e-journals

Once the articles are made available electronically (and we mount them as PDF as well as HTML) the real work for the publisher starts: integration into a global network of knowledge. We have invested heavily to this end in our electronic platform, *ScienceDirect* [1], which today has unsurpassed functionality. Integration of the articles through linking both within one publishers output and between articles published by different publishers is crucial. We took the lead to work with other publishers in the *CrossRef* initiative [2], thus enabling readers to follow from the references to the referred article, irrespective of the cited publisher. This has been received with much enthusiasm by the scientific community and is used heavily. We will make all the archival articles also available with linkable references. Niche journals do not have the infrastructure provided by a major player in publishing and therefore they cannot benefit from the *CrossRef* initiative.

Distribution and accessibility of the e-journals

Distribution has been a sensitive point for all publishers (society, commercial and university presses) but even more so for commercial publishers. We witnessed the year-on-year decline in the number of subscribers and several years ago decided that this was no longer acceptable: we want our articles to be as widely available and cited as possible. To address this we first changed our pricing policy, committing ourselves to no more than single digit price increases in all our three major invoicing currencies. This has meant Elsevier absorbing all currency fluctuation risks as well as the extra costs of organic journal

expansion. More importantly, we have been pursuing arrangements with our customers, individual institutional libraries and increasingly library consortia, whereby the library users have access to many of our journals (if not all) on the *ScienceDirect* platform even though the complete collection may not have been subscribed to in print.

Surely Krzysztof Apt is familiar with the UKB arrangement in the Netherlands? Here, all university libraries plus the Royal Library have access to all Elsevier Science journals over the next five years. This definitely addresses the issue of distribution. We have seen the usage of the online material surge, not only of these journals already in the university's collection, but also of the previously unsubscribed material. The success of these sort of arrangement has resulted in vast availability of the *ScienceDirect* journals, an order of magnitude larger than the *ACM Digital Library* [3].

This also applies to the math and computer science journals that Elsevier Science publishes: all are available to everyone at a Dutch university. To address the issue of availability of articles submitted but not yet published, we launched a math preprint server [4], freely available for all. This has been well received with more than 200 preprints deposited within a week of the launch. Disclosing scientific information available on the Web has been made easier by another free service which Elsevier developed: a search engine geared towards scientists called SCIRUS [5]. The search area can be restricted to focussed searches in mathematics (or computer science).

To address the accessibility of our e-journals in Africa we have made a large collection of math, computer science and physics journals freely available to researchers in Africa; here we collaborate with the World Bank backed African Virtual University [6].

Let me stress again: we welcome new initiatives, we welcome the competition based on sound business models. But we also feel that the 'free' electronic journals fail to address several crucial areas, such as permanence, archiving, interlinking, etcetera. And while their model may work fine for one or two community-run journals per scientific discipline over the next couple of years, can it be scaled up to the whole literature forever? The literature serves an important function for its authors and readers, and providing this function reliably while adhering to common standards over the long term is where the major publishers come in. 

References

- 1 <http://www.sciencedirect.com>
- 2 <http://www.crossref.org>
- 3 <http://portal.acm.org>
- 4 <http://www.mathpreprints.com>
- 5 <http://www.scirus.com>
- 6 <http://www.avu.org>

Klaas Landsman

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde

Universiteit van Amsterdam

Plantage Muidergrecht 24, 1018 TV Amsterdam

npl@science.uva.nl

Hoe geef ik een wiskundige voordracht

Veel voordrachten van wiskundigen, van beginners tot winnaars van prestigieuze prijzen, zijn bedroevend slecht. Dit is helemaal niet nodig, want door zich aan een paar eenvoudige regels te houden kan vrijwel iedereen een behoorlijke presentatie houden. Na meer dan 1000 voordrachten te hebben aan-gehoord en er meer dan 100 zelf gegeven te hebben, geeft Klaas Landsman aldus een aantal tips voor zowel beginnende als gevorderde wiskundige sprekers.

Een ruwe schatting leert dat ik, sinds mijn tijd als afstudeerder in 1985, ongeveer 1000 voordrachten op het gebied van de theoretische natuurkunde en de wiskunde heb aan-gehoord. Van deze 1000 heb ik een stuk of 10 verhalen van het begin tot het eind begrepen. Maar van de helft heb ik zo weinig opgestoken, dat een verzuchting van W.F. Hermans steeds in mij opkwam: *Hoe kom ik hier vandaan? Hoe kom ik hier in Godsnaam vandaan?* De rest zat hier ergens tussenin.

Lange tijd dacht ik dat het aan mijzelf lag dat ik al deze voordrachten niet begreep. Toen ik student was, meende ik dat seminariumvoordrachten waren gericht op afgestudeerden. Toen ik promovendus was ging ik er vanuit dat je gepromoveerd moest zijn om de gemiddelde voordracht te kunnen begrijpen. Toen ik gepromoveerd was leek het mij duidelijk dat seminaria uitsluitend door hoogleraren op waarde kunnen worden geschat, en ook voor die groep bedoeld zijn. Veel sprekers wekken die indruk in ieder geval, en veel

hoogleraren horen ieder seminarium blakend van zelfvertrouwen aan. Toen ik...

Zelf heb ik, afgezien van colleges en werkbesprekingen, meer dan 100 wiskundige of fysieke voordrachten gegeven. Ik weet inmiddels, en had al veel eerder moeten weten, dat deze aan vrijwel dezelfde statistiek onderhevig zijn: ongeveer de helft moet onbegrijpelijk zijn geweest, slechts één of twee praatjes waren echt geslaagd, en de rest bevond zich aan deze of gene zijde der middelmatigheid.

Na intensieve studie van deze problematiek kan ik nu stellig zeggen: bijna al die 500 voordrachten waar ik niets aan heb gehad waren, volgens alle maatstaven der presentatie- en communicatie-techniek, *rampzalig*. Ik kan daarom niet de enige zijn geweest die er niets van begreep, hoewel de anderen in het publiek zich steeds merkwaardig goed blijken te houden. En die ene procent perfecte voordrachten waren mede daarom zo goed, omdat de spreker wist hoe je een goede voordracht moet houden, en zich aan bepaalde regels daartoe hield. Natuurlijk kan alleen een briljant wiskundige ook een briljante voordracht houden. Maar omgekeerd kan een fantastisch wiskundige zeer wel een ijszeggend slechte voordracht houden. Inderdaad, de meest hopeloze voordracht die ik ooit op welk gebied dan ook heb gehoord was van een van de beste wiskundigen ter wereld, uitgesproken na de ontvangst van de Brouwer-medaille.

Dit stuk is gebaseerd op een voordracht die bedoeld was voor beginnende wiskundige sprekers als afstudeerders en aio's/oio's.

De titel bevat een dubbele bodem. Letterlijk gesproken ga ik nu inderdaad vertellen hoe ik een wiskundige voordracht houd. Dat zal niemand iets interesseren. Maar overdrachtelijk heeft mijn titel wel degelijk de pretentie, dat de regels die ik volg ook voor anderen zinvol zijn. Niemand kan door het volgen van regels en adviezen een echt goed spreker worden. Dat word je door veel ervaring, vallen en opstaan en veel luisteren naar kritiek. Onontbeerlijk zijn ook charisma, talent, en bovenal het hebben van een enigszins theatrale persoonlijkheid. Dit laatste komt bij wiskundigen niet veel voor, en is de meesten van hen ook een gruwel. Maar wel kun je door op een aantal simpele dingen te letten, vermijden dat je een waardeloze voordracht geeft.

Kernpunten

Wiskundigen neigen tot het maken van drie basisfouten:

- het verhaal wordt verteld aan het bord, de overheadprojector, de grond, of de muur;
- de voordracht bevat te veel materiaal, zodat de spreker in tijdnood komt;
- de inhoud is te technisch en te moeilijk.

Ieder voor zich zijn deze fouten al ernstig genoeg, maar in de 500 voordrachten waar ik in wanhoop bijzat werden ze alle drie tegelijk gemaakt. Pas dan ontstaat een echte ramp. Een spreker die technisch te hoog inzet, maar goed op zijn publiek let, zal merken dat hij gas terug moet nemen, en dat bij voldoende ervaring ook doen. Maar iemand die een

te moeilijk verhaal houdt en ook niet op de reacties van het publiek let, ziet niet dat de meesten al spoedig de draad kwijt zijn geraakt en uit het raam zitten te kijken. Zulke sprekers gaan geheel in zichzelf op en zijn na afloop vaak dik tevreden, hoewel een kleine enquête zou uitwijzen dat ze vrijwel niets dan verveling en irritatie hebben teweeggebracht. De tijdnoodval ontstaat wanneer een spreker zijn hele kennis van het onderwerp probeert over te brengen. Als iemand die een kopje koffie inschenkt ziet dat het kopje vol is, zal hij ophouden met schenken, maar iemand die bij deze activiteit de andere kant op kijkt zal alsmaar blijven schenken tot de hele tafel vol koffie zit, en alle omzittenden al lang zijn gevlucht.

De drie basisfouten kunnen worden vermeden door zich te houden aan drie basisregels:

- communiceer zo veel mogelijk met het publiek;
- isoleer de hoofdzaak, en vertel die in een vroeg stadium;
- leef met vlag en wimpel, maar *houd het simpel!*

Vorbereiding

De basis voor een goede voordracht ligt in de voorbereiding. Hiervoor moet je uitvoerig de tijd nemen; minstens een dag, zelfs voor een onderwerp dat men uittentreuren beheerst. Ook als je, voor verschillend publiek, een aantal voordrachten over hetzelfde onderwerp houdt, moet iedere schijnbaar identieke voordracht opnieuw en apart worden voorbereid. Want ieder publiek is weer anders, en heeft dus een ander niveau en andere behoeften. Het is hierbij van groot belang uit te zoeken uit wie het publiek bestaat. Er is altijd een contactpersoon die over deze informatie beschikt.

Zitten er veel studenten bij, of juist veel promovendi? Zijn er zowel statistici als algebraïsch topologen, of juist uitsluitend analytici? Een gehoor van mathematisch fysici zal niet weten wat de zenuw van een categorie is en een publiek van wiskundigen heeft niet de die ochtend verschenen preprint van Witten gelezen. Veel sprekers overschatten de voorkennis van hun publiek. De praktijk leert dat een dergelijk onvorbereid publiek ook niet snel zal vragen wat dit of dat betekent, vaak in de terechte veronderstelling dat een zeer korte en technische uitleg toch niet helpt en men dus maar beter kan gaan borduren. Het juiste ingangsniveau moet in de voorbereidingsfase worden vastgesteld. Vaak is het ook de fout van de gastheer dat de spreker onvoldoende geïnformeerd is, maar dit neemt niet weg dat

de desbetreffende verantwoordelijkheid primair bij de spreker ligt.

Afgezien van het bovenstaande punt moet de voorbereiding zo goed zijn, dat het verhaal vrijwel zonder het ter plekke bestuderen van aantekeningen gehouden kan worden. Bij gebruik van een overhead- of diaprojector geldt een analoog punt: je moet niet tijdens de voordracht je transparanten lezen. Dit heeft drie redenen. Ten eerste staat het vaak in de aantekeningen of op het scherm kijken het contact met het publiek in de weg. Ten tweede is een verhaal of argument dat te ingewikkeld is voor de spreker om uit het hoofd te vertellen, meestal ook te moeilijk voor het publiek. Als een formule erg veel details bevat zoals factoren 2π , zijn die factoren óf zo relevant dat er een belangrijke reden voor hun aanwezigheid is die ter plaatse uitgelegd kan worden, waardoor het vanzelf duidelijk is wat er precies moet staan, óf ze zijn onbelangrijk, en hoeven dan ook niet opgeschreven te worden. Ten derde treedt in het hoofd van een goede spreker een soort natuurlijke selectie op, waardoor de nadruk op echt belangrijke dingen komt te liggen. Deze selectie treedt niet op wanneer het verhaal van briefjes wordt opgelept.

Doel

Zowel tijdens de voorbereiding als tijdens het houden van de voordracht moet men er zich ervan bewust zijn wat men eigenlijk wil bereiken met het verhaal. Iedere voordracht moet de volgende drie doelstellingen hebben:

1. motiveren: interesse stimuleren;
2. uitleggen: begrip overbrengen;
3. informeren: detailkennis doorgeven.

Geen van de 500 praatjes die ik niet heb begrepen bevatte bijvoorbeeld enige motivatie; anders had ik er toch nog wel iets aan gehad. Niettemin moet geen van de bovenstaande ingrediënten worden overdreven, en moet gewaakt worden voor mogelijke destructieve interferentie. Zowel teveel informatie als teveel motivatie staat begrip in de weg. Een overdaad aan motivatie is sowieso contraproductief. Teveel globale uitleg staat cruciale details in de weg. Het gaat dus om het vinden van de juiste balans.

De vraag hoe men goed uitlegt en informeert wil ik hier niet behandelen; wel is het bijzonder eenvoudig te zeggen hoe het publiek warm gedraaid kan worden voor een gegeven onderwerp. Men kan een thema namelijk motiveren door *positionering*, zowel binnen de wiskunde als binnen de eigen loopbaan. Wat het eerste betreft gaat het om de

vragen: waarom de probleemstelling? wat is er al aan gedaan? wat is de relatie met andere gebieden? Wiskundigen vinden het over het algemeen heel leuk om geschiedkundige details te horen. Foto's van wiskundigen en kopieën van een pagina van een zeer oud artikel of boek doen het altijd goed. In ieder geval is het de taak van de spreker om het onderwerp interessant te maken.

Daarnaast is het goed om te vertellen waarom je aan het probleem werkt, en eventueel ook met wie je dat doet. Vaak wordt het laatste in de allereerste zin verteld, maar dat heeft weinig effect als het publiek niet weet waar het om gaat. Vermeld co-auteurs dus tegen het eind van de motiverende opmerkingen.

Structuur

Tijdens de voorbereiding moet worden beslist hoe de voordracht is opgebouwd. Hierbij zijn twee uitersten denkbaar.

De *lineaire of klassieke structuur* volgt de opbouw van een artikel: Inhoudsopgave, Inleiding, Hoofdstuk 1, Hoofdstuk 2, ..., Conclusie. Deze opbouw wordt het meest gebruikt, maar er zijn grote nadelen aan verbonden.

Het publiek zit met het probleem dat de menselijke attentiespanne hoogstens 20 minuten is; hierna verslapt de aandacht voor tenminste enige tijd. Dit onvermijdelijke concentratieverlies leidt ertoe, dat sommige delen van de voordracht niet geabsorbeerd worden. Bij een artikel kan men even ophouden met lezen en later zonodig terugbladeren, maar bij het aanhoren van een lineair opgebouwde voordracht is men de sigaar: er is een logische progressie, waarin het volgende materiaal op het voorgaande is gebaseerd. Men kan het dan niet meer volgen, en de verveling slaat toe. Afgezien hiervan blijkt het publiek niet in staat hoofdzaken te selecteren; de spreker denkt vaak dat de feiten voor zichzelf spreken, maar het publiek wil een handje worden geholpen. Dit is vaak een probleem in de lineaire structuur, waarin bijna alles belangrijk is of als zodanig wordt gepresenteerd.

De vorige alinea is overigens ook van belang bij voordrachten van 20 minuten of korter, want zulke praatjes vinden veelal plaats in volgepropte middagsessies op conferenties, waarbij het publiek de aandacht per spreker soms nog maar enkele minuten weet vast te houden.

Bijna iedere spreker heeft problemen met de timing, maar bij een lineaire voordracht is tijdnood bijzonder ongelukkig. Er is geen tijd om de logische progressie af te maken, waardoor het hoogtepunt niet wordt bereikt, en de voordracht vaak op een tamelijk willekeurig

moment moet worden afgebroken. Aan een samenvatting of het beantwoorden van vragen komt de lineaire spreker met tijdnood al helemaal niet toe. Wanneer een spreker in het begin linksboven op het bord een inhoudsopgave van een lineaire voordracht opschrijft kan ik vaak een glimlach niet onderdrukken; hoe dikwijls komt hij niet verder dan de helft van zijn lijstje?

Om deze redenen beveel ik een andere opbouw aan, namelijk de *schillen-* of *uienstructuur*. Hierin gaat men na de onvermijdelijke inleiding, waaronder de motivatie, direct over tot de belangrijkste resultaten en de conclusies. Vanwege de bovengenoemde attentiespanne moeten deze in ieder geval in de eerste 20 minuten worden gegeven, maar soms kan het zelfs al helemaal in het begin: hoe eerder, hoe beter. Daarna komen verdere lagen met meer details, waarin de hoofdzaken zo vaak mogelijk herhaald worden. Op het eind volgt nog eens een samenvatting met opnieuw de hoofdpunten.

Voor het publiek heeft deze opbouw het kardinale voordeel dat de hoofdzaken zeker overkomen. Experimenten leren dat men gemiddeld maar ongeveer 7% van een aangeboden hoeveelheid informatie oppikt; de schillenstructuur zorgt ervoor dat dit ook het belangrijkste deel van de informatie is. Goede politici weten dit bijvoorbeeld. Latere aandachtverslapping is geen ramp, want men mist dan weliswaar enige details, maar dat zijn dan ook maar details. Die kan het publiek desnoods ook in een artikel lezen.

Voor de spreker is een groot voordeel dat hij gedwongen is het belangrijkste te selecteren uit zijn informatieaanbod. Mijn eigen praktijk leert dat dit ook het onderzoek vooruit kan helpen. Bij de voordracht zelf kan men eigenlijk nooit in tijdnood raken; het belangrijkste is immers al in het begin gezegd. Hierdoor kan men ontspannen optreden, de tijd nemen voor vragen en interrupties, gas terugnemen waar nodig, zonder het eeuwige gevaar dat bij de klassieke structuur loert, namelijk dat het verhaal niet afkomt.

Gezegd moet worden dat de voorbereiding van een schillenvoordracht veel meer tijd kost dan van een lineaire voordracht. Veelal moet men toch beginnen met de lineaire structuur, die dan volledig wordt getransformeerd tot een ui. Dit kan dagen extra werk opleveren. Ik kan hiervan slechts zeggen dat men die tijd moet nemen, en dat het resultaat deze investering in het algemeen ook waard is. Ervaren sprekers zullen overigens effectief tussen de lineaire en de schillenstructuur weten te interpoleren.



Illustratie: Ryu Tajiri

Het schillenmodel is in de Nederlandse academische wereld met name gepropageerd door W.A. Wagenaar [5], die op zijn beurt de eer aan Liesbeth Tonckens geeft.

Het menselijk geheugen

Na de bovenstaande knoop over de structuur te hebben doorgemaakt, kan men zich tijdens de voorbereiding met subtielere kwesties bezighouden. Eén daarvan is de vraag hoe men het geheugen van de toehoorder kan helpen de aangeboden informatie te absorberen.

Iets nieuws wordt na 30 seconden vergeten, tenzij het direct aan iets bekends wordt gerelateerd, of direct wordt gebruikt. Deze alternatieven moeten op de juiste manier worden ingezet. Bij de verfijning of uitbreiding van een bekend idee is het tweede mechanisme effectief: geef dan dus eerst de definitie, en dan een paar voorbeelden. Bij een echt

nieuw idee daarentegen is het beter om eerst voorbeelden, en daarna de definitie te geven.

Het geheugen moet verder worden geholpen met de vier structurele hulpmiddelen:

1. richtingaanwijzers: waar zijn we, waar gaan we heen?
2. omlijsting: markering begin en eind van onderdelen;
3. verbindingen: van het ene onderdeel naar het andere;
4. brandpunten: *nu* komt er iets belangrijks.

Ook dit zijn zaken waarvan veel sprekers denken dat het publiek zelf wel kan zien hoe het zit, maar het tegendeel is waar. In het schillenmodel komen de meeste brandpunten zoals uitgelegd in de eerste helft, met een crescendo op het eind.

Presentatie

Bij vrijwel iedere presentatie is een voorzitter aanwezig die de spreker inleidt. Deze klus wordt vaak nog slechter geklaard dan de voordracht zelf. Reken er niet op dat de voorzitter heeft gecontroleerd of er krijgt of een aanwijfsstok is, of de overheadprojector (OHP) het doet, of dat hij zelfs maar de titel kent. Kom dus ruim op tijd en controleer alles zelf, inclusief de juiste volgorde van transparanten, dia's, of aantekeningen; het is irritant als een spreker tijdens de voordracht uitvoerig gaat zoeken of herorganiseren.

Een van de belangrijkste onderdelen van de voordracht is de *opkomst*. Hierbij wordt namelijk de relatie met het publiek opgebouwd, met blijvende gevolgen. Vestig daarbij de volledige aandacht op *jezelf*, en niet op de OHP, het bord, of iets anders. Vele wiskundigen draaien zich na de inleiding door de voorzitter direct om en zoeken dekking bij het schoolbord of de OHP, waarna ze beginnen op het bord te schrijven of een transparant te plaatsen, soms onder het mompelen van wat wiskundige zinnen.

Het omgekeerde is correct: je moet je, open en bloot zeggend, midden voor het publiek opstellen, dit aankijken, en beginnen te praten. De eerste paar minuten kan over koetjes en kalfjes gepraat worden, of kan juist een belangrijke conclusie worden verteld, zoals in extreme interpretaties van het schillenmodel, als het maar direct tot het publiek gericht is. Op die manier laat je zien dat je geïnteresseerd bent in je publiek, en niet in het bord. Volgens een elementaire reciprociteitswet impliceert dit doorgaans dat het publiek ook belangstelling voor jou zal hebben. Zorg dat het publiek niet wordt afgeleid door informatie op het bord of op de OHP, die natuurlijk tijdens de inleiding uit moet staan. Een transparant met naam, titel, affiliatie, etcetera kan vooraf worden getoond, zodat binnenkomers ook weten dat ze in de juiste zaal zijn beland, en eventueel een emailadres of referentie over kunnen schrijven.

