

Inhoud | Contents

98	Colofon
99	Redactioneel <i>Chris Zaal</i>
100	Agenda
102	Nieuws

Evenementen | Events

107	Laudatio voor Ciprian Foias <i>Marinus Kaashoek</i>
109	The general commutant extension problem <i>Ciprian Foias</i>

Oratie | Inaugural lecture

114	Een zeker toeval <i>Sara van de Geer</i>
-----	--

Onderzoek | Research

120	Wavelets: een hype of toch meer? <i>Patrick Oonincx</i>
127	Algebraization of topology <i>B.S. Yadav</i>
133	On sums of sums of values of Dirichlet characters <i>Johan Bosman, Lenny Taelman</i>

Cultuur | Culture

136	De juiste toon, de juiste stemming <i>Jan van de Craats, Floris Takens</i>
146	Wiskundige voorouders <i>Jan Moree, Pieter Moree, Lars Roobol</i>

Onderwijs | Teaching

148	Het Wiskunde B1,2 examen <i>Bert Zwaneveld</i>
157	De eerste zebraboekjes <i>Wim Groen</i>

Boeken | Books

162	Grijze muis of geniale gek? <i>Ferdinand Verhulst</i>
166	De kloof gedicht <i>Wieb Bosma</i>
169	Boekbesprekingen

Problemen | Problem section

184	Universitaire Wiskunde Competitie
189	Problemen

Rubrieken | Departments

135	Oud Archief <i>Danny Beckers</i>
156	Column: From down under <i>Joost van Hamel</i>

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
naw@math.leidenuniv.nl
<http://www.math.leidenuniv.nl/~naw>

Hoofredactie

Ger Koole (koole@cs.vu.nl)
Chris Zaai (zaai@math.leidenuniv.nl)

Eindredactie

Derk Pik (drpik@math.leidenuniv.nl)

Redactie

Gerard Alberts (G.Alberts@bw.kun.nl)
Jaap Molenaar (J.Molenaar1@tue.nl)
André Ran (ran@cs.vu.nl)
Bert Zwaneveld (Bert.Zwaneveld@ou.nl)

Bureauredactie

Annelies Hafkenscheid (naw@math.leidenuniv.nl)
Maxim Hendriks (naw@math.leidenuniv.nl)

Medewerkers

Wieb Bosma (bosma@sci.kun.nl)
J.A.W. van Casteren (vcaster@wins.uia.ac.be)
Jan van de Craats (jcr@euronet.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@its.tudelft.nl)
Teun Koetsier (teun@cs.vu.nl)
Joop Kolk (kolk@math.uu.nl)
Jan van Neerven (J.vanNeerven@its.tudelft.nl)
Hans Sterk (sterk@win.tue.nl)
Roel Stroeker (stroeker@few.eur.nl)
Jaap Top (J.Top@math.rug.nl)

T_EX-ondersteuning

Marco Boon (m.a.a.boon@tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@its.tudelft.nl)
Michael van Hartkamp (mhartska@win.tue.nl)

Abonnementstarieven/Subscription rates

Nederland fl. 125,- (4 nummers)
Buitenland fl. 155,- (4 issues)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Corrie van Os (wg-admin@math.uu.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
tel. 030-2531430, fax 030-2518394

Subscription exchange

Bibliotheek Wiskundig Genootschap
Stichting Mathematisch Centrum
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam

Advertenties

Christiaan van de Woestijne (cvdwoest@math.leidenuniv.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101

Vormgeving

Kitty Molenaar, Amsterdam

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Zetwerk (CONTEX)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Op de omslag

Stemvorken. Bij aanslag geven deze zuivere tonen te horen van 440 Hz (de A), 523,3 Hz (de C) en 450 Hz (een 'hoge A'). Zie verder pagina 136.

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij electro-nisch aanleveren als platte tekst (ascii), als T_EX- of L^AT_EX-bestand; wiskundige figuren als pdf- of als eps-bestand. Voor overige illustraties gaarne originele foto's opsturen.

Email: naw@math.leidenuniv.nl

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

<i>nummer</i>	<i>verschijningsdatum</i>	<i>uiterste inleverdatum kopij</i>
3	06-09-2001	04-06-2001
4	06-12-2001	03-09-2001
1	10-03-2002	06-12-2001
2	09-06-2002	07-03-2002

Wiskundig Genootschap

Het Wiskundig Genootschap is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. Het genootschap werd in 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Het is 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap.

Leden van het Wiskundig Genootschap ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor het Wiskundig Genootschap bedraagt 70,- Euro per jaar en gepensioneerden betalen 35 Euro. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of HBO-opleiding, AiO's en OiO's kunnen lid worden tegen het gereduceerde tarief van 25 Euro per jaar.

Leden van bepaalde andere wiskundige vakverenigingen kunnen aanspraak maken op een gereduceerd tarief van 50 Euro. Dit betreft leden van de VVS, de NVvW en de NVORWO.

Members of the Société Mathématique de France, and of the American, Australian, Belgian, Indian, London and South-African Mathematical Societies pay 50 Euro instead of the full membership fee of 70 Euro a year.

Ledenadministratie

Corrie van Os (wg-admin@math.uu.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
tel. 030-2531430, fax 030-2518394

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Jan Karel Lenstra (TUE, *voorzitter*), Mark Peletier (CWI, *secretaris*), Luc Florack (UU, *penningmeester*), Harm Bakker (RUG), Mariette Knaap (Shell), Eduard Looijenga (UU), Jaap Molenaar (TUE), Peter Stevenhagen (UL), Michel Vellekoop (UT).

Grijze muis noch geniale gek

Een van de vragen van de Nationale Wetensquiz 1999 luidde:

Vraag 5 *In de 18e eeuw bloeide de natuurfilosofie. Waarin leeft deze stroming nu nog voort?*

- a. In de evolutieleer
- b. In de natuurwetenschappen
- c. In de new-agebeweging

Natuurfilosofie is een onderdeel van de filosofie dat beoogt inzicht te verkrijgen in de stoffelijke verschijnselen door verheldering van grondbegrippen als tijd, ruimte, materie, beweging, verandering, leven, werking, enzovoort. De natuurfilosofie als filosofie van de natuur steunt op de gedachte dat de wetenschap de natuur slechts op een abstracte en eenzijdige wijze kan bestuderen. Vóór de opkomst van de natuurwetenschappen vormde de wijsbegeerte één geheel met de wetenschap. Met de opkomst van de natuurwetenschappen werd de natuurfilosofie onttroond. Het wijsgerige deel van de natuurfilosofie werd overgenomen door de filosofie van de natuurwetenschappen in de vorm van de kennisleer. Het juiste antwoord is daarom b.

De natuurwetenschappen bouwen dus voort op de 18e-eeuwse filosofie van de rede. Wij leven, zo leerde ik ooit van mijn leraar Nederlands, in een jonger tijdperk: dat van de romantiek, het tijdperk van het romantisch individu. De natuurwetenschappen zijn — ondanks het gigantische succes ervan — dus niet van deze tijd. Dat is het verrassende antwoord van deze quizvraag.

Het gevoel dat de natuurwetenschappen niet van deze tijd zijn krijg je ook als je kijkt naar de landelijke vooraanmeldingscijfers. Op 19 mei 2001 waren er 79 vooraanmeldingen voor de wiskundestudie. Precies een jaar eerder waren dat er 111. Een afname van 29%. Na de eenmalige stijging in 2000 wederom een daling.

Hoe is deze terugval te verklaren? De onrust veroorzaakt door de vernieuwingen in het middelbareschoolonderwijs speelt wellicht een rol — de middelbareschoolwiskunde in de Tweede Fase wordt momenteel erg moeilijk en problematisch gevonden (zie pagina 104). Maar er zijn andere, meer filosofische redenen voor de lage instroom te bedenken. Bijvoorbeeld dat een wiskunde-

studie niet aan de romantische verbeelding appelleert. Het is een grijzemuizenstudie. De opbouw van de meeste universitaire wiskundestudies is aanbodgericht en in die zin uit de tijd. De structuur is klassiek: eerst twee jaar droge basisvakken, daarna komen er mondjesmaat interessantere wiskundevakken bij. Bij de studiekeuze kijkt men tegenwoordig verder dan alleen de inhoud van de studie. Moderne leerlingen kijken ook wat er voor hen te *beleven* valt. Beroepsmogelijkheden, communicatieve en sociale aspecten — al deze dingen worden steeds belangrijker. Met de inhoud van een wiskundestudie is niets mis. Ook niet met het beroepsperspectief. Het draait om de vraag of je als modern individu je ei kwijt kunt in een wiskundestudie. Dat kán, maar het helpt als de *vorm* van de opleiding een individuele ontwikkeling stimuleert. Twee suggesties:

1. Appelleer aan de verbeelding: zorg vanaf het begin van de studie voor links naar de actualiteit, naar de grenzen van het onderzoek en naar de beroepsuitoefening. Hoe werken nieuwe toepassingen? Wat zijn hot items in het onderzoek? Wat gebeurt er in bedrijven? Niet door dit als extra stof aan te bieden, maar via bijvoorbeeld studenten-seminaria of tijdschriften als *Mathematical Intelligencer* of *Nieuw Archief voor Wiskunde*.
2. Leg meer nadruk op communicatie. Niet als apart vak, maar geïntegreerd in de studie: presenteren (alleen en in groepjes, met *TeX*, *Word* en *Powerpoint*); meer computeralgebra (*Maple*, *Mathematica* en *Matlab*); didactische training en actieve beroepsvoorlichting via stages en bedrijfsbezoeken.

De klassieke verlichte filosofie van de meeste wiskundeopleidingen bestaat eruit de studenten zóveel wiskunde te leren, dat ze vanzelf begeesterd raken. Met deze aanpak lopen we het gevaar de weinige studenten die wiskunde komen studeren al aan de poort weg te jagen. We moeten daarentegen laten zien dat je je met een wiskundestudie volledig ontwikkelt. Niet tot grijze muis of geniale gek, maar tot een compleet individu. 

Chris Zaal
hoofdredacteur Nieuw Archief voor Wiskunde

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
zaal@math.leidenuniv.nl

Agenda

juni 2001

6–8 juni

□ **6th International Conference on High Performance Optimization Techniques**

plaats Utrecht

info <http://www.math.uu.nl/hpopt>

6–8 juni

□ **Analysis Conference on Nonlinear Phenomena in Science**

Guest of honour: Donald G. Aronson

plaats Vrije Universiteit Amsterdam

info <http://www.cs.vu.nl/~jhulshof/NPIS/conference.html>

6–8 juni

□ **First Cologne/Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization**

plaats Keulen

info <http://www.zaik.uni-koeln.de/AFS/conferences/CTW2001/CTW2001.html>

7 juni

□ **Demons, wavelets and chaos**

Symposium ter ere van H.W. Capel

plaats BCP Jansen Instituut, Univ. van Amsterdam

info www.science.uva.nl/research/math/tmpcapel

vanaf 8 juni

□ **Patronen in de natuur**

Tentoonstelling over patronen in de planten- en dierenwereld. Opening op 7 juni. Sprekers onder andere: Arjen Doelman.

plaats Artis, Amsterdam

info <http://www.artis.nl>

11–15 juni

□ **Hamilton dynamics and homoclinic bifurcations**

MRI Summer School. Docenten: Hans Duistermaat, Henk Broer en Floris Takens.

plaats Universiteit Twente

info <http://www.math.utwente.nl/~stephan/aio/2001/info.htm>

18–22 juni

□ **Eidma Workshop Cryptographic Multiparty Protocols**

Docent: Dr. Ivan Damgård, Aarhus University, Denmark

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info <http://www.win.tue.nl/math/eidma/courses>

18–22 juni

□ **Fourth European Conference on Elliptic and Parabolic Problems**

Onderwerp: partiële differentiaalvergelijkingen

plaats Congrescentrum Rolduc, Kerkrade, Zuid-Limburg

info <http://www.math.unizh.ch/rolducgaeta>

20 juni

□ **Quantitative methods for life and earth**

This conference provides an up-to-date overview of scientific developments in statistical and mathematical methods applied to the life-sciences.

plaats Wageningen

info www.biometris.nl

21–22 juni

□ **Workshop Analysis and Continuation of Bifurcations**

plaats Universiteit Utrecht

info kuznetsov@math.uu.nl

22–23 juni

□ **Applications of Levy Processes in Financial Mathematics**

plaats EURANDOM, Eindhoven

info <http://www.eurandom.tue.nl/workshops>

24–29 juni

□ **Workshop Global Analysis of Dynamical Systems**

Ter ere van Floris Takens' zestigste verjaardag.

plaats Lorentz Center, Universiteit Leiden

info <http://www.cs.rug.nl/globdynsys>

26 juni

□ **Inter-TU Studiedag**

Jaarlijkse dag over de aspecten van het toegevoerd wiskundeonderwijs in het WO en het HBO.

plaats Universiteit Twente

info j.schut@math.utwente.nl

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

□ Cursussen CANDiensten

Algemene inleiding S-PLUS: 5-6, 3-7, 7-8
 Inleiding programmeren in S-PLUS: 6-6, 4-7, 8-8
 Time Management voor Wetenschappers: 19-6
 Environmental Statistics met S-PLUS: 21/22-6
 Inleiding Mathematica: 11-7, 15-8
 Mathematica Algemeen: 18/19-7, 25/26-9
 Numerical Methods for
 Pricing Financial Derivatives: 22/23-8
 Mixed Effects Models with S-PLUS: 3/4-9
 Survivalanalyse: 20-9
info <http://www.candiensten.nl>

juli 2001

2-6 juli

□ Workshop on Pluralism in Distributed Parameter Systems

plaats Universiteit Twente, Enschede
info <http://www.math.utwente.nl/ssb/pdps>

8-13 juli

□ Second workshop on algebraic graph theory

plaats International Centre for Mathematical Sciences, Edinburgh, Scotland
info <http://www.ma.hw.ac.uk/icms/current/graph>

9-11 juli

□ EURO 2001, the 18-th Euro conference on Operations Research

Eighteenth EURO conference on Operational Research
plaats Erasmus Universiteit Rotterdam
info <http://www.euro2001.org>

9-13 juli

□ Positivity and its Applications

This second international conference on Positivity and its Applications is devoted to the theory of (operators on) ordered topological vector spaces and its applications.
plaats Universiteit Nijmegen
info <http://www-math.sci.kun.nl/math/positivity>

12-13 juli

□ Workshop on Smooth and Nonsmooth**Optimization: Theory and Applications**

plaats Erasmus Universiteit Amsterdam
info <http://www.euro2001.org>

12-17 juli

□ 25th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 25)

plaats Universiteit Utrecht (Uithof)
info <http://www.fi.uu.nl/pme25/>

18-20 juli

□ Workshop Direct and Large-Eddy Simulation-IV

plaats Kerkrade, Limburg
info <http://www.math.utwente.nl/~geurts/dles4>

18-22 juli

□ Fourth European Conference on Elliptic and Parabolic Problems: Theory-Applications

plaats Rolduc, Limburg
info <http://www.math.unizh.ch/rolducgaeta/rolduc/home.html>

augustus 2001

2-3 augustus

□ 10th International Workshop on Matrices and Statistics

Organized by the Data Theory Group from Leiden University. Satellite Meeting of the 54th Biennial Session of the International Statistical Institute.
plaats Voorburg
info <http://matrix.fsw.leidenuniv.nl>

24-25 augustus

□ Vakantiecursus 2001: Experimentele wiskunde

Voor docenten in het middelbaar onderwijs en andere belangstellenden. Zie ook pagina 102.
plaats TU Eindhoven
info <http://www.cwi.nl/conferences/VC2001>

24-25 augustus

□ Vierde Internationaal T3 Symposium

ICT in het wiskundeonderwijs. Voor docenten in het middelbaar onderwijs en andere belangstellenden.

plaats Katholieke Universiteit Leuven, Heverlee
info www.wis.kuleuven.ac.be/ALO/kul2001.htm

31 augustus

□ Zekerheid dankzij onzekerheid

Afscheidsrede prof.dr. Paul van der Laan
plaats Auditorium TU Eindhoven
info

31 augustus en 1 september

□ Vakantiecursus 2001: Experimentele wiskunde

Voor docenten in het middelbaar onderwijs en andere belangstellenden. Zie ook pagina 102.
plaats CWI, Amsterdam
info <http://www.cwi.nl/conferences/VC2001>

september 2001

12-14 september

□ 26ste conferentie van Numeriek Wiskundigen

plaats Conferentieoord Woudschoten, Zeist
info www.cwi.nl/conferences/NumAnalysis.html

23-27 september

□ EuroTeX2001

12de Europese TeX conferentie. Thema: TeX and Meta: the Good, the Bad and the Ugly Bits
plaats Kerkrade
info <http://www.ntg.nl/eurotex>

september

□ Experimentele organische scheikunde

Seminar in het kader van het NWO Jaarthema Mathematische Biologie. Lokale organisatoren: Rint P. Sijbesma en Leen Stougie.
plaats Nederlands Polymeer Instituut, Eindhoven
info stougie@cwi.nl, verduyn@math.leidenuniv.nl

Nieuws

| News

CWI Vakantiecursus 2001

Het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) organiseert in zomer 2001 een vakantiecursus met als thema *Experimentele wiskunde*, bedoeld voor leraren in de exacte vakken VWO, HAVO en HBO en andere belangstellenden. Sprekers zijn:

- Frits Beukers, *Experimentele getaltheorie*
- Arjen Doelman, *Het begrip dimensie*
- Jan van Maanen, *Legaal en illegaal integreren*
- Henk van der Vorst, *Snel oplossen is een experiment waard*
- Aad Goddijn, *Experimenteren met Cabri*
- Henk Tijms, *De wondere wereld van de Poisson kansverdeling*
- Rob van der Mei, *Performance van telecommunicatienetwerken*

Het betreft een tweedaagse cursus, die zowel in Eindhoven als in Amsterdam wordt gehouden. De data zijn: vrijdag 24 augustus en zaterdag 25 augustus in Eindhoven in het Auditorium van de Technische Universiteit Eindhoven, Den Dolech te Eindhoven, en vrijdag 31 augustus en zaterdag 1 september in Amsterdam in het CWI, Kruislaan 413 te Amsterdam. Kosten: 150 gulden voor beide dagen. Bij de cursus is inbegrepen een warme maaltijd op vrijdag en een lunch op zaterdag.

Informatie en aanmelding

Wilmy van Ojik, CWI, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam

E-mail: wilmy.van.ojik@cwil.nl

<http://www.cwi.nl/conferences/VC2001/>

Onderwijsvisitatie wiskunde

De opleidingen Wiskunde en Statistiek en Technische Wiskunde aan de Nederlandse universiteiten worden in 2001 gevisiteerd en daarbij voornamelijk beoordeeld op hun kwaliteit en kwaliteitszorg. Ten behoeve van deze visitatie is aan alle universiteiten afgelopen voorjaar een zelfstudie geschreven. De zelfstudies zijn uiterlijk 1 april door de VSNU ontvangen.

De zelfstudie beslaat de afgelopen vijf jaren. Zij moet een waarheidgetrouwe vaststelling van de stand van zaken bij de opleiding en een gefundeerde eigen analyse en beoordeling van de behaalde resultaten en ingevoerde veranderingen omvatten. De overgang van vierjarige naar vijfjarige programma's en de daardoor al dan niet verbeterde studierendementen zijn hierbij belangrijke elementen. De zelfstudie wordt geschreven ten behoeve van de visitatie. Het schrijven ervan levert echter intern vaak ook een duidelijk zelfbeeld en kan aanleiding zijn tot directe verbeteringen, bijvoorbeeld op het vlak van doelstellingen of profilering van de opleiding, studieadvies en monitoring van studenten, of geregelde onderwijs-evaluaties.

De visitatiecommissie wordt voorgezeten door Jack van Lint (TUE). Verder maken wiskundigen, een wiskundestudent en een onderwijsdeskundige deel uit van de commissie. Voor de zomer zal een eerste vergadering van de commissie worden belegd. De tweedaagse bezoeken aan de negen instellingen vinden plaats in de periode van september 2001 tot en met januari 2002.

Na de bezoekenronde zal de commissie een openbaar eindrapport uitbrengen over de kwaliteit van de gevisiteerde opleidingen. Dat betekent niet dat de commissie een ranglijstje van beste en slechtste opleidingen gaat geven, maar wel dat zij van iedere opleiding de in haar ogen sterkste en zwakste punten noemt en aanbevelingen doet om de zwakke punten te verbeteren.

Geertje Hek

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan.

Mythe en werkelijkheid in de relatie tussen wiskunde en kunst

Is er een speciale relatie tussen wiskunde en kunst? Over deze vraag verschillen de meningen. Om een bijdrage te leveren aan een antwoord hierop heeft het Studium Generale van de Universiteit Utrecht in samenwerking met het Wiskundig Genootschap dit voorjaar een serie van vier lezingen georganiseerd onder de titel *Mythe en werkelijkheid in de relatie tussen wiskunde en kunst*.

De eerste lezing in de reeks, getiteld *Illustratie, getal en harmonie in de muziek van Johann Sebastian Bach*, werd verzorgd door Frans Oort, deskundig in en gefascineerd door het werk van Bach. Hij betoogt dat, wanneer we kijken naar de argumenten die zelfs ook Bachkenners geven om aan te tonen dat Bach getallen in zijn muziek heeft gecodeerd, wij niets anders zien dan een gegoochel met cijfers en een willekeur aan methoden. Hij geeft een voorbeeld: het aantal maten in de 'Hohe Messe' is gelijk aan $2192 = 8 \times 2 \times 137 = \infty - B - ACH$. Dat op deze wijze vele namen te verkrijgen zijn zal iedereen weten die gewend is met getallen te werken. Volgens de spreker is het dus een oninteressante mythe waar we verder niet over hoeven te praten. Hij vervolgt zijn lezing met een analyse van zijn eigen onderzoek in de muziek van Bach, waarbij hij ter illustratie van zijn beweringen prachtige muziekstukken laat horen.

In de tweede lezing werd op overtuigende wijze *De mythe van de gulden snede* door de wijsgeer Albert van der Schoot uiteengezet. Deze verhouding, die voor het eerst in het werk van Euclides wordt gevonden, vinden we tot aan de negentiende eeuw slechts zeer sporadisch in teksten terug: pas in de dertiende eeuw wordt zij door Campanus 'wonderbaarlijk' genoemd. Pacioli bewijst rond 1500 dat zij goddelijk is en Kepler noemt de verhouding een van de schatkamers van de meetkunde en toont de relatie met de reeks van Fibonacci aan. Hiermee zijn dan ook alle gevonden verwijzingen in de literatuur van vóór 1800 genoemd. Pas in de negentiende eeuw ontstaat de cultus rond de gulden snede en wordt zij overal in de klassieke architectuur, de kunst en in het menselijk lichaam onterecht herkend.

Waren de eerste twee lezingen in de serie ontkrachtigingen van de relatie tussen wiskunde en kunst, wellicht zullen de laatste twee lezingen hier wel iets van laten zien. Een verslag hiervan volgt in het septembernummer van het Nieuw Archief. *Barbara van den Berg*

Kaleidoscoopdag 2001

Jaarlijks wordt onder auspiciën van het Wiskundig Genootschap een Kaleidoscoopdag georganiseerd. Dit evenement is bedoeld voor Nederlandse wiskundestudenten en wordt georganiseerd door een studievereniging, elk jaar een andere. De Kaleidoscoopdag 2001 had als thema Cryptografie en vond plaats op 3 mei aan de Universiteit Twente.

Er waren vijf interessante voordrachten. Roelse (TUE) belichtte algemene principes in de cryptografie. Gelbord (KPN Research) besprak de beveiliging van UMTS en het algoritme dat daarvoor gebruikt wordt. De voordracht van Matthijs Coster (Defensie) ging over het gebruik van elliptische krommen in de cryptografie, waarbij nogal diep ingegaan werd op de wiskundige achtergronden. Veugen (TNO-FEL) had een leuke powerpointpresentatie in elkaar gezet over de beveiliging van elektronisch geld. Job Oostveen (Philips Research) sprak over digitale watermerken in audio en video — misschien iets minder wiskundig, maar wel interessant en actueel.