Het tijdens de inleiding opgebouwde oogcontact met het publiek moet tijdens de gehele voordracht worden vastgehouden. Je moet eigenlijk vrijwel voortdurend de zaal in kijken, en in het bijzonder iedereen bij toerbeurt een paar keer bijna persoonlijk aanspreken. Zo kun je zowel individuele als groepsreacties in de gaten houden, en kun je nagaan of het verhaal te moeilijk is, te snel gaat, saai overkomt, etcetera. Het feit dat niemand iets zegt tot een spreker die tegen het bord praat is absoluut geen garantie dat alles wordt begrepen; integendeel. Het aanpassen van het

tempo, het geven van meer achtergrondinformatie dan voorbereid, en het beantwoorden van tussentijdse vragen is noodzakelijk in ieder voordrachtsmodel, maar in het schillenmodel is dit veel beter mogelijk dan in de lineaire structuur, omdat de tijdnooddreiging ontbreekt.

Het behoeft geen betoog dat de presentatie zo aantrekkelijk mogelijk moet zijn: dit varieert van het laten zien van kleurige films of plaatjes van Riemann-oppervlakken tot het levendig brengen van de materie door middel van handgebaren, goede intonatie, oogbewegingen, en ga zo maar door. Uiteraard geldt ook hier dat het niet teveel van het goede moet zijn: met name een wiskundig publiek reageert negatief op clownesk of anderszins overdreven en aanstellerig gedrag (behalve in Frankrijk).

Welk model ook wordt gevolgd: op het eind moet een samenvatting worden gegeven. Dit vertienvoudigt de kans dat het publiek ook daadwerkelijk onthoudt wat de spreker over wilde brengen. Na het uitspreken van de laatste zin is het aan te bevelen de spanning nog even te laten bestaan, bijvoorbeeld door nog eventjes zwijgend een bijzonder fraaie formule te bekijken die tijdens de samenvatting is opgeschreven. Mompel dus niet meteen na de laatste zin het obligate "Thank you"; vergelijk dit met de dirigent die alvorens af te slaan na de laatste noot nog even het stokje hoog houdt.

Schoolbord of overheadprojector?

Wiskundigen willen graag zo veel mogelijk begrijpen van een voordracht, en dit pleit voor het gebruik van het schoolbord wanneer dat maar mogelijk is. Het hierdoor aan de spreker opgedrongen schrijf- en spreektempo past goed bij het absorptietempo van het publiek. Bovendien zijn wiskundigen gewend aan voordrachten op het bord, en dit is een argument op zich om dit medium te gebruiken. Bij fysici is het omgekeerd: zij zijn meer in informatieoverdracht dan in begrip geïnteresseerd, en zijn daarom ook gewend aan de overheadprojector.

Zoals al opgemerkt, moet de voordracht tot het publiek, en niet tot het bord worden gehouden. Praat dus niet tegen het bord; stilte tijdens het schrijven is heel prettig voor het publiek, dat even op adem kan komen of het voorgaande kan overdenken. Het is overigens in ieder opzicht een fout om alsmaar geluid c.q. informatie te produceren, en stiltes kunnen ook heel functioneel zijn als er niet op het bord wordt geschreven. Voor de klassieke collegevorm waarin de studenten meeschrijvend

een dictaat maken wordt wel aanbevolen om tijdens het schrijven letterlijk voor te lezen wat men op het bord schrijft, maar bij een seminarium is dit niet aan de orde, en zelfs als collegevorm is het achterhaald. Vermijd ook te snel uitvegen; het verhaal gaat dat John von Neumann altijd onmiddellijk uitveegde wat hij zojuist had opgeschreven. Voor rechtshandigen is het een idee om rechts te beginnen en naar links te werken, om blokkeren van het zicht te voorkomen.

Ook bij een voordracht op het bord moet niet voor moderne technieken worden teruggedeinsd: goede transparanten of dia's, of films via PowerPoint kunnen een praatje enorm verlevendigen. En wie helemaal met de tijd mee wil gaan kan in plaats van het bord e-krijt gebruiken.

Soms is het gebruik van de overheadprojector onvermijdelijk, bijvoorbeeld als er geen bord is, of als erg veel illustraties getoond gaan worden. Vraag dan om twee of drie projectoren, zodat je de transparanten zo lang mogelijk kunt laten liggen. Vermijd de fouten analoog aan verkeerd bordgebruik: praat niet tegen het scherm of de projector, maar tegen het publiek, en kijk naar het publiek terwijl het publiek jou of de transparanten bekijkt. Dit kan meestal het beste door naast het scherm te staan; dit vermijdt ook blokkeren van het zicht. Het is natuurlijk geheel in orde om af en toe even te kijken wat er ook al weer op de transparanten staat, maar in principe moet je dat vrijwel uit je hoofd weten. Het doel hiervan is al besproken in het hoofdstuk Voorbereiding, met ook dezelfde conclusie: houd het simpel.

De transparanten moeten niet te vol worden beschreven, en dienen uitsluitend kernpunten of eenvoudige formules of principes te bevatten, tenzij er voor de grap een hele lange uitdrukking of berekening op staat, waarvan het expliciet niet de bedoeling is dat het publiek deze begrijpt. Alles wat op een transparant staat moet relevant voor het publiek zijn, dat ook de tijd moet krijgen het te bekijken; hoe vaak zien we niet een sheet geheel zinloos voorbij flashen? Alle transparanten moeten custom-made voor de voordracht worden gemaakt. Het kopiëren van pagina's uit een artikel of boek is geheel uit den boze, tenzij het opnieuw voor de grap is of historisch materiaal toont. Het gebruik van het programma *Slitex* is, zeker aan beginnende sprekers, aan te raden, omdat het de spreker dwingt de transparanten kort en eenvoudig te houden. Kies ook bij handgeschreven transparanten een grote letter zoals in een 24-punts font of groter, en gebruik niet al te veel kleuren; het

kan wel nuttig zijn tekst en formules in verschillende kleuren te schrijven. Gebruik in ieder geval nooit lichte kleuren zoals geel en oranje; die zijn vaak niet te lezen.

Doe tenslotte niet alle lichten uit; er is tijdens een voordracht bij het publiek toch al een natuurlijke neiging in slaap te vallen, die niet onnodig moet worden versterkt.

Kardinale fouten

De erfzonde van de gemiddelde wiskundige is al vermeld: praten tegen het bord, het scherm, de muur, of de projector. Maar het is bijna nog erger om, de meerderheid van het publiek negerend, de voordracht geheel tot een kleine groep bekenden of zelfs een enkele Fields Medalist te richten; dit is de enige situatie waarin ik een keer ben weggegaan uit een seminarium. Ook het vaak noemen van jezelf, direct of indirect, is bijzonder irritant. Het laatste doet men bijvoorbeeld door iets te schrijven als ‘Lemma (NPL 1995)’ of ‘Theorem (Landsman).’ Omdat het geheime doel van een voordracht vaak toch is om jezelf en je werk te verkopen, is het beter een subtielere methode te gebruiken: accrediteer genereus anderen die beschreven resultaten hebben geboekt, en geef juist geen credits als het je eigen stelling betreft.

Maar de allerergste fout, die niet toevaldig voornamelijk wordt gemaakt door toch al slechte sprekers, is *te lang doorgaan*. Als het zover komt dat je na de toegemeten tijd je verhaal nog niet af hebt, neem dan je verlies en houd er gewoon mee op. Een goede voorzitter zal 5 of 10 minuten voor het einde souffleren dat het tijd voor de samenvatting of de conclusies is; houd je aan dat advies. Omdat veel voorzitters dit niet doen, moet je in ieder geval zelf de tijd goed in de gaten houden, en tijdig aan de samenvatting beginnen, zelfs als

die niet het geplande omvat, maar alleen het werkelijk behandelde.

In tegenstelling tot wat sommige sprekers in hun enthousiasme schijnen te denken, vindt niemand het leuk, en vinden de meesten het actief onaangenaam, als een spreker over tijd gaat. Dit laat men ook vaak, op diplomatieke of onbeleefde wijze, blijken. Maar veel sprekers verkeren in een roes, waarin ze suggesties om er toch maar eens mee op te houden negeren. Soms staat een spreker er zelfs op de meest triviale berekeningen geheel voor te doen alvorens, nu een uur over tijd, aan de hoofdzaak toe te komen. Zulke sprekers nodig ik in ieder geval nooit meer uit. Zelf ben ik overigens een keer anderhalf uur te lang doorgegaan; ik was er destijds heel trots op dat er om 18:30 nog leden van het publiek over waren.

Presentatiecursus

Wat te doen? Lenin vroeg het zich al af. Het opmerkelijke in het onderhavige geval is dat de leden van het publiek de wiskundige sprekers moeilijk kunnen afzetten, laat staan in stukken snijden, omdat beide groepen tenslotte samenvallen. Zo is het ook ongetwijfeld waar dat iemand die wel eens een wiskundige voordracht aanhoort al het bovenstaande wel weet, of in ieder geval aanvoelt, terwijl dezelfde persoon in de rol van spreker in bijna alle valkuilen trapt. Artin [4, p. 546] ziet geen hoop:

“In closing allow me a few words on the pedagogical side of the course. We all know that the best planned course can be ruined by a poor presentation. It is my experience that nothing can be done about it. The first seminar talk of a student has always revealed to me his future teaching abilities. I have often tried to improve

this by talking to the student and explaining to him his mistakes. I have had little or no success whatsoever. On the other hand we know that with very good students notoriously poor teachers have had frequently remarkable success. I am therefore of the opinion that we may safely leave aside any consideration of this problem.”

Mijn eigen praktijk is dat ik inderdaad aan suggesties van wiskundigen weinig heb gehad. Ook boeken en artikelen over presentatie hebben slechts zeer ten dele zin, afgezien van een enkele eye-opener als het schillenmodel van Wagenaar, de nog altijd behartenswaardige adviezen van Halmos [2], het felle boek van Krantz [3], of de wetenschappelijke studie van Brown en Atkins [1]. Je kunt ook autorijden moeilijk uit een boekje leren.

Maar des te meer heb ik geleerd van cursussen door presentatiedeskundigen. Zulke cursussen hebben vooral zin als er een flinke brok praktische training bijhoort, liefst met video-opname. De drempel om zulke zittingen te bezoeken blijkt hoog, en ongetwijfeld zitten er soms belachelijke onderdelen bij, zoals het langdurig gezamenlijk moeten opzeggen van een mantra als “ik kan het en ik ga het goed doen.” Maar de ergernis daarover zou toch in het niet moeten vallen bij de vele onverwachte zaken die een goede trainer je bij kan brengen. Iedere universiteit of hogeschool biedt tegenwoordig wel een pakket presentatietechniek aan.

Daarnaast is het natuurlijk een kwestie van veel oefenen, waarbij je vooral af en toe iemand moet vragen de voordracht na afloop met je te bespreken.

Veel succes!



Literatuur

- 1 G. Brown and M. Atkins, *Effective Teaching in Higher Education*, Routledge, London, 1990.
- 2 P. Halmos, *How to talk mathematics*, Notices of the American Mathematical Society 21 (3), 155–158 (1974). Herdrukt in P. Halmos, *Selecta*, Vol. 2, Springer, Berlin, 1983, pp. 187–190.
- 3 S. Krantz, *How to Teach Mathematics*, 2nd ed., American Mathematical Society, Providence (RI), 1999.
- 4 S. Lang and J. Tate (eds.), *The Collected Papers of Emil Artin*, Addison-Wesley, Reading (MA), 1965.
- 5 W.A. Wagenaar, *Het houden van een presentatie*, Uitg. NRC-Handelsblad, ISBN 9050189954.

Douwe van der Kooi

Kennemerstraatweg 175, 1814 GH Alkmaar

dvdkooi@worldonline.nl

Tijd voor bewijzen

Douwe van der Kooi is docent wiskunde aan de locatie Da Vinci van de Purmerendse Scholengemeenschap. In dit artikel gaat hij in op een ogenschijnlijke tegenstelling in de ideologie van de Tweede Fase van het Voortgezet Onderwijs. Van leerlingen wordt verwacht dat ze meer dan vroeger zelfstandig leren. Dat is ook nodig, aangezien het totale lesprogramma zo overladen is, dat de contacttijd tot een noodzakelijk minimum is gereduceerd. Het gevolg is dat er veelal onvoldoende tijd is om leerlingen de vaardigheden te leren die nodig zijn om op een verantwoorde wijze de regie te voeren over het eigen leerproces.

Met enige heimwee denk ik soms terug aan mijn eigen wiskundeonderwijs in de jaren '60. Vanaf de eerste klas leerde je middels de standaardaanpak van "gegeven-te bewijzen-bewijs", al of niet gevolgd door "QED", een redenering te geven, die een uitspraak tot een algemeen geldende waarheid verhief. Omdat je voortdurend geconfronteerd werd met deze wijze van denken, wist je op zeker moment niet anders, deed je het dus ook zo. Je werd steeds alerter om ogenschijnlijke trivialiteiten pas voor waar te houden nadat ze waren bewezen. De docent deed het voor, jij deed het na en kreeg feed-back van de docent. Op zeker moment beheerste je de vaardigheid en was de docent niet meer nodig.

Dit verhaal is geen pleidooi om terug te gaan naar de wiskunde uit diezelfde jaren zestig en de daarbij horende strakke en gedisciplineerde aanpak. Het curriculum is gelukkig zodanig veranderd dat de maatschappelijke relevantie van wiskunde op de middelbare school geen discussiepunt meer is. De vormgeving van de leerstof in de nieuwe boeken is zo dat leerlingen, zeker in de onderbouw, wiskunde doorgaans een leuk en nuttig vak

vinden. Toch is er wat aan de hand. Het niveau waarop leerlingen bepaalde vaardigheden beheersen en het gemak waarmee vaardigheden worden aangewend lijken minder dan voorheen het geval was. Ik denk daarbij niet alleen aan algebraïsche vaardigheden. Het gaat ook en vooral om vaardigheden die nodig zijn bij het probleem-oplossen en andere redeneervaardigheden, zoals bewijzen. In dit artikel ga ik nader in op dit verschijnsel.

Didactische ontwikkelingen

Toen ik in de loop van de jaren '70 wiskunde-docent werd in het voortgezet onderwijs was er niet alleen inhoudelijk nogal wat veranderd vergeleken met mijn eigen middelbareschooltijd. Ook op didactisch gebied waren er de nodige ontwikkelingen. Volgens de principes van het OSAEV-model werden nieuwe kennis en vaardigheden aangeleerd.

De afkorting OSAEV komt van de indeling van een leerproces in vijf fasen, namelijk Oriënteren, Sorteren, Abstraheren, Expliciteren en Verwerken. Tijdens het oriënteren is het de bedoeling dat de leerling goed inzicht krijgt in de aard van het probleem en relevante voorkennis ophaalt. Tijdens het sorteren krijgt de leerling op basis van voorbeelden een idee in welke richting het antwoord op de vraag moet worden gevonden. Het abstraheren is een mentaal proces waarbij de leerling los komt van de sorteerfase en door de aangereikte voorbeelden heen helder voor ogen krijgt wat de oplossing is van het probleem. ("Ik begin het te begrijpen.") Tijdens het expliciteren leert de leerling zijn pas verworven inzicht onder woorden te brengen. ("De grafieken van een functie en zijn inverse zijn elkaars gespiegelde in de lijn $y = x$.") Tot slot moet de nieuwe kennis worden verwerkt door het maken van een aantal opdrachten.

Voor een methode als Moderne Wiskunde, die na de mammoetwet op de markt kwam, werkte vanuit dit didactisch principe. Begrippen werden vrijwel nooit direct geëxpliciteerd, maar de leerling moest eerst zelf op onderzoek uit vanuit een 'geproblematiseerde' situatie. Joop van Dormolen heeft met zijn boek *Didactiek van de Wiskunde* (Oosthoek's Uitgeversmaatschappij BV, 1974) dit didactisch model uitvoerig beschreven.

Bij de implementatie van het OSAEV-model in het wiskunde-onderwijs stond het klassengesprek centraal. De bedoeling was dat leerlingen een wiskundig probleem systematisch leerden aan te pakken. Kern van de lesvoorbereiding was dan ook het problematiseren van nieuwe leerstof. De docent stelde de vragen en activeerde leerlingen om mee te denken en antwoorden te geven. Dat lukte het beste wanneer de context van het probleem motiverend werkte, dus aansloot bij de beleavingswereld van de leerling.

Eind jaren '70 ontstond de notie dat het curriculum voor Wiskunde 1 te zwaar was en onderdelen bevatte die minder relevant waren voor grote groepen leerlingen op het VWO, gelet op de (wiskundige) kennis die nodig was voor studies in de alfa- en gamma-richtingen. Het leidde in 1985 tot de invoering van Wiskunde A en B, respectievelijk een realistische wiskunde en een wiskunde met een meer traditioneel curriculum zoals analyse en meetkunde.

Al snel bleek dat grote delen van het leerplan Wiskunde A zich uitstekend leenden voor zelfstandige verwerking. Sterker nog, leerlingen moesten er vaak niets van hebben wanneer ik meende klassikaal iets te moeten bespreken. Antwoordenboeken en een goed leerboek waren voldoende voor de meeste leerlingen. De rol van de docent verander-

de. Er kwam een ontwikkeling, waarbij de docent meer doende was met individuele begeleiding en met het organiseren van het leerproces (studiewijzers, diagnostische toetsen, voortgangscontrole) dan met lesvoorbereiding en klassikale instructie. Het was niet langer alleen de docent die de vragen stelde. Er was voldoende contacttijd met leerlingen om het curriculum te halen. Begeleiding werd maatwerk.

Wiskunde B bleek in de praktijk evenwel een vak te zijn waarbij het klassengesprek een noodzakelijk didactisch middel was om leerlingen op het vereiste niveau te brengen. Het was een goed gevuld programma, waarbij de toegewezen contacttijd maar temauwer-nood toereikend was om er de einddoelen in te halen. Door de krappe tijd verkeerde de docent regelmatig in een soort spanningsveld. Er was enerzijds behoefte aan meer individuele begeleiding, anderzijds was het niveau en de omvang van de leerstof zodanig, dat het veelal nodig werd geacht om een strak klassikale regie te voeren over het leerproces.

Leerfuncties en zelfstandig leren

Dit verschil in didactische aanpak tussen Wiskunde A en Wiskunde B laat zich goed beschrijven met behulp van de terminologie van Robert-Jan Simons. In zijn boek *Leren en instructie* spreekt hij in dit verband over leerfuncties. Leerfuncties zijn psychologische functies die tijdens het leren moeten zijn vervuld, wil het studeren succesvol zijn. Het gaat bijvoorbeeld om het motiveren tot leren, het (willen en kunnen) geven van voorbeelden, het (willen en kunnen) verduidelijken van doelstellingen, het verschil weten tussen een argument en een bewijs en de behoefte een bewijs te geven van een stelling. Het aardige van het begrip leerfunctie is dat er mee in beeld gebracht kan worden in welke mate een leerling zelfstandig leert. De vraag is namelijk wie voor al die functies verantwoordelijk is: de docent of de leerling. Op een soort continuüm zijn drie markeringspunten aan te brengen. Het eerste punt markeert de didactische situatie waarbij de docent zoveel mogelijk de leerfuncties overneemt. De docent geeft aan dat een bewijs van de stelling noodzakelijk is en geeft het bewijs ook. Het tweede punt markeert de didactische situatie waarbij de docent de leerling prikkelt zelf een aantal leerfuncties over te nemen met vragen als 'Is dat altijd zo?', 'Wanneer heb je daarover absolute zekerheid?', enzovoort. Het derde punt markeert de didactische situatie, waarbij het volledig aan de leerling wordt overgelaten in hoeverre leerfuncties worden vervuld. De leer-

ling voert zelf de regie over zijn leren.

De manier waarop in veel gevallen Wiskunde A werd onderwezen in de loop van de jaren '90, toen de tweede fase van het voortgezet onderwijs nog niet met hoofdletters werd geschreven, wordt naar mijn opvatting het beste gekarakteriseerd door (de omgeving van) het tweede punt uit dit continuüm. De docent was wel degelijk aanwezig, voerde niet expliciet de regie over het leerproces, maar nam wel specifieke leerfuncties over wanneer de situatie daarom vroeg. Zoals gezegd, de begeleiding was sterk individueel en dus maatwerk. De didactische situatie wat betreft Wiskunde B daarentegen was meer geconcentreerd in de buurt van het eerste punt van het continuüm. De docent voerde doorgaans de regie over wat, wanneer, waar en hoe geleerd en toegepast moest worden.