De Kaleidoscoopdag was een leuke en geslaagde dag. De organisatie was in handen van de studievereniging *Abacus*, die het programma tot in de puntjes voorbereid had. Er waren ongeveer 130 bezoekers,

waarvan de meesten uit Enschede kwamen. Verder was er een forse groep uit Eindhoven en kleinere groepjes uit Groningen, Delft en Nijmegen. De meeste bezoekers waren student, maar er waren ook medewerkers en een enkele vwo-docent die zijn/haar vakantie opofferde voor deze Kaleidoscoopdag.

Jeroen van Oostrum



ICT 2001

Op 28 april vond in Utrecht de conferentie ICT 2001 plaats. Doel van de conferentie was na te gaan wat vijf jaar ICT het middelbaar onderwijs opgeleverd heeft. Wat is de stand van zaken? Wat is de rol van internet? Welke rol heeft de docent? En: welke dingen worden daadwerkelijk al gebruikt in het onderwijs?

De conferentie werd geopend door Henk Staal (EFA), die de deelnemers van hun klikvrees af probeerde te helpen. Daarna bezochten de deelnemers vier workshops naar keuze. Onderwerpen: praktische opdrachten & internet, computeralgebra in de klas, statistische applets, modelleren met spreadsheets, de symbolische rekenmachine, Cabri.

In de workshops kwamen regelmatig de praktische opdrachten (PO's) uit de Tweede Fase aan de orde. Hans Klein uit Haren presenteerde een zorgvuldig gedetailleerde praktische opdracht over het modelleren van groei met Excel. In theorie zijn praktische opdrachten een creatieve uitdaging voor de docent (eigen onderwijs ontwerpen). In de praktijk vormen ze een extra belasting. In het rooster wordt hiervoor geen extra tijd beschikbaar gemaakt en de organisatie ervan vereist veel zorg; leerlingen kunnen niet zomaar met een open onderzoeksopdracht het bos ingestuurd worden.

Marian Kollenveld, voorzitter van de NVvW, vond dat praktische opdrachten te veel gezien worden als een op zichzelf staand onderdeel. Volgens haar waren PO's oorspronkelijk bedoeld als alternatieve *werkvorm*. Om de docenten te ontlasten suggereerde zij reguliere lesstof (bijvoorbeeld een hoofdstuk) in de vorm van een praktische opdracht te gieten. Hiermee is nog maar weinig ervaring opgedaan.

Universiteiten zouden docenten bij kunnen staan door in dit 'gat in de markt' te springen: op universiteiten heeft men meer expertise en tijd om leerlingen bij te staan bij het uitdiepen van wiskundige onderwerpen. Bovendien hebben universiteiten belang bij geïnteresseerde leerlingen. De RUG en de TUE zijn hier al mee bezig, zie de verwijzingen hieronder.

De conferentie werd afsloten door Anne van Streun. Hij signaleerde een aantal trends: leerlingen ontwikkelen een klik-klik leerstijl en gebruiken internet voornamelijk thuis (95% van de leerlingen beschikt thuis over internet). Ook de beroepsuitoefening van docenten veran-

dert. Docenten moeten steeds meer samenwerken op sectieniveau, eigen onderwijs ontwerpen en netwerken.

De organisatie van ICT 2001 was in handen van Peter van Wijk (Algemeen Pedagogisch Studiecentrum) en Martin van Reeuwijk (Freudenthal Instituut). Het was een goed georganiseerde en succesvolle onderwijsconferentie, de eerste Nederlandse conferentie van deze soort. De voorinschrijving was al snel overtekend, ICT 2001 voorzag dus duidelijk in een behoefte. Op naar ICT 2002.

Chris Zaai



foto: Martin van Reeuwijk

Willem van Ravenstijn tijdens zijn presentatie 'Praktische opdrachten en internet'

Meer informatie

<http://www.fi.uu.nl/ict2001>

<http://www.betasteunpunt.rug.nl>

<http://www.win.tue.nl/~jessers/aansluiting>

<http://skyline.www.cistron.nl/docenten>

Gauss-dag in Gent

In 1801 is de *Disquisitiones arithmeticae* van Carl Friedrich Gauss (1777–1855) verschenen. Op 2 mei 2001 is het 200-jarig bestaan van dit meesterwerk in Gent gevierd met een speciale getaltheorie-dag. Op de schitterende dertiende-eeuwse locatie *Het Pand*, een conferentiecentrum van de Universiteit Gent, gaven 5 sprekers voor een gehoor van 60 mensen de lijn aan die rechtstreeks loopt van Gauss' werk naar modern onderzoek.

De eerste spreker, Norbert Schappacher, legde uit dat de *Disquisitiones* een mijlpaal vormde in de sterke zin van het woord: het bepaalde wat getaltheorie was en heeft het hele vak op een hoger niveau gebracht. Kronecker verwees ernaar als 'Buch der Bücher', en pas in 1897 met het verschijnen van Hilbert's *Zahlbericht* kreeg de *Disquisitiones* enige concurrentie als bijbel van de getaltheorie. Het boek behandelt twee grote thema's: congruenties en homogene vormen. Onder de eerste valt de kleine stelling van Fermat, kwadratische reciprociteit en het tellen van punten op krommen over eindige lichamen. Onder het tweede vallen vragen over klassengroepen en cyclotomische lichamen, die na Gauss via Kummer en Dedekind tot de ontwikkeling van de algebraïsche getaltheorie geleid hebben.

Na een smakelijke lunch volgden de middagsprekers Frits Beukers, Gerard van der Geer, Loïc Merel en Don Zagier. Zij belichtten elk een aantal onderwerpen uit het hedendaags onderzoek die een direct vervolg zijn van Gauss' werk, dan wel sterk geïnspireerd zijn door gedeelten uit de *Disquisitiones*.

De perfecte organisatie van deze dag, inclusief orgelmuziek op de

achtergrond tijdens de pauzes, was in handen van de vakgroep Zuivere Wiskunde en Computeralgebra van de Universiteit Gent. Zowel in Nederland als in België zijn nationale seminaria actief op het gebied van getaltheorie en algebraïsche meetkunde. Door de speciale samenwerking tussen Gent (Jan van Geel, Gunther Cornelissen) en Groningen (Marius van der Put, Jaap Top) zijn deze twee groepen voor deze gelegenheid bij elkaar gebracht. Don Zagier verwees al naar het vervolg: over 50 jaar nemen we weer de stand van zaken rond Gauss' meesterwerk op.

Bart de Smit



foto: Bart de Smit

Don Zagier in actie

Evaluatie tweede fase voortgezet onderwijs

Op 25 april 2001 heeft de staatssecretaris het verslag van de tweede peiling in het schooljaar 2000/2001 van de *Monitoring Tweede Fase* aan de tweede kamer gestuurd. In de begeleidende brief kondigt ze aan de scholen mee te delen dat de tijdelijke maatregelen met een jaar verlengd worden. Ze gelden dan ook voor de groep die in het schooljaar 2002-2003 in de vierde klas van het HAVO of van het VWO zit.

Interessant citaat uit de brief: "De aard van de ervaren overladenheid is nog niet duidelijk. Zo staat het nog niet vast dat het programma daarvan de oorzaak is. Het lijkt er bijvoorbeeld op dat wiskunde in vrije brede kring als overladen wordt ervaren, maar het lukt nauwelijks om voorstellen te verkrijgen voor onderwerpen die uit het programma verwijderd kunnen worden. Vakdeskundigen zien een oplossing juist in (nog) meer uren voor het vak wiskunde."

In brief van het Tweede Fase Adviespunt aan de staatssecretaris staan een aantal interessante passages: "In het kader van dit knelpunt (overladenheid) valt nog op te merken dat in de ogen van veel scholen de formele studielast van sommige (deel)vakken niet in overeenstemming is met de werkelijke studielast. [...] Waar dat mogelijk is, zijn tussentijdse ingrepen echter ook zeer gewenst. Met name wordt dan gedacht aan ingrepen in de programma's voor wiskunde B (deelvak en heel vak) en wiskunde A (deelvak en heel vak). Daarnaast worden ook andere vakken frequent genoemd, maar de problemen bij de genoemde wiskundeprogramma's zijn het meest knellend. Ik adviseer u daarom wederom te bekijken of tussentijdse ingrepen mogelijk zijn waardoor de programma's studeerbaarder worden. De problemen bij het deelvak wiskunde A op het VWO kunnen bestreden worden door dit deelvak niet centraal te examineren. Vooral organisatorisch zouden de scholen daar zeer mee geholpen zijn."

In het eigenlijke verslag *Monitoring Tweede Fase, 2000-2001 Verslag van Peiling 2 onder Starters '98 en Starters '99* staan veel passages over wiskunde: "Op het beperkt aantal scholen dat extra formatie inzet, gebruikt circa de helft die 'in zijn algemeenheid voor de vakken', op de andere helft wordt hij toebedeeld aan bepaalde vakken. Als men al

extra formatie uit geeft, doet men dat aan allerlei vakken. Er zijn vakken die zelden tot nooit worden genoemd, vakken die wat vaker worden genoemd (Engels, economie, M & O, biologie, natuurkunde¹ en wiskunde A₁) en vakken die relatief vaak worden genoemd (wiskunde A_{1,2}, B₁ en B_{1,2}, scheikunde en natuurkunde_{1,2})."

"Als probleemvakken op het VWO worden de deeltalen en wiskunde B_{1,2} worden het meest genoemd (door ongeveer 60 procent van de scholen). Wiskunde A₁ en A_{1,2} en natuurkunde 1,2 wordt door zo'n 35 procent van de scholen als probleem gezien. Scheikunde 1,2 door ongeveer een kwart van de scholen. De problemen zijn hetzelfde als op het HAVO en ook de oplossingsrichtingen die scholen kiezen, wijken niet van het HAVO af. En ook hier kijkt men vooral naar de overheid, waarvan men hoopt dat die de opdracht zal geven verder in de programma's te schrappen."

"Op de ene school constateren docenten een knelpunt, op de andere leerlingen en op een derde de schoolleiding. Opgeteld wordt het meest door docenten een probleem gemeld, dan door de schoolleiding en dan door leerlingen. Bij de wiskundeprogramma's worden de problemen echter zeer vaak ook door de leerlingen opgemerkt."

"In een aantal toelichtingen wordt gemopperd over de lastige organiseerbaarheid van deelvakken en heelvakken: bij wiskunde en economie bij voorbeeld valt men er over dat deze vakken geen echte stapelvakken zijn."

In de nabesprekingen meent de commissie dat er een categorie leerlingen is die door aanleg geen wiskundeprogramma van het huidige verlangde niveau meer aankan. Men is van mening dat tussentijdse ingrepen gewenst zijn, in het bijzonder bij het vak Wiskunde B.

bron: *WiskundeB-brief* (<http://huizen.dds.nl/~we-brief>)

Meer informatie

<http://www.minocw.nl/brief2k/2001/14494.doc>

<http://www.minocw.nl/brief2k/2001/14494a.doc>

<http://www.minocw.nl/brief2k/2001/14494b.doc>

NMC 2001, dagboek van een congresganger

Donderdag Met een extra vroege trein naar Amsterdam-Zuid. Even snel naar 'de overkant' om mijn e-mail te lezen en dan weer snel terug om de congresspullen op te halen. Het begin van de openingsvoordracht deed mij aan een verhaal over Jerry Springer denken. Toen deze burgemeester van Cincinnati was, deed hij, naar eigen zeggen, om lastige vragen te ontwijken alsof de microfoons niet werkten. Toen Eric Verheul de audio onder controle had, hield hij een verhaal over cryptografie waarvan ik heb overgehouden dat het met machtsverheffen in groepen kan en dat iedere Ford-eigenaar elke andere Ford op slot kan doen.

Rond het middaguur heb ik de (aangemelde) voordrachten van twee AIO's van de groep ATM van de VU bijgewoond. Na de lunch snel naar het W&N-gebouw om te zien of mijn tentamen goed opgestart was en bijna at random drie lezingen uit de symposia Wiskunde Toegepast, Discrete Wiskunde en Cryptografie bezocht. De lezingen begonnen meteen uit te lopen; gelukkig wel zodanig dat ik bij iedere volgende lezing toch op tijd was. Na mijn eigen lezing en die van Berd (promovendus uit Delft) vertelde Lex Schrijver ons over eigenwaarden van grafen, goed te volgen en informatief. Na de receptie naar huis.

Vrijdag Joost Hulshof kon mijn aandacht helaas niet lang vasthouden: mijn werkgeheugen kan niet goed met grote hoeveelheden formules overweg. Het was toch geen verloren uur: ik heb acht virtuele dollars

verdiend door een 'Mathematical Review' te schrijven.

Luiheid en een gebrek aan interesse voor de andere onderwerpen hielden mij de rest van de dag in het Auditorium waar ik me bij de geschiedenis- en onderwijs-symposia prima heb vermaakt. Wat bleef hangen: gekunstelde opgaven zijn van alle dag (Kool); enige nuancering over het studiehuis en de twee-fasenstructuur is op zijn plaats (Hoogland) en een antwoord is pas exact als er 'exact' bij staat (van Maanen). De slotvoordracht van Aad van der Vaart was interessant maar er had wat meer dramatiek in gemogen: Bayesianen die maximum likelihood schatters met messen achterna zaten (of omgekeerd), daar had ik me nou zo op verheugd.

Nawoord Het congres maakte op mij een dichtgetimmerde indruk, waarbij het leek of de aangemelde voordrachten in wat verloren uren waren weggemoffeld. Het aantal minisymposia was mijns inziens te groot. Gooi het congres open! Laat iedereen zich met een voordracht aanmelden opdat ook de organisatoren verrast worden door het aanbod. Neem hierbij de suggestie over die onder de organisatoren geopperd is: een prijs voor de beste aangemelde voordracht. Dan kom ik volgend jaar mijn best doen die te winnen.

K.P. Hart

Pange lingua

Op 18 maart jongstleden vond in Cristofori te Amsterdam een concert plaats met werken van de 38-jarige Amsterdamse componist Egmont Swaan. Het was opgedragen aan de nagedachtenis van een vriend en leeftijdsgenoot van de componist, Marinus van der Heuvel, die geheel onverwacht op een hete zomernacht in 1998 overleed.

Marinus, een bij de VU afgestudeerd wiskundige, vond zijn intellectuele uitdaging en inspiratie buiten zijn dagelijkse werk in dienst van de Hoogovens. Naast een interesse voor oosterse filosofie en levenswijsheden – hij behoorde zelfs enige tijd tot de Bhagwan – bleef hij ook een warme belangstelling voor wiskunde koesteren. Als 'internettoehoorder' volgde Marinus in 1997 een college Elliptische krommen bij de inmiddels naar Leiden verhuisde UvA-getaltheoriegroep en bezocht hij een hieraan gewijde zomerschool in Italië.

Al deze aspecten moesten in dit herdenkingsconcert aan de orde komen. De hermetica, een hobby van zowel Marinus als de componist, komt met een eigen tekst, de *Tabula Smaragdina*, de wiskunde komt met een eigen taal van *formules*. Beiden werden door Egmont Swaan op muziek gezet: de Tabula in de vorm van een Completen-dienst, de elliptische krommen in een compositie voor tenor, viool en piano. Een gezongen elliptische kromme in een vijftalige compositie is geen alledaagse verschijning en Egmont Swaan voerde ter verduidelijking drie sprekers op in het programma voor de pauze. In eigen persoon lichtte hij middels een allegorisch verhaal de aard van het concert toe. Jeron Berkhout bracht Hermes Trismegistos, hermetische gnostiek en spirituele alchemie ter sprake. Auteur dezes had in aansluiting op zijn rol als wiskundig adviseur van de componist de aangename taak het gehoor op de Frans gezongen versie van de Weierstrass-normaalvorm voor elliptische krommen voor te bereiden. Het publiek stelde de ongebruikelijke programmastructuur zichtbaar op prijs. Het concert werd geen smartelijke herdenkingsmis, maar het trotse geschenk van een componist in de kracht van zijn leven aan een te vroeg overleden vriend.

Peter Stevenhagen

Nationale Wiskunde Dagen 2001

Op 2 en 3 februari jongstleden vonden de Nationale Wiskunde Dagen 2001 plaats in het Leeuwenhorst Congres Centrum in Noordwijkerhout. Dit jaarlijks terugkerend evenement wordt georganiseerd door het Freudenthal Instituut.

Het was de zevende editie van dit inmiddels ijersterke evenement. Dit jaar waren er rond de 500 deelnemers: wiskundeleraren, academici, didactici en tal van andere belangstellenden. Doel van de NWD is om wiskundeleraren een breed, actueel en aantrekkelijk programma van lezingen te bieden over uiteenlopende onderwerpen waarin wiskunde een belangrijke rol speelt. Ook de wiskunde zelf en haar geschiedenis komen daarbij vanzelfsprekend aan bod. Op de NWD gaat het in eerste instantie om de wiskundige ontwikkelingen en in mindere mate om de didactische en onderwijskundige vernieuwingen.

De voorbereidingen voor de NWD starten een jaar tevoren. Een programmacommissie en een uitvoerend comité beslissen over de thema's en de uit te nodigen sprekers. Van de sprekers wordt een aantrekkelijke presentatie verwacht. Het is daarom niet eenvoudig om het hoge niveau van vorige NWD's te blijven evenaren. Dit jaar echter was de kwaliteit onovertroffen.

De NWD van 2001 bood workshops rond zes verschillende thema's. Daarnaast waren er vier plenaire lezingen, een informatiemarkt, een video over Paul Erdős, software-demonstraties meetkunde en algebra, muziek ('line dancing' en countrymuziek) en een 'Funrun' voor hardlopers. Deze laatste vond plaats in de vroege ochtend, in een besneeuwd landschap dat geleidelijk uit het duister tevoorschijn kwam.

De plenaire voordrachten spelen een belangrijke rol in het programma. De openingsvoordracht heeft typisch een strenger wiskundig karakter en werd dit jaar gegeven door Peter Stevenhagen (Leiden) over het onderwerp 'Harmonie in getallen'. Hij liet zien dat eenvoudige getaltheoretische vragen aanleiding kunnen zijn tot spelen met vermoedens, rekenen met de computer, waarna dan soms de basis is gelegd voor een meer theoretische aanpak. Soms echter is de vraagstelling veel ingewikkelder dan zij op het eerste gezicht lijkt. De vrijdagmiddagvoordracht werd gegeven door Agnes Verweij (Delft). Zij besprak de wiskunde achter afbeeldingen geschilderd op de binnenkant van zeventiende eeuwse 'perspectieffkastjes'. Aan de hand van een afbeelding op de binnenkant van een gebaksdooze uit 1980 kon het publiek deze wiskunde aan den lijve ondervinden. De vrijdagavondvoordracht kwam voor rekening van Sir Christopher Zeeman (Oxford), die bij de eerste NWD furore had gemaakt. Hij besprak toepassingen van de catastrofe-theorie in de natuurkunde, de biologie, de geneeskunde, de economie en de sociale wetenschappen. Daarbij bleek zijn Engelse humoristische ondertoon bijzonder aanstekelijk. Na afloop werd de jarige Zeeman verrast met een verjaarslied, een zee van 'plastic zakjes van textielwinkel Zeeman' en een glas champagne. De slotvoordracht werd verzorgd door Heinz-Otto Peitgen (Bremen), die aan de hand van een prachtige power-point presentatie liet zien dat fractalen en chaos op natuurlijke wijze ontstaan uit het vouwen van papieren stroken. Via substituties en Cayley-bomen leidde dit zelfs tot transcendente getallen. Zijn enthousiasme was zo groot dat hij zijn spreektijd ver overschreed. Maar het publiek heeft hem dat ruimschoots vergeven.

De Nationale Wiskunde Dagen 2002 vinden plaats op 1 en 2 februari. Noteer dit alvast in uw agenda!

Frank den Hollander

Meer informatie

<http://www.fi.uu.nl/nwd> (kijk in het NWD Handblad van 3/2/2001)

Wiskundegedicht wint poëziewedstrijd

Vrijdag 9 februari werd in 'Het Patronaat' in Haarlem de poëziewedstrijd voor jongeren 'Zo gedacht, zo gedicht' gehouden. Ongeveer 8600 jongeren uit heel Nederland hebben meegedaan aan dit poëzieproject en van deze groep zonden 550 jongeren een gedicht in. Het thema van de wedstrijd was 'Kruip in een beeld'. De jury, bestaande uit Sanne Wallis de Vries (cabaretière), Mustafa Stitou (dichter) en Jop van Bennekom (vormgever), maakte bekend dat uit de ruim 550 inzendingen Daan van Schalkwijk (17 jaar) uit Laren de hoofdprijs had gewonnen.

Opmerkelijk is het onderwerp van het winnende gedicht, namelijk oneindige iteraties. Daan van Schalkwijk: "Ik had nooit gedacht dat ze mijn gedicht mooi zouden vinden. Het gaat over wiskunde, dat is een hobby van me. [...] Iteratie betekent trouwens het proces van herhaling, maar ook reis. De complexe patronen van fractals, die altijd weer andere patronen geven als je er op inzoomt, daar gaat het over."

De jury noemde zijn gedicht *Patronen*: "Een heldere overpeinzing over het geluksgevoel dat een beeld, om preciezer te zijn: een patroon, bij de beschouwer op kan wekken. Hierop legt de dichter trefzeker de vinger: de herhaling is saai, maar in de herhaling ligt ook de waarborg van een oneindige reis besloten." De gedichten zijn te lezen op <http://www.kcnh.nl/zgzig/>.

bron: CJP-magazine PLUG

(advertentie)

Pythagoras, wiskundetijdschrift voor jongeren, zoekt:

EINDREDACTEUR (m/v)

Per september 2001 zoekt Pythagoras: een creatieve duizendpoot met affiniteit voor wiskunde, die zijn/haar steentje wil bijdragen aan de totstandkoming van een enthousiasmerend tijdschrift.

Functie-omschrijving

- samenstellen van de nummers i.o.m. de hoofdredactie
- opmaakklaar maken van door de redactie aangeleverde kopij
- standarisieren van tekstbestanden en illustraties
- redigeren van teksten en plaatjes
- materiaal aanleveren aan de vormgevers
- drukproeven nakijken

Geboden Een betaalde functie (1 dag per week), zo mogelijk via detachering

Gevraagd

- affiniteit met de doelstelling van Pythagoras: jongeren kennis laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde
- goede beheersing van de Nederlandse taal
- redactionele vaardigheden, met name wat betreft de presentatie van wiskundig materiaal

- kunnen omgaan met deadlines

- goede communicatieve vaardigheden

- kunnen omgaan met computers (tekstverwerking, plaatjes maken en bewerken, bestanden down- en uploaden van internet)

Standplaats Leiden (UL) of Amsterdam (UvA). Thuiswerken behoort tot de mogelijkheden, maar een regelmatige aanwezigheid op de bureauredactie (Leiden of Amsterdam) is gewenst.

Meer informatie

Chris Zaal (071-5277121, zaal@math.leidenuniv.nl)

Frits Beukers (030-2531419, beukers@math.uu.nl)

Jan van de Craats (076-5273816, jcr@euronet.nl)

Marinus Kaashoek

Vrije Universiteit, Faculteit der Exacte Wetenschappen,
Divisie Wiskunde en Informatica, De Boelelaan 1081,
1081 HV Amsterdam
kaash@cs.vu.nl

Laudatio voor Ciprian Foias

Op 20 oktober 2000 verleende de Vrije Universiteit ter gelegenheid van haar 120ste dies natalis een eredoctoraat aan de wiskundige Ciprian Foias (Bloomington, Indiana). Erepromotor was M.A. Kaashoek. Foias ontving deze onderscheiding voor zijn gehele wetenschappelijke oeuvre. De onderstaande laudatio is een bewerking van een tekst die eerder verscheen in het programmaboekje bij de betreffende dies-viering van de Vrije Universiteit.

Ciprian Foias was tot voor kort als 'Distinguished Professor of Mathematics' verbonden aan Indiana University te Bloomington, Indiana, USA. Hij is thans emeritus en deeltijdhoogleraar aan de Texas A&M University. Foias is in 1933 in Roemenië geboren en studeerde wiskunde aan de Universiteit van Boekarest van 1951 tot 1955. In die jaren was zijn vader (een arts) om politieke redenen geïnterneerd en de communistische autoriteiten zouden Foias het recht om af te studeren hebben ontzegd als professor M. Nicolescu, één van de oudere en invloedrijke wiskunde-hoogleraren, niet tussenbeide was gekomen. Door met aftreden te dreigen, zorgde Nicolescu ervoor dat Foias zijn studie kon voltooien. Van 1955 tot 1958 was Foias als instructeur verbonden aan de afdeling Wiskunde van de Universiteit van Boekarest. In 1957 voltooide hij zijn dissertatie die hij, weer door tegenwerking van de autoriteiten, pas in 1962 mocht verdedigen. In 1958 werd hij staflid van het Mathematisch Instituut van de Roemeense Academie van Wetenschappen en acht jaar later keerde hij terug naar de Universiteit van Boekarest als hoogleraar wiskunde. In 1968

ontving hij de eretitel van 'doctor docent' als waardering voor zijn wetenschappelijke prestaties en internationale reputatie. Ook in deze jaren bleef zijn relatie met de autoriteiten gespannen. Op de Internationale Mathematische Congressen van Nice (1970) en Helsinki (1978) gaf hij voordrachten op uitnodiging. In 1978 keerde hij uit Helsinki niet terug naar Roemenië, maar vluchtte met hulp van Franse wiskundigen naar Parijs, waar hij ook enige tijd onderdook. In hetzelfde jaar nog werd hij benoemd tot hoogleraar wiskunde aan de Université de Paris-Sud (Orsay) en een jaar later volgde een benoeming tot hoogleraar aan Indiana University te Bloomington, Indiana. Zijn keuze voor Bloomington, waar hij werd benoemd tot 'Distinguished Professor', werd mede bepaald door veiligheidsoverwegingen en de sterke positie van deze instelling op het gebied van de mathematische analyse. Foias is sinds een paar jaar erelid van de Academies van Wetenschappen van Hongarije en Roemenië.

Foias heeft meer dan 380 tijdschrift-publicaties op zijn naam staan en hij is auteur of co-auteur van tien boeken. Officieel heeft hij 21 promovendi begeleid, maar het aantal dissertaties dat onder zijn leiding is geschreven is groter (niet al zijn Roemeense studenten konden bij hem promoveren). Enkele van zijn oud-studenten hebben invloedrijke posities binnen de wiskunde verworven, zowel in Europa als in de Verenigde Staten. Zijn invloed op de Roemeense wiskundige gemeenschap is tot op heden, vele jaren na zijn vertrek uit Roemenië, nog waarneembaar. Een ander bijzonderheid, die niet onvermeld mag

blijven, betreft zijn speciale aandacht en zorg voor en begeleiding van jong mathematisch talent.

Wetenschappelijk werk

Het wetenschappelijk werk van Foias is in meerdere opzichten van bijzondere betekenis. Grensverleggend binnen de wiskunde en grensoverschrijdend naar ander disciplines zijn karakteristieken van zijn werk. Hij heeft uitzonderlijke bijdragen geleverd aan de fundamentele wiskunde, met name aan de functionaalanalyse, de operatorentheorie en de theorie van oneindig-dimensionale dynamische systemen. Daarnaast omvat zijn werk belangrijke toepassingen, met name in de fysica (vloeistofdynamica en turbulentietheorie) en de ingenieurswetenschappen (zoals elektrotechniek en meet- en regeltechniek), maar ook in de economische wetenschappen. Zijn belangstelling voor de economische wetenschappen heeft onder andere geleid tot een fundamentele bijdrage aan de neoklassieke economische theorie van Ramsey uit de jaren twintig van de vorige eeuw. Foias leverde het eerste wiskundige bewijs dat deze theorie mathematisch consistent is. De traditionele tegenstelling tussen zuivere en toegepaste wiskunde is in zijn werk afwezig. Een blik op zijn lijst van publicaties [1] geeft de lezer een beeld van de breedte van zijn werkterrein. Ook zijn lidmaatschap van redacties van internationale tijdschriften, waaronder *Economic Theory* en het zeer vooraanstaande *Journal of Functional Analysis*, geeft een indruk van zijn sterke en brede wetenschappelijke positie.



Ciprian Foias

foto: Anje Kirsch, Amsterdam

Operatorentheorie

Foias is één van de grote trekkers van de moderne operatorentheorie. Het boek *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert space*, dat hij in 1967, samen met de Hongaarse wiskundige Béla Szökefalvi-Nagy schreef, geldt al jaren als dé 'gereedschapskist' voor dit vakgebied. De door hen beiden ontwikkelde stelling over het optillen van de commutant geniet inmiddels ook buiten de wiskunde een grote bekendheid, met name onder ingenieurs die werkzaam zijn in de regeltheorie of in de elektrotechniek. Deze stelling, die de reconstructie van operatoren op basis van partiële informatie mogelijk maakt en voortbouwt op eerder werk van Sarason [3], verschaft een natuurlijk meetkundig raamwerk voor de behandeling van klassieke en moderne interpolatieproblemen met metrische beperkingen. Het succes van de in de tachtiger jaren ontworpen H-oneindig regeltheorie, waaraan Foias ook zelf het nodige heeft bijgedragen, is zonder die stelling over het optillen van de commutant niet goed denkbaar. Zijn expertise op dit terrein culmineerde in *The commutant lifting approach to interpolation problems*, een boek dat in 1990 verscheen met Frazho als co-auteur. Een andere zeer vruchtbare bijdrage van Foias betreft de approximatie-theorie van operatoren op een Hilbertruimte. Zijn be-

schrijving in 1973 (uitgewerkt in samenwerking met Apostol, Voiculescu en Zsidó) van quasi-triangulariteit als een structurele eigenschap, geldt als een doorbraak. Ook moeten zijn bijdragen aan de ontwikkeling van het begrip 'ontbindbaarheid' [2] voor operatoren genoemd worden. Deze zijn zeer vruchtbaar gebleken in de spectraaltheorie van niet-zelfgeadjungeerde operatoren.

De Navier-Stokesvergelijking

Een tweede gebied waarop Foias een wereldnaam heeft verworven betreft de theorie van oneindig-dimensionale dynamische systemen met haar toepassingen in de mathematische fysica. Kenmerkend voor dit terrein is dat de dimensie van de toestandsruimte oneindig is. Zijn onderzoek aan de Navier-Stokesvergelijking (zie [4], [5]) is dat van een pionier. Als eerste bewees hij existentie- en uniciteitstellingen voor statistische oplossingen van die vergelijking. Hij was ook de eerste die er in slaagde het beginwaarde probleem van de bijbehorende Hopf-vergelijking op te lossen. Samen met het latere werk van Vishik en Fursikov kon hiermee het mathematische raamwerk voor de turbulentietheorie worden ontworpen. Opmerkelijk is de beslissende rol van fundamentele principes uit de functionaalanalyse in de bewijsvoering. Zijn

onderzoek naar de kwalitatieve eigenschappen van deterministische oplossingen van de Navier-Stokesvergelijking culmineerde in een fundamentele studie van meetkundige eigenschappen van invariante verzamelingen. Voor twee dimensies vond hij, samen met Constantin en Temam, het eerste bewijs voor het eindig zijn van het aantal vrijheidsgraden van een turbulente stroming, in meer wiskundige taal: het eindig zijn van de fractale dimensie van de globale attractor voor de Navier-Stokesvergelijking. Dit was een doorbraak die nieuwe hoop gaf deze vraag naar het aantal vrijheidsgraden ook in drie dimensies te kunnen beantwoorden (één van de grote open problemen in de toegepaste wiskunde). Als vervolg hierop ontwikkelde Foias samen met anderen een algemene en verstrekkende methode om voor dissipatieve partiële differentiaalvergelijkingen het aantal vrijheidsgraden van de globale aantrekkers te schatten. Een andere mooi resultaat op dit terrein was de ontwikkeling in 1988 door Foias, samen met Teman en Sell, van het concept van een trage variëteit en het bewijs dat deze variëteiten veelvuldig voorkomen. Het bestaan van zulke eindig-dimensionale variëteiten opent een veel belovende toegang tot het numeriek berekenen van oplossingen. Veel van dit werk heeft fysische betekenis en Foias heeft, in samenwerking met Manley, tal van die connecties uitgewerkt.

Nederland

Foias is een graag geziene gast in Nederland. In 1994 was hij, in het kader van het NWO-stimulansprogramma voor de onderzoekschool The Thomas Stieltjes Institute for Mathematics, voor zes weken als gasthoogleraar verbonden aan de vakgroep Wiskunde van de Vrije Universiteit. Vorig jaar keerde hij voor twee maanden terug als Stieltjes Visiting Professor 2000. Zijn passie voor wiskunde en zijn welgemeende aandacht voor de mensen om hem heen geven een aparte dimensie aan zijn wetenschappelijke werkomgeving. Zijn eredoctoraat van de Vrije Universiteit werd op gepaste wijze gevierd met een Analyse Conferentie die op 18 en 19 oktober 2000 heeft plaatsgevonden. 

Noten

- 1 Zie bijvoorbeeld Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), 681–697.
- 2 Zie C. Foias and I. Colojoara, *Theory of generalized spectral operators*, Gordon and Breach, New York, 1968.
- 3 Zie het artikel *The General Commutant Extension Problem* elders in dit nummer.
- 4 P. Constantin and C. Foias, *Navier-Stokes Equations*, University of Chicago Press, Chicago, 1978..
- 5 C. Foias, *What do the Navier-Stokes equations tell about turbulence?*, in: *Harmonic analysis and nonlinear differential equations*, Riverside, CA, 1995, pp. 151–180, *Contemp. Math.*, 208, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

Ciprian Foias

Department of Mathematics, Texas A&M University
College Station, Texas 77843

The general commutant extension problem

Interpolatieproblemen kunnen ogenschijnlijk sterk van elkaar verschillen. Veel interpolatieproblemen kunnen worden gezien als speciale gevallen van het zogenaamde probleem van de commuterende uitbreiding. In dit artikel presenteert Ciprian Foias een overzicht van de huidige stand van zaken omtrent dit fundamentele onderwerp van de operatorentheorie. Op dit terrein heeft hij belangrijke bijdragen geleverd. Het onderhavige artikel is gebaseerd op Foias' lezing gegeven aan de Universiteit Leiden, ter ere van zijn benoeming tot Stieltjes Visiting Professor 2000.

The topic of this paper is an open question in Operator Theory which can be traced back to Stieltjes' solution to the moments problems in [22], and which touches several fields of pure and applied Functional Analysis.

Statement of the problem

The General Commutant Extension Problem (GCEP) is formulated as follows (see [10], [7]). Let G and H be (complex) Hilbert spaces and let $S : G \rightarrow G$ and $T : H \rightarrow H$ be two bounded linear operators on G and H , respectively. Let G_0 be a (closed linear) subspace of G , invariant under S and let S_0 be the restriction $S|_{G_0}$ of S to G_0 . Let moreover $A_0 : G_0 \rightarrow H$ be a bounded linear operator, such that

$$A_0 S_0 = T A_0. \quad (1)$$

When does there exist a bounded linear operator $A : G \rightarrow H$, such that

$$A|_{G_0} = A_0 \quad (2a)$$

(i.e. extending A_0), and

$$AS = TA? \quad (2b)$$

In case such an operator A exists, find

$$\alpha = \min \{ \|A\| : A \text{ satisfies (2a) and (2b)} \}. \quad (3)$$

Clearly, without loss of generality we can assume

$$\|S\|, \|T\| \leq 1. \quad (4)$$

Above, $\|\cdot\|$ stands for the operator norm, and as throughout, enough familiarity with the basic concepts in Operator Theory (e.g. as in [15]) is surmised so that further detailed definitions are not deemed necessary. We observe that a solution A to the problem above does not always exist, as illustrated by the following elementary example [2].

$$G = H = \mathbb{C}^2, \quad G_0 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 : x_2 = 0 \right\} \quad (5a)$$

and

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } A_0 x \equiv x \in G_0. \quad (5b)$$

Then (1) holds, but if (2a) holds too, then

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \text{ and } AS = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = TA. \quad (6)$$

The worth of any open problem in mathematics depends, in particular, on the answers one provides to the following questions:

1. Is the problem a hard nut to crack in its own field?
2. Is the problem relevant to other fields of mathematics?
3. Can the solution to the problem be of use in scientific fields beyond pure mathematics?
4. Is there any hope to find a 'good' answer to the problem?

I will present some answers to these questions. A first answer to question 1 is easy to give: for me and some of my collaborators and competitors in Operator Theory, the answer is "yes"; otherwise we would have found a satisfactory solution in the last eight years since we became interested in the problem. The difficulty resides in aiming to give an affirmative answer to both questions 3 and 4; a thorough discussion of the latter question will be given in the last part of the paper. The answers to questions 2 and 3 is twice an emphatic "yes". We will devote the main part of the paper to provide a brief but hopefully instructive argument for this statement.

Interpolation and the GCEP

At the beginning of the past century, Carathéodory considered the following interpolation problem [3]: When does there exist an analytic function $f(z)$ in the unit disk $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ with Taylor expansion

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + O(z^{n+1}), \quad (6a)$$

where $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ are a priori given, and such that

$$\Re f(z) \geq 0 \quad \text{for } z \in \mathbf{D} \quad (6b)$$

Notice that

$$a_k = \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ikt} dt \quad (0 < r < 1, k = 0, 1, \dots, n),$$

so that the problem can be construed as a partial version of Stieltjes's moments problem. Note also that replacing this by

$$f(z) := (f(z) - 1)/(f(z) + 1), \quad (z \in \mathbf{D}), \quad (0)$$

we can consider the equivalent problem, considered by Schur [21], where the condition (6b) is replaced by

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{for } z \in \mathbf{D}. \quad (6c)$$

Schur found the following remarkable solution. If f satisfying (6a) and (6c) exists, then $|a_0| = |f(0)| \leq 1$. If $|a_0| = 1$, then the maximum principle forces $f(z) \equiv a_0$. So if $a_j = 0$, $1 \leq j \leq n$, we have exactly one solution. If not, there is no solution. If $|a_0| < 1$, then

$$\frac{f(z) - a_0}{1 - \bar{a}_0 f(z)} = zg(z) \quad (z \in \mathbf{D}) \quad (7a)$$

where $g(z)$ is analytic in $\mathbf{D}$,

$$g(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_{n-1} z^{n-1} + O(z^n), \quad (7b)$$

$$|g(z)| \leq 1 \quad (z \in \mathbf{D}) \quad (7c)$$

and $b_0 = a_1(1 - |a_0|^2)^{-1}$,

$$b_j = \left(a_{j+1} + \bar{a}_0 \sum_{i=1}^j b_{j-i} a_i \right) / (1 - |a_0|^2) \quad (7d)$$

for $j = 1, 2, \dots, n-1$. This is exactly the same problem but with n replaced by $n-1$. Denote $c_0 = a_0$, $c_1 = b_0$. Let

$$n := n-1, \quad a_j := b_j, \quad 0 \leq j \leq n-1;$$

define b_j as in (7d) and $c_2 := b_0$. If $|c_2| = 1$, check if $b_j = 0$, $1 \leq j \leq n-1$. If not, no solution exists. If $|c_2| < 1$, continue.

This algorithm either stops at the first $c_j \in \bar{\mathbf{D}} \setminus \mathbf{D}$ (where $j \leq n$) or yields the coefficients $c_0, c_1, \dots, c_n$ in $\mathbf{D}$. In the first case the problem either has exactly one solution or none, while in the second case, the solution is an explicit rational function in z and an arbitrary analytic function $g_{\text{last}}(z)$ in $\mathbf{D}$ satisfying (7c).

These Schur coefficients $c_0, c_1, \dots$ have a remarkable geophysical interpretation [18] (see also [8]). Indeed, consider a horizontally multilayered (isotropic linear elastic) medium such that the top layer (0-layer) and the bottom layer ($(n+1)$ -layer) are of infinite width and all contacts along the interfaces are welded. We also consider vertically moving horizontal primary waves (i.e. oscillating in the vertical direction only). At each interface, say the j -interface, a downgoing wave of amplitude $D_j(t)$ will produce an upgoing (i.e. reflected) wave with amplitude $r_j D_j(t)$ and a downgoing wave (i.e. transmitted through the interface) with amplitude $(1 + r_j) D_j(t)$. The coefficient r_j is called the reflection coefficient of the j -interface and $-1 \leq r_j \leq 1$. In fact in nature $|r_j| = 1$ is a very rare occurrence. So we will consider only the case when $-1 < r_j < 1$ for all $j = 0, 1, \dots, n$. For upgoing waves the same holds true but with r_j replaced by $-r_j$. For simplicity, we shall assume that the j -layers (for $j = 1, 2, \dots, n$) are crossed by these waves in .5 units of time. It can be easily proven (see [8], Ch. XVII) that in this case, by producing a vertical oscillation $D(t)$ on the upper side of the 0-interface, one will register at the same site an upgoing wave $V(t)$ of the form

$$V(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j D(t-j)$$

such that the Schur coefficients $c_0, c_1, \dots, c_n$ associated to the Carathéodory-Schur problem (3.1a), (3.1c) are precisely the reflection coefficients $r_0, r_1, \dots, r_n$. Moreover the function

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots \quad (8)$$

is exactly the solution to this problem when $g_{\text{last}}(z) \equiv 0$.

What does the above discussion have to do with the problem formulated at the beginning? In fact, the hidden mathematical background of the last paragraph is an affirmative "good" solution to a particular case of the General Commutant Extension Problem (referred to as GCEP in the sequel), namely

Theorem 1. *If in GCEP, $\|S\| \leq 1$ and T^* is an isometry (i.e. $\|T^*h\| = \|h\|$ for all $h \in H$), then α in formula (3) equals $\|A_0\|$.*

This result is due to Sarason [20] and (in the general form) to Sz.-Nagy et al.[23–24], and is referred to in the literature as the Commutant Lifting Theorem, a name coined by Douglas, Muhly and Pearcy [6]. To see that the Carathéodory-Schur problem (6a), (6c) can be solved by applying Theorem 1, define

$$G = H = \ell_+^2 := \{x = [x_0, x_1, \dots] : x'_j s \in \mathbb{C}, \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\}, \quad (9a)$$

$$G_0 = \{x = [x_0, x_1, \dots] \in \ell_+^2 : x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = 0\}, \quad (9b)$$

$$Tx = Sx = S[x_0, x_1, x_2, \dots] = [x_1, x_2, \dots] \text{ for } x \in G \quad (9c)$$

$$A_0 x = \begin{bmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \cdots & \bar{a}_n & & \\ & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \cdots & \bar{a}_n & \\ & & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \cdots & \bar{a}_n \\ & & & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \cdots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} x \text{ for } x \in G_0. \quad (9d)$$

Note that

$$\|A_0\| = \left\| \begin{bmatrix} \bar{a}_0 & \cdots & \bar{a}_n \\ & \bar{a}_0 & \vdots \\ & & \bar{a}_0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} a_0 & & \\ a_1 & a_0 & \\ \vdots & a_1 & a_0 \\ a_n & \cdots & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \right\|,$$

where the last two norms are those of the corresponding matrices as operators on $\mathbb{C}^{n+1}$. Due to Theorem 1, there exists an $A = \ell_+^2 \mapsto \ell_+^2$ satisfying $\|A\| = \|A_0\|$ and (2a,b). These last two conditions force

$$Ax = \begin{bmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \cdots & \bar{a}_n & \bar{a}_{n+1} & \cdots \\ & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \cdots & \bar{a}_n & \bar{a}_{n+1} & \cdots \\ & & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \cdots & \bar{a}_n & \bar{a}_{n+1} & \cdots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} x \text{ for } x \in \ell_+^2$$

and, setting $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ (for $z \in \mathbb{D}$) we have

$$\sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{D}\} = \|A\| = \|A_0\|. \quad (9d)$$

This is Sarason's way to obtain an optimal solution to the Carathéodory-Schur problem ([26]; see also [8], Ch. X).

Good answers

Theorem 1 turned out to be quite useful to Control Theory. For theoretical guidance and for dimension-free algorithms, especially when transcendental transfer functions cannot be avoided, see [8], Ch. XII or [9], Ch. VII. For a much more engineering oriented approach involving Theorem 1, see [12]. In nonlinear analytic Control Theory as developed in [13], [14] and [11] one has to replace Theorem 1 with a rather complicated causal version of it. It turned out (see [10]) that this version is equivalent to a new particular case of the GCEP, namely

$$S \text{ is isometric;} \quad (10a)$$

$$\{g \in G : \exists n = n(g) \text{ such that } S^n g \in G_0\} \text{ is dense in } G. \quad (10b)$$

The problem has a 'good' solution only in particular cases [10], [17], for instance:

Theorem 2. [10] *If (10a,b) hold and $\ker T := \{h \in H : Th = 0\} = \{0\}$, then GCEP has a solution if and only if there exists a constant $M < \infty$ such that*

$$\|P_{G_n} S^{*n} A_0^* h\| \leq M \|T^{*n} h\| \quad (10c)$$

for all $h \in H, n = 0, 1, 2, \dots$ where P_{G_n} is the orthogonal projection of G onto $G_n = \{g \in G : S^n g \in G_0\}$. In this case (see (3))

$$\alpha = \min\{M : M \text{ as in (10c)}\}. \quad (10d)$$

Another remarkable particular case in which GCEP has a 'good' answer is the following

Theorem 3. [4–5] *Let S and T be isometries. Then GCEP has a solution if and only if there exists a constant $M < \infty$ such that*

$$\|A_0\| \leq M, \quad (11a)$$

$$\|P_{\ker T^{*n}} A_0 g_0\| \leq M \|P_{\ker S^{*n}} g_0\| \quad (11b)$$

for all $g_0 \in G_0, n = 0, 1, \dots$ In this case

$$\alpha = \min\{M : M \text{ as in (11a), (11b)}\}. \quad (11c)$$

In order to give a different type of example, let

$$S_c := P_{G_c} S|_{G_c}, \quad (12a)$$

where $G_c = G \ominus G_0$ is the subspace of G formed by all vectors orthogonal on G_0 ; equivalently,

$$S_c^* = S^*|_{G_c}. \quad (12b)$$

As before, the vertical bar in (12a), (12b) denotes the restriction to the space following the bar, P_{G_c} denotes the orthogonal projection of G onto G_c . Now we can formulate the following particular answer to GCEP:

Theorem 4. [10] *If*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_c^n g\| \geq \theta \|g\| \text{ for } g \in G_c \quad (13)$$

for some $\theta \in (0, 1)$, then the α in (3) exists and satisfies

$$\alpha \leq (1 + \theta^2)^{1/2} \theta^{-1} \|A_0\|. \quad (14)$$

Note that condition (10b) can be reformulated in terms of S_c as follows:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \ker S_c^n \text{ is dense in } G_c, \quad (15)$$

which is the extreme counterpart of (13).

The Commutant Lifting Theorem (i.e., Theorem 1) has two intriguing generalizations, both of which can be viewed as 'good' answers to the GCEP in appropriate cases. The first one is given by the following remarkable results of Treil and Volberg, reformulated in the following

Theorem 5. [25] *If in the GCEP, $\|S\| \leq 1$ and $\|T^* h\| \geq \|h\|$ for all $h \in H$, then $\alpha = \|A_0\|$.*

The second generalization of Theorem 1 (in fact of Theorem 5 as well) is

Theorem 6. [2] *If in the GCEP, $\|S\| \leq 1$ and there exists an operator Ω on H such that*

$$\Omega \geq 0 \text{ (i.e. } (\Omega h, h) \geq 0 \text{)} \quad (16)$$

for all $h \in H$), $T\Omega T^ - \Omega \geq 0$ and $\Omega - A_0 A_0^* \geq 0$, then there exists an A satisfying (1.2a,b) and*

$$AA^* \leq \Omega. \quad (17)$$

Thus in particular $\alpha \leq \|\Omega\|^{1/2}. \quad (18)$

It is clear that Theorem 6 implies Theorem 5 (take $\Omega = I$) and that Theorem 5 implies Theorem 1 (obviously, T^* is an isometry if it satisfies $\|T^*h\| = \|h\|$ for all $h \in H$).