Het 3-fasen model

Het model van Simons is regelmatig gehanteerd door scholen in de voorbereiding van de Tweede Fase als graadmeter in hoeverre de didactische situatie rijp was om vormen van zelfstandig leren te structureren in roosters door middel van bijvoorbeeld keuzewerktijdduren. Om leerlingen meer en beter zelfstandig te laten leren is het nodig dat zij zelf leerfuncties gaan overnemen. Dat gebeurt niet zo maar. Het vereist een didactiek, waarbij leerlingen studievoordiger worden. Het leerproces om een vaardigheid aan te leren gebeurt in drie fasen:

- Tijdens de eerste fase staat de docent *model*. Hij formuleert een probleem en gaat daarover hardop denkend filosoferen, zichzelf en de groep vragen stellend. Hij toont daarmee hoe je als ideale student met nieuwe en dus vaak problematische leerstof moet omgaan.
- Tijdens de tweede fase is de docent *activator*. De docent prikkelt leerlingen om de geleerde vaardigheid zelfstandig te oefenen in een nieuwe situatie. De docent blijft als het ware over de rug van de leerling meekijken of het goed gaat.
- Tijdens de derde fase is de docent *monitor*. Hij mag er in deze fase vanuit gaan dat de leerling de nieuwe vaardigheid zodanig beheerst dat zijn hulp niet meer nodig is. Controle door de docent vindt plaats via toetsing. Dit 3-fasen model voor het leren van vaardigheden is in de jaren '90 door verschillende onderwijskundigen nader uitgewerkt en gebruikt in trainingen om docententeams voor te bereiden op de Tweede Fase.

Bewijzen als wiskundige vaardigheid

Wat betekent dit voor het wiskunde-onderwijs van nu en in het bijzonder voor het aanleren van vaardigheden? Als voorbeeld neem ik de misschien wel meest fundamenteel wiskundige bezigheid, namelijk *bewijzen*. Daarvoor is nodig een mentale rust en een open en nieuwsgierige geest, waardoor men zich verwonderend vragen stelt. Verwondering wordt gestimuleerd in een inspirerende omgeving. Op de gemiddelde middelbare school in Nederland zijn dit geen vanzelfsprekende condities. Er is tijd nodig om aan deze voorwaarden te voldoen. Het onder woorden brengen van een hypothese of het stellen van een vraag is de explicitering van de verwondering. Dat is misschien wel het allermoeilijkste. Volgens Einstein is het moeilijker om het probleem te formuleren dan het op te lossen. Met andere woorden: ook hier is tijd voor nodig. Is men eenmaal zover — in de terminologie van Simons: zijn deze leerfuncties vervuld — dan moet een logische en verifieerbare redenering worden opgezet om de veronderstelling te bewijzen. Dat vereist, naast een creatieve en kritische geest, doorzettingsvermogen. Ook hier is dus tijd voor nodig. Tot slot behoort het bij de discipline van het vak om te reflecteren op het resultaat met vragen als 'Zijn er geen redeneerfouten gemaakt?' en 'Had het ook anders gekund?'. Alweer: dit kost tijd. In het Wiskunde B curriculum voor de Tweede Fase wordt expliciet aandacht gevraagd voor de vaardigheid bewijzen. Kortom, voor de bovenstaande mentale en intellectuele bezigheid. Het leerproces waarbij al die facetten zich ontwikkelen kost jaren van interactie tussen docent en leerling.

De praktijk

Op mijn school bestaat nog slechts zo'n 30% van de totale studielast voor de vakken Wiskunde B1 en Wiskunde B12 uit contacttijd en dat is geen uitzondering in Nederland. Het kan ook niet anders, gezien de overladenheid van het totale programma. Dat is de contradictie in de ideologie van de Tweede Fase. Meer vakken in minder tijd, uitgevoerd in de veronderstelling dat leerlingen over voldoende vaardigheden beschikken om op een efficiënte en effectieve wijze aan het curriculum te voldoen. Maar die veronderstelling klopt niet, zeker niet wat betreft wiskunde. Vaardigheden zul je moeten leren. Tenzij je bijzonder getalenteerd bent, is daar tijd voor nodig. En die tijd is er niet, met het gevolg dat sluimerend wiskundetalent onvoldoende gelegenheid krijgt zich te ontwikkelen. 

Ronald van Luijk

Department of Mathematics #3840
University of California
Berkeley, CA 94720-3840, U.S.A.
rmluijk@math.berkeley.edu

Sander van Rijnswou

Philips Semiconductors, Crypto-Competence Center
Prof. Holstlaan 4, 5656 AA, Eindhoven
sander.van.rijnswou@philips.com

Boekbespreking Hex Strategy & The Dots and Boxes Game

Hex, dots and boxes

Kamertje verhuren en Hex zijn al geruime tijd populaire spellen, in het bijzonder onder de wiskundestudenten. Op internet zijn er diverse pagina's aan gewijd en je kunt beide spellen online spelen (zie bijvoorbeeld [1–3]). Onlangs verscheen er over elk spel een nieuw boek dat ingaat op de wiskundige aspecten. Ronald van Luijk en Sander van Rijnswou geven een kritische beschouwing van beide werken.

Voor wie tijdens de lange winteravonden genoeg heeft van monopolie en ganzenborden zijn er talloze alternatieven waarbij verlies niet aan het kanselement toegeschreven kan worden. Zo wordt menig uur doorgebracht met het traditionele schaken, dammen, het steeds populairder wordende Japanse Go of het eenvoudigere vier-op-een-rij. Over elk van de eerste drie zijn al vele boeken geschreven. Voor het laatste is enkele jaren geleden zelfs een winnende strategie voor de eerste speler gevonden.

Minder bekend zijn de spellen Hex en Kamertje verhuren. Beide hebben regels zo eenvoudig dat je ze aan een kind kunt uitleggen en beide zijn veel complexer dan je op het eerste gezicht wellicht zou vermoeden. Wat ze nog meer gemeen hebben is dat over beide recentelijk een boek is uitgekomen.

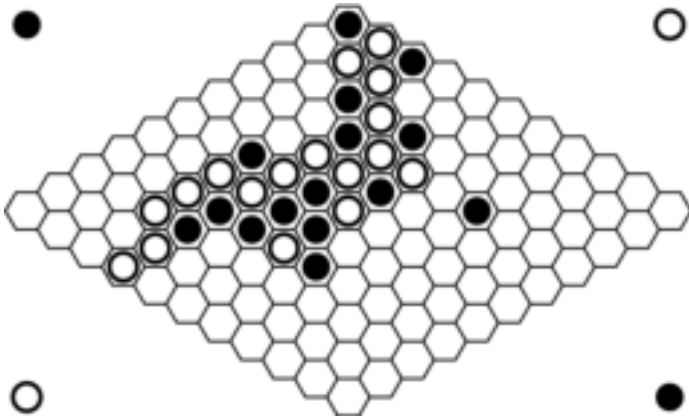
Het Hex-spel

Hex wordt gespeeld op een ruitvormig bord opgebouwd uit $n \times n$ regelmatige zeshoeken. Twee tegenoverliggende zijden van het bord zijn zwart gekleurd, de andere twee wit. De twee spelers plaatsen om beurt een steen van hun eigen kleur op het aanvankelijk lege bord. Een speler heeft gewonnen als hij de tegenoverliggende zijden van zijn kleur weet te verbinden met een ononderbroken keten van zijn stenen, zie figuur 1.

Het spel is bedacht door de Deense dichter en wiskundige Piet Hein. Hij beschreef het spel in de Deense krant *Politiken* van 26 december 1942. Er is een elegant bewijs dat het spel niet kan eindigen in remise. Om de geïnteresseerde speler niet het plezier te ontnemen daar zelf over na te kunnen denken, zullen we het bewijs achterwege laten.

Met behulp van een *strategy stealing* argument impliceert dit dat de eerste speler, zeg wit, kan winnen. Stel namelijk dat niet de eerste, maar de tweede speler een winnende strategie heeft. Door deze strategie te kopiëren krijgen we ook een winnende strategie voor de eerste speler. Wit doet de eerste zet volledig willekeurig. Hierna reageert wit op de zetten van zwart alsof de eerst geplaatste steen er niet is. Hierdoor wordt wit effectief de tweede speler en kan hij dus reageren

volgens de winnende strategie van de tweede speler. Wanneer hij volgens deze strategie zou moeten spelen op het vakje van de willekeurig geplaatste steen, speelt hij de volgende steen op een willekeurig leeg zeshoekje op het bord. Aangezien een extra witte steen op het bord niet in het nadeel kan werken voor wit resulteert dit in een winnende strategie voor de eerste speler.



Figuur 1 Hex op een 11×11 -bord, een veel gebruikte grootte. Wit heeft dit spel gewonnen.

Hoewel de eerste speler bewezen een winnende strategie heeft, is deze strategie voor bord van lengte 8 of meer niet bekend. Er zijn nog andere interessante resultaten bewezen over het spel. Zo zijn de vakjes in de twee scherphoekige hoeken van het bord verliezende eerste zetten. Op een parallellogramvormig $m \times n$ -bord met $m \neq n$ kan de speler winnen die de dichtst bij elkaar liggende zijden moet verbinden. Hiervoor is zelfs een strategie bekend, gebaseerd op een bepaalde betegeling van het bord. Het is dus fataal een zwakkere speler een voorsprong te geven door het bord aan een kant een rij korter te maken.

Making the right connections

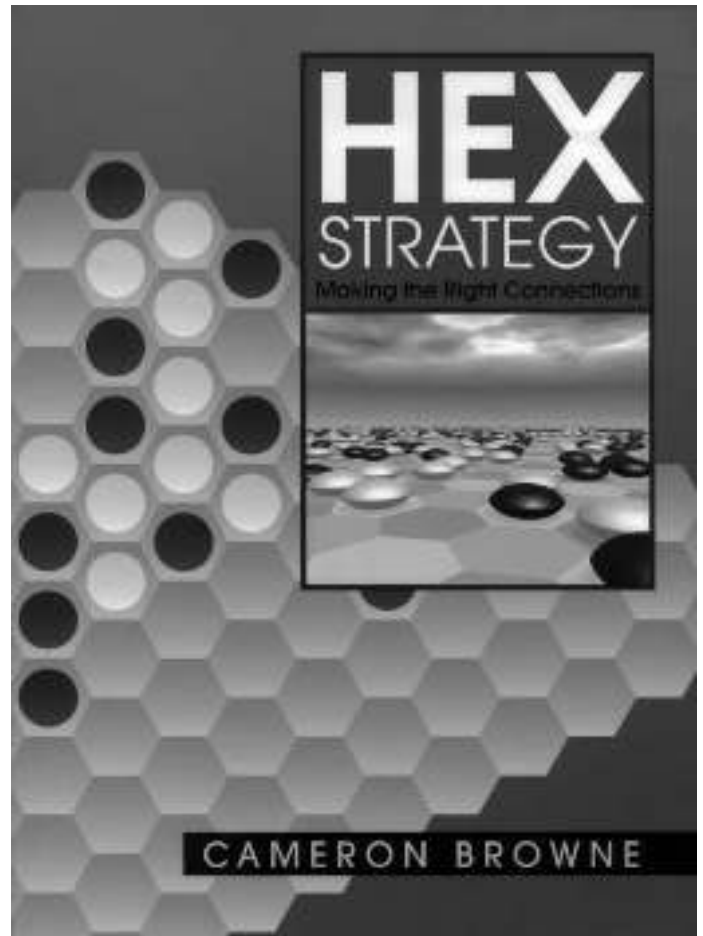
Wie Hex voor het eerst speelt heeft al snel in de gaten dat het patroon in figuur 2 erg nuttig is. In welke van de twee lege zeshoeken zwart ook speelt, wit kan in de andere spelen en is dus verzekerd van een verbinding tussen deze twee stenen. Dit patroon wordt een *brug* genoemd en is het begin van een uitgebreide beschrijving van strategieën in het boek *Hex Strategy, Making the Right Connections*, geschreven door Cameron Browne.



Figuur 2 Een brug: wit is verzekerd van een verbinding tussen de twee stenen.

In het eerste hoofdstuk van het ruim 370 bladzijden dikke boek worden niet alleen de regels uitgelegd, maar ook de geschiedenis van het spel. Verder wordt Hex vergeleken met enkele andere spelen en wordt een zeer grondige literatuurstudie gegeven.

De schrijver is erin geslaagd een toegankelijk boek te schrijven dat nieuwe spelers in Hex zal interesseren, maar dat ook ervaren spelers tot nieuwe inzichten kan brengen. Een van de verdiensten van dit boek is dat de schrijver alles wat hij heeft kunnen vinden over Hex in één boek heeft verzameld. Hierdoor zal de lezer zijn eigen bevindingen in het spel bevestigd zien tot op het punt in het boek waar hij nieuwe

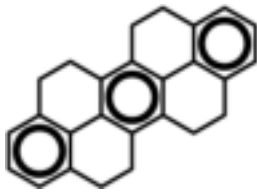


strategieën ontdekt. Daarnaast bevat het boek vele voorbeelden en uitdagende puzzels (met oplossingen). Zo is het geschikt voor spelers op elk niveau.

Beoogde doelen van het boek zijn het opzetten van jargon voor Hex-spelers en -onderzoekers en het geven van werkbare definities, onder andere om strategieën en algoritmes precies te kunnen beschrijven. Of zijn terminologie standaard zal worden zal de tijd leren, maar aan de vereiste wiskundige precisie ontbreekt het hier en daar helaas. Dat enkele specifieke bordsituaties verkeerd zijn geanalyseerd heeft de schrijver niet weten te voorkomen, maar heeft geen consequenties voor de rest van het boek. Een serieuzer probleem betreft een van de veelgebruikte concepten in het boek, namelijk het begrip *verbondenheid*. Aangezien het doel van Hex is twee tegenoverliggende zijden van het bord te verbinden, is dit een begrip dat in de analyse van bordsituaties natuurlijk naar voren komt. De precieze definitie is als volgt.

Ketens en verbondenheid

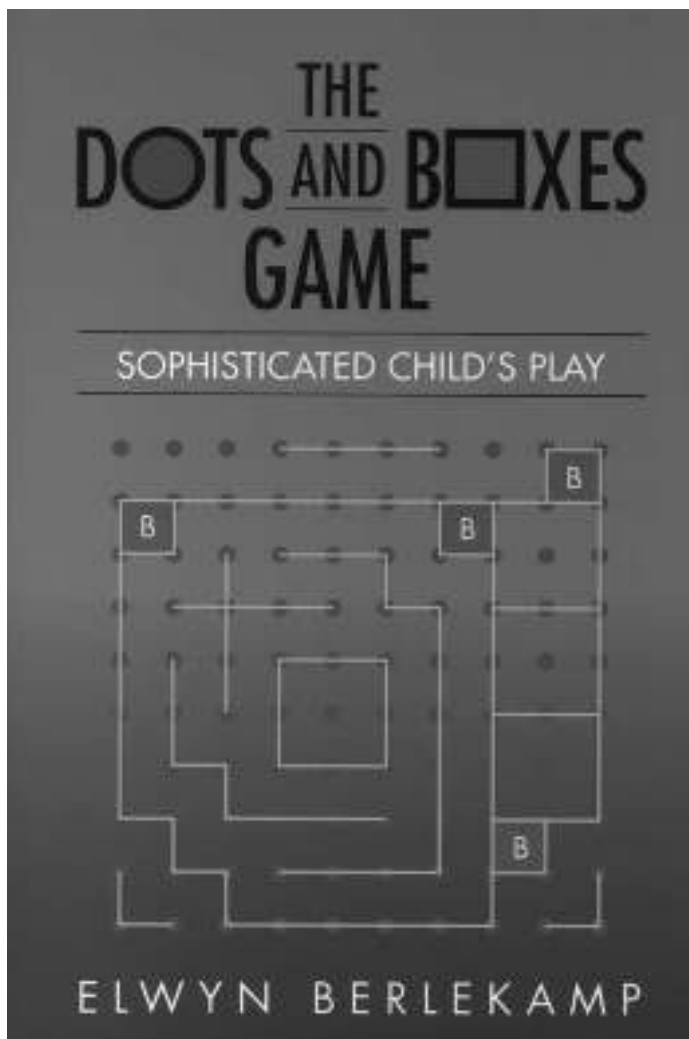
Een *keten* is een maximale verzameling direct verbonden stenen van een kleur. Hier zijn twee stenen *A* en *B* van dezelfde kleur 'direct verbonden' als er een reeks tussenliggende stenen van die kleur is waarvan elke grenst aan de volgende, de eerste aan *A* en de laatste aan *B*. Twee verschillende ketens zijn dus per definitie niet verbonden, maar we noemen ze 0-verbonden als ze in een reeks zetten verbonden kunnen worden, ongeacht wat de tegenstander speelt, en zelfs als die aan de beurt is of zou zijn. Twee stenen met een brug ertussen vormen het eenvoudigste voorbeeld. De reeks zetten mag gebruik maken van reeds gevormde ketens. De twee uiterste stenen in figuur 3, bestaande uit twee bruggen, zijn dus ook 0-verbonden.



Figuur 3 Een 0-pad

Een 0-pad bestaat uit een begin- en een eindketen, een verzameling andere ketens en een verzameling lege vakjes zodanig dat de begin- en eindketen 0-verbonden zijn en wat de tegenstander ook speelt, er is een reeks zetten die de begin- en eindketen verbindt en die slechts gebruik maakt van de ketens en lege vakjes uit de gegeven verzamelingen. Twee ketens zijn *n*-verbonden als ze door het plaatsen van *n* extra stenen op het bord 0-verbonden kunnen worden. Een *n*-pad bestaat uit een begin- en een eindketen, een verzameling andere ketens en een verzameling lege vakjes, zodanig dat door het plaatsen van *n* stenen op vakjes uit de verzameling lege vakjes er een 0-pad ontstaat (na het eventuele samenvoegen van ketens). Deze definities zijn preciezer dan die Browne geeft in zijn boek. Letterlijk vertaald schrijft hij:

*“Het concept van verbondenheid staat centraal in Hex. Twee stenen of ketens zijn *n*-verbonden wanneer zij, geïsoleerd beschouwd, in *n* zetten kunnen worden samengebracht tot een onverslaanbare verbinding.”*



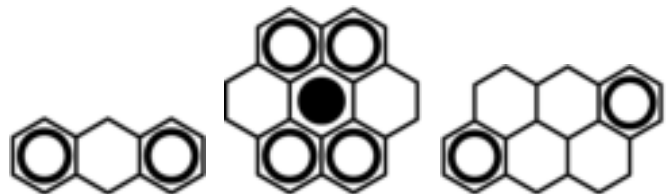
Merk op dat twee *n*-verbonden ketens ook $(n + 1)$ -verbonden zijn, wat de verbondenheid van een verbinding ambigu maakt. Of Browne zich dit realiseert is echter de vraag. Wanneer hij praat over een *n*-pad, noemt hij *n* de verbondenheid van de begin- en eindketen van het pad. Als hij het heeft over *de verbondenheid*, of soms zelfs *de ware verbondenheid* van twee ketens, kunnen we dit redelijkerwijs niet anders interpreteren dan het kleinste getal *n* waarvoor de twee ketens *n*-verbonden zijn.



Figuur 4 Andere voorbeelden van 0-paden bestaande uit de combinatie van twee 1-paden.

Zoals gezegd is het begrip verbondenheid nuttig in de analyse van een bordsituatie. Wanneer we de zijden van het bord ook beschouwen als ketens en er een 0-pad bestaat tussen de twee zijden van een speler, dan kan deze speler gegarandeerd winnen. Wanneer de speler aan de beurt is kan hij zelfs winnen wanneer er een 1-pad bestaat tussen zijn twee zijden. Het is daarom handig de verbondenheid van paden te kunnen berekenen en paden te kunnen construeren met lage verbondenheid.

Dit laatste kan bijvoorbeeld door het combineren van paden. Wanneer twee ketens verbonden zijn door twee disjuncte 1-paden, kunnen we die combineren tot een 0-pad. Als de tegenstander namelijk een van de twee paden aanvalt, speel je de zet die het andere 1-pad nodig heeft om een gegarandeerde verbinding tussen de ketens te creëren. Het simpelste voorbeeld hiervan is weer de brug, waarin beide 1-paden bestaan uit de twee stenen en een van de twee tussenliggende zeshoeken. Andere voorbeelden van 0-paden bestaande uit de combinatie van twee 1-paden zijn weergegeven in figuur 4.



Figuur 5 Enkele voorbeelden van *n*-paden, waarin *n* gelijk is aan respectievelijk 1, 0, 1 en 2

Verwarring

Daarnaast kunnen uiteraard een *n*-pad van *A* naar *B* en een disjunct *m*-pad van *B* naar *C* gecombineerd worden tot een $(m + n)$ -pad van *A* naar *C*. Het boek beschrijft nog enkele manieren om paden te bouwen en met behulp van deze constructies geeft het een algoritme om paden te vinden met lage verbondenheid. Er is echter geen enkele reden om aan te nemen dat het pad met de laagste verbondenheid op deze manier is op te bouwen, dus het algoritme zal niets meer doen dan het geven van een redelijke bovengrens van de verbondenheid. Ondanks dat beweert de schrijver over andere Hex programma's: "Some current Hex playing programs use adjacent and bridge steps only [...] these measurements do not describe the true connectivity across the board," en over zijn eigen algoritme: "The following sections outline an algorithm that gives a precise measure of each player's connectivity." Het

is een leuke uitdaging een bordsituatie te verzinnen waar het algoritme de mist in gaat.

Wij hebben hierover met Cameron Browne gecorrespondeerd, en hij geeft toe dat zijn methode alleen een bovengrens vindt in plaats van de geclaimde precieze verbondenheid. Uit dezelfde correspondentie blijkt dat de schrijver gedurende het hele boek bij het begrip n -paden niet denkt aan het algemene geval, maar slechts aan de deelverzameling van de speciaal gestructureerde n -paden die ook als zodanig worden herkend door zijn algoritme. Met deze interpretatie zou het bovenstaande citaat nogal triviaal worden. Bovendien valt door deze fout een van de weinige bewijzen, die gegeven worden in de appendices, als een kaartenhuis in elkaar. Het betreft de uitspraak dat de twee spelers niet beide tegelijkertijd een 0-pad tussen hun twee zijden kunnen hebben.

De verwarring verklaart ook uitspraken als dat elke twee ketens in een 0-pad gegarandeerd verbonden zouden kunnen worden. In het algemeen is dit verre van waar, maar het vormt in het boek toch de basis van de (nu wankel gebleken) constructie van een *veilige groep*. Het gebruik van dit belangrijke begrip lijkt overigens gebaseerd te zijn op een andere definitie dan die uit het boek. Het is overigens niet uitgesloten dat de twee equivalent zijn in het geval dat alleen de verzameling van speciale 0-paden worden beschouwd.

Al met al zal elke Hex-speler plezier beleven en leren van de strategieën in dit boek. Ze zijn voornamelijk gebaseerd op de intuïtie van ervaren spelers. Uit wiskundig en algoritmisch oogpunt is het echter alleen interessant wanneer de lezer zich ten doel stelt te proberen de definities duidelijker te maken in het geval de uitspraak al duidelijk is, er tegenvoorbeelden voor te bedenken.

Kamertje verhuren

Wiskundig sterker is het boek *Dots and Boxes* van Elwyn Berlekamp. Het gaat over het spel dat in Nederland bekend is onder de naam 'Kamertje verhuren'. Het spel wordt gespeeld op een stuk ruitjespapier. Twee spelers doen om de beurt een zet, die bestaat uit het verbinden van twee punten naast of boven elkaar. Als een speler een vakje helemaal insluit, dan is het voor hem en mag hij er zijn initiaal in zetten. Daarna moet hij nog een zet doen. Als het bord helemaal vol is dan heeft degene met de meeste vakjes gewonnen.

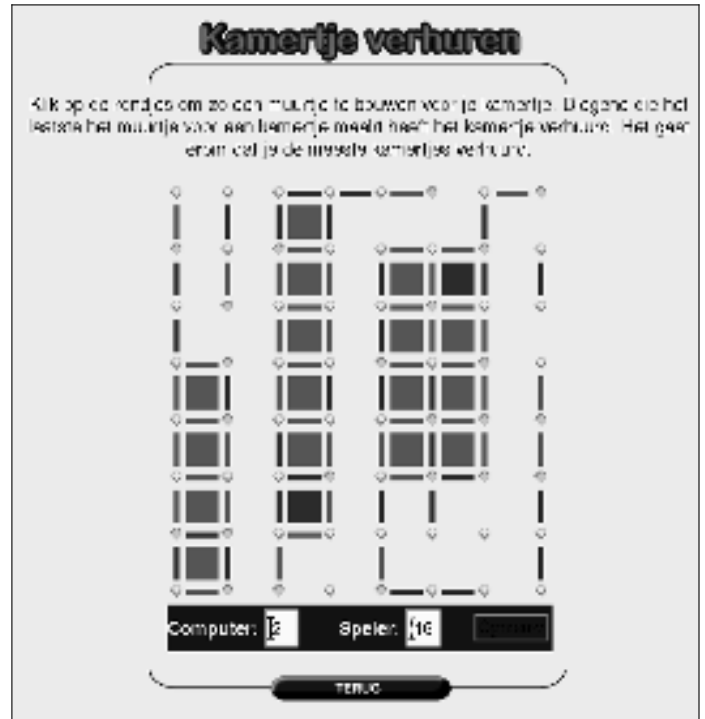
Wie het spel een paar keer gespeeld heeft realiseert zich vaak niet de diepte van de strategieën die mogelijk zijn in dit spel. Dit boek geeft een overzicht in 130 pagina's van wat er allemaal mogelijk is, en dat is heel wat. Het begint met de beginnersstrategie: "neem zoveel mogelijk vakjes en geef er zo min mogelijk weg," en eindigt met speltheoretische beschouwingen waar een hoop oefening voor nodig is om ze je eigen te maken.

Winning ways for your mathematical plays

Berlekamp kan zijn theorieën duidelijk naar voren brengen. De hoofdstukken worden afgesloten met een lijst dots-and-boxes stellingen waarvoor de winnende zet te vinden is met behulp van het zojuist geleerde.

De eerste paar hoofdstukken zijn bijna helemaal overgenomen uit *Winning Ways for your mathematical plays*. Er zijn vooral veel oefeningen aan toegevoegd. Ze lezen gemakkelijk weg, en daarna ben je praktisch onverslaanbaar geworden (totdat iemand ook de volgende paar hoofdstukken gedaan heeft natuurlijk).

De tweede helft van het boek is aanmerkelijk wiskundiger van opzet. Er wordt een overzicht gegeven van de ontwikkelingen in het onderzoek



Figuur 6 Kamertje verhuren (zie: <http://www.overlaat.nl/spelletje/kamertje/kamertje.htm>)

naar dit spel sinds *Winning Ways*. Het is aan te raden voor een bredere speltheoretische context dit laatste boek eerst te lezen.

Berlekamp heeft met dit boek een interessante aanvulling geschreven op zijn reeks boeken over speltheorie. Dit boek is goed te vergelijken met zijn andere boeken, zoals *Mathematical Go*. Zowel de spelletjesenthousiast als de in speltheorie geïnteresseerde zal met dit boek een paar leuke dagen beleven.

Besproken boeken

Elwyn R. Berlekamp, *The Dots-and-Boxes Game: Sophisticated Child's Play*, A.K. Peters Ltd., ISBN 1568811292, prijs 44 Euro; Cameron Browne, *Hex Strategy: Making the Right Connections*, A.K. Peters Ltd., ISBN 1568811179, prijs 18 Euro.

Websites

- 1 <http://www.well.com/user/argv/java/dots.html>
- 2 <http://home.earthlink.net/~vanshel>
- 3 <http://www.mazeworks.com/hex7>

Danny Beckers

Universiteit Nijmegen, Mathematisch Instituut

Postbus 9010, 6500 GL Nijmegen

dbeckers@sci.kun.nl

Oud Archief

De sensatie een oud tijdschrift of een oude brief op te slaan kennen de meesten van ons wel. 'Deden ze dat toen zo? Maakten ze zich daar toen druk over?' En dan realiseren we ons dat onze hedendaagse gewoontes ook maar toevallig zijn. Danny Beckers, aio in de geschiedenis van de wiskunde aan de KUN, zal in deze rubriek geregeld een titelblad, een mooi plaatje, een raar symbool, een bizarre ruzie uit de geschiedenis van het Wiskundig Genootschap aangrijpen terwille van de historische verlustiging.

In een schitterend geïllustreerd 15de-eeuws Italiaans manuscript staat het hier afgebeelde plaatje bij een vraagstuk over een lastige erfeniskwestie. Een man ligt op sterven en laat een laatste wilsbeschikking opmaken ten behoeve van zijn zwangere vrouw en nakomeling. Indien de vrouw van een dochter bevalt, krijgt zij $2/3$ en het kind $1/3$ van zijn kapitaal. Krijgt de vrouw echter een zoon, dan zal het kind $2/3$ en de vrouw $1/3$ ontvangen. Na de dood van de man schenkt de vrouw echter het leven aan een tweeling, waarvan de ene van het vrouwelijke, en de ander van het mannelijke geslacht. Hoe moet het kapitaal van de man verdeeld worden?

De welopgevoede wiskundige van vandaag zal de situatie als (mathematisch) onbeslisbaar afdoen, aangezien er in het testament niet is voorzien in de ontstane situatie. Voor de rekenmeesters uit de 15de en 16de eeuw was dit echter een wiskunde-opgave. De opgave werd opgelost met de 'regel van erfdeelinghe', één van de vele toepassingen van de 'regel van drieën'. De regel van drieën leert een getal te vinden dat tot een gegeven getal staat in een gegeven verhouding; in moderne schrijfwijze dus een oplossing x van $a : b = c : x$ wanneer a , b en c gegeven zijn.

De oudste mij bekende bron waar dit vraagstuk in voorkomt is de *Pandectae*, een serie wetten uit de tijd van keizer Justinianus I (484–565) van Byzantium. Volgens die

bron heeft een rechter daadwerkelijk voor dit vraagstuk gestaan, en besloot hij om het kapitaal in zeven even grote delen te verdelen, waarvan vier aan de jongen, twee aan de vrouw en één aan het meisje werden toegerekend. Rechtskundigen kenden het vraagstuk vermoedelijk uit deze codificatie. Het is dus niet ondenkbaar dat via examens voor het schoolmeesterambt die veelal door magistraten werden afgenomen, dit vraagstuk één van de meest gevreesde opgaven voor schoolmeesters is geweest. In elk geval treffen we het aan in 15de- en 16de-eeuwse rekenboeken.

In Nederland verschijnt het vraagstuk in druk in 1545. Het vraagstuk riep al snel de neiging tot persiflage op: zo bestaat er een versie uit 1600 waarin de vrouw een drieling baart, die behalve een jongetje en een meisje tevens nog uit een hermafrodit bestaat. Verder is er een 18de-eeuwse variant geheel op rijm. Een fragmentje daaruit:

Terwijl hij op zijn sterfbed lag,
En zijn bevruchte vrouw aanschouwde,
Op hem, op wien z' haar hoop steeds
[bouwde,

Vast met betraande oogen zag;
Begeert hij, dat van 't tijdelijk goed,
't Geen na zijn dood zou zijn bevonden,
En waardig vijftien duizend ponden,
De deeling dus geschieden moet;
Dat, zoo de vrouw een dochter baart,
Zal zij tweemaal zoveel genieten
Als voor het kind zal overschieten;
Maar zoo van mannelijken aard
De vrucht mogt zijn; dan zal het deel
Des zoons tweemaal zoveel bedingen
Als 's moeders erf, zijn welbehagen
Zal dan voldaan zijn in 't geheel.
[...]

Zoo nu de vrouw ter eener dragt
Twee kinderen ter wereld bragt,
't Zij zoons of dochters, of ook beiden,
Hoe zou men dan de boedel scheiden

Dat niemand werd te kort gedaan,
En 't met 's mans eisch best kan bestaan

Overigens waren er al snel meerdere oplossingen in omloop. Er vallen immers drie verhoudingen uit het verhaaltje te halen (die tussen vrouw en zoon, vrouw en dochter, en dochter en zoon) die gezamenlijk een strijdig stelsel van vergelijkingen vormen. Afhankelijk van je voorkeur kun je dus sowieso drie verschillende uitkomsten verdedigen.

Een aantal huisvrouwen in de vroege 19de eeuw hebben er zelfs voor gepleit om de vrouw de helft van het kapitaal te gunnen, en het jongetje en het meisje het restant in de verhouding 2:1. Dit met een beroep op het argument dat de vrouw twee maal werk had verzet, en dus in beide gevallen ook loon naar werken diende te krijgen! Maar dit geschiedde bij een gelegenheid waarin deze oude lesboeken op de hak werden genomen.

Literatuur

Marjolein Kool, *Die Conste vanden Getale*, Hilversum (1999)



Algorismus trattato di Aritmetica pratica e mercantile (1478), fol. 76r (Facsimile-uitgave van de Banca Commerciale Italiana te Milaan)

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Alle in de vijfde serie van het NAW verschenen boekbesprekingen zijn te vinden op onderstaande webpagina. Tevens staat daar een lijst met ter recensie aangeboden congresverslagen en eventueel andere boeken. Indien u er prijs op stelt een van deze verslagen te bespreken, meld dit dan binnen een maand na verschijnen van dit nummer (bij voorkeur per e-mail) op onderstaand adres.

Eindredactie: Jaap Top
Redactieadres: Boekbesprekingen WG
Instituut voor wiskunde en informatica
Postbus 800, 9700 AV Groningen
Webpagina: <http://www.math.rug.nl/revwg/>
E-mail: revwg@math.rug.nl



C.J. Scriba en P. Schreiber
5000 Jahre Geometrie: Geschichte, Kulturen, Menschen

Berlijn: Springer-Verlag, 2001

596 p., prijs DM 69,-

ISBN 3-540-67924-3

De twee schrijvers presenteren in dit boek een aantrekkelijk overzicht van meetkunde van het oude Egypte tot en met de twintigste eeuw. Het boek is voor een tamelijk breed publiek bedoeld, en de auteurs vatten het begrip meetkunde ruim op. Zij besteden speciale aandacht aan 'onbewuste wiskunde', die niet in boeken is beschreven maar wel te zien is in kunstwerken.

Het gedeelte tot en met de middeleeuwen wordt grotendeels behandeld door de eerste auteur, emeritus-hoogleraar geschiedenis van de wiskunde te Hamburg. De nadruk ligt hierbij op praktische toepassingen en ook op cultuurgebieden die vaak niet met meetkunde worden geassocieerd, zoals Rome, China, India en Japan. Dit gedeelte van het boek is kennelijk niet bedoeld als compleet overzicht; zo wordt de herkomst van de verdeling van de cirkel in 360 graden niet uitgelegd, en ook de bepaling van de oppervlakte van de bol door Archimedes komt merkwaardigerwijze niet aan de orde. In een intermezzo van de hand van de tweede auteur wordt Euclides als held en pionier opgevoerd, hoewel vaststaat dat hij in de Elementen qua inhoud en vorm veel aan eerdere wiskundigen heeft ontleend.

In de tweede helft van het boek geeft de tweede auteur, hoogleraar meetkunde en grondslagen van de wiskunde, een met veel inzicht geschreven overzicht van de geschiedenis van de meetkunde van 1450 tot en met de twintigste eeuw. In een recensie van deze omvang kunnen we uiteraard maar enkele voorbeelden bespreken. Schreiber heeft een speciale interesse voor de relatie tussen wiskunde en kunst in de Renaissance, en hij heeft zijn betoog met prachtige platen geïllustreerd. Over dit grensgebied met onbewuste wiskunde is nog veel te ontdekken, Schreiber noemt onder andere op bladzijde 269 het 'wetenschapshistorische wonder' van de afbeelding van een niet-convex regelmatig icosaeëder op de vloer van de San-Marco kathedraal te Venetië. Als voorbeeld van de vele interessante visies van Schreiber noemen we hier zijn beschrijving van de ontwikkeling van de niet-Euclidische meetkunde tussen 1790 en 1900. Aan het eind van de achttiende eeuw worstelden diverse wiskundigen met het parallellenpostulaat, en op de pagina's 343–345 verbindt Schreiber het 'psychische lijden' van de diverse betrokkenen met het nieuwe dat aan het licht wil komen, namelijk een totaal nieuwe opvatting van wiskunde. Schreiber verbindt de ontdekking van modellen van de niet-Euclidische (hyperbolische) meetkunde door Beltrami (1868), Klein (1871) en Poincaré (1881) met de ontwikkeling van de wiskunde van een quasi-natuurwetenschap in de 18e eeuw tot een wetenschap van formele structuren in het begin van de 20e eeuw. Omstreeks 1880 was deze ontwikkeling nog niet afgesloten, en de modellen konden toen daarom nog niet als *model* in de moderne zin worden geïnterpreteerd maar alleen als *Versinnlichung* (pagina 401), dat wil zeggen in termen van hun mogelijke geldigheid in de fysieke ruimte. Vandaar de — voor een modern gevoel overdreven — aandacht voor trigonometrische formules en hun geldigheid.

Het is ondoenlijk de geschiedenis van de wiskunde van de twintigste eeuw te beschrijven zonder in technische kwesties te verzeilen die voor een breed publiek ontoegankelijk zijn. Schreiber lost dit dilemma op door de nadruk te leggen op de relaties van de meetkunde met andere gebieden: natuurwetenschappen, techniek, informatica en kunst. Abstracte wiskunde is volgens Schreiber tegenwoordig niet meer hoofdzaak. Hij schrijft: "Es ist jedoch unübersehbar, dass diejenigen Richtungen, die relativ arm an Algorithmen sind, vielmehr die Feststellung von oft tief liegenden Sachverhalten zum Gegenstand hatten, heute ihre Hochkonjunktur hinter sich haben."

In het gedeelte over meetkunde en kunst komt uiteraard Maurits Escher aan de orde. Deze was op de middelbare school middelmatig in wiskunde, en Schreiber concludeert "Dies zeigt nur, dass üblicher Mathematikunterricht wenig geeignet ist, Ausnahmebegabungen zu entdecken und zu fördern, und dass die landläufige Vorstellung von sogar vieler Mathematiker von dem, was Mathematik ist, dringend einer Korrektur hinsichtlich dessen bedarf, was schon in der Einleitung dieses Buches als 'unbewusste Mathematik' ausgesprochen wurde." Schreiber merkt op dat diverse prenten van Escher tegenwoordig net zo bekend zijn als de Mona Lisa, en dat hierdoor brede lagen van de maatschappij met een soort wiskunde in contact komen die zij helaas op school niet hebben gehad.

Het boek eindigt met een hoofdstuk over het belang van spelen in het wiskundeonderwijs, en met een oproep aan de lezer om zelf leuke dingen in de aanschouwelijke meetkunde te ontdekken. Het boek biedt hiertoe ruimschoots aanleiding in de opgaven aan het eind van de hoofdstukken en ook in de prachtige platen. Uw recensent vond het archimedische veelvlak, dat volgens Schreiber op blz. 443–444 in 1930 door Miller ontdekt is, op het schilderij uit 1495 dat op blz. 257 is gereproduceerd.

Dit rijke en inspirerende boek is interessant voor wiskundigen, wiskundeleraren, wiskundestudenten, en anderen met minimaal 1 à 2 jaar wiskunde na VWO-niveau en een goede leesvaardigheid in het Duits.

J. Hogendijk

D. Haskell, A. Pillay and C. Steinhorn (eds.)

Model theory, algebra and geometry

Cambridge: Cambridge University Press, 2000

227 p., prijs £30

ISBN 0-521-78068-3

Abstracte modeltheorie zit in de lift. Dat ligt zeker aan het feit dat schijnbaar exotische constructen als stabiliteitstheorie plotseling toepassingen hebben gekregen in de arithmetische meetkunde: zie Hrushovski's bewijs van de vermoedens van Mordell-Lang en Manin-Mumford. Wie het eerste bewijs wil leren kennen kan terecht bij *Model theory and algebraic geometry. An introduction to E. Hrushovski's proof of the geometric Mordell-Lang conjecture* (Springer Lecture Notes in Mathematics nr. 1696, E. Bouscaren (ed.)) — waarin echter het artikel van Zilber misschien net iets te steil gaat.

Het werk dat hier besproken wordt is tevens een overzichtsvolume over de modeltheorie van velden, maar heeft een iets breder objectief: het bevat ook inleidingen tot o-minimaliteit, Manin-Mumford, subanalytische meetkunde en lokale zeta-functies. De auteurs (D. Marker, L. van den Dries, Z. Chatzidakis, D. MacPherson, B. Hart, E. Bierstone, P. Milman, J. Denef en B. Mazur)

zijn stuk voor stuk experts, maar trappen toch niet in de val van het technisch schrijven. Het is een plezier voor de lezer te zien hoe elk van hen zijn best doet zoveel mogelijk voorbeelden aan te halen die de (algebraïsch) meetkundige aanspreken.

Dit uitstekend uitgegeven volume lijkt de ideale inleiding tot dit relatief nieuwe gebied.

G. Cornelissen

K. Rubin

Euler systems

(*Annals of Mathematics Studies*; 147)

Princeton: Princeton University Press, 2000

227 p., prijs \$ 24.95

ISBN 0-691-05076-7

De theorie van Eulersystemen vindt zijn oorsprong in werk van Thaine en van Kolyvagin. Gedoeld wordt op een techniek van Thaine om klassengroepen van reële abelse uitbreidingen van $\mathbf{Q}$ te begrenzen en op werk van Kolyvagin dat resulteert in het begrenzen van Selmergroepen van elliptische krommen. De ideeën hierachter hebben geleid tot de introductie van abstracte Eulersystemen voor p -adische representaties zoals deze in dit boek worden behandeld. Om de hoofdlijnen te schetsen is het nodig iets meer in detail te treden.

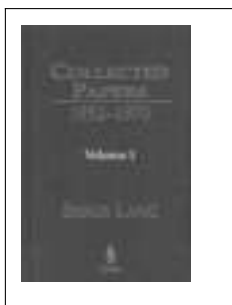
Stel K is een getallenlichaam, G_K de absolute Galoisgroep van K en T een p -adische representatie van G_K (dat wil zeggen een vrij $\mathbf{Z}_p$ -moduul met continue G_K -actie). Een Eulersysteem voor T is een verzameling cohomologieklassen $c_F \in H^1(G_F, T)$, geïndexeerd door een collectie abelse uitbreidingen F van K , die aan bepaalde compatibiliteitsvoorwaarden voldoet. Zij $W = T \otimes (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$ en definieer, voor een eindige verzameling Σ van plaatsen van K , de Selmergroep $S_\Sigma(K, W) \subset H^1(G_F, W)$ als de verzameling klassen die lokaal triviaal zijn bij de plaatsen in Σ en die bij de overige plaatsen een regulariteitsconditie vervullen. De hoofdstelling van dit boek geeft een afschatting van de ordes van bepaalde Selmergroepen (en dus tegelijk een eindigheidsstelling). Dit laatste zowel over K als over bepaalde $\mathbf{Z}_p^d$ -uitbreidingen K_∞ van K .

De definitie van een Eulersysteem en de bovenstaande stellingen worden behandeld in het tweede hoofdstuk, het eerste is gewijd aan de nodige voorkennis betreffende de cohomologie van p -adische Galoisrepresentaties. In het derde hoofdstuk volgen enige belangrijke toepassingen van de stellingen uit hoofdstuk 2. Daarbij gaat het onder andere om de grenzen van Mazur-Wiles voor de ordes van de klassengroepen van cyclische uitbreidingen van $\mathbf{Q}$ en om werk van Kato met betrekking tot Shafarevich-Tate groepen van elliptische krommen.