Moreover, the original proof of Theorem 3 was obtained by using Theorem 1, i.e., Theorem 1 implies Theorem 3. The latter can be given also a direct proof (see [9], Ch. XII). Theorem 2 and 4 are quite independent of the other theorems. It is a strange fact (from [1]) that the GCEP reduces to its following particular case:

$$S \text{ is an isometry} \quad (19a)$$

(in fact such that $\|S^{*n}g\| \rightarrow 0$ for all $g \in G$) and

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \ker T^{*n} \text{ is dense in } H. \quad (19b)$$

Moreover, in this case (11b) is still a necessary condition (albeit not sufficient!) for the existence of A in the GCEP.

A disturbing aspect concerning the illustrative list of answers to particular cases of the GCEP provided by Theorems 1–6 is that they are so different that it is hard to imagine one simple general answer to the GCEP which will trivialize these cases. In Von Neumann's opinion, when any portion of mathematics starts looking rather like the delta of a river and no more like the river itself, that may be translated from visual to auditive perception as the swan's last song. In a plain formulation: The General Commutant Extension Problem may not have a 'good' solution at all.

So we should now discuss what is a 'good' solution to the GCEP. However, it is much easier to show what is a 'bad' solution. First remark that to solve the GCEP means to find an explicit way to determine when α in (3) exists and, if so, to compute it. There may be very many ways to do that. For instance, in the next paragraph we will present such a way (see below, Theorem 8), due to C. Gu and myself ([7], § 11). However, this almost complete solution to the GCEP is a good example of a 'bad' answer to the GCEP. For instance, it does not seem to provide a new approach to any of the Theorems 1–6. In fact, it just seems useless.

Bad solutions

In this paragraph (which can be skipped by a casual reader) we will collect some simple facts necessary to prove Theorem 8.

Lemma 1. *The GCEP has a solution A if and only if there exists a bounded linear operator $X : G_c \rightarrow H$ such that*

$$TX - XS_c = A_0 P_{G_0} S|_{G_c}. \quad (20a)$$

In this case

$$A = A_0 P_{G_0} + X P_{G_c}. \quad (20b)$$

The proof is pure elementary algebra once one notices that

$$P_{G_c} S = P_{G_c} S_c. \quad (20c)$$

As an aside one has the following corollary.

Theorem 7. *If the spectra of T and S_c are disjoint, then the GCEP has a unique solution A .*

Indeed in this case (20a) has a unique solution X (see for instance [19]).

Lemma 2. *Let X be a Banach space, $\Gamma : X \rightarrow X$ a bounded linear operator on X and $f \in X^*$ a bounded linear functional on X . Then*

$$f \in \Gamma^* X^* \quad (21a)$$

if and only if there exists a constant $M < \infty$ such that

$$|f(x)| \leq M \|\Gamma x\| \text{ for all } x \in X. \quad (21b)$$

It is clear that if $f = \Gamma^* g$ with some $g \in X^*$, then (21b) holds with $M = \|g\|$. For constructing such a g , if (21b) holds, apply the Hahn-Banach theorem to the functional h defined on ΓX by $h(\Gamma x) = f(x)$, $x \in X$.

Denote by X the space $\sigma_1(H, G_c)$ of all finite trace operators $F : H \rightarrow G_c$, i.e. such that $F^* F$ has the form

$$F^* F h = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j(h, f_j) \text{ for all } h \in H, \quad (22a)$$

where $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ is an orthonormal system in H and

$$\|F\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{1/2} < \infty. \quad (22b)$$

The map $F \rightarrow \|F\|_1$ is then a norm on X and X endowed with this norm is a Banach space (see [16], Ch. VI). The dual space X^* of X can then be identified with the space $B(G_c, H)$ of all bounded linear operators $Y : G_c \rightarrow H$ endowed with the usual operator norm. The duality is given by

$$\langle Y, F \rangle = \text{trace}(FY) \text{ for } F \in X, Y \in X^*. \quad (22c)$$

Now define the operator Γ on X by

$$\Gamma F = FT - S_c F \text{ for } F \in X. \quad (23a)$$

Then $\Gamma^* Y = TY - YS_c$ for $Y \in X^*$. (23b)

Thus Lemmas 1 and 2 have the following immediate consequence:

Theorem 8. *The GCEP has a solution A if and only if there exists a constant $M < \infty$ such that*

$$|\text{trace}(A_0 P_{G_0} S F)| \leq M \|FT - S_c F\|_1 \text{ for all } F \in \sigma_1(H, G_c). \quad (24)$$

Note that in view of (20b) and the proof of Lemma 2, we also have

$$\alpha \leq \sqrt{2} \max\{\|A_0\|, \min\{M : M \text{ as in (24)}\}\}. \quad (25)$$

Conclusion

As already mentioned above, I do not know any proof for any of the Theorems 1–6 based on Theorem 8. But there are other reasons for which I consider this theorem to provide a ‘bad’ solution to the GCEP. They will be evident if I conclude with my definition of what should be a ‘good’ solution to the GCEP. Namely, first find a linear operator $\hat{A}_0$ defined on a specified dense linear subspace of an adequate Hilbert space with values in (perhaps an-

other) Hilbert space, $\hat{A}_0$ being uniquely determined by the data, such that A exists if and only if A_0 is bounded and in this case $\alpha = \|\hat{A}_0\|$. Secondly, deduce all Theorems 1–6 by estimating directly the norm $\|A_0\|$. Thirdly, obtain a workable algorithm for computing $\|A_0\|$ in the case (10a,b). So I conclude wishing good luck to anyone who will try to find such a ‘good’ solution to the GCEP. $\Leftarrow$

References

- 1 A. Biswas, C. Foias, *General Intertwining Liftings*, in preparation.
- 2 A. Biswas, C. Foias, A.E. Frazho, *Weighted commutant lifting*, Acta Sci. Math. (Szeged), 65(1999), 657–686.
- 3 C. Carathéodory, *Über Den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen*, Math. Ann., 64(1907), 95–115.
- 4 J.G.W. Carswell and C.F. Schubert, *Lifting of operators that commute with shifts*, Michigan Math. J., 22(1975), 65–69.
- 5 Z. Ceausescu, *Lifting of a contraction intertwining two isometries*, Michigan Math. J., 26(1979), 231–241.
- 6 R.G. Douglas, P.S. Muhly and C. Pearcy, *Lifting commuting operators*, Michigan Math. J., 15(1968), 385–395.
- 7 C. Foias, *On the extension of intertwining operators*, Contemporary Math., 189(1995), 227–234.
- 8 C. Foias and A.E. Frazho, *The Commutant Lifting Approach to Interpolation Problems*, Oper. Theory: Adv. and Appl., Vol. 44, Birkhäuser-Verlag (Boston), 1990.
- 9 C. Foias, A.E. Frazho, I. Gohberg and M.A. Kaashoek, *Metric constrained Interpolation, Commutant Lifting and Systems*, Oper. Theory: Adv. and Appl., 100(1998).
- 10 C. Foias, C. Gu and A. Tannenbaum, *Intertwining dilations, intertwining extension and causality*, Acta Sci. Math., 57(1993), 101–123.
- 11 C. Foias, C. Gu and A. Tannenbaum, *Non-linear optimization: A causal power series approach*, SIAM J. Control Optim., 33(1995), 185–207.
- 12 C. Foias, H. Ozbay and A. Tannenbaum, *Robust Control Theory of Infinite Dimensional Systems*, Lecture Notes in Contr. and Inform. Sci., 209(1996).
- 13 C. Foias and A. Tannenbaum, *Weighted optimization theory for nonlinear systems*, SIAM J. Control Optim., 27(1989), 812–860.
- 14 C. Foias and A. Tannenbaum, *Causality in commutant lifting theory*, J. Funct. Anal., 2(1993), 407–441.
- 15 I. Gohberg and S. Goldberg, *Basic Operator Theory*, Birkhäuser-Verlag (Boston), 1980.
- 16 I. Gohberg, S. Goldberg and M.A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators, vol. I*, Oper. Theory: Adv. and Appl., 49(1990); vol. II, idem, 63(1993).
- 17 C. Gu, *On causality in the commutant lifting theorem, integral equations and operator theory*, 16(1993), 82–97.
- 18 E.A. Robinson, *Dynamic predictive deconvolution*, Geophysical Prospecting, 23(1975), 779–797.
- 19 M. Rosenblum, *On the operator equation $BX - XA = Q$* , Duke Math. J., 23(1956), 263–270.
- 20 D. Sarason, *Generalized interpolation in H^∞* , Trans. AMS, 127(1967), 179–203.
- 21 I. Schur, *On power series which are bounded in the interior of the unit circle I*, Oper. Theory: Adv. and Appl., 18(1986), 31–59; II, idem, 61–88. Translations from J. Für die Reine und Angew. Math., 147(1917), 205–232 and 148(1918), 122–145.
- 22 T.J. Stieltjes, *Oeuvres complètes/Collected papers*. Vol. I, II. Reprint of the 1914–1918 edition (1993), Springer-Verlag, Berlin.
- 23 B. Sz.-Nagy and C. Foias, *Dilatation des commutants d’opérateurs*, C.R. Acad. Sci. Paris, Serie A 266(1968), 493–495.
- 24 B. Sz.-Nagy and C. Foias, *The “lifting theorem” for intertwining operators and some new applications*, I. U. Math. J., 20(1970), 901–904.
- 25 S. Treil and A. Volberg, *A fixed point approach to Nehari’s problem and its applications*, Oper. Theory: Adv. and Appl., 71(1994), 165–168.
- 26 S. Treil and A. Volberg, *A fixed point approach to Nehari’s problem and its applications*, Oper. Theory: Adv. and Appl., 71(1994), 165–168.

Sara van de Geer

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Postbus 9512, 2300 RA Leiden

geer@math.leidenuniv.nl

Inaugurele rede

Een zeker

Deze rede is op 1 december 2000 uitgesproken door Sara van de Geer bij haar benoeming tot hoogleraar Kansrekening en Statistiek aan de Universiteit Leiden.

Ik wil u vertellen over het nut van statistiek, en over wat mij aantrekt bij de beoefening van het vak. Het zal daarbij blijken dat deze twee zaken volkomen los van elkaar staan.

Statistische methoden zijn er voor om op een zinnige manier met gegevens om te gaan. Aan gegevens is op zich geen gebrek. De nieuwe kennis-economie draait om ICT: Information and Communication Technology. Het gaat daarbij bijvoorbeeld om het digitaal maken en op internet zetten van allerlei soorten informatie en desinformatie (reclame bijvoorbeeld). Met informatie worden hier ruwe gegevens bedoeld, zoals getallen, plaatjes, geluid, teksten, enzovoort. Zulke informatie consumeren is soms best leuk, maar schenkt vaak niet meer bevrediging dan een zak chips. Nog leuker is het om gegevens daadwerkelijk ergens voor te gebruiken, bijvoorbeeld om nieuwe structuren te ontdekken, tot conclusies en inzichten te komen, meningen te vormen of beslissingen te nemen. Veel informatie is al door de statistische molen gehaald, in andere gevallen wordt u geacht uzelf door de informatierijstebrij heen te eten. Statistische methoden en kennis van statistiek zijn hard nodig om de nieuwe economie niet te laten doldraaien. Hugo Battus [2] noemt statistiek dan ook 'het nuttig verliezen van informatie'.

De gegevensberg neemt sneller toe dan de geheugencapaciteit van computers. Voorbeelden zijn de gegevens verkregen met de

klantenkaart van een grote kruidenier, of de gegevens over gen-expressieniveaus die nu bij het human genome project binnen stromen.

De toevloed van gegevens, de ontwikkelingen op het gebied van ICT, en ook andere aspecten van onze samenleving maken dat statistische methoden steeds meer een rol gaan spelen. Bij zaken van direct persoonlijk belang (bijvoorbeeld de veiligheid van onze leefomgeving, de toelaatbare grens voor blootstelling aan dioxine, PCB's of landbouwgif) is het vaak niet meer mogelijk zélf de voors en tegens af te wegen, maar moet men vertrouwen op statistische analyses uitgevoerd door experts. Ik citeer Verkijlen [21], die in *Filosofie Magazine* schrijft: "Met de ont-eigening van de waarneming is ook de individuele oordeelsvorming een gepasseerd station. Wie van statistiek en methodologie geen kaas heeft gegeten kan strikt genomen over de waarheidsaanspraken van de diverse wetenschappen niet oordelen."

We staan daarom voor de belangrijke taak mensen enthousiast te maken voor kansrekening en statistiek en een goede opleiding in deze vakken aan te bieden. Ik denk dat het nuttig is nu eerst mijn vermoeden over hoe in het algemeen over statistiek gedacht wordt met u te delen, en daarbij eventuele misverstanden aan de orde te stellen.

Geen wiskunde

Onder leken, ook scholieren en studenten, is statistiek helaas niet zo populair. Het vak wordt bijvoorbeeld geassocieerd met saai boekhouden. De boekhoudkundigen onder u

zullen nu misschien roepen dat ik boekhouden ten onrechte saai noem, hiervoor mijn excuses.

Vroeger was statistiek niet meer dan het weergeven van gegevens in tabellen en grafieken, het uitrekenen van gemiddelden en dergelijke. Eén ding kan ik alvast opmerken: tegenwoordig gaat het vaak niet alleen om statistische methoden voor 'saai' rijtjes getallen, of om 'saai' bevolkingsstatistiek, maar ook om de statistische analyse van meer exotische objecten, zoals plaatjes, geluid en films, en/of om kwalitatieve gegevens al of niet op een geordende schaal. Bij de analyse komen zaken aan de orde als patroonherkenning, compressiemethoden, neurale netwerken, beeldanalyse, filters, en driedimensionale grafische representaties. Het vak is veelomvattender geworden, en daarmee veel leuker!

Statistiek gaat in het algemeen uit van de impopulaire strategie de mens niet als individu te behandelen. De beroemde statistici Kendall en Stuart [11] zeggen inderdaad in hun standaardwerk: "The statistician, like Nature, is mainly concerned with the species and is careless of the individual." Het gaat hier om de tegenstelling tussen de individuele delen en het geheel: "Het specifieke en unieke tegenover het zich herhalende en het universele, het concrete tegenover het abstracte, voortdurende beweging tegenover rust, het innerlijke tegenover het uiterlijke, kwaliteit tegenover kwantiteit ..." [3]. Met name het herhalende is een idee wat in mijn vak een grote rol is toebedeeld. Het is niet zo dat er van een werkelijke herhaling der gebeurtenissen



Sara van de Geer

toeval

wordt uitgegaan, dat de geschiedenis zich herhaalt. Nee, een statisticus denkt meer in een metafysische trant en gaat er bij de theorievorming van uit dat het *in principe* mogelijk is de experimentele metingen willekeurig vaak te herhalen. De statisticus maakt zich er een voorstelling van wat er gebeurt bij oneindig vaak herhalen, zonder dat hij of zij van u zal verlangen dat die herhalingen daadwerkelijk uitgevoerd worden.

Ik noemde al het begrip gemiddelde. Het gemiddelde middelt individuele verschillen uit. (De gemiddelde Nederlander is overigens iemand anders dan Jan Modaal.) Men kan proberen zich zoveel mogelijk van de gemiddelde Nederlander te onderscheiden, maar die lastige gemiddelde Nederlander verandert met u mee! In een van de boeken van Gerrit Krol [14] vond ik een uitspraak: “van een bekend filosoof, die zegt dat het leven in zijn uitersten zijn waarden heeft, maar in het gemiddelde zijn behoud.” Inderdaad, het verlangen gaat uit naar het extreme, niet naar het gewone dagelijkse. Aan de andere kant, die zelfde filosoof schrijft [4] “Een statisticus had eens uitgerekend dat een rivier die hij wilde oversteken een *gemiddelde* diepte van één meter had. Vol vertrouwen begaf hij zich te water en ... verdrinkt.”

De moderne statistiek maakt nog altijd gebruik van het uitmiddelen van individuele fluctuaties, al gebeurt het soms op een heel fijnmazig niveau. Het doel is namelijk om structuur te ontdekken, om zich niet te laten afleiden door toevallige afwijkingen van de onderliggende structuur. Een statisticus gaat er van uit dat de verschijnselen behept zijn

met een zekere mate van toeval, en probeert het signaal (structuur) en ruis (toevallige afwijkingen) te scheiden. Het vak behelst heel wat meer dan een *black box* benadering van de verschijnselen. Als men zegt dat een gevonden samenhang tussen twee variabelen *slechts statistisch* van aard is, moet men dat dus niet opvatten als hét signaal om de statistische analyse te staken.

Statistiek kan een moeilijk vak zijn, niet gespeend van wiskunde. Desondanks komt het vak op het curriculum van zowat iedere studierichting voor. Vaak vormt het een struikelblok voor studenten. Nachtmerries over het statistiektentamen zijn bijna gemeengoed! Ik weet echter zeker dat het mogelijk is fascinatie, in plaats van frustratie, de bovenaan te laten voeren. Het is mijn opdracht om studenten te laten inzien dat statistiek niet dat rigide, onbegrijpelijke vak van regeltjes, en χ -kwadraattabellen is, en ze warm te maken voor het vak. Zie ook het verslag ‘collegezweet’ in *Mare* [13], waar u kunt lezen dat me dat niet altijd meevalt.

Ook het afgelopen najaar gaf ik les aan niet-wiskundigen. Ik herontdekte hoe lastig statistiek wordt als men in plaats van over het veilige wiskundige kader, het moet hebben over de implicaties in de werkelijke wereld. Op een gegeven moment had ik een numerieke illustratie gemaakt van de theorie. De getallen bleken echter niet te kloppen! Was de theorie dan fout? Ik besloot dat er verschillende waarheden bestaan: de numerieke waarheid (zoals $1 + 1 = 2$), de (wiskundig) theoretische waarheid, die vaak niet numeriek verifieerbaar is (bijvoorbeeld de waar-

heid dat er oneindig veel priemgetallen bestaan), de statistische waarheid (die waar is met grote kans), kansuitspraken (die een speciaal geval zijn van wiskundige uitspraken en die nooit in praktijk falsifieerbaar zijn), uitspraken die ongeveer waar zijn en uitspraken die meestal ongeveer waar zijn, of ongeveer waar zijn met grote kans. Het gegeven dat er zoveel verschillende waarheden zijn maakt dat ik, als ik statistiek probeer uit te leggen zonder de hulp van wiskunde, al gauw word verleid tot allerlei filosofische overpeiningen.

Bij statistiek wordt meestal gedacht aan het toegepaste, ofwel technische deel. Er is dus ook een filosofische kant, een theoretische, ofwel wetenschappelijke kant. Op school is statistiek onderdeel van Wiskunde A, en dat is prima. Maar het vak is *geen* onderdeel van Wiskunde B. Dit geeft de indruk dat het alleen een hulpvak is, en weinig met echte wiskunde te maken heeft. De studierichting wiskunde heet in Nederland niet meer Wiskunde, maar Wiskunde en Statistiek. Ook daarmee wordt gesuggereerd dat statistiek niet onder wiskunde kan vallen. Of zou het zo zijn dat statistiek apart genoemd wordt omdat het zo’n belangrijk vak is? Wat mij betreft ligt hier een enorm spanningsveld. Aan de ene kant staat mijn persoonlijke motivatie om statistiek te bedrijven. Voor mij is het abstracte, echte wiskunde. Ik ben niet uit op maatschappelijk nut. Aan de andere kant is er een beweging die zegt dat de wiskunde in het algemeen zijn nut maar eens moet bewijzen. Dit idee is natuurlijk niet van vandaag of gisteren. Bij de oprichting in 1946 van het Mathe-

matisch Centrum (nu Centrum voor Wiskunde en Informatica) in Amsterdam was er ook een vraag vanuit de maatschappij dat wiskunde gericht moest zijn op maatschappelijke doelstellingen.

Structuur en modellen

Tot zover mijn worsteling met het imago van statistiek. Laten we het eens over die echte wiskunde hebben. Het mooie van wiskunde is voor mij dat het de mogelijkheid geeft een systeem op te zetten dat in zichzelf bestaat, en dus niet gehinderd wordt door storende factoren uit het werkelijke leven. Ik beweer hier niet dat wiskunde consistent is met zichzelf of iets dergelijks (want dat is niet zo, zie Gödel [10]), maar eerder het feit dat het om een abstractie gaat, los van de concrete realiteit. Het abstractie-ideaal leidt tot het beeld van de teruggetrokken wetenschapper, de echte beta, ook wel kortweg 'nerd' genoemd. Ik laat me dit abstracte speelgoed echter niet afnemen. Ik wil het wel graag met u delen!

Een abstractie is leeg, in die zin dat zij door de toepasser gevuld kan worden met een concrete betekenis. Statistiek gaat over de ontwikkeling van modellen die die concrete realiteit moeten beschrijven. De mathematische statistiek formuleert het modellen-bouwen in abstracte termen. Dat is dus een abstractie, die door de toepasser gevuld kan worden met een concreet model. Omdat zo'n model ook weer een abstractie is hebben we hier te maken met abstractie in de tweede graad!

Een van mijn drijfveren om me met statistiek bezig te houden is nu om de overeenkomsten in structuur van diverse modellen te begrijpen en te beschrijven. Het gaat mij daarbij niet zozeer om een gegeven model, maar om de overeenkomsten binnen een klasse van modellen. Hierbij komt het begrip entropie naar voren, ofwel chaos. Modellen kunnen met elkaar vergeleken worden op grond van de hoeveelheid entropie die toegelaten wordt. Hoe meer entropie, des te moeilijker het is om informatie uit de gegevens te halen. Dat begrip entropie is in feite een heel grove, maar algemeen bruikbare, kwantificatie van de hoeveelheid informatie die je uit de gegevens kan halen, ofwel van de hoeveelheid structuur, die het model toelaat.

De mathematisch statisticus onderscheidt diverse vormen van informatie: Fisher informatie, Kuhlback-Leibler informatie, Shannon informatie, et cetera. Deze begrippen formaliseren het idee dat gegevens *an sich* niet equivalent zijn met informatie, maar een bepaalde hoeveelheid informatie kunnen bevatten.

Binnen een mathematisch model is precies aan te geven hoeveel informatie een bepaald type van gegevens bevat. Op grond van de daadwerkelijke gegevens kan men onder bepaalde voorwaarden de geobserveerde informatie uitdrukken in een getal. De geobserveerde informatie is wel wat anders dan de werkelijke informatie die in de gegevens zit: de geobserveerde informatie is een schatting van de werkelijke informatie. Het zal mij niet verbazen als het onderscheid voor velen van u niet overduidelijk is. Wat dit overigens wel illustreert is het volgende: het wiskundig formaliseren van begrippen uit het dagelijkse leven, zoals informatie, leidt er vaak toe dat men een onderscheid moet maken, daar waar dat in het dagelijks leven niet gebruikelijk is. In het mathematische leven zou men dan ook minder misverstanden of ruzie moeten hebben dan in het dagelijkse leven. Voor een deel is dat ook zo.

Een statisticus gebruikt gegevens niet alleen om er informatie uit te halen, maar ook om de kwaliteit ervan te beoordelen. Dit is een enigszins zelf-referente bezigheid. U kent vast het verhaal van de Baron van Münchhausen. Een statisticus is iemand die, niet ontmoedigd door Gödels waarschuwingen, zichzelf aan de haren uit het moeras probeert te trekken, en die dat nog lukt ook!

Statistiek gaat dus over het doen van uitspraken, maar vooral over in hoeverre men de uitspraken moet geloven. Voor post-normale wetenschappers (die de wetenschapsbeoefening meer op inspraak en participatie willen baseren) gaat dat niet ver genoeg. Zij vinden dat niet alleen rekening gehouden moet worden met de onzekerheid binnen het model, maar dat ook de geldigheid van het model zelf kritisch onder de loep moet worden genomen. Voor een mathematicus is dit geen wezenlijk vernieuwend idee: maak simpelweg het model onderdeel van een groter (meta)model. In praktijk kan het wel het een en ander aan discussies teweeg brengen. Zo wordt voorgesteld dat belangrijke problemen in de samenleving niet door de wetenschappers alleen opgelost kunnen worden [7]. Wetenschappers zouden namelijk alleen puzzeltjes kunnen oplossen, ik noem het maar speelgoedproblemen. Beslissingen over echte, complexe en vaak urgente problemen (klimaatverandering, afnemende biodiversiteit, enzovoort) zouden onder andere op grond van de uitkomsten van publiek debat genomen moeten worden. Eén van de argumenten hierbij is ook dat de wetenschappelijke aanpak gewoon te traag is om op de snelle maatschappelijke ontwikkelingen te kunnen reageren.

Men kan dus zeggen dat aan de ene kant de samenleving zo ingewikkeld wordt dat beslissingen, bijvoorbeeld over wat te eten en wat niet, aan de wetenschappelijke experts moeten worden overlaten, terwijl er aan de andere kant stemmen opgaan dat deze wetenschappelijke experts de zaak juist uit handen moeten geven, juist omdat het zo ingewikkeld is geworden en dus niet meer in een laboratorium of andere speelgoeddoos past.

Of de post-normale benadering een goede oplossing kan bieden voor ingewikkelde problemen is zeer de vraag. Volgens mij moeten we gewoon doorroeien met de wetenschappelijke riemen die we hebben. Misschien is post-normale wetenschap een uiting van de aloude botsing tussen twee culturen, de natuurwetenschappen en de menswetenschappen. Verder is de mathematische visie dat modelvorming op zich nooit een beperkende factor kan zijn, zo gek nog niet. Bijvoorbeeld, de veralgemenisering van het Newtoniaanse model, en daarmee van het determinisme, heeft een brug gelegd tussen natuur en cultuur: op eens is het idee van vrije wil weer mogelijk.

Ik heb het over modelvorming en structuur gehad. Statistiek houdt zich bezig met fundamentele vragen betreffende deze zaken, en is er niet wars van 'af te dalen' tot het aardse niveau. Misschien is dat laatste de reden dat statistici het onderwerp zijn van veel, meestal flauwe, grappen, getuige bijvoorbeeld de webpagina [22]. De volgende vond ik in het Informatisch Mathematisch Fysisch Astronomisch Communicatie Tijdschrift van mei 2000 [9]: "A statistician is a person who draws a mathematically precise line from an unwarranted assumption to a foregone conclusion." Of, enigszins vrij vertaald, "Een statisticus is iemand die een wiskundig perfecte lijn trekt van een wankelveronderstelling naar een vérgaande conclusie." Inderdaad gebruiken statistici, en andere wetenschappers, vaak speelgoedmodellen die weinig realiteitsgehalte hebben. Model en realiteit moeten zeker niet met elkaar verward worden! Het lijkt erop dat er een misverstand is over deze kwestie. Sterrenkundigen stellen dat de zon een bol is en natuurkundigen dat er geen wrijving is, economen gaan uit van evenwichtssituaties en soms zelfs van rationeel gedrag van de mens! Dit zijn alle modelveronderstellingen, maar geen veronderstellingen over de werkelijkheid! Ik merk dat studenten hevig in opstand komen als ik op een collega een aanname maak 'voor het wiskundig gemak'. Zelf vond ik het vroeger ook onbegrijpelijk hoe de docent het wist dat het verband tussen x en y lineair is, en hoe het moge-

lijk is dat concrete variabelen aan wiskundige wetten gehoorzamen. Het zou mooi zijn als er op het overvolle curriculum van school en universiteit nog plaats was om aandacht te besteden aan wat een model nu eigenlijk is, en hoe het zich verhoudt tot de werkelijkheid.

Jongen of meisje

Misschien bent u zolangzamerhand nieuwsgierig geworden naar de inhoudelijke kant van kansrekening en statistiek, en naar wat ze met elkaar te maken hebben.

De grondleggers van de kansrekening zijn Fermat en Pascal, die de fundamentele principes ontwikkelden in een briefwisseling. Op het eerste gezicht lijkt het begrip onzekerheid datgene te zijn wat zich per definitie niet laat onderwerpen aan wetten. Fermat en Pascal presteerden het toch om onzekerheid onder te brengen in een wiskundig systeem.

Het soort problemen die in de 17-de eeuw onder de loep werden genomen kunnen ook nu nog, in onze tijd, menigeen volkomen in verwarring brengen. Ik zal u met een voorbeeld plagen [17].

Laten we ervan uit gaan dat bij een geboorte de kans op een meisje gelijk is aan de kans op een jongetje, dus gelijk aan $1/2$. U belt aan bij een gezin met twee kinderen, en een meisje doet open. Wat is de kans dat het andere kind ook een meisje is? Antwoord: $1/2$.

Andere situatie: van een gezin van twee kinderen is gegeven dat een van de kinderen een meisje is. Wat is de kans dat het andere kind ook een meisje is? Antwoord: $1/3$.

Stel nu u belt aan dat laatstgenoemde ge-

zin, dat wil zeggen u weet van te voren dat een van de kinderen een meisje is. Een meisje doet open. Wat is de kans dat het andere kind ook een meisje is? Antwoord: $1/2$.

De ervaring leert dat de bovenstaande antwoorden vaak als nogal verrassend worden gezien. Omgaan met informatie om daarmee kansen in te schatten (voorspellingen te doen) lijkt de mens niet aangeboren te zijn. Misschien moeten er nog wat generaties over heen gaan voordat kansen net zo algemeen geaccepteerd zijn en begrepen worden, als $1 + 1 = 2$. Ik bedenk hierbij dat de Babyloniërs al min of meer het huidige systeem voor de notatie van getallen gebruikten, maar dat het '='-teken toch nog zo'n 3000 jaar op zich liet wachten [12]. Het kan dus best wel een tijdje duren voordat het muntje valt.

Om u een idee te geven hoe men van kansrekening in de statistiek geraakt, ga ik wat verder met historisch materiaal. Bij wat men kan noemen de eerste statistische analyses, ging het ook om de kans op meisjes of jongetjes. Ik veronderstelde in bovenstaande vragen dat een nieuwe wereldburger met kans $1/2$ een meisje is, en met kans $1/2$ een jongetje. Is dat nu wel zo? Het schatten van kansen op grond van gegevens is een van de onderwerpen binnen de statistiek. Eind 16-de eeuw waren er in Engeland nogal wat pestepidemiën en men besloot gegevens te gaan bijhouden over de toestand van de bevolking. Dit werden de 'Tables of Mortality' genoemd (zie [23]). John Graunt heeft begin 17de eeuw deze tabellen nader bekeken, en er allerlei statistische informatie uitgehaald. Hij kwam

bijvoorbeeld tot de ontdekking dat er meer jongens dan meisjes geboren werden (ongeveer 13 jongens op 12 meisjes). De grootte van de dataset (het ging om gegevens van talloze jaren), deed Graunt concluderen dat het een statistisch significant verschil was, dat wil zeggen dat het verschil significant van toeval afweek. Er werd zelfs een overschrijdingskans uiterekend, toen al. Dat is in dit geval de kans dat ieder jaar meer jongens dan meisjes worden geboren, als de kans op een meisje of jongetje gelijk aan $1/2$ zou zijn. Deze overschrijdingskans bleek $(1/2)^{82}$ (dat wil zeggen 2.068×10^{-25}) te zijn, vreselijk klein dus. Als een overschrijdingskans erg klein is mag je daar een conclusie aan verbinden, is een van de gouden regels van de statistiek. De conclusie van Graunt was dat polygamie niet God's wil kan zijn.

De overschrijdingskans, ook wel p -waarde genoemd, wordt gebruikt om een hypothese te toetsen. Meestal is de hypothese dat een geobserveerd verschijnsel toeval is. Laten we nog een voorbeeld bekijken. Stel we vinden dat in Parijs 70 procent van de geboortes een jongetje betreft. Zou dit dan aan het toeval te wijten kunnen zijn? De kans dat er door het toeval 70 procent jongetjes worden geboren is zo klein dat de hypothese van toevaligheid zeker kan worden verworpen. Het is echter verbazend te lezen hoeveel controverses statistische toetsen kunnen oproepen. Meehl [16] noemt het "a potent but sterile intellectual rake who leaves in its merry path a long train of ravished maidens but no viable scientific offspring".



Toeval herkennen

Wat is nu toeval? Bestaat toeval eigenlijk wel? Niet volgens David Hume [8], die zegt: "Men neemt algemeen aan dat er niets bestaat zonder een oorzaak voor zijn bestaan, en dat het toeval bij nauwkeurig onderzoek een zuiver negatief woord is en niet op een werkelijke kracht duidt, die ergens in de natuur voorkomt." Ondertussen zijn de inzichten wel wat veranderd. (Hoewel: nog steeds komt men van de middelbare school met een deterministisch wereldbeeld.)

We kunnen het begrip 'toeval', ofwel 'randomness' heel goed in een formeel wiskundig systeem vatten uitgaande van axioma's. Ik zal dat hier niet doen. Wel geef ik de volgende definitie, afkomstig uit de complexiteits-theorie. We bekijken getallenrijtjes. Sommige hebben minder structuur dan andere, zijn in die zin complexer. Bekijk bijvoorbeeld de rij 1, 2, 3, 4, 5, ... Deze is erg simpel, het volgende getal volgt uit het vorige door er 1 bij op te tellen. Hoe zit het met de rij 1, 2, 3, 5, 8, ...? Na enig puzzelen herkennen we hier de Fibonacci getallen: het volgende getal volgt uit de twee vorige door ze bij elkaar op te tellen. Dan nu de rij 4, 3, 8, 5, 1, ... In deze rij lijkt weinig structuur te zitten. We kunnen nu de complexiteit van een rij getallen definiëren als de lengte van het kortste computerprogramma dat de rij getallen genereert. Een rij getallen van lengte N is toevallig als de complexiteit van de rij gelijk is aan de lengte N [1]. U ziet, het toeval vangen in een formele definitie is eigenlijk heel eenvoudig! De definitie wijkt trouwens nogal af van wat Fermat en Pascal voor ogen hadden, al was het alleen maar omdat de computer niet in hun gedachtenexperimenten kon figureren.

De zogenaamde toevalsgetallen die een computer genereert, en die bijvoorbeeld bij simulatiestudies worden gebruikt, zijn in ieder geval niet toevallig en verre van complex. Deze pseudo-toevalsgetallen worden gefabriceerd volgens een eenvoudig iteratieschema. In het geval van de multiplicatieve congruentiële random number generator gaat het om het volgende schema: neem twee constanten, bijvoorbeeld $a = 630360016$ en $m = 2^{31} - 1 = 2147483647$. Het volgende getal wordt uit het vorige verkregen door te vermenigvuldigen met a . Mocht dit groter dan m uitpakken, trek er dan voldoende vaak m vanaf. Deze pseudo-toevalsgetallen zijn dus verre van toevallig! We lopen hier aan tegen het verschil tussen toeval en bepaalde vormen van chaos: met een heel eenvoudige wet kan men een enorme chaos creëren. Een simpele wiskundige formule kan heel chaotisch

gedrag genereren, maar die chaos heeft dus een lage complexiteit. Er treedt dan ook wel eens begrippenverwarring op: chaos wordt ook wel gedefinieerd als maximale entropie, ofwel de afwezigheid van structuur (zie bijvoorbeeld [18]).

Bovenstaande definitie, van de complexiteit van een rij getallen, is nauw gerelateerd aan het idee van datacompressie: gegevens zonder verlies van informatie opslaan in een samengevatte vorm. Bij een veelheid van verschijnselen proberen we de structuur, ofwel de orde in het systeem te ontdekken. De statisticus, in, bijvoorbeeld, zijn/haar pogingen signaal en ruis te scheiden, is niet anders bezig.

De ingewikkeldheid van een signaal/ruis-probleem moet men niet onderschatten! Natuurlijk is het niet de bedoeling om patronen te zien, daar waar ze niet zijn. In een inktvlek bijvoorbeeld, wordt altijd wel iets gezien, maar dat lijkt meer met de eigen verbeelding te maken te hebben dan met de vlek. Vroeger gebruikte men zelfs de Rorschach Inktvlek Test om iets te weten te komen over iemands onbewuste conflicten en motieven (vanuit een psychoanalytische invalshoek). De menselijke geest lijkt ervoor gemaakt te zijn om structuren en patronen te herkennen. Dat is de reden dat wij van muziek kunnen genieten, betekenis kunnen geven aan het algemene begrip 'stoel', en überhaupt kunnen overleven. De wetenschap is nu druk doende deze bekwaamheid ook computers aan te leren, en zelfs hierin beter te laten worden dan de mens. Denk bijvoorbeeld aan een computer die handschriften kan ontcijferen, of gesproken tekst correct kan omzetten in geschreven tekst. Automatische patroonherkenning (dat wil zeggen zonder gebruik te maken van het menselijk 'oog') is een belangrijk statistisch onderwerp.

Herhaling

In mijn betoog tot nu toe heb ik geprobeerd u mee te voeren langs een veelheid van statistische paden, en u opmerkzaam te maken op allerlei vergezichten en onverwachte doorkijkjes. Laat ik de hoofdwegen nog eens aangeven. Ik ga doorvoor wat terug in de tijd. Sir Ronald A. Fisher noemt in zijn boek *Statistical Methods for Research Workers* [6], drie onderwerpen van studie: (i) the study of populations, (ii) the study of variation en (iii) the study of methods of the reduction of data. Alledrie de onderwerpen zijn in mijn verhaal aan de orde gekomen.

Onderwerp (i) is de studie van het algemene, van de eigenschappen van het geheel,

zoals de kinetische theorie van gassen, de theorie van natuurlijke selectie, en algemene theoriën voor populaties van individuen in bijvoorbeeld sociologische studies. Het principe van herhaalde experimenten speelt hier een belangrijke rol. Ik noemde dit principe al eerder, het wordt binnen de statistiek als bijna vanzelfsprekend aanvaard. Het is zelfs zo dat het nauwelijks expliciet wordt genoemd bij de theoretische afleidingen. Een belangrijke uitzondering is Le Cam, die zich in zijn artikelen om het herhalingsidee druk maakt, en zich excuseert dat hij het als benadering gebruikt, omdat het niet te operationaliseren is. Le Cam zegt over zichzelf: "[...] the author has followed the standard, though treacherous, practice of pretending that the problem considered is one of a sequence of analogous problems" [15]. Het herhalingsidee zit trouwens op sommige punten te krap in het vel. In praktijk is het nu eenmaal niet altijd mogelijk een experiment een aantal keren te herhalen. Niet alleen de geschiedenis laat weinig herhaling zien. De geschiedkundigen ontwikkelen ondertussen een eigen methodologie [19], er van uitgaande dat statistische methoden voor geschiedkundige gegevens niet geschikt zijn. Wat niet waar is, en wat de statistici niet over hun kant mogen laten gaan! Een ander voorbeeld: ook de enorme datasets met genexpressieniveau's bevatten weinig herhaalde experimenten. Ze gaan over enkele individuen (zeg 40) en enorme hoeveelheden variabelen (zeg 40 000 of meer). Vooralsnog is er geen bevredigende statistische methode voor dergelijke 'gekantelde' datamatrices. Natuurlijk blijft het constante en regelmatige, ofwel herhaling in ruime zin, een belangrijk element in onze zoektocht naar structuur.

Het tweede onderwerp, de studie van variaties, noemt Sir Ronald Fisher onder andere om de tegenstelling te benadrukken tussen "[...] the aims of modern statisticians and those of their predecessors." Ik citeer ook nog het vervolg: "For until comparatively recent times, the vast majority of workers in this field appear to have had no other aim than to ascertain aggregate, or average, values. The variation itself was not an object of study, but was recognized rather as a troublesome circumstance which detracted from the value of the average." Als ik zo iets lees voel ik mij gesterkt, maar ook enigszins ontmoedigd. Ontmoedigd, omdat is gebleken dat het idee dat statistiek alleen maar over gemiddelden gaat zo moeilijk is uit te roeien! Toevallige variaties vallen niet altijd onder de noemer 'ruis'. Ik denk daarbij ook aan genetische algoritmes, waarbij blijkt dat men door toeval toe

te laten tot complexe en betekenisvolle structuren kan komen. Het zou daarom niet ondenkbaar zijn dat de mens door het *toeval* is geëvalueerd tot wat ie nu is.

Onderwerp (iii), 'the study of methods of the reduction of data' gaat over het samenvatten van een berg gegevens in enkele representatieve getallen, en is in feite ook bijzonder veelomvattend. Ook hier zijn de ingrediënten weer structuur, toeval en complexiteit.

Mannen en vrouwen

Dan wil ik nu kort ingaan op een statistisch gegeven: slechts zo'n 6 procent van de hoogleraren in Nederland is vrouw. De hypothese dat dit toevallig is kan worden verworpen op het 5 procent-niveau. Een *p*-waarde zal ik maar niet noemen. Wat is nu de oorzaak van dit verschijnsel? Als echte statisticus houd ik het bij de statistische uitspraak, en laat ik het antwoord op het waarom over aan de experts. Misschien heeft onze bekende filosoof [4] gelijk. Hij beschrijft namelijk zo'n vrouwelijke hoogleraar, bij één van haar colleges, als volgt: "De toestand van aanhoudend gelijk te hebben, die aan de positie van hoogleraar verbonden is, is een onvrouwelijke situatie en zij gaf te kennen zich hiervan bewust te zijn door ons niet aan te kijken. Door die gêne werd zij weer vrouw."

Dekker [5] heeft een wetenschappelijk onderzoek gewijd aan de oorzaken van het kleine percentage vrouwen onder wetenschappers. Om vrouwen aan te trekken zou er een cultuuromslag nodig zijn in de universitaire

wereld. Ik vind dat een alleszins redelijke gedachte, maar blijf zitten met de vraag waarom *mannen* een dergelijke omslag *niet* nodig schijnen te hebben. Er zit trouwens wel beweging in: het vrouwen netwerk in onze universiteit heeft onlangs haar taak beëindigd en zichzelf opgeheven, en het afgelopen jaar zijn vijf vrouwen benoemd als lid van de Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen.

Helaas, op het gebied van de wiskunde zijn de vrouwelijke wetenschappers nog steeds sterk in de minderheid. Ik was dan ook zeer verrast toen ik, als onervaren moeder, het Nieuw Medisch Gezinsboek [20] raadpleegde en daar las: "Het wegen van het kind voor en na iedere borstvoeding maakt moeders die wiskunde gestudeerd hebben rustig: ze leggen er een statistiek van aan. Alle andere moeders moeten ervan afzien en hun kind eenmaal in de week wegen."

Dankwoord

Aan het slot wil ik graag de mensen bedanken die bij mijn benoeming betrokken zijn geweest, en ieder die mij gesteund heeft, of mij gewezen heeft op mooie stukken in de wonderwereld van wiskunde en werkelijkheid.

Mijnheer de Rector Magnificus, leden van het College van Bestuur, leden van het Bestuur van de Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen, ik dank u voor het door deze benoeming in mij gestelde vertrouwen. Het is een bijzondere eer om hier in Leiden als opvolger van Prof. van Zwet aan te mogen treden. Het is een groot genoegen om op

het Mathematisch Instituut te werken aan de verdere ontwikkeling van de Mathematische Statistiek, de relatie met andere takken van Wiskunde verder te verstevigen, en samen te werken met Leidse wetenschappers binnen en buiten onze faculteit. Ik dank ook de leden van het Mathematisch Instituut voor hun bijdrage aan deze benoeming. Ook dank ik mijn andere collega's in Nederland, en in het buitenland, voor hun steun.

Hooggeleerde Van Zwet, beste Willem, Ik dank je voor de eye-opener die je me aanreikte al tijdens de studie, en voor alle daarop volgende eye-openers. Ik heb enorm veel van je geleerd. Er zijn echter zaken waar jij een meester in bent en die voor mij altijd een beetje onwennig zullen blijven. Ik hoop dat ik ook in de toekomst bij jou te rade kan blijven gaan.

Hooggeleerde Gill, beste Richard, Ik ben je erg dankbaar. Jij zei op een dag, toen ik al een aantal maanden wanhopig op zoek was naar een promotieonderwerp, zo tussen neus en lippen door, dat de theorie van Vapnik en Chervonenkis misschien te gebruiken was bij de consultatie waar ik op dat moment mee bezig was. Door deze opmerking kwam mijn onderzoek in een stroomversnelling. Richard is zo ongeveer de meest aanstekelijke statisticus die men zich kan voorstellen. Iemand die hem kent moet wel door zijn enthousiasme worden meegesleurd. Richard, je hebt me steeds van die mogelijkheden aangereikt waardoor er af en toe iets bij mij van de grond kwam, en waardoor ik nu hier sta. ☞

Referenties

- Barrow, J.D. (1992). *Pi in the Sky: Counting, Thinking and Being*. Penguin Books, London.
- Battus, H. (1983). *Rekenen op Taal*. Querido, Amsterdam.
- Berlin, I. (1980). *Against the Current: Selected Writings*. Ed. H. Hardy, Viking Press, New York.
- Bomans, G. (1977). *De wereld van Godfried Bomans: een keuze uit zijn beste werk*. Elsevier, Amsterdam/Brussel.
- Dekker, R. (2000). *De wetenschappelijke mensch: Persooncultuurfit en Loopbanen van Vrouwelijke en Mannelijke Wetenschappers*. Universiteit Utrecht.
- Fisher, Sir R.A. (1958). *Statistical Methods for Research Workers (13th edition)*. Oliver and Boyd, Edinburgh, London.
- Funtowisc, S.O. en Ravetz, J.R. (1992). Three types of risk assessment and the emergence of post-normal science. In: *Social Science of Risk*, Eds. Krinsky en Golding, Greenwood Publishing Group, Chapter 11, 251-273.
- Hume, D. (1748/1777). *An Enquiry concerning Human Understanding*, Cadell, London.
- Ned. Vertaling (1978): Het Menselijk Inzicht. Boom, Meppel.
- IMPACT (2000), nr. 13, Universiteit Leiden.
- Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshäfte Für Mathematik und Physik*, 38, 173-198.
- Kendall, M.G. en Stuart, A. (1958). *The Advanced Theory of Statistics (Volume I)*. Charles Griffin & Company Limited, London.
- Kool, M.J.H. (1999). *Die Conste vanden Getale, Een Studie over Nederlandstalige Rekenboeken uit de Vijftiende en Zestiende Eeuw, met een Glossarium van Rekenkundige Termen*. Verloren BV, Hilversum.
- Kortelever, W. (2000). *Collegezweet*. Mare nr. 20, Universiteit Leiden.
- Krol, G. (1993). *Omhelzingen*. Querido, Amsterdam.
- Le Cam, L. (1960). *Locally asymptotically normal families of distributions*. University of California Publications in Statistics 3, 37-98.
- Meehl, P.E. (1967). *Theory testing in psychology and physics: A methodological paradox*. *Philosophy of Science* 34, 103-115.
- Tijms, H. (1999). *Spelen met kansen*. Epsilon Uitgaven, Utrecht.
- Prigogine, I. en Stengers, I. (1985). Order out of Chaos. Ned. Vertaling (1990) *Orde uit Chaos: De Nieuwe Dialoog tussen de Mens en de Natuur*. Bert Bakker, Amsterdam.
- Ragin, C.C. (1987). *The Comparative Method: Moving beyond Qualitative and Quantitative Strategies*. University of California Press.
- Venzmer, G. (ed.) (1974/1975). *Das Neue Grosse Gesundheitsbuch*. Verlagsgruppe Bertelsmann GmbH/Bertelsmann Ratgeberverlag München, Gütersloh, Wien. (Ned. Uitgave 1976/1982, Zomer & Keuning Boeken B.V., Ede).
- Verkijlen, A. (2000). Het massale streven naar een individuele levensstijl: 'We are all individuals'. *Filosofie Magazine* 4, 8-14.
- www.ilstu.edu/~gcransley/Gallery.html
- www.fsw.leidenuniv.nl/www/w3.func/stathist/stathist.html

Patrick Oonincx

Centrum voor Wiskunde en Informatica

Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam

patricko@cw.nl

Overzichtsartikel

Wavelets: een hype

Wiskunde is spannend en uitdagend. Iemand leest een wiskundig artikel en springt op de eerste trein naar Marseille. Op naar de geboorte van een wiskundig golfje, een 'wavelet'. Het universum zou na de ontdekking van wavelets nooit meer hetzelfde zijn, zo werd destijds gedacht. De hype die rondom wavelettheorie ontstaan is is nog niet voorbij, maar borrelt wel minder sterk dan 5 á 10 jaar geleden. Een ideaal moment om op het verschijnsel wavelets terug te blikken en een blik in de toekomst te werpen.