In de hoofdstukken 4–7 komen de bewijzen van de resultaten uit hoofdstuk 2 aan de orde. In hoofdstuk 8 vinden we een overzicht van werk (en vermoedens) van Perrin-Riou over de relatie tussen Eulersystemen en p -adische L -functies. In het laatste hoofdstuk worden enige varianten op de theorie belicht. Ten slotte volgen vier appendices met benodigde voorkennis die in de hoofdstukken niet thuishoorde.

Samenvattend vind ik dat dit boek een zeer aangename en complete behandeling geeft van de theorie van Eulersystemen. Als zodanig is het warm aan te bevelen aan elke onderzoeker, vanaf het niveau van promovendus, die zich in dit onderwerp wil verdiepen.

R. Noot



S. Lang

Collected papers (I, II, III, IV, V)

Berlijn: Springer-Verlag, 2000-2001

525+590+393+471+492 p., prijs 4 × DM 159,- plus DM 179,-

ISBN 0-387-98802-5, ...-98803-3, ...-98800-9, ...-98804-1, ...-95030-3

Serge Lang is well-known for the numerous books which he has written on mathematics, books on subjects ranging from the most elementary and basic level like textbooks for undergraduates and graduates to books reaching the most advanced borders of our present knowledge (Lang was awarded the 1999 Steele prize of the AMS for his mathematical expositions). However Lang is also a first-class research mathematician himself, he has made many original contributions and many of them are fundamental and outstanding. These research papers, together with his numerous survey papers, reviews and some other writings have now been published by Springer Verlag as "Collected papers". They consist of five volumes and run over the period 1952–1999. The collected papers contain most, but not all, of Lang's papers on mathematics. Not included are for instance most of his seminar talks, like his Bourbaki talks, and also not the papers that originated from his regular Zurich lectures. On the other hand two books are included which were out of print, namely his *Introduction to transcendental numbers* from 1966 and the English version of *Rapport sur la cohomologie des groupes* which originally also appeared in 1966. Moreover, most of his Springer LNM — maybe with the exception of the one on Nevanlinna theory (see below) — are included; in fact these are essentially research papers anyhow.

The work is presented in chronological order, but as Lang remarks himself in the introduction, the papers group themselves around various themes reflecting, during the different periods, the main focus of interest of the author (with from time to time a jump back to an earlier period). Most of the papers are in English but there are also several papers in French. Each of the volumes contains a complete bibliography (till 1999). In Volume I there is the foreword of the author and a curriculum vitae, moreover in the first four volumes there are also some pictures of the author at various periods. Lang was a student of Emil Artin in Princeton and in his foreword to the collected papers he expresses again his appreciation for his teacher. From Lang's work, especially from the first period of that work, it is clear that Lang was also strongly influenced by André Weil; during 1953–1955 Lang was instructor at the University of Chicago and Weil was a professor there.

The work of Lang ranges over a broad spectrum of mathematics: papers on number theory (both algebraic and analytic) and on algebraic geometry, with an emphasis on geometric class field theory and abelian varieties, many papers on diophantine equations and diophantine approximations, studies on modular curves and modular units, studies on complex hyperbolic spaces, on Nevanlinna theory, on Arakelov theory and during the later period a series of papers (together with Jay Jorgenson) on so-called regularized products.

Let us take a closer look to the different volumes. First of all I should make clear that already because of lack of space, but even more so because of the limitations of your reviewer, we can only

take a grasp out of the rich content of these volumes.

Volume I covers the period 1952–70. The first paper is the author's Ph.D. thesis from Princeton. The thesis is on quasi algebraic closure of fields, this is a concept which was introduced by E. Artin to measure — in some sense — how far the field is away from (or how close it is to) being algebraically closed. After some related papers to the above, from 1954 onwards starts a series of beautiful papers on algebraic geometry, most of them either with an arithmetic flavor or dealing with varieties over finite fields. In this series we find, among others, the fundamental paper on unramified class field theory over function fields in several variables (for this paper Lang was awarded the 1959 Cole Prize of the AMS). This paper, and many of the other papers in this series, depend heavily on the theory of abelian varieties as developed by Weil and supplemented later by works of Chow and Matsusaka. There are also (always among many others!) the joint paper with Serre on non-ramified coverings of algebraic varieties and the joint paper with Tate on homogeneous spaces over abelian varieties. Then after 1960 Lang's main interest gradually shifts to diophantine equations and diophantine approximation and also to transcendental theory. In his 1960 paper on integral points on curves we find already his famous conjecture on the integral points in a subvariety of an abelian variety (or of a torus), a conjecture including Mordell's conjecture and later fully proved by Faltings. Volume I contains also the above mentioned reproduction of the book on transcendental numbers. Finally we mention in this volume the interesting review by Lang of Grothendieck's *Eléments de géométrie algébrique*.

In Volume II (1971–1977) we see a continuation of Lang's interest in diophantine questions. We find here (for instance) a survey paper on transcendental numbers and diophantine approximation. Here Lang discusses the theory on transcendental numbers from Hermite to the work of Baker; for the diophantine approximation he starts with Dirichlet and leads up to the works of Roth, Schmidt and others. Also there is a paper on higher dimensional diophantine problems containing generalizations of Mordell's conjecture for curves and of Siegel's theorem on integral points on curves. (Of course this paper is written before Falting's fundamental work!) Trying to unify the various conjectures Lang turns to the study of hyperbolicity of manifolds (in the sense of Kobayashi), a theme which will return again many times later. In this volume there is also the beginning of a long series of papers jointly with Kubert on units on modular curves. Such 'modular units' are meromorphic functions on the modular curve $X(N)$ which have only zeros and poles in the cusps, and again they are studied for applications to diophantine questions on certain curves! A synthesis of this series of papers can be found in the book of Kubert-Lang on Modular Units in Springer's Grundlehren Series, vol. 244. Finally we mention that in this Volume II there is also reproduced the joint paper, with Trotter, on Frobenius distributions in $GL(2)$ -extensions which originally appeared as a Springer LNM.

Volume III (1978–1990). First there is the continuation of the papers with Kubert mentioned above. Then there is an interesting paper, together with N. Katz, on finiteness theorems in geometric class field theory. (This is a jump back into his 'algebraic geometry period'!) Next we mention in this volume the beautiful paper on *Units and class groups in number theory and algebraic geometry*, this is the written (but expanded) version of Lang's Colloquium

Lectures for the summer meeting of the AMS in 1981. In a paper entitled *hyperbolic and diophantine analysis* Lang returns to the interplay between diophantine problems and hyperbolic manifolds (note that in the meantime Faltings has proved Mordell's conjecture!). In that period Lang also starts to work on Nevanlinna theory (on which more in the next volume). The volume concludes again with a very interesting article on diophantine problems, a paper in which Lang discusses four conjectures and the relations between these: the Fermat conjecture (proved in the meantime by Wiles!), the *abc*-conjecture, the Vojta conjecture and the generalized Szpiro conjecture.

Volume IV (1990–1996). In this volume we find the reproduction of two books. *Lectures on Nevanlinna theory*, written jointly with W. Cherry. It appeared earlier as a Springer LNM. It gives a self-contained account of Nevanlinna theory, but a special feature is that the authors pay particular attention to the error term in Nevanlinna's main theorem, the reason being the relation with diophantine geometry. The other book is a translation and extension of Lang's *Rapport sur la cohomologie des groupes*. It is certainly a good thing that this book is again available in this way. This volume contains also two papers on 'history' of mathematics. One is on Mordell's and Siegel's attitude towards the developments in 20th century mathematics and the other one is entitled *Some history of the Shimura-Taniyama conjecture*. Of course both these articles contain controversial issues, but irrespectively whether one agrees with the author or not, they are interesting. Moreover, there is Lang's letter to the Notices of the AMS on *The Kirscher article and HIV*, a letter which was refused for publication. Finally we mention in this volume the sympathetic and excellent paper by Lang entitled *Comments on Chow's work* which appeared in the Notices in a series of memorial papers for W.-L. Chow.

Volume V (1993–1999; together with Jay Jorgenson). This volume contains a series of papers written together with Jay Jorgenson (some appeared as Springer LNM, but they are all research papers). They are on so-called regularized products. The general idea behind these papers is to extend results from classical analytic number theory to a broader class of functions admitting generalized Euler products and functional equations. In these papers the authors lay connections between analytic number theory and theory of spectral theory of certain operators. There are relations with Lie groups, differential geometry, symmetric spaces, heat kernels and many other things!

The reviewer hopes that the above gives some idea how extensive and broad the scope of Lang's work is. His work connects many different areas of mathematics, but one thing is clear: Lang's love and passion for diophantine questions runs as a thread through most of his work. I am fully aware that the above brief summing-up of (some of) the contents of the volumes does not give at all justice to the depth of Lang's work. Lang has a special talent for seeing what is important, for seeing the main lines. His own work is fundamental and pioneering at many places; moreover his deep insights and his — often daring — conjectures have been very stimulating for others. Both by virtue of his own original work and by the merits of his extraordinary work in mathematical exposition Lang occupies an important and outstanding place in 20th century mathematics! It is therefore very pleasant and very valuable that now Lang's mathematical work has been put together.

J.P. Murre



J. Neukirch

Algebraic number theory

(*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*; 322)

Berlin: Springer-Verlag, 1999

571 p., prijs DM 179,-

ISBN 3-540-65399-6

Grofweg tot aan de Tweede Wereldoorlog werd het gebouw van de algebraïsche getaltheorie in overwegende mate opgetrokken door Duitse wiskundigen. De kwadratische reciprociteit van Gauss, de eenhedenstelling van Dirichlet, Kummer-theorie en de theorie van Minkowski, Riemanns zeta functie en die van Dedekind, de stelling van Kronecker-Weber, het klassenlichaam van Hilbert, de *p*-adiek van Hensel, het Hasse-Prinzip, L-reeksen van Dirichlet, Hecke en Artin, Artin reciprociteit: wie zou zonder willen?

In wezen bespreekt dit boek deze klassieke theorie. Auteurs uit het stamland heten 'wiskundigen', bij die van elders wordt de nationaliteit toegevoegd. Jongere ontwikkelingen worden met mate meegenomen. Zo worden in de klassenlichamentheorie wel gebruikt ideles en formele groepen à la Lubin-Tate, maar geen cohomologie. Tate's toegang tot de L-reeksen via harmonische analyse wordt niet in stelling gebracht, maar de oorspronkelijke aanpak van Hecke wordt modern gepolijst.

In hoofdstuk 1 worden de algebraïsche getallenlichamen ingevoerd en fundamentele stellingen afgeleid. Lokale lichamen en hun discrete valuaties vormen het thema van hoofdstuk 2. Verschillende meetkundige aspecten worden naar voren gebracht om de analogie met functielichamen te verduidelijken.

In het derde hoofdstuk worden Arakelov divisoren van een getallenlichaam ingevoerd zonder ze zo te noemen. Meetkundige overwegingen gaan zo ver als Riemann-Roch en Chernkarakters. De uitgesproken bedoeling is om de lezer vertrouwd te maken met de meetkundige beschouwingwijze op reeds bekend terrein, zodat deze straks naadloos kan worden voortgezet in de arithmetische algebraïsche meetkunde, heden ten dage zo prominent. Mij lijkt dit een verhelderend exposé.

De volgende drie hoofdstukken ontwikkelen op gedegen wijze de theorie van klassenlichamen en hun verband met reciprociteitswetten. Wat de ultieme Artin reciprociteit betreft, verwijs ik graag naar het aardige artikel van H.W. Lenstra en P. Stevenhagen in het allereerste nummer van serie 5 van het tijdschrift waarin u nu leest.

In het laatste hoofdstuk worden de zeta functies en de L-reeksen behandeld met traditionele methoden, echter wel op eigentijdse manier. Een machtig landschap, waarin algebra, getaltheorie en analyse onontwarbaar verweven zijn. Hier en daar wordt vooruit gewezen naar naoorlogse resultaten die het bewezen in een ruimer kader plaatsen. Wat maakt dit boek zo aantrekkelijk? De Springer-uitvoering met evenwichtige bladspiegels? De vele voorbeelden? De ruime dosis opgaven, variërend van routine oefening tot resultaten die men uit de literatuur dient op te diepen? De meestal trefzekere uitleg? Dit alles, welzeker. Maar bovenal de geestdrift van de schrijver voor zijn vak, die in soms lyrische bewoordingen motivering aandraagt, verbanden schetst, vergezichten opent.

Dit boek is een toegewijde vertaling door N. Schappacher van het Duitse origineel, dat in 1992 bij Springer verscheen, en dat naar het schijnt indertijd niet in de Mededelingen is besproken. Een klein aantal correcties is aangebracht en het 'erhabene' Duits van Jürgen Neukirch, begin 1997 overleden, is afgevlakt. *J.R. Strooker*



J.J. Morales Ruiz
Differential galois theory and non-integrability of hamiltonian systems
(Progress in mathematics; 179)
 Basel: Birkhäuser, 1999
 184 p., prijs DM 116,-
 ISBN 3-7643-6078-X

It is well-known that the zeros of a polynomial $p(x)$ with rational coefficients need not be rational numbers. Usually these zeros lie in a field extension of $\mathbf{Q}$. The smallest field containing all zeros of $p(x)$ is called the splitting field of $p(x)$. Let us call it L . In beginning algebra courses one learns that to such a field L one associates the Galois group, a finite group which encodes the possible relations over $\mathbf{Q}$ that exist between the zeros of $p(x)$.

Similarly we can start with a linear differential equation $Ly = 0$ of order n with coefficients in a given field, usually $\mathbf{C}(z)$. We then consider the smallest extension of $\mathbf{C}(z)$ containing all solutions of $Ly = 0$ and their derivatives. This is called the Picard-Vessiot extension of the differential equation. It is usually an infinite extension, but the transcendence degree is finite. To such a Picard-Vessiot extension one associates the so-called differential Galois group, an algebraic subgroup of $GL(n, \mathbf{C})$. In many aspects there is a very strong parallel between Galois groups for polynomials and differential Galois group for differential equations. To a linear differential equation one can also associate a monodromy group. In many cases this monodromy group determines the differential Galois group, in many others it does not. There exist several techniques to compute differential Galois groups.

The present book studies the application of differential Galois theory to the question of complete integrability of Hamiltonian systems. A Hamiltonian system with Hamiltonian $H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ is said to be completely rationally integrable if there exist n constants of motion $f_i(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$, $i = 1, \dots, n$, which are rational functions and whose Poisson brackets all vanish. Extending earlier ideas of Poincaré, Lerman and Ziglin, the author of the book together with J.P. Ramis and C. Simo have shown together with that if a Hamiltonian system is completely integrable, then the differential Galois group of a normal variation equation has a connected component which is abelian. The normal variation equation is a symplectic reduction of the linearisation along a known trajectory of the Hamiltonian system. Thus it is possible to check non-complete integrability of Hamiltonian systems by computing differential Galois groups. And this is precisely what these authors have done.

In the present book a complete exposition is given of what is summarised above, together with many applications to well-known Hamiltonian systems such as Hénon-Heiles, Bianchi IX, Sitnikov's 3-body problem. Needless to say that this book is a must for anyone with an interest in this field. In addition, this

book has won the annual 'Ferran Sunyer i Balaguer' prize for expository writing. *F. Beukers*



C. Faber, G. van der Geer en F. Oort
 (eds.)
Moduli of abelian varieties
(Progress in mathematics; 195)
 Berlin: Birkhäuser, 2000
 518 p., prijs DM 196,-
 ISBN 3-7643-6517-X

De moduliruimten van abelse variëteiten verheugen zich al meer dan 150 jaar in een grote belangstelling. Deze belangstelling is nog gegroeid met de komst, in de jaren 1960, van de moderne algebraïsche meetkunde en met name het baanbrekende werk van David Mumford. Met het werk van Mazur en Katz met betrekking tot modulaire krommen en dat van Faltings en Chai betreffende moduli van abelse variëteiten van willekeurige dimensie, is de interesse voor de aritmetische aspecten van deze theorie steeds groter geworden.

In 1999 organiseerden de redacteurs van deze proceedings een succesvolle conferentie over dit onderwerp op het eiland Texel. Die conferentie heeft geleid tot dit boek. Niet elke voordracht van de conferentie is echter in het boek opgenomen en er zijn ook nog een aantal artikelen niet afkomstig van de conferentie. Het onderwerp en niveau van de conferentie zijn echter gerespecteerd, met indrukwekkend resultaat. Men kan daarom alleen maar hopen dat de inmiddels ontstane traditie van Texel-conferenties en bijbehorende proceedings in de toekomst zal worden voortgezet. *R. Noot*

H. Inassaridze
Non-abelian homological algebra and its applications
(Mathematics and its applications; 421)
 Dordrecht: Kluwer, 1997
 265 p., prijs NLG 240,-
 ISBN 0-7923-4719-8

In het begin van de jaren 70 was er veel activiteit in verband met de hogere K -functoren. Er was de K_0 van Grothendieck, de K_1 van Bass en de K_2 van Milnor. Naast elkaar vonden toen een paar ontwikkelingen plaats: de plus-constructie van Quillen, de Q -constructie van Quillen en een aanpak via afgeleide functoren. Deze laatste aanpak, van Swan, Gersten en mijzelf, is de basis van dit boek. De gedachte was de K -functoren te zien als afgeleiden van GL , de algemene lineaire groep. De theorie van afgeleiden die ik toen opzette was een rechtstreekse generalisatie van het gewone abelse geval waarin bijvoorbeeld functoren Tor-afgeleiden zijn van het tensorproduct. Simpliciale objecten nemen daarbij de rol over van complexen en homotopiegroepen die van homologiegroepen. Dit was vrij algemeen en niet alleen van toepassing op de K -theorie, maar ook op bijvoorbeeld homologie van groepen.

Een paar jaar later is dit alles nog eens overgedaan en verder uitgebreid door Inassaridze, maar dan alleen voor functoren met waarden in de categorie der groepen. Door die extra structuur

kunnen sommige dingen korter. De winst zit in het gebruik van pseudosimpliciale in plaats van simpliciale objecten, een winst die betrekkelijk is: de meetkundige betekenis is minder duidelijk en verder moeten wel heel veel begrippen van het voorvoegsel pseudo worden voorzien.

Hoe dit alles wordt toegepast in de algebraïsche K -theorie heeft de schrijver uitvoerig uit de doeken gedaan in zijn in 1995 eveneens bij Kluwer verschenen *Algebraic K-Theory*. Ook in dit boek is daar een hoofdstuk aan gewijd. Andere toepassingen betreffen de cohomologie van monoïden, de (co)homologie van ringen en de niet-abelse homologie van groepen, die trouwens ook voor de K -theorie van betekenis is.

Dit is een boek in de serie *Mathematics and its applications*. Het soort toepassingen waar hier van sprake is, is de toepassing van een zeer abstracte theorie op andere abstracte theorieën. De schrijver heeft er een overzichtelijk werk van gemaakt, waar geïnteresseerden de weg in kunnen vinden. Maar, hoeveel geïnteresseerden zijn er?

F.J. Keune

S.G. Krantz and H.R. Park

The geometry of domains in space

(Birkhäuser advanced Texts)

Boston: Birkhäuser, 1999

308 p., prijs DM 108,-

ISBN 3-7643-4097-5

Many of us cherish the experience of talking math over lunch to a bright young student who doesn't know much of the field yet. The student innocently comes up with, for example, his version of the isoperimetric inequality and you spend the rest of the lunch sketching proofs, telling the history and explaining the difficulties.

The book under review appears to be an attempt to capture such conversations in print. In my opinion the authors have succeeded in bringing together a number of interesting stories around domains in $\mathbf{R}^n$.

An introductory chapter deals with smooth functions and defining functions; it also recalls basic measure theory without proofs. Next a chapter with a differential geometric flavor, that culminates in surfaces with constant mean curvature. Chapter 3 and 7 are best characterized as an introduction to geometric measure theory. Chapter 3 works up to the area and co-area formulas. The area formula is an extension of the usual change of variables theorem from calculus in the sense that the map can be any Lipschitz map from $\mathbf{R}^n$ to $\mathbf{R}^{n+k}$. The co-area formula is an extension of Fubini's theorem, where the orthogonal projection from $\mathbf{R}^{n+k}$ to $\mathbf{R}^n$ may again be replaced by any Lipschitz map. Chapter 7 deals with Steiner symmetrization and its application to (for instance) the isoperimetric inequality.

Other chapters are 'Sobolev Spaces', 'Smooth Mappings', treating Stokes theorem as well as Whitney extension and Sard's theorem, 'Convexity', and finally 'Topics Related to Complex Analysis' about quasiconformal mappings and Weyl's theorem estimating the eigenvalues of the Dirichlet problem $-\Delta u = \lambda u$, $u|_{\partial\Omega}=0$ on a domain Ω in terms of the volume of Ω .

The authors surely have an interesting taste and an enthusiastic way of bringing their stories forward. I really enjoyed reading the book. Still, it takes more to write a good textbook as was one

of their aims. My major objection is that the required mathematical background and maturity oscillate too rapidly throughout the book. Also I think that the topics are too much dispersed to allow the book to be used as a main source for an advanced Dutch undergraduate course. However, education is changing; often students work on projects. Most chapters will serve excellently as a source for a project in analysis.

One final remark: the only error I found is the very first proof, which is quite wrong.