Al bijna 200 jaar geleden liet Jean Baptiste Fourier in diens befaamde *Théorie analytique de la Chaleur* zien, dat periodieke functies door een reeks van cosinus- en sinusfuncties te beschrijven zijn. Inmiddels beschikken we ook over een analogon voor niet-periodieke functies. De fysische interpretatie van Fouriers resultaat is dat elk signaal te verkrijgen is door een diversiteit aan stemvorken bij elkaar te plaatsen en deze gelijktijdig met mogelijk verschillende krachten aan te slaan. Vaak komen we in de natuur echter verschijnselen tegen, die beter beschreven zouden kunnen worden door de stemvorken niet gelijktijdig aan te slaan en door ze ook na een bepaalde tijd te dempen.

Wat er bij het principe van de stemvorken gebeurt is dat bij de analyse van meetgegevens, via de Fouriertransformatie, naar het frequentiespectrum gekeken wordt om inzicht te krijgen in de energieverdeling die in het betreffende signaal aanwezig is. Een dergelijke analyse is uitermate geschikt voor het analyseren van

stationaire signalen of composities hiervan. Te denken valt hierbij bijvoorbeeld aan het geluid voortgebracht door één of meerdere stemvorken. Een transformatie naar het frequentiedomein door middel van Fourieranalyse biedt voor dit soort signalen het ideale mechanisme, aangezien voor deze types van signalen niet het gedrag in tijd maar in frequentie van belang is.

Een grote klasse van signalen uit de fysische wereld is echter niet stationair. Voor de analyse van dit soort signalen is vaak zowel informatie uit het tijdsdomein als ook informatie uit het frequentiedomein van belang. Een indruk van de frequentiecomponenten in een signaal op een gegeven tijdstip kan verkregen worden door het toepassen van een tijd-frequentie transformatie. Een algemene klasse van dit type transformaties, beschreven door Leon Cohen in 1966, wordt gegeven door

$$\tilde{f}(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{R}^3} f(u+s/2) \overline{f(u-s/2)} \phi(v, s) e^{-i(tv+\omega s-uv)} ds du dv.$$

Door het maken van geschikte keuzes voor de kernel functie ϕ kunnen uit deze representatieformule enkele welbekende transformaties worden afgeleid. Voor $\phi = 1$ volgt na integratie over u en v de Wigner-Ville distributie, die al in 1932 door Eugene Wigner geïntroduceerd werd in the quantummechanica. Hierbij namen moment en positie de plaats in van tijd en frequentie. Vile introduceerde deze transformatie 16 jaar later in de signaal-analyse.

of toch meer?

Een andere welbekende keuze voor ϕ wordt gegeven door

$$\phi_h(v, s) = \int_{\mathbf{R}} h(u + s/2) \overline{h(u - s/2)} e^{-iuv} du,$$

voor een zekere $h \in L^2(\mathbf{R})$ met $h \neq 0$ op een deelverzameling van $\mathbf{R}$ met positieve maat. Na uitvoering van de integratiestappen volgt $\tilde{f}(t, \omega) = |\hat{f}_h(t, \omega)|^2$. Hierbij is

$$\hat{f}_h(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(u) \overline{h(u - t)} e^{-i\omega u} du$$

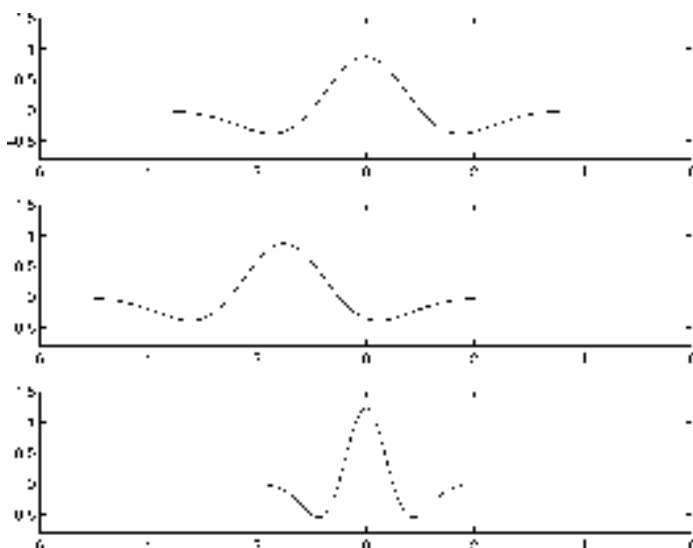
de zogenaamde windowed Fouriertransformatie met window functie h . De uitdrukking $\tilde{f}$ heet het spectrogram van het signaal f . Een bekende keuze voor de window functie h is de Gauss-kromme. De transformatie $f \mapsto \tilde{f}$ heet in dit geval de Gabor-transformatie, genoemd naar Nobelprijswinnar Gabor die deze transformatie in 1946 voor het eerst beschreef.

Blijven we even bij de Gabortransformatie als klassieke tijd-frequentie transformatie, dan vallen twee dingen op. Een functie wordt beschreven door verschoven Gauss-krommen, die alle dezelfde 'breedte' bezitten. Deze Gauss-krommen vormen tezamen geen orthonormale basis voor de functieruimte $L^2(\mathbf{R})$. Het eerste aspect betekent dat een signaal, waar in de tijd diverse verschillende frequenties ofwel schalen optreden, beschreven wordt door een klasse van functies die allen eenzelfde karakteristieke

schaal bezitten. Een praktisch probleem is dan het zo goed mogelijk kiezen van de 'breedte' van de Gauss-kromme zodat een goede approximatie van het signaal door een lineaire combinatie van slechts een gering aantal van deze getransleerde krommen verkregen kan worden. Het voordeel van orthonormaliteit is het eenvoudig en snel kunnen berekenen van de approximatiecoëfficiënten.

Het prille begin

De vooral praktische onvolkomenheden van de Gabor-transformatie speelden de Franse geofysicus Jean Morlet parten. Hij was in dienst van een Franse oliemaatschappij waar hij zich veelal met scattering problemen bezig hield om gelaagdheid van de aarde te kunnen analyseren. Voor de analyse van door de aardlagen gereflecteerde trillingen gebruikte hij tot ongeveer 1982 discrete Gabor decomposities. Elke gereflecteerde trillingen heeft natuurlijk een andere karakteristieke schaal. Daarom bedacht Morlet dat het zinvol zou zijn om de Gauss-kromme in de windowed Fouriertransformatie een dilatatieparameter mee te geven, die de 'breedte' van de kromme kan sturen. Deze dilatatieparameter neemt in de Gabortransformatie vervolgens de plaats in van de frequentieparameter. Verder gaf hij aan de window functie ook nog een fase-draaiing mee. De aldus ontstane transformatie is gebleken het concept te zijn van wat we nu kennen als de wavelet-transformatie.



Figuur 1 Van boven naar beneden zien we de mexican hat wavelet (tweede afgeleide van een Gauss-kromme), een getransleerde mexican hat wavelet en een gedilateerde mexican hat wavelet.

Het idee van Morlet was er een uit de praktijk en was nog niet in een wiskundig raamwerk gegoten. Dit gebeurde wel twee jaar later, na een samenwerking van Jean Morlet met de theoretisch fysicus Grossmann. Alex Grossmann ging uit van het feit dat er net als bij de Gabortransformatie een representatie van een groep te vinden moest zijn die paste bij het concept van Morlet. Deze vond hij in de vorm van een representatie van de $ax + b$ groep. Op deze manier werden de wiskundige hiaten in Morlets wavelettransformatie gladgestreken, zoals het ontbreken van een inverseformule. In het *SIAM Journal of Mathematical Analysis* verscheen in 1984 het artikel *Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape* van de hand van Grossmann en Morlet. De continue wavelettransformatie op $L^2(\mathbf{R})$ zoals wij die nu kennen werd hierin nu voor het eerst beschreven als

$$W_\psi[f](a, b) = a^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt,$$

met $a > 0$ en $b \in \mathbf{R}$ en waarbij $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ een vrij te kiezen waveletfunctie is, mits deze voldoet aan de zogenaamde admissibiliteitsconditie

$$0 < \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(a\omega)|^2}{a} da < \infty.$$

Deze voorwaarde garandeert het bestaan van een unieke reconstructieformule voor elke functie f uit diens waveletcoëfficiënten $W_\psi[f](a, b)$.

Ten tijde van het uitkomen van het SIAM artikel werd het Centre de Physique théorique van de welbekende Franse Ecole Polytechnique geleid door Jean Lascoux. Hij had de gewoonte zijn medewerkers te voorzien van een haast continue stroom van nieuw gepubliceerde papers, die op hun terrein lagen. Zo gebeurde het dat het SIAM artikel onder ogen kwam van Yves Meyer. Hij zag direct dat de grote ontdekking van Alex Grossmann en Jean Morlet in de wiskunde al sinds 1964 door het leven gaat als Calderon's reproductie formule, genoemd naar diens bedenker [1]. Het verhaal gaat dat Meyer de eerste trein naar Marseille nam, waar Grossmann huisde, om met de auteurs over de nieuwe transformatie te spreken. Hier hielp het lot de wavelettheorie een

eind op weg, want toevallig was in deze periode ook onze zuiderbuur Ingrid Daubechies bij Grossmann, haar oude leermeester, te gast. Zowel Meyer als Daubechies raakten in vervoering over deze wiskunde die in hun ogen veel problemen in het universum zou oplossen. Dit is natuurlijk niet gebeurd, echter wel hebben beiden een groot stempel op de ontwikkeling van dit stukje wiskunde gedrukt. In zulke mate zelfs, dat de huidige hype rondom wavelets zonder hen nooit zo'n omvang zou hebben bereikt.

Multiresolutie-analyse van Meyer-Mallat

De eerste wavelettransformatie zoals die verscheen in het SIAM paper staat tegenwoordig bekend als de continue wavelettransformatie. De parameters a en b zijn namelijk continue parameters in het bovenhalfvlak. Nemen we de wavelet getransformeerde van een signaal als functie van deze parameters dan is dit signaal redundant weergegeven, dat wil zeggen dat het betreffende signaal al gereconstrueerd kan worden door slechts de coëfficiënten $W_\psi[f](a, b)$ te kennen op een deelverzameling van het bovenhalfvlak. Voor een vast gekozen a betekent de transformatie niets meer dan een convolutieproduct van een gegeven signaal met een waveletfunctie. Door de admissibiliteit van ψ kunnen we f reconstrueren door deconvolutie. Eigenlijk hoeven we dus $W_\psi[f](a, b)$ allen maar te kennen op elke lijn in het boven halfvlak parallel aan de b -as.

De discrete wavelettransformatie is gebaseerd op bovengenoemde overwegingen. We representeren nu een functie niet meer door diens waveletcoëfficiënten $W_\psi[f](a, b)$, met (a, b) continue variabelen in het bovenhalfvlak, echter we nemen (a, b) als elementen van een discrete deelverzameling in het bovenhalfvlak. Een inmiddels klassieke keuze is de deelverzameling $\{(2^j, 2^j k) \mid j, k \in \mathbf{Z}\}$. De keuze voor een dergelijke verzameling is gebaseerd op het feit dat voor hoge waarden van a de transformatie werkt met een laagfrequente waveletfunctie. In termen van een discrete Gabortransformatie zou dit betekenen dat we een gegeven functie gaan beschrijven met Gauss-krommen van een aanzienlijke 'breedte'. De stappen waarover we dan gaan transleren zullen dan ook dienovereenkomstig groter zijn dan voor het geval we krommen met een kleine 'breedte' beschouwen.

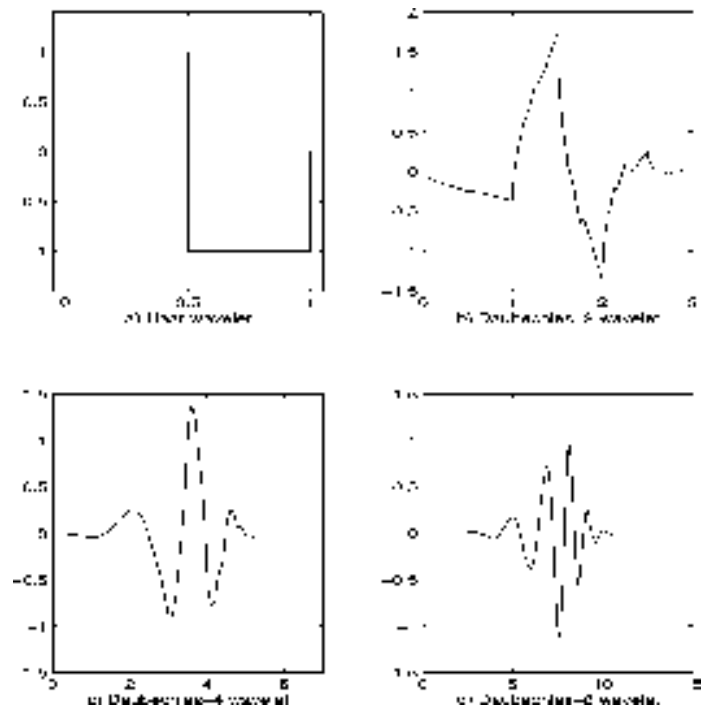
In Daubechies' boek [3] is uitgebreid aandacht besteed aan deze discretisatie van Calderon's identiteit. We zullen hier in dit artikel niet verder op in gaan. Als resultaat is wel van belang, dat als ψ admissibel is, met deze keuze de verzameling $\{\psi(2^j \cdot -k) \mid j, k \in \mathbf{Z}\}$ een zogenaamd frame is. Een frame in $L^2(\mathbf{R})$ is een verzameling functies, niet noodzakelijk een basis, waarmee elke L^2 -functie op een (numeriek) stabiele wijze beschreven kan worden en ook weer stabiel gereconstrueerd kan worden. Bijzondere voorbeelden van een frame zijn een Riesz basis, ook wel exact frame genoemd, en een orthonormale basis. Om dit laatste te bewerkstelligen moeten natuurlijk nog meer eisen aan ψ worden opgelegd, waarover meer in de volgende paragraaf.

Om te komen tot een discrete wavelettransformatie kunnen we dus uitgaan van de continue transformatie, waarna we slechts een beperkt aantal mogelijkheden voor de parameters a en b toestaan. Vervolgens leggen we extra eisen op aan de waveletfunctie om resultaten zoals orthonormaliteit te verkrijgen. Yves Meyer had hier andere ideeën over. Hij trachtte waveletbases te construeren met behulp van een zogenaamde Multiresolutie Analyse. Het principe hiervan werkt als volgt. Men start met een schalingsfunctie ϕ ,

die door middel van translaties over de gehele getallen een basis voortbrengt. Dit kan een orthonormale basis zijn, maar ook een Riesz basis is toegestaan. Verder moet ϕ te schrijven zijn als lineaire combinatie van de functies $\phi(2 \cdot -k)$, $k \in \mathbf{Z}$. Met andere woorden, elke schalingsfunctie ϕ moet te schrijven zijn als combinatie van getransleerde versies van een ingedrukte schalingsfunctie. Deze mogelijkheden zien we geïllustreerd in figuur 1.

We kunnen nu een ruimte V_0 definiëren die opgespannen wordt door getransleerden van ϕ . Door het dilateren, indrukken en uitrekken van de schalingsfunctie kunnen we ook ruimten V_j construeren, opgespannen door $\phi(2^j \cdot -k)$, $k \in \mathbf{Z}$. Door deze constructie is V_{-1} bevat in V_0 , V_0 in V_1 en cetera. Meyers idee was nu om op analoge wijze ook ruimten W_j te creëren, die loodrecht stonden op V_j en samen met V_j de ruimten V_{j+1} blijken te zijn. De functie die nu door translaties over gehele getallen een basis zou vormen voor W_j was nu de waveletfunctie ψ . Door de onderlinge loodrechtheid van de ruimten V_j en W_j kan onder zekere voorwaarden inderdaad bewezen worden dat we op deze manier een basis in $L^2(\mathbf{R})$ geconstrueerd hebben van het type $\{\psi(2^j \cdot -k) \mid j, k \in \mathbf{Z}\}$. De voorwaarden op ψ zijn nu direct gerelateerd aan een gegeven functie ϕ . Ook regulariteit van ψ en bijvoorbeeld het hebben van een compacte drager leiden we eenvoudig af uit voorwaarden op ϕ .

Het multiresolutie idee wordt meestal niet geassocieerd met Yves Meyer maar veelal met Stephane Mallat die het in 1989 voor het eerst aan een groot publiek introduceerde in een IEEE journal, zie [5]. Mallat studeerde aan de Ecole Polytechnique waar Meyer werkzaam was. Later verhuisde hij naar de Verenigde Staten waar hij in 1988 in Philadelphia zijn proefschrift verdedigde aan de electrotechnische faculteit. Zijn electrotechnische achtergrond leerde hem dat structuur van geneste deelruimten al lang gebruikt werd in de beeldverwerking, waarbij een plaatje op diverse resolutieniveaus afgebeeld kan worden, van kleine tot grote pixelgrootte. Als een pixel dan wordt weergegeven door een blokfunctie, dan kan elke andere pixel bereikt worden door translaties over een aantal pixels totdat de betreffende pixel bereikt is. Verder kan een vierkante pixel van 2×2 natuurlijk door vier kleinere pixels van 1×1 beschreven worden. Na het formuleren van het multiresolutie idee bedacht Mallat ook nog het zogenaamde pyramide-algoritme. Dit algoritme beschrijft hoe men waveletcoëfficiënten op schaal 2^j efficiënt kan berekenen. Het algoritme is geheel gebaseerd op principes uit de filtertheorie en is van de orde $O(N)$. Ter vergelijking: het wel bekende FFT-algoritme, dat niet alleen in de hedendaagse software wordt gebruikt om de Fouriertransformatie te berekenen, maar ook om snel convolutieproducten weer kan geven, is van de orde $O(N \log N)$. Mallats idee is gebaseerd op een snelle berekening van de coëfficiënten. De toch al snelle berekening zou nog gestroomlijnd kunnen worden als de waveletfunctie compact gedragen zou zijn en samen met diens getransleerden een orthonormale basis zou vormen. Immers hier kan dan bij het berekenen van inwendige producten en bij het reconstrueren van het signaal dankbaar gebruik van worden gemaakt. Yves Meyer dacht dat dit soort waveletfuncties niet konden bestaan. Ingrid Daubechies toonde echter min of meer gelijktijdig in 1988 aan, dat dit soort functies wel bestaan. Dit leverde haar officieus de titel van koningin van de wavelets op.



Figuur 2 Hier zien we vier voorbeelden van de zogenaamde Daubechies wavelet. Merk op dat de drager groter wordt en de regulariteit toeneemt.

Daubechies-wavelets

Daubechies creëerde een verzameling schalingsfuncties, en hiermee ook de corresponderende waveletfuncties (via de multiresolutie-analyse), door deze niet in formulevorm proberen te vinden maar door constructie. Haar uitgangspunt in [2] was dat een schalingsfunctie uit te drukken was in met een factor 2 ingedrukte schalingsfuncties. De gedilateerde schalingsfuncties kunnen dan natuurlijk ook weer geschreven worden in termen van nog sterker ingedrukte functies ϕ . Zo kunnen we de schalingsfunctie dus ook uitdrukken in de met een factor 4 ingedrukte functies ϕ . Zij nu α het rijtje coëfficiënten in de ontwikkeling van ϕ in de functies $\phi(2 \cdot -k)$, dan levert dit onder een Fouriertransformatie

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^J \hat{\alpha}(2^{-j}\omega) \hat{\phi}(2^{-j}\omega).$$

De volgende stap van Daubechies was het vinden van voorwaarden op het rijtje α zodat voor $J \rightarrow \infty$ het product naar een limietfunctie convergeert. Aan deze voorwaarden voegde Daubechies twee eisen toe, namelijk het compact gedragen zijn van ϕ en dus ook van ψ , en de orthonormaliteit van de gegenereerde basis.

Het hebben van een compacte drager vertaalt zich in de mooie eigenschap dat de rij coëfficiënten α eigenlijk een eindig rijtje is en dus een polynoom in het Fourierbeeld. Daubechies koos in haar constructie vervolgens voor nader te bepalen rijtjes α ter lengte $2N$. Het net van voorwaarden op α sluit zich op deze manier en zo kon Daubechies, weliswaar numeriek, de coëfficiënten α en dus ook ϕ en ψ bepalen. Uiteindelijk bleek dat door deze constructie wavelets met drager ter lengte $2N - 1$ geconstrueerd waren, die tevens $N/5$ keer continu differentieerbaar zijn voor grote waarden van N . Een analytische uitdrukking voor de Daubechies-wavelets bestaat helaas alleen voor het geval $N = 1$. In figuur 2 zien we een aantal Daubechies-wavelets voor verschillende waarden van N .



Figuur 3 Links een fingerprint uit de FBI kaartenbak en rechts dezelfde afdruk met een factor 13 gereduceerd met behulp van een wavelettransformatie. Er is vrijwel geen verschil!

De Daubechies-wavelet voor het geval $N = 1$ is precies gelijk aan de Haar-functie,

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq x < 1, \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

die de Duitser Alfred Haar reeds in 1910 introduceerde. Hij liet destijds al zien dat voor deze functie $\{\psi(2^j \cdot -k) \mid j, k \in \mathbf{Z}\}$ een orthonormale basis is voor $L^2(\mathbf{R})$. Verwonderlijk is het zeker niet dat de Daubechies-1 wavelet met Haars functie samenvalt. Immers Daubechies liet ook zien dat haar wavelets de enig mogelijke klasse van compact gedragen functies vormen die door middel van translaties en dilataties een orthonormale basis van $L^2(\mathbf{R})$ vormen.

Daubechies' vondst heeft een grote impact gehad op de ontwikkeling van waveletanalyse in alle jaren die volgde. Samen met de groepentheorie van Grossmann en de multiresolutie-analyse van Meyer en Mallat vormen de compact gedragen orthonormale wavelets van Daubechies wel zo'n beetje de wiskundige peilers van het krachtige instrument waveletanalyse. Wiskundigen uit verschillende disciplines konden na het neerzetten van deze peilers zich natuurlijk in ruime mate uitleven op de peiler die het dichtst bij hun onderzoeksgebied kwam. Zo zijn er vanuit de groepentheorie variaties bedacht op de continue wavelettransformatie voor meer dimensies. De schalingsparameter a is dan vervangen door een parameter a vermenigvuldigd met een rotatiematrix. Ook heeft zich een grote groep wiskundigen gestort op het bedenken van mogelijke waveletfuncties. Zo bestaan er naast de Daubechies-wavelet en de Haar-wavelet ook natuurlijk de Morlet en Meyer-wavelets en, wellicht wat minder natuurlijk, de Coiflets, de Battle-Lemarié-wavelets en de Vetterli-wavelets. Deze wavelets verschillen van elkaar in het type basis dat ze voortbrengen, de regulariteit van de waveletfunctie zelf, het al dan niet compact gedragen zijn en ga zo maar door. Sommige van deze nieuw geschapen waveletfuncties kunnen uiterst nuttig zijn, bijvoorbeeld met het oog op een bepaalde toepassing. Andere lijken eerder ontworpen om in een hype mee te kunnen spelen, dan vanwege het nut ervan. Het gaat zelfs zo ver dat bepaalde soorten wavelets gepatenteerd werden. Dit zijn niet direct de meest bekende en wiskundig meest waardevolle wavelets.

Het fenomeen wavelets is echter niet groot geworden in de wiskunde zelf, maar in de dagelijkse praktijk van het gebruik van wiskunde. Waarschijnlijk is er zelden een stuk wiskunde geweest

dat zoveel wetenschappers uit uiteenlopende disciplines bijeengebracht heeft als wavelettheorie. Van medische beeldverwerking tot de analyse van de Dow Jones en van het ontdekken van typen van fractaal groei gedrag in bacteriekweken tot het analyseren van seismische data, waarmee het dus ooit begon, iedereen leek baat te hebben bij dit nieuwe gereedschap. Inmiddels weten we natuurlijk beter, niet alle problemen uit het universum zijn met wavelets op te lossen. Zo zijn er een aantal toepassingen weer snel van het toneel verdwenen. Enkele toepassingen gaven zoveel feedback dat wiskundigen en toepassers elkaar vonden en tot mooie resultaten kwamen, zowel in de wiskunde als in toepassingsgebieden.