J. Wiegerinck



K.E. Atkinson

The numerical solution of integral equations of the second kind

(Monographs in applied and computational mathematics)

Cambridge: Cambridge University Press, 1997

568 p., prijs NLG 174,-

ISBN 0-521-58391-8

Het behoeft geen betoog dat in de mathematische fysica de bestudering van integraalvergelijkingen een voorname plaats inneemt. Als standaardvoorbeeld ter ondersteuning van deze bewering wordt vaak de Laplace vergelijking $\Delta u = 0$ aangehaald, waarbij de inhomogene randwaarden van Von Neumann, Dirichlet of gemengd type aanleiding geven tot een randwaarde integraalvergelijking met quasi-singuliere kern. Ook in dit boek heeft de schrijver er niet aan willen ontkomen met dergelijke klassieke voorbeelden zijn theorie te illustreren. Dit zou de suggestie kunnen wekken dat slechts in de potentiaaltheorie driftig gebruik wordt gemaakt van de algemene theorie van integraalvergelijkingen, meer in het bijzonder van Fredholmvergelijkingen van het eerste en tweede soort. Echter, het mathematisch-fysisch toepassingsgebied levert een scala aan problemen die door integraalvergelijkingen beschreven zijn. Het is jammer dat de schrijver zich dit niet heeft gerealiseerd.

Dit boek behandelt voornamelijk integraalvergelijkingen van de tweede soort waarbij de integraalkern ten hoogste zwak singulier is, maar ook wordt enige aandacht besteed aan integraalvergelijkingen van de eerste soort. In functionaalanalytische zin is dus voornamelijk sprake van een Fredholmvergelijking van de tweede soort. De eerste hoofdstukken van dit boek zijn gewijd aan de klassieke functionaal analytische concepten. Ze doen een beroep op de standaardwerken op dit terrein zoals van Mikhlin, Kantorovich en Akilov, en Krylov. Daarna wordt ingegaan op de diverse methoden waarmee integraalvergelijkingen numeriek kunnen worden opgelost. Deze methoden zijn in feite alle gebaseerd op een benadering van een compacte operator door een eindige rang operator. De integraalvergelijking wordt derhalve vervangen door een matrixvergelijking waarbij de (vierkante) matrix de integraalkern representeert, een vector van overeenkomstige lengte het bekende rechterlid en de oplossingsvector de gezochte oplossing van de integraalvergelijking beschrijft.

Er vanuit gaande dat het oplossen van een matrixvergelijking een numeriek opgelost probleem is, rest het probleem hoe nauwkeurig door de gekozen methode de compacte operator (integraalkern) wordt benaderd door de eindige rangoperator (matrix). De schrijver onderscheidt drie methoden: de collocatie-

methode, de Galerkinmethode en de Nyströmmethode. Zowel in de collocatiemethode als in de Galerkinmethode is er sprake van een residue functie r_n die geminimaliseerd moet worden. De gezochte oplossing wordt benaderd door een lineaire combinatie van n basisfuncties met te bepalen coëfficiënten. Deze coëfficiënten vormen de te bepalen oplossingsvector. In geval van een collocatiemethode wordt geëist dat de residuefunctie nul is in n te kiezen knooppunten en in geval van een Galerkinmethode dat de residuefunctie tot het orthoplement behoort van het opspannel van de basisfuncties. Een Galerkinmethode wordt dus altijd in een inproductruimte toegepast. Het moge duidelijk zijn dat voor beide methoden de keuze van de basisfuncties essentieel is, maar in geval van de collocatiemethode tevens de keuze van de knooppunten en in het geval van de Galerkinmethode tevens de keuze van het inproduct. Ze moeten immers leiden tot een numeriek goed geconditioneerd probleem waarbij bovendien sprake zal zijn van een accurate benadering van de integraalvergelijking. Voor de hand liggende keuzes voor de basisfuncties zijn lineaire en hogere orde splines. In een Nyströmmethode wordt de integraal geheel (bij reguliere kernen) of gedeeltelijk (bij zwak-singuliere kernen) vervangen door een som met behulp van een kwadraatregel. De knooppunten van de kwadraatregel induceren een matrixvergelijking met als onbekende de vector die ontstaat door de te bepalen functie te evalueren in de knooppunten. In de Nyströmmethode wordt dus expliciet uitgegaan van een benadering van een integraal door een kwadraatregel, terwijl in de andere twee methoden de berekening van de bijbehorende integralen niet expliciet in de methode wordt vervat. Voor de hand liggend combineren van bovengenoemde methodes leidt tot de productmethode, de discrete collocatiemethode en de discrete Galerkinmethode.

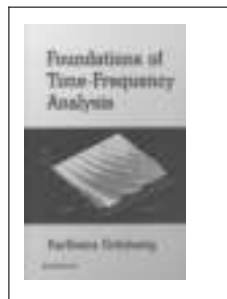
Nadat de numerieke methodieken zijn besproken worden in openvolgende hoofdstukken integraalvergelijkingen behandeld die onderscheiden zijn door het onderliggende compacte integratiedomein. Zo wordt natuurlijk eerst als integratiedomein een begrensde interval gekozen en daarmee integraalvergelijkingen voor functies van één reële variabele. Daarna komt het meerdere variabelen geval aan de orde, waarbij polygonale gebieden in het platte vlak als integratiedomein worden beschouwd. Triangulatie van deze gebieden met bijbehorende lineaire interpolatie worden nauwkeurig beschreven. Tenslotte wordt de stap gezet naar begrensde oppervlakken in de driedimensionale ruimte die een eindige vereniging zijn van gladde oppervlakken elk beschreven door een polygonale parameterruimte.

Het boek bestaat uit twee gedeeltes. In het eerste gedeelte, dat zes hoofdstukken beslaat, geeft Atkinson een inleiding tot het numeriek oplossen van integraalvergelijkingen voor functies van één en twee variabelen. Het tweede gedeelte is gewijd aan het numeriek oplossen van randwaarde integraalvergelijkingen die een herformulering zijn van de Laplace vergelijking voor een begrensde gebied in het platte vlak of de driedimensionale ruimte. Het tweede gedeelte beslaat drie hoofdstukken. Ieder hoofdstuk wordt besloten met een uitvoerige discussie van de meest recente literatuur, waardoor een zeer uitvoerige literatuurlijst is ontstaan die dit boek ook tot een uitstekend naslagwerk maakt.

De schrijver is er mijns inziens alleszins in geslaagd een manuscript te produceren dat door zijn aandacht voor leesbaarheid en zorgvuldige opbouw op een groot lezerspubliek mag rekenen. De boodschap die dit boek uitdraagt naast de vele tech-

nische aspecten waaraan ruim aandacht wordt gegeven luidt: kennis van functionaalanalyse is een noodzakelijke voorwaarde om op een wiskundig zindelijke manier numeriek om te gaan met integraalvergelijkingen. Ik onderschrijf deze boodschap van harte.

S.J.L. van Eijndhoven



K. Gröchenig

Foundations of time-frequency analysis

Applied and numerical harmonic analysis

Boston: Birkhäuser, 2001

359 p., prijs DM 148,-

ISBN 0-8176-4022-3

Wiskundige tijd-frequentie analyse houdt zich bezig met de analyse, beschrijving en representatie van functies en operatoren in termen van tijd-frequentie verschuivingsoperatoren (Weyl-Heisenberg-groep). Sinds het ontstaan van dit vakgebied, eind jaren zeventig, is het zwaartepunt van het onderzoek verschoven van signaalanalyse met behulp van tijd-frequentie verdelingsfuncties (zoals de Wigner distributie) naar het bestuderen van signaalrepresentaties door middel van reeksen met termen die over een rooster van tijd-frequentiepunten verschoven kopieën van een prototypesignaal bevatten (Gabor-representaties). De grote motor achter deze ontwikkeling was de toenemende behoefte uit de hoek van de digitale signaalbewerking aan een arsenaal aan efficiënte signaalrepresentatiemethodes. Min of meer in het kielzog van de op wavelets gebaseerde methodes, is in de jaren negentig de Gabor-analyse tot volle bloei gekomen. Er zijn nu naar schatting over de wereld enige honderden beoefenaren die (voor wat de wiskunde betreft) komen uit disciplines als Fourieranalyse, complexe en klassieke analyse, abstracte harmonische analyse, functionaalanalyse, numerieke wiskunde, lineaire algebra.

In dit boek wordt relatief veel aandacht besteed (ongeveer de helft van het aantal pagina's) aan de diverse aspecten van de moderne Gabor-analyse. Niettemin komen de wat klassieker thema's — zoals onzekerheidsprincipes, kwadratische tijd-frequentie verdelingsfuncties en pseudo-differentiaaloperatoren — ruimschoots aan bod; er is ook een kort hoofdstuk gewijd aan wavelets. Doordat het boek zo uitvoerig de moderne Gabor-theorie behandelt en op dit punt geheel up-to-date is, lijkt het mij een standaardreferentie te worden voor de beoefenaren van het vak. De auteur mikt bewust wat lager dan de doelgroep van Follands standaardwerk *Harmonic Analysis in Phase Space* dat verscheen voordat de nieuwe ontwikkelingen in Gabor-theorie plaatsvonden. Dit blijkt onder meer uit de gedetailleerde betoogtrant, waarin de 'it is easy to see'-frases zorgvuldig zijn gemedend. Voordeel hiervan is dat het boek ook te gebruiken is voor Tweede-Fasestudenten met een goede achtergrond in (Fourier)analyse en Hilbertruimtetheorie. Er zijn evenwel geen opgaves en hierdoor oogt het boek nogal technisch. Dit geldt met name voor de hoofdstukken waarin modulatuurruimtes behandeld worden (hierbij moet men in verband met de vele indices, accenten en sub- en superscripten over goede ogen beschikken).

Het vakgebied Gabor-analyse is nog volop in beweging. Terwijl de structuur van de Gabor-frameoperatoren, waaraan een

fraai hoofdstuk wordt gewijd, nu wel grotendeels begrepen is, zijn er nog heel wat fundamentele vragen die ook in dit boek onbeantwoord blijven. Dit geldt met name wat betreft het aangeven van niet-triviale klassen van prototype signalen, met bijbehorende roosterparameters, die aanleiding geven tot Gabor-frames. Een ander openstaand probleem — over het bestaan van algemene resultaten van het Wiener $1/f$ -type voor de inverses van Gabor frame operatoren — is door de auteur zelf (met M. Leinert) ongeveer ten tijde van het verschijnen van het boek opgelost. Hierbij worden methodes uit de abstracte harmonische analyse gebruikt die wellicht een nieuwe wending geven aan het onderzoek aan Gabor systemen. Voor deze en andere nieuwe ontwikkelingen in het vakgebied is dit boek een ideaal uitgangspunt.

Een minpuntje: het belangrijke artikel van N.G. de Bruijn uit 1973 in Nieuw Archief voor Wiskunde (over Wigner-distributies en Weyl-correspondentie) dat voor een aantal werkers een grote inspiratiebron is geweest, wordt niet vermeld. A.J.E.M. Janssen

die het experimenteel gebied zo uniform mogelijk bedekken.

Het boek is bedoeld voor lezers die reeds vertrouwd zijn met de basisprincipes van het optimaal ontwerp. Het geeft de lezer een goed idee van het brede toepassingsgebied van het optimaal ontwerp, en het biedt een overzicht van een aantal ontwerpproblemen die op de drempel van het nieuwe millennium onderzocht worden. Omwille van de theoretische aard van het merendeel van de artikelen is het boek niet geschikt als handleiding voor de praktijk, maar eerder voor academici en theoretische statistici. Bovendien zullen, gezien de diversiteit van de behandelde onderwerpen, voor de meeste lezers hoogstens enkele artikelen relevant zijn.

P. Goos



A. Atkinson, B. Bogacka en A. Zhigljavsky
Optimum design 2000
(Nonconvex optimization and its applications)
 Dordrecht: Kluwer, 1998
 306 p., prijs NLG 352,-
 ISBN 0-7923-6798-7

Dit boek is opgedragen aan Valeri Fedorov, die met zijn werk *Theory of optimal experiments* een grote impact heeft gehad op het optimaal ontwerp van experimenten. Het boek bevat 25 artikelen, die op de conferentie *Optimum Design 2000: Prospects for the New Millennium* te Cardiff gepresenteerd werden.

De artikelen in het eerste deel van het boek handelen over theoretische aspecten van het optimaal ontwerp van experimenten. Onderwerpen die in dit deel aan bod komen zijn het optimaal ontwerp van experimenten voor Bayesiaanse predictie, voor het evalueren van een extreem punt, het schatten van polynomiale modellen en voor gepaarde vergelijkingen, optimale sequentiële testen, en het optimaal ontwerp onder beperkingen. Daarnaast wordt ook aandacht besteed aan experimenten met systematische fouten, Gröbnerbasis methoden, het ontwerp van fractionele factoriële ontwerpen, de toepassing van een optimalisatienadering in de maattheorie op het optimaal ontwerp van experimenten, de efficiëntie van gebalanceerde ontwerpen die met behulp van restricted maximum likelihood geanalyseerd worden en het verband tussen betrouwbaarheidsellipsoïden en Elfving sets.

Het tweede deel van het boek bevat een brede waaier van toepassingen van het optimaal ontwerp. Vooral worden enkele ontwerpproblemen uit de medische en farmaceutische sfeer behandeld. Daarnaast bevat het tweede deel artikelen over de planning van bio-assays met behulp van bootstrapping, het ontwerp van geblokte experimenten voor de vergelijking van twee behandelingen met een controlebehandeling, optimale sampling ontwerpen, het optimaal ontwerp voor het schatten van binaire regressiemodellen, het optimaal ontwerp van experimenten met mengsels, het kostenefficiënt en trend-robust ontwerp, het optimaal ontwerp bij flexibele modellen en het ontwerpen van experimenten



J.L. Davis
Mathematics of wave propagation
 Princeton: Princeton University Press, 2000
 395 p., prijs £31,-
 ISBN 0-691-02643-2

In dit boek wordt een wiskundige beschrijving van een groot aantal golfverschijnselen gegeven. Deze betreffen golven in een stromende vloeistof (zonder en met viscositeit), golven in elastische, visco-elastische en thermo-elastische media en tenslotte oppervlaktegolven. De basisvergelijkingen zoals die van Navier-Stokes, van Navier en de generalisaties voor visco- en thermo-elastische media worden uit de bekende behoudswetten afgeleid. Dit belangrijke deel van de tekst wordt voorafgegaan door een eenvoudige inleiding in de fysica van eendimensionale golfvoortplanting, een hoofdstuk over karakteristiekentheorie en ten slotte door een derde hoofdstuk met een aantal oplossingsmethoden voor begin- en randwaardeproblemen voor de golfvergelijking in een, twee en drie dimensies. Het boek besluit met een aardig hoofdstuk over het gebruik van variationele methoden in de mechanica, de bewegingsvergelijkingen van Hamilton, en de Hamilton-Jacobi theorie met toepassing op golfvoortplanting.

Elk hoofdstuk wordt met een aantal vraagstukken afgesloten. Golven in elektromagnetische media worden hier niet behandeld omdat de auteur over dit onderwerp reeds een boek gepubliceerd heeft; *Wave Propagation in Electromagnetic Media*, Springer, 1990. Deze tekst is een inleidend leerboek voor gevorderde studenten in de ingenieurswetenschappen en is tevens te gebruiken door toegepast wiskundigen die fysische achtergrondinformatie nodig hebben. Een verdienste van dit boek is ongetwijfeld het brede scala van golfverschijnselen. Het is echter spijtig dat wegens onnodige slordigheid veel triviale fouten voorkomen in allerlei formules en dat de notatie hier en daar verwarrend is. Ook een aantal wiskundige fouten, die niet een gevolg van slordigheid zijn, ontsieren de tekst.

E.M. de Jager



D. Butnariu and A.N. Iusem
**Totally convex functions for
 fixed points computation and
 infinite dimensional
 optimization**

Dordrecht: Kluwer, 2000
 202 p., prijs NLG 172,-
 ISBN 0-7923-6287-X

This book has a promising title for economists. It links the three most important mathematical concepts for them: convexity, fixed points and infinite dimensional optimization. Convexity is the default assumption in economics both because it is realistic in a great number of cases and because it makes optimization a lot easier. Fixed point arguments are used to prove the existence of equilibria (like Nash equilibria in game theory). Finally, infinite dimensional optimization is used in models of saving and consumer spending over time and mechanism design problems (like deriving the optimal income tax schedule or designing optimal auctions — a theory unknown to the Dutch government).

Although the title is attractive to economists, the reader should bear in mind that an economist may not be in the set of the book's intended audience, described as "researchers in nonlinear analysis and applied mathematicians dealing with numerical solution of integral equations, equilibrium problems, image reconstruction, optimal control, etcetera". The aim of the book is "to present in a unified approach a series of results concerning totally convex functions on Banach spaces and their applications to building iterative algorithms for computing common fixed points of measurable families of operators and optimization methods in infinite dimensional settings".

Chapter 1 introduces a number of concepts that are used later on in the book. An important one is the Bregman distance. The idea is, to choose a convex function f which maps a real Banach space into the real line. A way to measure the distance between two points x and y is to consider the extent to which $f(y)$ differs from the linear approximation of $f(y)$ starting at x . This distance is denoted $Df(x, y)$. It is straightforward to see that for this approach to work, the function f should satisfy additional properties such as total convexity. Roughly speaking, f is totally convex at a point x if the distance between $f(y)$ and the linear approximation of $f(y)$ starting at x is positive for all $y > x$. The function f is totally convex if this holds for all x in the interior of the domain of f . A number of properties (most of these are used later on in the book) are derived for this way of measuring distance using totally convex functions f .

Chapter 2 is devoted to the computation of fixed points. An important concept here is a sequentially consistent Bregman function f , which, among other things, is totally convex and differentiable. The advantage of these type of functions is that a well chosen Bregman function can reduce the requirements needed for convergence as compared to using a norm as distance measure. The first result in this chapter is that if two sequences converge with respect to $Df(x, y)$ (where f is a sequentially consistent Bregman function) then the sequences also converge with respect to the norm. Let T_w ($w \in W$) denote a measurable family of operators. The authors derive conditions under which the sequences $x_{k+1} = T_w(x_k)$ converge to an almost common fixed point x^* , in

the sense that $T_w(x^*) = x^*$ for almost all w . The chapter concludes with some applications where these results are used including the problem of finding Nash equilibria in zero sum n player games.

Chapter 3 on infinite dimensional optimization starts off with the proximal point method which is used to find the minimum of a function g . This method is extended to find the solution to the problem $\min g(x)$ subject to $x \in C$ where C is a nonempty, convex and closed subset of the reflexive separable Banach space B (not necessarily Hilbertian as required by earlier results). A proximal point method to solve this problem is now constructed. This proximal point method is then applied to augmented Lagrangian methods in infinite dimensional spaces.

All in all, the book is written in a clear style and each of the results is presented in a transparent way. My main problem with the book is that the authors do not invest much effort in motivating results. More than once I got the sense that 'this result may well be true, but why do I need to know it?'. The authors have a tendency to motivate results by saying that they are generalizations of previous results, but — at least to me — that does not make a result interesting. Further, some of the results in chapter 1 are derived for their own interest, not because they are needed later on. The organization of the results would improve if this were labelled more clearly. It would allow readers with a particular interest to skip parts. Finally, some of the examples given in the book did not really appeal to me. To illustrate, the results on Nash equilibria in zero sum games are not that interesting as most economists would say that zero sum games are largely irrelevant in the real world. But clearly, what may be interesting for mathematicians may not be very exciting for economists (and the other way around). It is an interesting book, but as an economist I would probably expect more entertainment for its price. J. Boone

M.L. Wilkins

Computer simulation of dynamic phenomena

Berlijn: Springer-Verlag, 1999
 246 p., prijs DM 138,-
 ISBN 3-540-63070-8

In dit boek beschrijft Wilkins eindige differentieschema's in een, twee en drie dimensies voor het oplossen van de drie basisvergelijkingen van de mechanica (behoud van massa, impuls en energie). Modellen die het materiaal beschrijven completeren de basisvergelijkingen voor toepassingen in de compressibele stromingsleer en materiaalalkunde. Door het gebruik van Lagrange-coördinaten kan de locatie van de massa-deeltjes gevolgd worden wanneer door plasticiteit en externe krachten de materiaaleigenschappen veranderen. De modellering van breuk wordt beschreven. De detonatie van explosieven wordt behandeld met behulp van de Chapman-Jouget theorie en experimenteel bepaalde toestandsvergelijkingen. Er wordt een bibliotheek van toestandsvergelijkingen voor materialen en explosieven gepresenteerd, tezamen met theoretische modellen en experimentele data, evenals verscheidene numerieke resultaten.

Hoewel de titel een breed exposé doet vermoeden, behandelt dit boek het werk dat de auteur van 1952 tot 1985 verricht heeft aan de Lawrence Livermore National Laboratory. De auteur verwacht dat de lezer een gedegen voorkennis van onderwerpen als elasticiteit en plasticiteit heeft: de nadruk ligt voornamelijk op

de numerieke algoritmen (eindige differenties, tijdsafhankelijke grids). Het boek is geschreven in een telegramstijl, met weinig uitweidingen of discussie over eventuele alternatieve aanpakken. Kortom, een boek voor experts op het gebied van materiaaldeformatie, maar zeker geen boek om eens te proberen van numerieke technieken binnen de materiaalkunde.