Wavelets in gebruik

Enkele gebieden waarin waveletanalyse na 1990 een grootse ontwikkeling doormaakte zijn onder andere toepassingsgebieden zoals datacompressie, ruisonderdrukking en (medische) beeldverwerking. In de wiskunde zien we wavelets de laatste jaren vooral opduiken in de approximatietheorie en de numerieke behandeling van integraal en differentiaalvergelijking. Een aantal van deze gebieden zullen we nu kort wat nader bekijken.

Datacompressie Het idee achter datacompressie is dat een discreet signaal op een dusdanige wijze geschreven kan worden dat het aantal datapunten in de nieuwe schrijfwijze verminderd is. Vaak wordt bij compressie uitgegaan van een tweestapstechniek, eerst wordt het signaal getransformeerd naar een andere basis en vervolgens worden de ontwikkelingscoëfficiënten efficiënt gecodeerd. Voor het coderen van alle zuivere tonen zou bijvoorbeeld de Fouriertransformatie erg geschikt zijn. Immers dan worden alle datapunten die bij zo'n toon horen vervangen door één enkele Fouriercoëfficiënt behorend bij de desbetreffende toon.

Compressie door middel van het slechts geschikt transformeren en coderen van signalen wordt ook wel *lossless* compressie genoemd, omdat er geen gegevens verloren gaan. Een andere vorm van compressie is *lossy* compressie. Hierbij worden alleen coëfficiënten gecodeerd die een substantiele bijdrage aan de decompositie geven. Met name op dit gebied heeft de wavelettransformatie in de beeldverwerking haar kracht bewezen. Door het geschikt kiezen van een 2D lokaal gedragen waveletfunctie kunnen saillante details in plaatjes goed worden weergegeven op lage schalen (hoog frequent). Op de hogere schalen in de multiresolutie-analyse vinden we de laag frequente delen van een plaatje terug, zoals de achtergrond van een foto. Visueel is het van belang dat de details in een plaatje nauwkeurig behandeld worden. De bijbehorende coëfficiënten worden dan ook gecodeerd en verstuurd of opgeslagen. Alle andere minder van belang zijnde aspecten in het plaatje zullen door een klein aantal minder goed gelocaliseerde wavelets (op hoge schaal dus) gerepresenteerd worden. Deze coëfficiënten worden dan grotendeels verwaarloosd.

Een van de bekendste voorbeelden van het gebruik van wavelets komt uit de beeldcompressie. De Amerikaanse FBI zat halverwege de jaren '90 met het probleem dat ze elke dag zo'n 30 à 50 duizend nieuwe vingerafdrukken binnen kregen van opgepakte verdachten. Dit resulteerde in 1996 al in een totaal van 200 miljoen kaarten met 14 vingerafdrukken in een kaartenbak. Als dit alles in een computer opgeslagen zou moeten worden zou el-

ke kaart zo'n 10 MB computergeheugen kosten. Bij het opvragen van een vingerafdruk uit deze kaartenbak zou het natuurlijk een eeuwigheid duren eer de gevraagde afdruk uit de bak gesorteerd zou zijn. Er moest dus op een slimme manier met deze afdrucken worden omgegaan. Lossy compressie met behulp van wavelets maakte het mogelijk het archief te recoderen tot zo'n 8% van het originele archief. In figuur 3 zien we twee dezelfde vingerafdrucken. De linker afdruk is de originele afdruk, de rechter is de gecomprimeerde afdruk, waarbij een op de dertien waveletcoëfficiënten op 0 gesteld zijn. Het belangrijkste, namelijk het behoud van de contouren van de vinger, blijkt behouden gebleven ondanks de hoge compressieratio.

Ruisonderdrukking Het principe van ruisonderdrukking bij gebruik van een wavelettransformatie is gebaseerd op min of meer dezelfde ideeën als datacompressie. Uitgaande van een model voor de ruis kan een gemeten signaal worden opgevat als de gemiddelde ruis gesuperponeerd op een zuiver signaal. De waveletcoëfficiënten van de gemeten datareeks bestaat nu ook uit een superpositie van coëfficiënten behorende bij respectievelijk zuiver signaal en gemeten ruis. Het idee is nu dat gegeven het ruismodel een schatting gemaakt kan worden van de bijdrage aan de waveletcoëfficiënten als gevolg van de ruis. In het geval van witte ruis, een veel gebruikt model voor achtergrondruis bij metingen, zal de bijdrage aan de coëfficiënten uitgesmeerd zijn over alle coëfficiënten. Indien de bijdrage die het zuivere signaal aan de coëfficiënten zal toevoegen piekt in een kleine set van coëfficiënten, dan is ruisonderdrukking goed mogelijk. Dit gebeurt dan door een schatting voor de ruisbijdrage van alle coëfficiënten af te trekken, *hard thresholding*, of door de coëfficiënten in stand te laten als de schattingswaarde wordt overtroffen en de overige op nul te stellen, *soft thresholding*.

De meest bekende en opzienbarende toepassing van wavelets voor ruisonderdrukking komt wel van de hand van Coifman, hoogleraar aan Yale University. Hij beschikte over een oude geluidsoptname waarop Brahms' 'Eerste Hongaarse dans' uit 1889 te horen was. Natuurlijk was deze opname niet te vergelijken met de huidige geluidskwaliteit op een compact disc. Coifman presteerde het echter om met behulp van op wavelets gebaseerde ruisonderdrukking de opname 'ruisvrij' te maken, waarna deze klonk als anno '94 op een CD opgenomen. Verdere voorbeelden van het opschonen van data met behulp van wavelets zien we bijvoorbeeld bij Röntgenfoto's en scans, satellietbeelden en geofysische data.

Numerieke wiskunde In de numerieke wiskunde werkt men vaak bij het oplossen van integraal- en differentiaalvergelijkingen met eindige elementen methoden en multigrid methoden. Deze methoden zijn erop gebaseerd, dat het domein waarop het probleem gedefinieerd is opgedeeld wordt in elementen van een grid. Op deze elementen worden dan basisfuncties gedefinieerd waarmee de diverse termen in de vergelijking beschreven kunnen worden. Bij multigrid kunnen deze grids desgewenst verfijnd worden.

Naast de reeds bekende basisfuncties kunnen we nu natuurlijk ook de orthonormale waveletbasis gebruiken. Het verfijnen van deze wavelets komt dan overeen met wat er zich afspeelt bij het gebruik van multigrid methoden. Een mooie bijkomstigheid is dat integraalvergelijkingen van een bepaald type (met een Calderon-Zygmund operator) na overgang op een geschikte waveletbasis



Ingrid Daubechies

numeriek op te lossen zijn door het oplossen van een lineair stelsel waarin een ijle matrix betrokken is. De overgang naar een waveletbasis is in dit soort gevallen natuurlijk een uiterst geschikte preconditioner.

Wavelets in de 21ste eeuw

Naast de nu reeds traditionele waveletanalyse bestaat er sinds kort ook wavelets van de tweede generatie. Deze werd bedacht door de Belgische numeriek wiskundige Wim Sweldens, die thans bij AT&T de plek van Daubechies heeft ingenomen, nadat zij naar Princeton vertrokken is. Sweldens keek naar de praktijk waarin vaak een discrete datastroom geanalyseerd dient te worden. Wat er dan eigenlijk bij een Haar-wavelet gebeurt, is dat de meetpunten onderverdeeld worden in paren van 2 (elkaars burens), waarna de Haar-wavelet elk paar door een getal vervangt: de afstand van het eerste getal in het paar tot het gemiddelde van het paar. Het gemiddelde zelf wordt onthouden door de schalingsfunctie in de multiresolutie-analyse. Op een hogere schaal (lagere frequentie), worden deze gemiddelden weer in paren verdeeld, et cetera.

Sweldens' idee is eenvoudig. Je verdeelt je data in twee sets, bijvoorbeeld data op even en oneven meetwaarden. Vervolgens introduceer je twee operaties, een predictor (P) en een update operator (U). De even meetpunten vervang je nu door de even meetpunten minus het resultaat van P werkend op de oneven meetpunten. In het geval van de Haar-wavelet is P de identiteit en zijn de nieuwe waarden van de even meetpunten gedeeld door een factor 2 precies de waveletcoëfficiënten na toepassing van de Haar-wavelet. Het resultaat van de operatie U werkend op de vernieuwde even meetpunten levert nu ook vernieuwde oneven meetpunten. In het geval van de Haartransformatie geldt $U = 1/2$. Immers dan wordt de afstand tot het gemiddelde opgeteld bij de oneven meetpunten, die dan de waarden van de gemiddelden aannemen.

Samen met Ingrid Daubechies toonde Wim Sweldens aan dat men elke klassieke wavelettransformatie ook kan schrijven in een eindig aantal van dit soort manipulaties. Het voordeel van dit soort manipulaties is dat het opdelen van de data geheel willekeurig mag zijn. Hierdoor wordt ook mogelijk om wavelets op

irreguliere grids te bekijken. Zelfs wavelets op een bol konden hiermee beschreven worden. Iets dat in de klassieke analyse totaal onmogelijk is, omdat deze in de berekeningen steeds terug valt op Fourieranalyse. Verder zijn alle berekeningen in-place, dat wil zeggen, er hoeven geen aparte geheugenposities worden vrij gemaakt om coëfficiënten te berekenen en op te slaan.

JPEG2000 Wat voor velen *de* erkenning is voor hun werk aan wavelets is het feit dat de wavelettransformatie in de onlangs verschenen nieuwe JPEG beeldcompressiestandaard wordt gebruikt. In de eerdere JPEG-versies codeerde men coëfficiënten die afkomstig waren van een discrete cosinus transformatie. Hierbij werd een plaatje geconvolveerd met een rij scalairen die afkomstig waren van meetpunten op een verschoven cosinusfunctie. De wavelettransformatie was net iets te laat in haar ontwikkeling om bij de vorige standaard betrokken te worden, echter bij de nieuwste versie wordt zowel gebruik gemaakt van klassieke wavelets als van tweede generatie wavelets.

De klassieke wavelettransformatie wordt gebruikt voor *lossy* compressie, zoals we al eerder bij de FBI fingerprintcollectie gezien hebben. Verder zit er ook voor zekere doeleinden een *lossless* versie ingebouwd in JPEG2000. Deze methode is gebaseerd op constructies met behulp van tweede generatie wavelets die gehele getallen op gehele getallen af kunnen beelden. Sweldens en Daubechies lieten zien dat hiermee reeds een compressiefactor 2 behaald kan worden. Onlangs echter werd ook een factor 4 aangetoond.

Hype of meer?

Is waveletanalyse nu echt het onmisbare stukje wiskunde waar iedereen al jaren op zat te wachten of is het gewoon een stukje Fouriertheorie aangevuld met gebakken lucht? Bij een bezoek aan een congres waar waveletanalyse centraal staat, komen we beide

tegen. Vaak zien we dan de rijpe vruchten van een succesverhaal, zoals in het geval van JPEG2000, maar helaas zijn er genoeg wetenschappers die geheel zonder reden in hun toepassingsgebied de Fourieranalyse overboord zetten ten gunste van wavelets. Welnu, voor waveletanalyse is er zeker bestaansrecht, maar naast de bewezen kwaliteiten van Fourieranalyse. Het komt niet zelden voor dat de grootste vooruitgang in een bepaald toepassingsgebied wordt behaald door een combinatie van beide aanpakken.

De toekomst van wavelets zal vooral liggen in het deskundig toepassen ervan in allerlei applicaties, echter ook in de wiskunde zelf zijn er nog zeer interessante open vragen. Hierbij kunnen we denken aan waveletbases voor L^p -approximatie en aan analyse van (pseudo)differentiaaloperatoren en integraalvergelijkingen. Met name valt te denken aan studies aan operatoren die wellicht onder een wavelettransformatie beter te analyseren zijn. Op dit moment is deze groep van operatoren nog heel klein. Een open gebied ligt natuurlijk nog bij numerieke methoden op irreguliere grids, gezien de grid-onafhankelijke structuur van tweede generatie wavelets. Verder zijn er ook nog ontwikkelingen waarin de wavelettransformatie gecombineerd wordt met transformaties, die extra informatie over een signaal kunnen inbrengen. Een voorbeeld hiervan is de Radontransformatie, die in de tomografie veel gebruikt wordt.

In Nederland zien we waveletanalyse terug bij zowel wiskundig georiënteerde als bij fysische onderzoeksgroepen. Zo zien we in ons land onderzoek naar niet-lineaire waveletmethoden en naar wavelets voor het numeriek oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen en integraalvergelijkingen. Ook zien we hier onderzoek naar waveletmethoden voor (medische) beeldverwerking, klimaatonderzoek, seismiteit en exploratie-geofysica, het zoeken naar olie, waarmee we weer terug zijn bij de godfather Jean Morlet.



Referenties

- 1 A. Calderón, 'Intermediate spaces and interpolation, the complex method', *Stud. Math.*, 24, 113–190, 1964.
- 2 I. Daubechies, 'Orthonormal bases of compactly supported wavelets', *Comm. Pure Appl. Math.*, 41, 909–996, 1988.
- 3 I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.
- 4 B. Hubbard, *The world according to wavelets*, AK Peters, 1996.
- 5 S. Mallat, 'A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation', *IEEE Trans. Pat. Anal. & Mach. Intell.*, 11, 674–693, 1989.
- 6 P. Oonincx, *Mathematical signal analysis: Wavelets, Wigner distribution and a seismic application*, CWI Tract 130, CWI, 2001.

B.S. Yadav

Department of Mathematics, University of Delhi
TU-67, Vishakha Enclave, Pitampura, Delhi-11034, India

Algebraization of topology

It is aphoristically said that mathematics consists mainly of three basic disciplines: algebra, analysis and geometry, and the rest is their applications. However, in today's mathematics, the interplay of these disciplines is so intertwined and they are blended into one another to such an extent that it has become almost impossible to draw a line of demarcation between them. Each intrudes very often on territory of the others to give rise to new disciplines and in turn gets greatly stimulated in its own growth. Applications of topology (which is essentially analysis) to algebra and geometry have changed their entire fabric beyond recognition.

In this article, we intend to demonstrate how problems which are basically topological in nature can be extended, raised to new heights and even finally solved by employing algebraic methods, a process which we call 'algebraization of topology'. Although examples are available in abundance throughout mathematics, see [14], we have chosen four for discussion taking into account their importance, elegance and appeal to a general reader. They are:

1. Automatic Continuity
2. Stone-Weierstrass Theorems
3. The Closed Ideal Problem
4. Artin's Theory of Braids

In our exposition, we shall stress on laying bare the essential connections between these (without proof), particularly the role played by algebraic methods. We shall also take the reader to some of the frontiers of the literature on problems connected with these examples, except in case of example 4, the algebraic ramifications of which can be found in [4], [5], [12] and [28]. We include it here because of its fascination as one of the most simple classical examples of algebraization of topology.

Preliminaries

We explain some of the terminology that we shall use in the sequel. Our starting point is the concept of a vector space which is the 'absolute zero' for functional analysts. A vector space X is called a normed linear space if with each vector x in it there is associated a real number $\|x\|$, called the norm of x , such that $\|x\| \geq 0$ and $\|x\| = 0$ if and only if $x = 0$, $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ for each scalar α and $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ for all x, y in X . Banach defined the concept of a normed linear space for the first time in his doctoral thesis in 1922 and thus laid the foundation

of functional analysis. In fact, every normed linear space X is a metric space with the metric defined by $d(x, y) = \|x - y\|$, and hence a topological space. Thus what Banach did more significantly, by defining a normed linear space, was that he imposed a topological structure on a vector space, which is purely an algebraic structure. This is what we could term as the 'topologization of algebra'. A Banach space is a normed linear space which is complete (as a metric space). In fact, Banach himself calls complete normed linear spaces 'espaces du type B ' in a foot-note in his famous book [8], the very first monograph on functional analysis.

A Banach space X endowed with the additional structure of an inner product $\langle x, y \rangle$ such that the norm is related with the inner product by the equality $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ is called a Hilbert space. A Banach algebra is a Banach space $\mathcal{A}$ which is also an algebra with identity 1 such that $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ and $\|1\| = 1$. A Banach algebra $\mathcal{A}$ is commutative if $xy = yx$ for all x, y in $\mathcal{A}$. If $\mathcal{B}$ is a subalgebra of $\mathcal{A}$, then the set of all elements of $\mathcal{A}$ which commute with each element of $\mathcal{B}$ is also an algebra, called the commutant of $\mathcal{B}$ and denoted by $\mathcal{B}'$. The double commutant $\mathcal{B}''$ of $\mathcal{B}$ is defined by $\mathcal{B}'' = (\mathcal{B}')'$.

To discuss examples 1 and 2, we shall need some results from the theory of C^* -algebras, while for discussing example 3, we shall concentrate on by far the most important C^* -algebras $B(H)$ of all bounded linear operators on a Hilbert space H . A mapping $x \rightarrow x^*$ defined on a Banach algebra $\mathcal{A}$ is called an involution on $\mathcal{A}$ if:

- i. $(ax + by)^* = \bar{a}x^* + \bar{b}y^*$
- ii. $(xy)^* = y^*x^*$
- iii. $(x^*)^* = x$ for all $x, y \in \mathcal{A}$ and $a, b \in \mathbb{C}$.

A C^* -algebra is a Banach algebra $\mathcal{A}$ with an involution $x \rightarrow x^*$ such that

$$\|x^*x\| = \|x\|^2 \quad (\text{the } *- \text{quadratic norm equality}).$$

The concept of a C^* -algebra provides an example of a perfect diffusion of algebra, analysis and geometry. It borrows the $*$ -algebra structure from algebra, completeness from analysis and the $*$ -quadratic norm from geometry. In fact, the three aspects are so tightly fitted in the $*$ -quadratic norm equality that any change in one aspect has automatic reflections on the other two. A C^* -subalgebra of the C^* -algebra $B(H)$ is called a von Neumann algebra.

bra if it is closed in the weak-operator topology. We have Dixmier [16] and Zhu [45] as good references on the subject.

Automatic continuity

If T is a mapping (transformation) of a metric space X into a metric space Y , then T may be continuous at certain points of X without being continuous on the whole of X (unless X consists of a single point). However, if X and Y are normed linear spaces, we have the following result on automatic continuity in elementary functional analysis:

Theorem. *Let X and Y be normed linear spaces and $T : X \rightarrow Y$ a linear transformation. If T is continuous at a point, then T is automatically continuous, that is, it is continuous at every point of X .*

It is easy to see that it is the linearity of T , purely an algebraic property, which determines the continuity of T once it is continuous at a single point.

We shall, however, concentrate on automatic continuity in Banach algebras. As a very special case, we consider C^* -algebras $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$. A homomorphism $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ is called a C^* -homomorphism if $\psi(x^*) = \psi(x)^*$ for all $x \in \mathcal{A}$ and $\psi(1) = 1$. We have the following well known result; see [16] or [45].

Theorem. *Every C^* -homomorphism $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ is automatically continuous. In fact $\|\psi(x)\| \leq \|x\|$ for all $x \in \mathcal{A}$ and thus ψ is actually a contraction.*

For general Banach algebras nothing like this last theorem holds. But the commutativity of Banach algebras $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ and the semi-simplicity of $\mathcal{B}$ (both algebraic properties) make all the difference. A Banach algebra is called semi-simple if its radical (the intersection of all its maximal ideals) is $\{0\}$. We have the following theorem.

Theorem. *If ψ is a homomorphism of a commutative Banach algebra $\mathcal{A}$ into a semi-simple commutative Banach algebra $\mathcal{B}$, then ψ is automatically continuous.*

Kaplansky conjectured in 1950 that this theorem holds even if $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are non-commutative. This remained an open question till 1967 when B.E. Johnson [23] proved a slightly weaker result:

Theorem (Johnson). *If $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are Banach algebras, $\mathcal{B}$ semi-simple, then any onto homomorphism $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ is automatically continuous.*

As a particular case of this theorem, one can obtain the following conclusion which has many important applications [6].

Theorem. *Every involution on a semi-simple Banach algebra is continuous.*

B. Aupetit [6] has recently given an interestingly elegant short proof of an extension of Johnson's theorem via subharmonic functions. Can we replace an 'onto' homomorphism by an 'into' homomorphism in Johnson's theorem? No one knows!

Kaplansky's Conjecture. *If ψ is a homomorphism of a Banach algebra $\mathcal{A}$ into a semi-simple Banach algebra $\mathcal{B}$, is ψ continuous?*

Even the following problem continues to be unsolved.

Problem. *Let ψ be a homomorphism of a Banach algebra $\mathcal{A}$ into a semi-simple Banach algebra $\mathcal{B}$ with its range dense in $\mathcal{B}$. Is ψ continuous?*

There are partial solutions known in which the denseness of the range of ψ with some additional conditions guarantee the continuity of ψ , but in most of these cases ψ turns out to be onto, and hence continuous by Johnson's theorem. A typical example is the following result (see [6]).

Theorem. *Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be Banach algebras, $\mathcal{B}$ semi-simple. If $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ is a homomorphism such that its range is dense and has at most countable codimension in $\mathcal{B}$, then ψ is continuous.*

For further references on automatic continuity, see Sinclair [36] and Dales [15]; see also [7].

Lastly, we would like to mention yet another important result for von Neumann algebras, the so called double commutant theorem, which provides a very neat and clean yet quite deep example of algebraization of topology [45].

Theorem (The Double Commutant Theorem). *A C^* -subalgebra $\mathcal{A}$ of $\mathcal{B}(H)$ is a von Neumann algebra if and only if $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$.*

Stone-Weierstrass theorems

Every real polynomial is a continuous function but the converse is not true. The Weierstrass approximation theorem says, nevertheless, that continuous functions are not essentially far away from polynomials. Precisely speaking, for a closed interval $[a, b]$, the set $\mathcal{P}[a, b]$ of all polynomials is dense in the set $\mathcal{C}[a, b]$ of all continuous functions defined on $[a, b]$. The crux of the generalization of this result by Stone is to replace the closed interval $[a, b]$ by a compact Hausdorff space X . But the problem is that to talk of a polynomial over X does not make sense. What Stone actually did was first to visualize and paraphrase Weierstrass theorem in terms of algebras. The process gives one of the most striking examples of algebraization of topology.

Firstly we observe that a polynomial is a finite linear combination of functions $1, x, x^2, x^3, \dots$. In other words, the two functions 1 and x generate the algebra $\mathcal{P}[a, b]$, that can be regarded as a subalgebra of the algebra $\mathcal{C}[a, b]$, which is actually a Banach algebra with sup norm. Since $\overline{\mathcal{P}[a, b]}$, the closure of $\mathcal{P}[a, b]$ in $\mathcal{C}[a, b]$, is also an algebra, we see that $\overline{\mathcal{P}[a, b]}$ is the closed subalgebra of $\mathcal{C}[a, b]$ generated by the functions 1 and x . The Weierstrass theorem states precisely that $\overline{\mathcal{P}[a, b]} = \mathcal{C}[a, b]$. This algebraic version of Weierstrass theorem gives meaning to the question: "Can the closed interval $[a, b]$ in Weierstrass theorem be replaced by a suitable topological space X ?" By closely examining the characteristic properties of functions 1 and x (the first is a constant function and the second separates points in $[a, b]$) and that $[a, b]$ is a compact Hausdorff space, Stone [37] proved the following generalization of Weierstrass theorem.

The Stone-Weierstrass Theorem. Let X be a compact Hausdorff space and $C(X, \mathbb{C})$ the algebra of all complex continuous functions defined on X . If $\mathcal{A}$ is a closed subalgebra of $C(X, \mathbb{C})$ such that:

- i. it contains a non-zero constant function,
- ii. separates points in X , and
- iii. contains the conjugate $\bar{f}$ of each its function f ,

then $\mathcal{A} = C(X, \mathbb{C})$.