I. Wenneker



N. Higson and J. Roe

Analytic K-homology

(Oxford mathematical monographs)

Oxford: Oxford University Press, 2000

424 p., prijs £65

ISBN 0-19-851176-0

Het onderwerp van dit boek ligt op het raakvlak van de functionaalanalyse (in het bijzonder de theorie van lineaire operatoren op Hilbert-ruimten) en de algebraïsche topologie. Tevens past het geheel in de filosofie van de niet-commutatieve meetkunde. De constructie van analytische K -homologie komt voort uit twee ogenschijnlijk ongerelateerde problemen.

Het eerste lijkt een puur operator-theoretische vraag, gesteld aan het eind van de jaren zestig door Brown, Douglas, en Fillmore: beschrijf de equivalentieklassen van begrensde essentieel normale operatoren op een Hilbertruimte. Een operator T heet normaal als $T^*T = TT^*$, en essentieel normaal als deze gelijkheid geldt modulo een compacte operator. Twee zulke operatoren heten equivalent als ze samenhangen door een unitaire transformatie, opnieuw modulo een compacte operator. Als we ook nog aannemen dat $T = T^*$, dan heeft dit probleem een eenvoudige oplossing, gegeven door een klassieke stelling van Weyl en Von Neumann: twee zelfgeadjungeerde operatoren zijn equivalent in bovengenoemde zin dan en slechts dan als ze hetzelfde essentiële spectrum hebben.

Maar de algemene vraag blijkt zeer veel moeilijker te zijn: het antwoord dat bovengenoemd trio in 1973 gaf was dat twee essentieel normale operatoren T_1 en T_2 equivalent zijn dan en slechts dan als ze hetzelfde essentiële spectrum X hebben, en voor alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus X$ de (Fredholm) index van $T_1 - \lambda I$ gelijk is aan die van $T_2 - \lambda I$. Om dit te bewijzen waren niet alleen diepe resultaten uit de theorie van C^* -algebra's nodig, maar werden ook, voor het eerst, technieken uit de algebraïsche topologie in dit gebied toegepast. Zo zag men in dat de ruimte $\text{Ext}(X)$ van equivalentieklassen van essentieel normale operatoren met essentieel spectrum X een abelse groep is, die gepaard kan worden met de groep $K^1(X)$ uit de topologische K -theorie van Atiyah en Hirzebruch. Aldus biedt $\text{Ext}(X)$ een concrete realisatie van $K_1(X)$, de oneven K -homologie groep van X (in de zin dat K -theorie als gegeneraliseerde cohomologietheorie een duale homologietheorie heeft). Tevens is $\text{Ext}(X)$ de structuur die uitbreidingen van de compacte operatoren met $C(X)$ beschrijft. Voor willekeurige compacte Hausdorffruimten X kan men dit laatste ook als uitgangspunt nemen.

Het tweede probleem dat tot analytische K -homologie heeft geleid is het beter begrijpen en generaliseren van de index-stelling van Atiyah en Singer uit 1968. Ook hier speelt topologische K -theorie een belangrijke rol, en het beslissende inzicht dat later tot

de analytische realisatie van de K -homologie groep $K_0(X)$ (dual aan de K -theorie groep $K^0(X)$) in termen van gegeneraliseerde elliptische operatoren op vectorbundels over X leidde was dan ook afkomstig van Atiyah zelf. De technische realisatie van Atiyah's idee werd met name gegeven door Kasparov. Opmerkelijk genoeg kunnen zowel topologische K -theorie als analytische K -homologie voor willekeurige C^* -algebras A gedefinieerd worden; het commutatieve geval $A = C(X)$ reproduceert dan de oorspronkelijke theorie. De klap op de vuurpijl is de KK -theorie van Kasparov, die topologische K -theorie en analytische K -homologie combineert in een bivariate functor. De duale paring tussen K -theorie en K -homologie is dan een speciaal geval van het intersectieproduct in KK -theorie, dat in het commutatieve geval alle mogelijke operaties uit de algebraïsche topologie als speciaal geval bevat.

Het onderhavige boek geeft in zekere zin een inleiding tot al deze zaken, waarin de auteurs ophouden waar KK -theorie begint. Een flinke voorkennis op het gebied van C^* -algebra's en enige kennis van de algebraïsche topologie is evenwel vereist, en verder moet de lezer regelmatig diep nadenken wat wordt bedoeld (zo kosten resultaten die volgens de auteurs onmiddellijk zouden moeten volgen de recensent vaak een hele treinreis Nijmegen-Amsterdam). Ook is het nauwelijks mogelijk dit boek op waarde te schatten als men niet al eens een andere, elementaire aanpak van index-theorie heeft gezien. Aldus begint het boek niet bij het begin, maar het eindigt ook niet aan het front, want zoals gezegd wordt KK -theorie niet behandeld (laat staan de opvolger daarvan, de nog krachtigere E -theorie van Connes en Higson). Met al deze proviso's kunnen we toch spreken van een prachtig boek van twee jonge auteurs die in het opkomende gebied van de 'geometrische functionaalanalyse' een vooraanstaande rol spelen.

K. Landsman



H. Frenk, K. Roos et al. (eds.)

High performance optimization

(Applied optimization; 33)

Dordrecht: Kluwer, 2000

473 p., prijs NLG 395,-

ISBN 0-7923-6013-3

The book contains papers on fundamentals and recent results in linear, quadratic and semi-definite optimization. The field evolved rather slowly before the seminal work by Karmarkar, which started a breakthrough in 1984. A rich scientific literature is available nowadays. The considered collection of papers distinguishes itself from other books by its focus on problem structures, and implementations of the considered methods using high performance computers.

The first part, making nearly half of the book, is written by J. Sturm. Its subject is theory and algorithms of semi-definite programming. An introduction into the theory (mathematical backgrounds, duality, polynomiality) is presented as well as an analysis of the most popular interior point methods for semi-definite problems: path following, self-dual embedding, primal-dual central path, and central region. The rates of local and global con-

vergence are estimated, implementation problems are discussed, and solution examples are presented. The second part *Linear, quadratic, semi-definite programming and beyond* contains the papers on correctness, implementation, complexity, and efficiency of different interior point algorithms. Problems of linear complementarity, the parallel branch and bound approach to nonlinear mixed-integer programming using non-linear relaxation, and minimization of multivariate polynomials are treated in a unified way. The application efficiency of interior point algorithms is discussed and demonstrated in the multi-stage portfolio modelling, in problems of linear ordering, and in the finite element solution of parabolic inverse problems. The strength of interior point algorithms is their ability to solve large classes of essentially nonlinear problems with an efficiency similar to solution methods for linear problems. The book concludes with a paper by R. Freund and S. Mizuno on synopsis of major developments in the last thirteen years, current state of the art, and future directions of research in interior point methods.

The book will be interesting to researchers in optimization as well as to experts in applied fields intending to solve large-scale real world problems. Because of its novel presentation of some topics of semi-definite programming the book may also be useful as a textbook.

A. Zilinskas

ples from mathematical economics and static equilibrium problems from mechanics. The inherent relation between these virtually distant applications is shown as well.

The book is well written. Mathematically educated readers should be able to follow the argumentations without much difficulty. However, some more explanations and discussions would facilitate the readability.

Abramov's book is a useful reference book for researchers in optimal control, theoretical optimization and mathematical economics. Advanced graduate students in applied mathematics are among the target audience as well.

T. Terlaky



D.E. Evans and Y. Kawahigashi
Quantum symmetries on operator algebras

(Oxford mathematical monographs)

Oxford: Clarendon Press, 1998

829 p., prijs £105

ISBN 0-19-851175-2

De scheidslijn tussen wiskunde en theoretische natuurkunde is niet altijd even gemakkelijk te trekken. Een mooi voorbeeld hiervan is de ontwikkeling van de quantummechanica. Door experimenteel natuurkundigen werden fenomenen waargenomen, die zich niet lieten verklaren vanuit de klassieke mechanica. Met het begrip foton werd een denkbeeldig deeltje geïntroduceerd, dat als verklaring moest dienen voor de waargenomen effecten. Daarmee werd de aanzet gegeven tot een verdere verwiskundiging van de fysica. Niet langer maakten natuurkundigen louter gebruik van de klassieke wiskundige hulpmiddelen uit de theorie van differentiaal- en integraalvergelijkingen. Nieuwe wiskunde moest worden gegenereerd. Dirac's *The Principles of Quantum Mechanics* is even revolutionair voor de natuurkunde als voor de wiskunde. Immers door dit boek initieerde Dirac de theorie der Hilbertruimten, maat- en integratietheorie en de theorie der gegeneraliseerde functies. Dat Dirac als wetenschapper zich zowel een natuurkundige als een wiskundige betoonde is natuurlijk kenmerkend voor de echte groten als Pascal, Newton, Gauss, Euler, Lagrange, Jacobi, Hamilton en Riemann. Het moge duidelijk zijn dat ik vind dat Dirac in dit rijtje thuis hoort, maar daar gaat het me hier natuurlijk niet om. Ik wil slechts benadrukken dat de natuurkunde reeds eeuwenlang de motor is van veel wiskundig innovatief onderzoek. Zo is de natuurkundige inspiratiebron die geleid heeft tot de wiskunde die in dit boek beschreven staat, de statistische mechanica en (quantum)veldentheorie.

In het voorwoord van dit boek staat dat de doelgroep onderzoekers bestaat uit op het gebied van operatorenalgebra's, statistische mechanica en algebraïsche, topologische en conforme veldentheorie. Het boek is gebaseerd op lezingen en cursussen die de auteurs verzorgden aan de universiteiten van Kyoto en Tokyo en van Warwick en Swansea in de periode van 1985 tot 1995. De titel van het boek, met name de kreet "quantum symmetry" suggereert een relatie met de (quantum)fysica. Die is er natuurlijk ook. Maar een buitenstaander zoals ik schrikt toch even als hij, dit boek bestuderend, moet vaststellen welke wiskundige diepzinnigheden vereist zijn om de taal van de moderne fysica te doorgronden.



A.P. Abramov

Connectedness and necessary conditions for an extremum

Dordrecht: Kluwer, 1998

199 p., prijs NLG 175,-

ISBN 0-7923-4910-5

This book is a thoroughly revised English version of the author's original Russian book (1996) with the same title.

The first chapter introduces the classical Dybrovitskii-Milyutin results in linear topological spaces. This chapter is closed by presenting Lusternik's theorem. Chapter 2 studies alternative conditions for extrema in nonlinear programming where the functions might be non-smooth. An economic interpretation of the results is presented as well. The third chapter considers extrema in optimal control problems. Finally, the case of measured spaces, especially in Frechet space, is considered. The main tool here is the use of informational functionals.

The book is more a monograph than a text book. It gives a quite extensive discussion of the necessary conditions for an extremum from the point of view of new topological connectivity. The author's starting point is the classical Dybrovitskii-Milyutin approach and functional analysis tools are combined with topological methods. One of the key results is the so-called alternative condition of an extremum for a variety of problems.

The monograph links the abstract theory of necessary conditions to the widely used Karush-Kuhn-Tucker conditions and gives a candid insight into the question why inequality constraints induce sign restricted Lagrange multipliers while equality constraints imply unrestricted (free) Lagrange multipliers.

The alternative conditions are illustrated by using some exam-

Deze taal en bijbehorende imaginaties lijken zuiver wiskundig; er is niet langer sprake van een fysisch intuïtieve grondslag. Wiskunde en natuurkunde blijken volledig te worden verweven.

Voor mij ligt een fraai boekwerk dat een wiskundige ontwikkeling weerspiegelt die startte met Von Neumann en Murray als eersten introduceerden zij de theorie van operatoralgebra's als een wiskundig kader voor de quantummechanica-, Bratteli en Robinson, die in hun boeken de niet-commutatieve operatoralgebra's gebruikten in de beschrijving van quantumstatistische mechanica, Onsager en Kauffman, die toonden dat niet-commutatieve operator-algebra-theorie ook een kader vormt voor de klassieke statische mechanica en Doplicher, Haag en Roberts, die operator-algebraïsche concepten gebruikten in de beschrijving van de quantumvelden theorie. Een factor is een Von Neumann-algebra waarvan het centrum triviaal is. Een subfactor is een von Neumann-deelalgebra van een factor, die zelf een factor is. Een inclusie van een subfactor in een factor heeft een rijke combinatorische structuur, die beschreven kan worden door een quantizatie van een symmetriegroep, een quantumsymmetrie. Jones initieerde de theorie van subfactoren. Hij vond dat de minimale algebraïsche structuur die deze quantumsymmetrie realiseerde de Temperley-Lieb-algebra is. Dit boek, één van de eerste op dit gebied, beschouwt deze combinatorisch-algebraïsche ontwikkelingen vanuit het perspectief van de operatoralgebra's.

Ik ben onder de indruk van het brede scala aan onderwerpen dat aan de orde komt. En ook van de heldere en directe manier waarop ze worden geïntroduceerd en verder uitgewerkt. Het boek vereist een minimum aan voorkennis, maar gaat wel uit van wiskundige rijpheid van de lezer. Het legt relaties met verscheidene gebieden van zuivere wiskunde en mathematische fysica, in het bijzonder de (quantum) veldentheorie en statistische mechanica. Het boek bevat een zeer uitgebreide literatuurlijst, die als compleet mag worden beschouwd.

De eerste vijf hoofdstukken vormen een gedetailleerde inleiding tot het mathematisch begrippenapparaat: operator-theorie, C^* -algebra's, K-theorie, positiviteit, één-parameter semigroepen en Von Neumann-algebra's. De daarop volgende hoofdstukken hebben een specialistischer karakter met thema's de Fermionalgebra (quantumveldentheorie), het Isingmodel (statistische mechanica), conforme veldentheorie (van tralie naar continuum) en subfactortheorie.

Het boek lijkt bij uitstek geschikt als studiemateriaal voor jonge onderzoekers, die zich op dit gebied willen kwalificeren. Voor senioren op dit gebied is het een waardevol naslagwerk en bron van nieuwe ideeën.

S.L.J. van Eijndhoven

Wiskundeleraren. Deze Zebra-reeks is geschikt voor het gebruik in het huidige VWO wiskundeprogramma. Dit boekje is daarnaast ook interessant voor alle anderen die belangstelling hebben voor de wiskunde van de gulden snede en haar toepassingen.

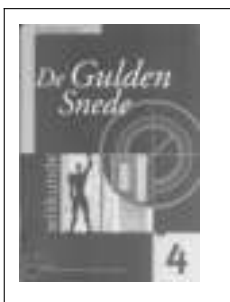
In het eerste gedeelte wordt ingegaan op de theoretische aspecten van de gulden snede, de meetkunde en de algebra van een goddelijke proportie en haar toepassingen in de kunst. Na een algemene inleiding op de gulden snede komen onder andere aan de orde het verhoudingsgetal $f = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, een aantal constructies van de gulden snede, inclusief een bewijs dat deze constructies kloppen, Lucas-rijen, het verband tussen de rij van Fibonacci en de gulden snede en een constructie van het pentagram.

Door de tekst heen zijn enkele opdrachten opgenomen die bedoeld zijn om de besproken theorie te verdiepen. Bij de opdrachten worden aanwijzingen gegeven die voor de oplossing gebruikt kunnen worden. Aan het einde van het boekje zijn ook de antwoorden van de meeste, maar niet van alle, vragen opgenomen.

Het eerste gedeelte van het boekje is goed door te werken voor leerlingen in de Tweede Fase met een Natuurprofiel. De geschiedenis over de gulden snede en de vele verschillende toepassingen spreken leerlingen aan. De indeling van de tekst en de opgaven had wel wat overzichtelijker gekund en de notaties van met name breuken geven helaas onnodig onduidelijkheid.

De tweede helft van het boekje bevat zeven eindopdrachten uit heel verschillende gebieden, waarin de toepassingen van de gulden snede worden besproken. Nader onderzoek kan worden gedaan op het gebied van bouwkunst, schilderkunst, biologie, scheikunde en pure wiskunde. Elke opdracht begint met een probleemstelling met daarop volgend een verkenning van het probleem. De tekst geeft veel interessante informatie, al is de eindopdracht niet altijd even duidelijk geformuleerd. Het is de bedoeling dat de leerling één opdracht kiest om aan de hand van de gegeven informatie verder uit te werken. Dit moet leiden tot een werkstukje waarin de gekozen eindopdracht wordt verwerkt tot een lopend verhaal of artikel. De meeste opdrachten zijn zo rijk dat ze ook geschikt zijn voor groepjes van twee of drie leerlingen.

I. Gulikers



W. Kleijne en T. Konings
De gulden snede
(Zebra-reeks; deel 4)
Utrecht: Epsilon, 2000
50 p., prijs NLG 16,75
ISBN 90-5041-058-8

Dit boekje is de vierde uitgave in de Zebra-reeks van Epsilon Uitgaven in samenwerking met de Nederlandse Vereniging voor



H. Walser
The golden section

Washington: Math. Assoc. of America
142 p., prijs \$26.95
ISBN 0-88385-534-8

De kaft met Da Vinci's Mona Lisa, gevangen in een gulden rechthoek, en de achterkaft met de uitspraak "de Gulden Snede heeft sinds de oudheid een belangrijke rol gespeeld in veel delen van de meetkunde, architectuur, muziek en filosofie", suggereren een inhoud als in de klassieker *The Divine Proportion* (Huntley, Dover 1970). Ook lijkt dat de inhoud van *De ontstelling van Pythagoras, over de geschiedenis van de goddelijke verhouding* (A. van der Schoot, Kok Agora, 1998), waarin bovenstaande uitspraak overtuigend wordt weerlegd, niet doorgedrongen te zijn tot de kaft-maker.

De inhoud van dit boekje betreft echter het voorkomen van de

gulden snede alleen in wiskundige context, en het bevat ten opzichte van het boekje van Huntley vele nieuwe onderwerpen. De hoofdonderwerpen zijn: fractals, meetkundige figuren, vouwen met stroken papier en origami, getalreeksen, en veelvlakken. Bij elk onderwerp wordt een eindeloos spel van variatie en generalisatie gespeeld. Het deed me daarbij denken aan het soort spel van *Het wondere onderzoekingsveld der vlakke meetkunde* (Ir. A.E. Bosman, Parcival, 1957). De gulden snede is voor Walser veelal een eerste voorbeeld, een startpunt in een reeks van generalisaties naar een algemeen principe. Elk onderwerp wordt compact beschreven, er blijft voldoende te denken over. Door middel van vragen wordt de lezer aangespoord zelf actief te worden, en antwoorden achterin het boekje geven voldoende steun, maar laten flinke stukken van de oplossingsweg aan de lezer over. De auteur is thuis in de 'gulden snede'-literatuur van de laatste 40 jaar, en geeft voor verdere achtergrondinformatie gerichte verwijzingen.

Het boekje lijkt mij uitdagend voor liefhebbers van 'wiskunde-recreatie', voor keuzecursussen of individuele studie-activiteiten in HBO en Universiteit, en de geïnteresseerde en betere leerling in vwo-B. Het graaft aanzienlijk dieper dan boekjes, die recent zijn verschenen ten behoeve van de keuzeonderwerpen voor vwo (*De Gulden Snede*, W. Kleijne en T. Konings, Epsilon, 2000, en *Op een goudschaal*, J. Kuiper, Wolters-Noordhoff, 2000). Het is daarom aan te bevelen als achtergrond voor docenten die deze boekjes gebruiken. Een aanwinst in de literatuur over dit onuitputtelijke en veelzijdige onderwerp.

T. Konings



E.W.A. de Moor

Van vormleer naar realistische meetkunde

(CD-β Wetenschappelijke bibliotheek; 33)

Utrecht: Freudenthal Instituut, 1999

694 p., prijs NLG 70,-

ISBN 90-73346-40-1

Een bespreking van dit veelomvattende en rijke proefschrift van bijna 700 pagina's vraagt om een rigoureuze beperking bij voorbaat. Een samenvatting van de inhoud van de vijf delen zou de maximumlengte van een recensie doen overschrijden, terwijl alleen al een opsomming van de diverse delen, hoofdstukken en paragrafen buitengewoon de moeite waard zou zijn vanwege de encyclopedische waarde van het proefschrift.

Voorbij de beperking dan toch een poging: in Deel A staat de geschiedenis van de vormleer in de negentiende eeuw centraal. Vormleer werd als schoolvak onderwezen aan kinderen op de lagere school. Over inhoud en doel van dit vak bestonden nogal uiteenlopende opvattingen. In 'de leer der vormen' zit een meetkundig aspect; dit bleek slechts één van de elementen van dit vak waarmee men beoogde het leren zien, denken en spreken te stimuleren. Deel B behandelt de ontwikkeling van het meetkundeonderwijs in de twintigste eeuw tot aan 1970. De historische beschrijving van de ontwikkelingen in het meetkundeonderwijs wordt vooral zo interessant door de vele discussies die zich rond dit vak afspeelden. De schrijver is er in geslaagd de talloze feiten en wetenswaardigheden uit deze periode van twee eeuwen boeiend en overzichtelijk te beschrijven. Er is een schat aan infor-

matie te vinden, gebaseerd op primaire en secundaire bronnen; de tekst is verrijkt met citaten uit oefen- en leerboekjes, onderwijsrapporten, tijdschriften en wetteksten waardoor een levendig beeld ontstaat van de jaren van de vormleer en het meetkundeonderwijs van Pestalozzi via onder anderen Fröbel en Versluys tot Freudenthal.

Het derde deel van het boek waarin het ontstaan van de realistische meetkunde beschreven wordt heeft een enigszins ander karakter. De Moor baseert Deel C op literatuur- en archiefonderzoek, op informatie uit enquêtes gehouden onder oud-medewerkers van het Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde-Onderwijs (IOWO) en, niet onbelangrijk, op zijn persoonlijke ervaringen als medewerker van Wiskobas en het IOWO. Dit laatste frappeert en wekt de nieuwsgierigheid; bovendien roept het vragen op over de relatie tussen het doen van onderzoek en de daarvoor benodigde objectiviteit en betrokkenheid. Op pagina 387 schrijft de Moor: "[...] kan achteraf gesteld worden dat dit geheel van uitgangspunten een voor die tijd verstandig vertrekpunt is geweest en een gunstige uitwerking heeft gehad op het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs." Een opvallend waardeoordeel dat het boek een bijzondere flair geeft. Naar mijn mening is het in een proefschrift echter niet op zijn plaats.

In dit derde deel schetst de Moor een beeld van de Nederlandse onderwijssituatie waarin de New Math beweging in de jaren zestig minder voet aan de grond kreeg dan in andere Europese landen. Wel verdrong het formalistische structuralisme voor enige tijd de Euclidische meetkunde uit het lager en voortgezet onderwijs. In de zeventiger jaren bleek het denken over meetkundeonderwijs op de basisschool weer op gang te komen. Het IOWO deed ontwikkelingswerk naar meetkundeonderwijs en ontwikkelde onder andere het project Waterland. In dit project kwam de toen opgekomen transformatiemetkunde niet voor, maar werd meetkunde opgevat als het leren begrijpen van ruimtelijke verschijnselen; de directe dagelijkse ervaringen van de kinderen werden als uitgangspunt voor het realistische meetkundeonderwijs gekozen, niet het meetkundige systeem. Over dit Waterland-project voeg ik mijn persoonlijke ervaring toe, in aansluiting op het ten dele persoonlijke karakter van dit deel van het proefschrift: als studente aan de pedagogische academie hing ik (in 1981) op mijn hospiteerschool een grote landkaart van Waterland voor de klas en gebruikte deze om kinderen mee te nemen naar een fictieve, maar herkenbare, wereld waarin allerlei meetkundige en rekenkundige aspecten geoefend werden. Het project was uiterst effectief en de middelen visueel aantrekkelijk. Aan het enthousiasme en de betrokkenheid van de leerlingen bewaar ik zeer goede herinneringen.

Tenslotte vinden we in Deel D de resultaten van de toets en enquêtes van het Pimbo-project uit 1995 naar het niveau van het meetkundeonderwijs aan het einde van de basisschool. En de Moor zou de Moor niet zijn als hij zijn onderzoek niet afsloot met een aanbeveling voor een realistisch meetkundeprogramma voor de basisschool van de toekomst. De lijst met geraadpleegde literatuur en bronnen is indrukwekkend van omvang en voor een ieder die onderwijs-historisch onderzoek doet in zichzelf weer een waardevolle bron. Rest mij deze bespreking te besluiten met een verbastering van Freudenthal's gezegde: "verdiep u in dit indrukwekkende en prettig leesbare werk omdat u zichzelf zoveel moois niet mag onthouden!"

K. Blom



Universitaire Wiskunde Competitie

Opgave A

Zij $a > 0$ een positief reëel getal. Een *maximaal termproduct* van a is een product van reële getallen $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ zo dat

$$\begin{cases} a_i > 0 \text{ voor alle } i = 1, \dots, n, \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = a, \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \text{ is zo groot mogelijk.} \end{cases}$$

Welke $a > 0$ hebben meer dan één maximaal termproduct?

Opgave B

Zij $x_1 = 1$ en definieer inductief:

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n} \quad (n \geq 1).$$

Ga na voor welke reële $p > 0$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^p}$ convergeert.

Opgave C

Zij p een oneven priemgetal. Een polynoom f met geheeltallige coëfficiënten heeft graad kleiner dan $p - 1$ en heeft de eigenschap dat

$$\{f(1), f(2), \dots, f(p-1)\} = \{1, 2, \dots, p-1\}.$$

Toon aan dat $f(0)$ een geheel veelvoud is van p .

Editie 2001/2

Op de ronde 2001/2 ontvingen we 4 inzendingen.

Opgave 2001/2-A

Teken in een cirkel een regelmatige zeshoek. Beschrijf met de hoekpunten van deze zeshoek als middelpunten zes cirkels met een straal gelijk aan de straal van de eerste cirkel. Binnen de eerste cirkel ontstaat een bloemetje. Buiten de eerste cirkel ontstaan zes snijpunten van de getrokken cirkels. Kies deze zes hoekpunten weer als middelpunten van nieuwe cirkels, weer met dezelfde straal en teken weer de betreffende veelhoek. Zet dit procédé voort en beredeneer de structuur van de figuur die ontstaat.

Oplossing De bedoelde snijpunten van cirkels en dus hoekpunten van veelhoeken zijn in het vlak te beschrijven met een coördinatenstelsel met assen onder 60° . De coördinaten van de punten zijn dan gehele getallen (m, n) . Het kwadraat van de afstand tot de oorsprong (het middelpunt van de cirkel) is gelijk aan $m^2 - mn + n^2$. Het aantal punten op de cirkels is dus het aantal geheeltallige oplossingen van de vergelijking $m^2 - mn + n^2 = N$. Elementaire overwegingen laten zien dat dit aantal gelijk is aan $6 \sum_{d|N} \varepsilon(d)$, met

$$\begin{aligned} \varepsilon(d) &= 0, & d &\equiv 0 \pmod{3}; \\ \varepsilon(d) &= 1, & d &\equiv 1 \pmod{3}; \\ \varepsilon(d) &= -1, & d &\equiv 2 \pmod{3}. \end{aligned}$$

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina <http://academics.its.tudelft.nl/uwc>

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Per nummer worden twee prijzen van 100 Euro toegekend: één aan de aanvoerder van de ladder (die daarna weer onderaan begint), en één aan de inzender van de oplossing die de meeste punten behaald heeft (die dan geen punten voor de ladder krijgt). Daarnaast zal twee maal per jaar een ster-opgave worden aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend.

Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in $\text{\LaTeX}$ wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 februari 2002. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

Eindredactie: Jan van Neerven

Redactieadres: Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Mekelweg 4 (HB 04.030), 2628 CD Delft
j.vanneerven@its.tudelft.nl

De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.

UWC

oplossingen

Opgave 2001/2-B

Zij $\mathbf{Q}[X_1, \dots, X_n]$ de ring van polynomen met rationale coëfficiënten in de onbekenden $X_1, \dots, X_n$. We noemen $p \in \mathbf{Q}[X_1, \dots, X_n]$ *homogeen van graad* $m \geq 1$ als

$$p(tX_1, \dots, tX_n) = t^m p(X_1, \dots, X_n)$$

voor alle $t \in \mathbf{Q}$. De deelverzameling van alle polynomen die homogeen zijn van graad m noteren we als $\mathbf{Q}^{(m)}[X_1, \dots, X_n]$.

Uit de identiteit

$$X_1 X_2 = \frac{1}{2} (X_1 + X_2)^2 - \frac{1}{2} X_1^2 - \frac{1}{2} X_2^2$$

volgt meteen dat ieder polynoom $p \in \mathbf{Q}^{(2)}[X_1, X_2]$ geschreven kan worden als een $\mathbf{Q}$ -lineaire combinatie van kwadraten van polynomen in $\mathbf{Q}^{(1)}[X_1, X_2]$.

Toon aan: voor alle $m, n \geq 1$ kan ieder polynoom $p \in \mathbf{Q}^{(m)}[X_1, \dots, X_n]$ geschreven kan worden als een $\mathbf{Q}$ -lineaire combinatie van m -de machten van polynomen in $\mathbf{Q}^{(1)}[X_1, \dots, X_n]$.

Oplossing De volgende uitwerking is gebaseerd op de oplossing van Filip De Smet.

We bewijzen eerst het geval $n = 2$. Zij V de $(m+1)$ -dimensionale vectorruimte van alle m -homogene polynomen in X_1 en X_2 ; een basis voor V wordt gegeven door de polynomen $p_j = \binom{m}{j} X_1^{m-j} X_2^j$ ($j = 0, \dots, m$). Zij W de deelruimte van V opgespannen door de m -homogene polynomen

$$P_k = (X_1 + a_k X_2)^m = \sum_{j=0}^m a_k^j p_j \quad (k = 0, \dots, m),$$

waarbij $a_1, \dots, a_m$ vast gekozen, onderling verschillende gehele getallen zijn. We willen aantonen dat $W = V$. Rekenend in de coördinaten behorend bij de basis $\{p_0, \dots, p_m\}$ moeten we laten zien dat het lineaire opspansel van de vectoren $\mathbf{a}_k = (1, a_k, a_k^2, \dots, a_k^m)^T$ alle eenheidsvectoren $\mathbf{e}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ (met de 1 op de j -de plaats) bevat. Dit is precies dan het geval wanneer de matrix $A = (\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_m)$ inverteerbaar is. Nu is

$$\det A = \prod_{i < j} (a_j - a_i),$$

en omdat de a_k alle verschillend zijn is inderdaad $\det A \neq 0$.

Het geval $n \geq 3$ volgt nu met inductie. Stel dat de bewering juist is voor $n = 2, \dots, N$.

We laten zien dat het m -homogene polynoom $X_1^{j_1} \cdot \dots \cdot X_N^{j_N} \cdot X_{N+1}^{j_{N+1}}$, met $j_1 + \dots + j_N + j_{N+1} = m$, een lineaire combinatie is van 1-homogene polynomen in de variabelen $X_1, \dots, X_N, X_{N+1}$.

Uit de inductieveronderstelling (met $n = N$) volgt dat

$$X_1^{j_1} \cdot \dots \cdot X_N^{j_N} = \sum_{k=1}^K b_k p_k^{j_1 + \dots + j_N}(X_1, \dots, X_N),$$

voor zekere $b_k \in \mathbf{Q}$ en $p_k \in \mathbf{Q}^{(1)}[X_1, \dots, X_N]$. Eveneens uit de inductieveronderstelling (met $n = 2$) volgt dat

$$Y^{j_1 + \dots + j_N} X_{N+1}^{j_{N+1}} = \sum_{l=1}^L c_l q_l^{j_1 + \dots + j_N}(Y, X_{N+1}),$$

voor zekere $c_l \in \mathbf{Q}$ en $q_l \in \mathbf{Q}^{(1)}[Y, X_{N+1}]$. Maar dan vinden we

$$\begin{aligned} X_1^{j_1} \cdot \dots \cdot X_N^{j_N} \cdot X_{N+1}^{j_{N+1}} &= \sum_{k=1}^K b_k p_k^{j_1 + \dots + j_N}(X_1, \dots, X_N) \cdot X_{N+1}^{j_{N+1}} \\ &= \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L b_k c_l q_l^{j_1 + \dots + j_N}(p_k(X_1, \dots, X_N), X_{N+1}). \end{aligned}$$

UWC

oplossingen

Uit

$$\begin{aligned} q_l(p_k(tX_1, \dots, tX_N), tX_{N+1}) &= q_l(t p_k(X_1, \dots, X_N), tX_{N+1}) \\ &= t q_l(p_k(X_1, \dots, X_N), X_{N+1}), \end{aligned}$$

volgt dat $q_l(p_k(X_1, \dots, X_N), X_{N+1}) \in \mathbf{Q}^{(1)}[X_1, \dots, X_N, X_{N+1}]$. Dit bewijst de bewering voor $n = N + 1$.

Tenslotte vermelden we dat Steven Lippens zonder bewijs een expliciete formule geeft voor de representatie van het polynoom $X_1^{j_1} \cdot \dots \cdot X_n^{j_n}$, met $j_1 + \dots + j_n = m$, als $\mathbf{Q}$ -lineaire combinatie van m -de machten van polynomen in $\mathbf{Q}^{(1)}[X_1, \dots, X_n]$.

Opgave 2001/2-C

Toon aan dat de volgende functie

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{\ln(1 + e^x)}{\ln(1 + e^{-x})} \right)$$

strikt dalend is op $(0, \infty)$.

Oplossing We geven de oplossing van Mark Veraar.

Er geldt

$$f(x) = -\frac{g(x)}{x}, \quad \text{met } g(x) = \ln \left(1 - \frac{x}{\ln(e^x + 1)} \right).$$

Differentiëren geeft

$$f'(x) = -\frac{g'(x)}{x} + \frac{g(x)}{x^2} = \frac{-xg'(x) + g(x)}{x^2}.$$

Om aan te tonen dat f strikt daalt volstaat het te laten zien dat $G(x) := -xg'(x) + g(x) < 0$ voor alle $x > 0$. Wegens $G(0) = 0$ is het genoeg te laten zien dat $G'(x) = g''(x) < 0$ voor alle $x > 0$.

Voor $y > 1$ definiëren we $h(y) = g'(\ln y)$. Elementair rekenwerk geeft

$$\frac{g''(\ln(y))}{y} = h'(y) = \frac{k(y)}{y(y+1)^2 \ln^2(y+1) \ln^2\left(\frac{y+1}{y}\right)}$$

waarbij

$$k(y) = y \ln(y+1) \ln(y) \ln\left(\frac{y+1}{y}\right) + y^2 \ln^2\left(\frac{y+1}{y}\right) - \ln^2(y+1).$$

Omdat de noemer van (1) strikt positief is, volstaat het te bewijzen dat $k(y) > 0$ voor alle $y > 1$. Omdat $k(1) = 0$ volgt dat het volstaat te bewijzen dat $k'(y) > 0$ voor alle $y > 1$. Differentiëren en herschrijven geeft

$$k'(y) = \eta_1(y)\zeta_1(y) + \frac{\eta_2(y)\zeta_2(y)}{y+1},$$

waarbij

$$\eta_1(y) = \ln(y+1) \ln(y),$$

$$\eta_2(y) = \ln(y+1) + y \ln\left(\frac{y+1}{y}\right),$$

$$\zeta_1(y) = \ln\left(\frac{y+1}{y}\right) - \frac{1}{y+1},$$

$$\zeta_2(y) = 2y \ln\left(\frac{y+1}{y}\right) + \ln\left(\frac{y+1}{y}\right) - 2.$$

Het is duidelijk dat $\eta_1(y) > 0$ en $\eta_2(y) > 0$ voor alle $y > 1$. We laten vervolgens zien dat ook $\zeta_1(y) > 0$ en $\zeta_2(y) > 0$ voor alle $y > 1$. Dan volgt dat $k'(y) > 0$ voor $y > 1$ en zijn we klaar.

Voor alle $y > 1$ is $\zeta_1'(y) < 0$ en dus is ζ_1 strikt dalend. Bovendien geldt $\zeta_1(1) > 0$ en $\lim_{y \rightarrow \infty} \zeta_1(y) = 0$. Dus is $\zeta_1(y) > 0$ voor alle $y > 1$.

UWC

oplossingen

Tenslotte tonen we aan dat $\zeta_2(y) > 0$ voor alle $y > 1$. Voor $y > 1$ geldt

$$\ln\left(\frac{y+1}{y}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{ny^n}.$$

Dit levert

$$\zeta_2(y) = \sum_{n=1}^{\infty} s(n, y), \quad \text{met } s(n, y) = (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)} \frac{1}{y^n}.$$

Deze reeks absoluut convergeert voor iedere $y > 1$. Nu is

$$s(2n, y) + s(2n+1, y) = \frac{4n^2(y-1) + (2n-2)y}{2n(2n+1)(2n+2)y^{2n+1}} > 0.$$

Dus geldt ook $\zeta_2(y) > 0$ voor alle $y > 1$.

Uitslag Editie 2001/2

De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

<i>Naam</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>Totaal</i>
1. Mark Veraar (Delft)	8	9	8	100
2. Hendrik Hubrechts e.a. (Leuven)	7	6	8	85
3. Filip De Smet (Gent)	-	8	3	47
4. Steven Lippens (Gent)	8	4	1	45

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie na vier ronden

We vermelden alleen de top 5.

De complete ladderstand is te vinden op de UWC-homepage.

<i>Naam</i>	<i>Punten</i>
1. Hendrik Hubrechts e.a.	357
2. Steven Lippens	301
3. Herbert Beltman	198
4. Joeri Van der Veken e.a.	185
5. Stijn Symens	143

Problemen

| Problem Section

Problem 24

Suppose that T is a triangular billiard table with sharp angles. Show that you can put a billiard ball on the table and shoot it in such a way that its (infinite) trajectory is a triangle.

Problem 25 (Ruud Jeurissen)

Let V and W be finite disjoint sets of cardinality m and n , respectively, with $m \leq n$. Let Q be a set of quadruples each containing 2 elements from V and 2 elements from W , such that no two of its quadruples have 3 elements in common.

- Prove that $|Q| \leq \binom{m}{2} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Here $\binom{m}{2}$ denotes a binomial and $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ means the greatest integer $\leq \frac{n}{2}$.
- Prove that the bound in a) is sharp.

Problem 26

Does there exist a triangle with sides of integral lengths such that its area is equal to the square of the length of one of its sides?

Solutions to volume 2, number 2 (June 2001)

Problem 18 (Alex Heinis)

Let a, k be positive numbers. Count the number of maps $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ such that $f^k(n) = n + a$ for all $n \in \mathbf{N}$.

Solution Ruud Jeurissen (Nijmegen) and Lute Kamstra (Amsterdam) give similar solutions. If k divides a , the number of maps is $a! / \frac{a}{k}!$. If k does not divide a , there are no such maps.

Let $f^k(n) = n + a$ for all $n \in \mathbf{N}$. Then $f(n + a) = f(f^k(n)) = f^k(f(n)) = f(n) + a$, so f is determined by its values on $A := \{1, 2, \dots, a\}$.

Define $F: A \rightarrow A$ by $F(m) = f(m) \bmod a$. Using $f(n - a) = f(n)$ for $n > a$ we see that $F^k(m) = m$ for all $m \in A$. Let $c \in A$ and consider the sequence $c = c_1, c_2, c_3, \dots$ with $F(c_i) = c_{i+1}$; it is periodic and its smallest period d is a divisor of k . There are non-negative integers m_i with $f(c_i) = c_{i+1} + m_i a$, and so $f^2(c) = f(c_2 + m_1 a) = f(c_2) + m_1 a = c_3 + m_1 a + m_2 a$. Continuing we find $c + a = f^k(c) = c + (m_1 + m_2 + \dots + m_k)a$. It follows that $m_i = 0$ except for one i for which it is 1, and from this that the period is k . Apparently the powers of F form a cyclic group acting on A , all orbits have cardinality k and in every orbit there is one element x with $f(x) = F(x) + a$, whereas for the other elements y we have $f(y) = F(y)$.

We now know that if k does not divide a , the answer is 0.

Let $k|a$. Let $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ be an orbit of F , the numbering being chosen such that $f(c_i) = c_{i+1}$ for $i \neq k$ and $f(c_k) = c_1 + a$. Thus the elements of A form $\frac{a}{k}$ sequences of length k . This can happen in $a! / \frac{a}{k}!$ ways.

Conversely, let S be such a set of $\frac{a}{k}$ sequences. Define the function $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ as follows: for each $(c_1, c_2, \dots, c_k) \in S$ let $f(c_i) = c_{i+1}$ for $i < k$ and $f(c_k) = c_1 + a$; for $n > a$ with $n = c + ma$, $c \in A$, let $f(n) = f(c) + ma$. One easily checks that indeed $f^k(n) = n + a$ for all $n \in \mathbf{N}$.

So if $k|a$, the answer is $a! / \frac{a}{k}!$.

Solutions to the problems in this section can be sent to the editor — preferably by e-mail. The most elegant solutions will be published in a later issue. Readers are invited to submit general mathematical problems. Unless the problem is still open, a valid solution should be included.

Editor:

R.J. Fokkink

Technische Universiteit Delft

Faculteit Wiskunde

Postbus 5031

2600 GA Delft

The Netherlands

r.j.fokkink@its.tudelft.nl

Problem 19

A billiard table T has the shape of a regular pentagon, with sides of length of 1 meter. You can put a billiard ball anywhere on the table and shoot it in any direction over a distance of 10 meters. Give the maximal number of times the ball can hit a side.

This problem remains open. Most probably the trajectory that hits the pentagon at consecutive mid points gives the maximal number of reflections. Billiard problems may seem easy, but in fact they are very hard. Problem 24 above, for instance, is open for triangular billiard tables with an obtuse angle.

Problem 20 (A.F. Tiggelaar)

Suppose that ABC and DEF are two triangles in $\mathbf{R}^3$ and that V is the plane that contains ABC . Suppose that AD , BE and CF are perpendicular to V and that $AD = BC$, $BE = AC$, $CF = AB$. Construct the point in V that is equidistant to D , E and F .

Solution By Ruud Jeurissen (Nijmegen), L. Bleijenga (Den Haag), Jos Brakenhoff (Leiden), M. Hendriks (Elst), Hans Linders (Eindhoven). Brakenhoff's solution is below.

The subset $S_{D,E} \subset V$ of points that are equidistant to D and E is a line. We have that

$$CD^2 = AD^2 + AC^2 = BC^2 + BE^2 = CE^2 \text{ so } C \in S_{D,E}.$$

Let C' be the projection of C onto AB . Then

$$C'D^2 = CD^2 - C'C^2 = CE^2 - C'C^2 = C'E^2 \text{ so } C' \in S_{D,E}.$$

Since $S_{D,E}$ is a line, $S_{D,E}$ has to be the perpendicular from C . By symmetry, $S_{D,F}$ and $S_{E,F}$ are the perpendiculars from B and A , respectively. The point that is equidistant to D , E and F is the orthocenter of ABC .