Several remarks are in order. Firstly, we refer to Rudin [34] and Aupetit [6] for certain generalizations of the theorem which we shall not discuss. Secondly, we refer to Kaplansky [26] for an alternative proof of the theorem which is based on partitions rather than lattice-theoretic methods as given by Stone [37]. The two proofs are more or less of the same length, but while one could work with partitions in case of non-commutative algebras, with lattices this is not possible. Thirdly, as Weierstrass theorem occupies a salutary position in classical analysis, the importance of the Stone-Weierstrass theorem in modern analysis cannot be overemphasized. It is not surprising that its generalizations, extensions, unsolved problems associated with it and their partial solutions and variants are still attracting the attention of analysts. Fourthly, its generalization to locally compact Hausdorff spaces is rather routine as we shall see later, a proof which is still not so popular in the literature. We discuss here in brief its extensions to C^* -algebras.

As $C(X, \mathbb{C})$ is a commutative C^* -algebra, a natural question that arises is the following: 'If $\mathcal{A}$ is a C^* -algebra, not necessarily commutative, and $\mathcal{B}$ is a C^* -subalgebra of $\mathcal{A}$, under what conditions on $\mathcal{B}$ does $\mathcal{A}$ equal $\mathcal{B}$?' In order to examine certain answers to this question, we need to introduce some terminology.

An element x in a C^* -algebra $\mathcal{A}$ is positive ($x \geq 0$) if there exists an element $y \in \mathcal{A}$ such that $x = yy^*$. A functional ψ on $\mathcal{A}$ is said to be 'positive' if $\psi(x) \geq 0$ for all $x \geq 0$ in $\mathcal{A}$ and a 'state' on $\mathcal{A}$ if ψ is positive and $\psi(1) = 1$. The set $S(\mathcal{A})$ of all states on $\mathcal{A}$ is a subset of the closed unit ball in $\mathcal{A}^*$, the dual space of $\mathcal{A}$. $S(\mathcal{A})$ with the W^* -topology induced by the W^* -topology of $\mathcal{A}^*$ is called the 'state space' of $\mathcal{A}$. The state space $S(\mathcal{A})$ is a convex compact Hausdorff space, and hence has a non-empty set of extreme points. As a matter of fact, by the Krein-Milman theorem $S(\mathcal{A})$ is the W^* -closed convex hull of the set of its extreme points. An extreme point of the state space $S(\mathcal{A})$ is called a 'pure state' of $\mathcal{A}$. We shall denote by $P(\mathcal{A})$ the W^* -closure of the set of extreme points of $\mathcal{A}$ together with $\{0\}$ and call it the 'pure state space' of $\mathcal{A}$.

Now if $\mathcal{A}$ is commutative, then $\mathcal{A}$ is isomorphic to the algebra of W^* -continuous functions on the set of pure states on $\mathcal{A}$. In fact, if $x \in \mathcal{A}$, then x corresponds to the function $\psi \rightarrow \psi(x)$, where ψ is a pure state on $\mathcal{A}$. As the set of pure states on $\mathcal{A}$ is a compact Hausdorff space, it follows by Stone-Weierstrass theorem that if $\mathcal{B}$ is a C^* -subalgebra of $\mathcal{A}$ which separates points in the set of pure states on $\mathcal{A}$, then $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Whether this is true even when $\mathcal{A}$ is non-commutative is an open question known as 'the Stone-Weierstrass problem'.

The Stone-Weierstrass Problem. If $\mathcal{A}$ is a C^* -algebra, not necessarily commutative, and $\mathcal{B}$ is a C^* -subalgebra of $\mathcal{A}$ which separates the pure states of $\mathcal{A}$, is $\mathcal{B} = \mathcal{A}$?

An affirmative answer to this question will provide a non-

commutative extension of the Stone-Weierstrass theorem. In 1960 Glimm [21] obtained a partial solution of this problem by showing that it will suffice if $\mathcal{B}$ separates $P(\mathcal{A})$, the pure state space of $\mathcal{A}$.

Theorem (Glimm). If $\mathcal{A}$ is a C^* -algebra, not necessarily commutative, and $\mathcal{B}$ is a C^* -subalgebra of $\mathcal{A}$ which separates the pure state space of $\mathcal{A}$, then $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Before we close this section and suggest literature for further reading on the subject for which there is no scope to discuss in this article, we make a few observations. In fact, if $\mathcal{A}$ is commutative, then the set of pure states of $\mathcal{A}$ is W^* -closed in $\mathcal{A}^*$. Therefore, in the non-commutative case Glimm assumed a more stringent condition as suggested by Kadison that $\mathcal{B}$ separates not only the set of pure states of $\mathcal{A}$ but the pure state space $P(\mathcal{A})$ of $\mathcal{A}$ and proved the non-commutative C^* -algebra extension of the Stone-Weierstrass theorem by using some unpublished work of Kadison; see Dixmier [16].

The Stone-Weierstrass problem can be stated in another equivalent form. Kadison [25] proved that if $\mathcal{A}$ is a C^* -algebra, then there is a one-one correspondence between the pure states of $\mathcal{A}$ and the set $\mathcal{M}$ of maximal modular left ideals of $\mathcal{A}$. We say that a C^* -subalgebra $\mathcal{B}$ of $\mathcal{A}$ separates $\mathcal{M}$ if for $I, J \in \mathcal{M}$, we have $I \neq J \Leftrightarrow I \cap \mathcal{B} \neq J \cap \mathcal{B}$. Since if $\mathcal{A}$ is commutative and $\mathcal{B}$ separates $\mathcal{M}$, then $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, the Stone-Weierstrass problem takes the following form.

The Stone-Weierstrass Problem, alternative form. If $\mathcal{A}$ is a C^* -algebra, not necessarily commutative, and $\mathcal{B}$ is a C^* -subalgebra of $\mathcal{A}$ which separates $\mathcal{M}$, is $\mathcal{B} = \mathcal{A}$?

Kaplansky [26] studied so-called CCR algebras. A C^* -algebra $\mathcal{A}$ is called a CCR algebra if every irreducible representation of $\mathcal{A}$ consists of completely continuous operators. He solved the Stone-Weierstrass problem in the affirmative in case $\mathcal{A}$ is a CCR algebra. In fact, his argument can be extended to achieve the same result in case $\mathcal{A}$ is a GCR algebra (a C^* -algebra with a composition series $\{I_\alpha\}$ of ideals such that $I_{\alpha+1}/I_\alpha$ is CCR). Although Glimm's proof is of genuine ingenuity, its bulk is devoted to use the ideas developed in [26]. Lastly we observe that the Stone-Weierstrass theorem has an easy extension to the algebra $C_0(X)$ of complex-valued continuous functions on a locally compact Hausdorff space X vanishing at infinity. In fact, each maximal modular ideal of $C_0(X)$ is hinged at some point $x \in X$, i.e. consists of those functions in $C_0(X)$ which vanish at x . Now it suffices to observe that a C^* -subalgebra $\mathcal{B}$ of $C_0(X)$ separates points in X if and only if it separates its maximal ideals and consequently the Stone-Weierstrass theorem holds for $C_0(X)$.

We suggest further reading on the subject. Dixmier [16] provides a good exposition of the work of Kaplansky [26] and Glimm [21] with simplification of their arguments. Akemann [1] was first to obtain some partial solutions of the general Stone-Weierstrass problem. In [2], Akemann and Anderson have given a survey of the various approaches attempted by a number of authors up to 1982 to solve the problem in the light of the general framework developed by Akemann [1]. Some results on factorial Stone-Weierstrass problem for separable C^* -algebras were obtained by Anderson and Bunce [3]. Earlier in 1970 Sakai [35]

had solved the problem in case $\mathcal{A}$ is separable and $\mathcal{B}$ is nuclear. Longo [27] and Popa [31] have independently obtained a solution of the factorial Stone-Weierstrass problem for separable C^* -algebras. For recent complements to Stone-Weierstrass theorem, see Brown [13].

The closed ideal problem

Here we discuss a problem in operator theory which remained open for more than four decades (1940-1984) and in the solution of which algebraic methods have played a great role, as we shall show. Let T be an operator in $B(H)$, where H is an infinite-dimensional separable complex Hilbert space. A closed subspace M of H is called invariant under T if $T(M) \subset M$ — $\{0\}$ and H are trivially invariant under T . M is called non-trivial if $M \neq \{0\}$ and $M \neq H$. Does every operator T have a non-trivial invariant subspace? This is the so-called ‘invariant subspace problem’, which is still open. No one knows as to who raised the problem for the first time. Perhaps it arose naturally amongst mathematicians after the unpublished discovery by von Neumann that every non-zero compact operator has a non-trivial invariant subspace. The problem has been solved for Banach spaces; see Read [32], [33], Enflo [19] and Beauzamy [9], [10].

Consider a sequence $w = \{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ of positive real numbers such that $\sup\{w_{n+1}/w_n\} < \infty$. Define $l^1(w)$ as the space of all complex sequences $x = \{x_0, x_1, \dots\}$ with

$$\|x\| = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| w_n < \infty.$$

Then $l^1(w)$ is a Banach space isometrically isomorphic to l^1 . The (forward) shift operator T on $l^1(w)$ is defined by

$$Tx = \{0, x_0, x_1, \dots\}.$$

Since $\{w_{n+1}/w_n\}$ is a bounded sequence, T is a bounded operator on $l^1(w)$. The invariant subspaces of T will simply be called the invariant subspaces of $l^1(w)$. The subspaces $M_k(w)$ defined by

$$M_k(w) = \{x \in l^1(w) : x_n = 0, n < k\}, \quad 0 \leq k < \infty,$$

are obviously invariant subspaces of $l^1(w)$. These are called the standard invariant subspaces of $l^1(w)$. Whatever is said so far about $l^1(w)$ holds true about the Banach spaces $l^p(w)$, $1 \leq p < \infty$, defined accordingly. Characterization of standard invariant subspaces of $l^p(w)$ has been a fascinating subject for many mathematicians; see for example references [18], [29], [42]–[44].

If the weight sequence w_n satisfies also an additional condition:

$$w_{m+n+1} \leq C w_m w_n \quad \text{for all } m, n$$

and a constant $C > 0$, then $l^1(w)$ is a Banach algebra and the invariant subspaces of $l^1(w)$ are actually its closed ideals. The Banach spaces $l^p(w)$, $p > 1$, become Banach algebras under more stringent conditions on the weight sequence $\{w_n\}$. See [22]. In either case, the ideals $M_k(w)$ are called the standard closed ideals of these algebras. The algebras $l^1(w)$ are the special cases of more general weighted Banach algebras first studied independently by Beurling [11] and Gelfand [20], while the algebras $l^p(w)$, $p > 1$, are closely related to the work of Wermer [40].

A Banach algebra $l^p(w)$ is called radical if the weight sequence $\{w_n\}$ satisfies the condition $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n^{1/n} = 0$.

Problem. Is every closed ideal in a radical Banach algebra $l^p(w)$ an $M_k(w)$? Or, equivalently, does there exist a radical Banach algebra $l^p(w)$ with a non-standard closed ideal?

This is called the ‘closed ideal problem’. The problem for radical $l^p(w)$ algebras was first raised by Shilov around 1940 and remained unanswered till 1984 when Thomas [38] constructed an example of an algebra which has a non-standard closed ideal. He further showed in 1985 that his construction can be extended to $l^p(w)$ -algebras for $p > 1$ [39]. Nikolski [30] had earlier claimed to have constructed an example of an $l^1(w)$ -algebra having a non-standard closed ideal, but his construction was discovered to be erroneous. In fact, the weight sequence w that he constructed did give an example of a non-standard invariant subspace in the Banach space $l^1(w)$, but it failed to be an algebra weight sequence.

The crux of Thomas’ construction can be explained as follows: let us denote by $(\overline{\mathcal{A}x})$ the closed ideal generated by an element x in $\mathcal{A} = l^1(w)$. Thomas actually constructed for the first time a Banach algebra $\mathcal{A}$ such that:

- $(\overline{\mathcal{A}x}) = \mathcal{A}$, that is, x is a generator of $\mathcal{A}$, and
- $\mathcal{A}$ has just one maximal ideal containing properly a closed ideal which is not contained in $(\overline{\mathcal{A}x^2})$.

On the other hand, it is interesting to ask for conditions on the weight sequence w which determine that all the closed ideals of $l^1(w)$ are standard ones only. There is good literature on the subject and we refer to [41] as a source of information.

Artin’s theory of braids

Here is an example of algebraization of topology in which continuous deformations of a system are determined by purely algebraic methods involving elementary group theory. We refer to Birman [12] and Moran [28] for a good account of the subject. See also Kac and Ulam [24].

We consider two parallel straight lines A and B in space which are identically orientated and choose an equal number of points on A and B , say a_1, a_2, a_3, a_4 on A and b_1, b_2, b_3, b_4 on B , as shown in figure 1. Each a_i is connected to a unique b_j through a curve c_i . The curves c_i may twist and wind in space subject to the condition that the projection of each c_i in the (A, B) -plane remains monotone, a property that guarantees that the distance of a bug from the line A as it moves from the point a_i to the point b_j along the projection of c_i is monotonically increasing. The system consisting of the two lines A and B along with the curves c_i is called a ‘weaving pattern’.



Figure 1

We make the following postulates on deformations of a weaving pattern:

- Although the distance between the lines A and B may vary, they remain parallel with the same orientation.

- ii. The points a_i and b_i can move arbitrarily along their respective lines irrespective of the distance between two consecutive points but their order remains unchanged.
- iii. The curves may be contracted or stretched but the projection of each c_i in the (A, B) -plane under any such deformation continues to be monotone. (This guarantees that the multiplication of two weaving patterns as introduced below is well-defined.)
- iv. No two c_i 's intersect during any deformation.

We call two weaving patterns 'equivalent' if each can be obtained from the other by a deformation having properties (i)–(iv). It is easy to see that this equivalence between two weaving patterns is actually an equivalence relation. We define a *braid* as an equivalence class of weaving patterns. Now the question is how to identify two braids.

Fundamental problem. Which two braids are identical?

Equivalently, we may ask the question: 'Which two weaving patterns are equivalent?' In order to solve the problem, we first define a binary operation on the set of weaving patterns. Given two weaving patterns W_1 and W_2 , we define $W_1 \circ W_2$ as follows: put W_2 below W_1 so that the line A of W_2 lies on the line B of W_1 and the points a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 coincide respectively with b_1, b_2, b_3, b_4 as shown in figure 2.

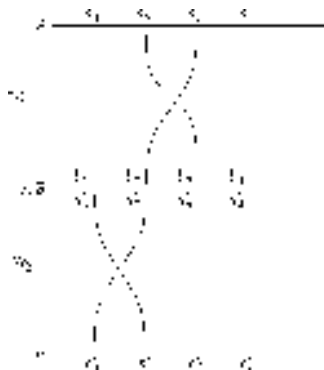


Figure 2

Now defuse W_1 and W_2 into $W_1 \circ W_2$ by removing the line in the middle. The result is figure 3.

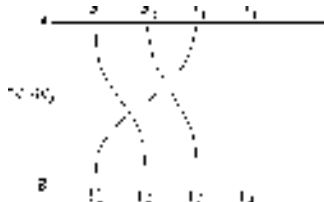


Figure 3

It is obvious that this binary composition is associative. Also, the trivial weaving pattern I serves as the identity element for the binary operation. The inverse of a weaving pattern, say of W_1 , is obtained by interchanging the positions of lines A and B (see figure 4). We see that $W_1 \circ W_1^{-1} = W_1^{-1} \circ W_1 = I$ and have

Theorem. The set G of all weaving patterns is a group with respect to the binary operation defined above.

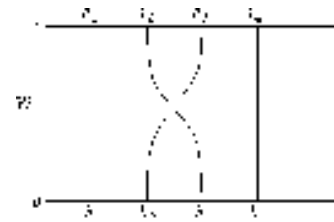


Figure 4

Now consider the three weaving patterns W_1 , W_2 and W_3 with their inverses. They are pictured in figure 5.

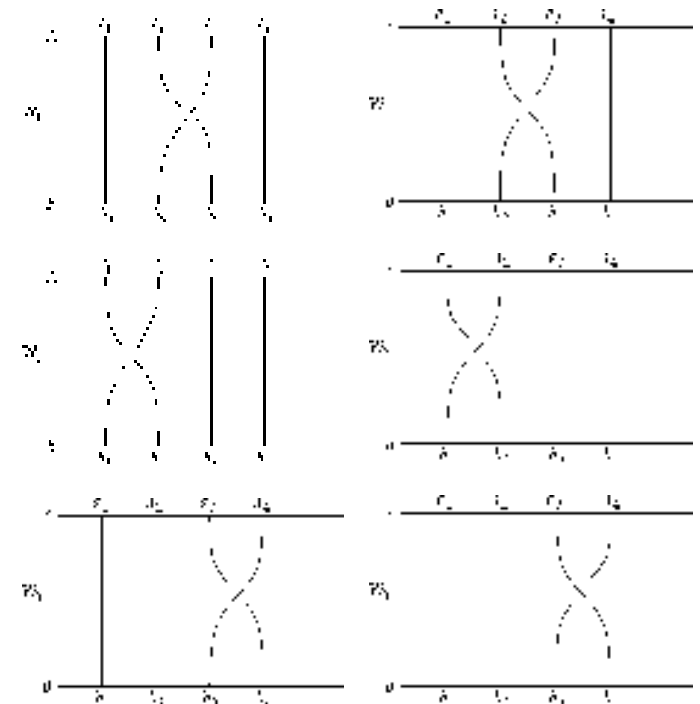


Figure 5

It's not hard to see that each weaving pattern in the group G can be represented as a product of these six elements. For example, if W is as in figure 6, then we see that $W = W_2 W_3^{-1} W_1$.

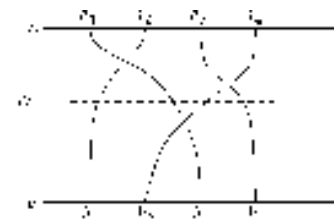


Figure 6

This shows that for each W in G , we have $W = D_1 D_2 \cdots D_n$ where each D_i , $i = 1, 2, \dots, n$, is one of these six elements. We call the representation $D_1 D_2 \cdots D_n$ a word and observe that each weaving pattern W in G can be represented as a word. However, we see that this representation is not unique as different words may represent the same element of G . For example, we have $W_1 W_1^{-1} = W_2 W_2^{-1} = W_3 W_3^{-1} = I$.

Thus we finally conclude:

Theorem. *Any two weaving patterns are equivalent if and only if the corresponding words represent the same element of G .*

This work of E. Artin [4], [5] amply illustrates how a problem essentially topological in nature can be solved by employing methods which are purely algebraic. $\Leftarrow$

Acknowledgements

The author thanks the referee for his suggestions on improving the original text of the article, particularly in the case of example 4 (see [17] for an interesting reading).

References

- 1 C.A. Akemann: *The general Stone-Weierstrass problem*. J. Funct. Anal., 4 (1969), 277–294.
- 2 C.A. Akemann and J. Anderson: *The Stone-Weierstrass problem for C^* -algebras in Invariant subspaces and other topics*. Operator Theory: Adv. Appl., 6 (1982), 15–32.
- 3 J. Anderson and J. Bunce: *Stone-Weierstrass theorem for separable C^* -algebras*. J. Operator Theory, 6 (1981), 363–374.
- 4 E. Artin: *Theory of braids*. Ann. of Math., 48 (1947), 101–126.
- 5 E. Artin: *Braids and permutations*. Ann. of Math., 48 (1947), 643–649.
- 6 B. Aupetit: *A Primer on Spectral Theory*. Springer-Verlag, 1991.
- 7 J.M. Bachar et al. (Editors): *Radical Banach algebras and automatic continuity*. Lecture Notes in Mathematics 975, Springer-Verlag, 1983.
- 8 S. Banach: *Théorie des Opération Linéaires*. Chelsea Publishing Co., 2nd Ed., New York, 1978.
- 9 B. Beauzamy: *Un opérateur sans sous-espace invariant non-trivial, simplification de l'exemple de P. Enflo*. Integral Equations and Operator Theory, 9 (1985), 314–384.
- 10 B. Beauzamy: *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces*. North-Holland, Amsterdam, 1988.
- 11 A. Beurling: *Sur les intégrals de Fourier absolument convergents et leur application à une transformation fonctionnelle*. 9ième congrès des mathématiciens Scandinaves (1938), Helsinki (1939), 345–366.
- 12 J.S. Birmann: *Braids: Link and Mapping Class Groups*. Princeton University Press, 1974.
- 13 L.G. Brown: *Complements to various Stone-Weierstrass theorems for C^* -algebras and a theorem of Shultz*. Commun. Math. Phys., 143 (1992), 405–413.
- 14 R. Curto and P.E.T. Jorgensen (Editors): *Algebraic Methods in Operator Theory*. Birkhäuser, Boston, 1994.
- 15 H.G. Dales: *Automatic continuity: A survey*. Bull. London Math. Soc., 101 (1978), 129–183.
- 16 J. Dixmier: *Les C^* -algèbres et leur représentations*. Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- 17 P. Dehornoy: *Braids and their Sub-Distributivity*. Progress in Mathematics, Vol. 192, Birkhäuser, August 2000.
- 18 W.F. Donoghue: *The lattice of invariant subspaces of a completely continuous quasi-nilpotent transformation*. Pacific J. Math. 7 (1957), 1031–1035.
- 19 P. Enflo: *On the invariant subspace problem in Banach spaces*. Acta Math., 158 (1987), 213–313.
- 20 I.M. Gelfand: *To the theory of normed rings II*. Doklady Acad. Sci. URSS, 25 (1939), 570–572.
- 21 J. Glimm: *A Stone-Weierstrass theorem for C^* -algebras*. Ann. of Math., 72 (1960), 216–244.
- 22 S. Grabiner: *Weighted convolution algebras as analogues of Banach algebras of power series*. Lecture Notes in Mathematics, 975, Springer-Verlag, 1983.
- 23 B.E. Johnson: *The uniqueness of the (complete) norm topology*. Bull. Amer. Math Soc., 73 (1967), 537–539.
- 24 M. Kac and S. Ulam: *Mathematics and Logic*. Pelican Books, 1971.
- 25 R.V. Kadison: *Irreducible operator algebras*. Proc. Nat. Acad. Sci. 43 (1957), 273–276.
- 26 I. Kaplansky: *The structure of certain operator algebras*. Trans. Amer. Math. Soc., 70 (1951), 219–255.
- 27 R. Longo: *Solution of the factorial Stone-Weierstrass conjecture. An application of the theory of standard split W^* -inclusions*. Invent. Math., 76 (1984), 145–155.
- 28 S. Moran: *The Mathematical Theory of Knots and Braids: An Introduction*. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- 29 N.K. Nikolskii: *Invariant subspaces of weighted shift operators*. Math. USSR-Sb., 3 (1967), 159–176.
- 30 N.K. Nikolskii: *Selected problems of weighted approximation and spectral analysis*. Trudy, Mat. Inst. Steklova, 120 (1967), 287–290 (AMS Translation, 1976).
- 31 S. Popa: *On a problem of R.V. Kadison on maximal abelian $*$ -subalgebras in factors*. Invent. Math., 65 (1981), 269–281.
- 32 C.J. Read: *A solution to the invariant subspace problem*. Bull. London Math. Soc., 16 (1984), 337–401.
- 33 C.J. Read: *A short proof concerning the invariant subspace problem*. J. London Math. Soc., 2 (1985), 335–348.
- 34 W. Rudin: *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1973.
- 35 S. Sakai: *On the Stone-Weierstrass theorem for C^* -algebras*. Tohoku Math. J., 22 (1970), 191–199.
- 36 A.M. Sinclair: *Automatic Continuity of Linear Operators*. Cambridge University Press, Cambridge, 1976.
- 37 M.H. Stone: *A generalized Weierstrass approximation theorem in Studies in Mathematics Vol I*. Mathematical Association of America, 1962.
- 38 M.P. Thomas: *A non-standard ideal of a radical Banach algebra of power series*. Acta Math., 152 (1984), 192–217.
- 39 M.P. Thomas: *Quasi-nilpotent strictly cyclic unilateral weighted shift operators on l^p which are not unicellular*. Proc. London Math. Soc., 51 (1985), 127–145.
- 40 J. Wermer: *On a class of normed rings*. Ark. Mat., 2 (1953) 537–551.
- 41 B.S. Yadav: *The lattice $\omega + 1$ of invariant subspaces in H* . Helson and B.S. Yadav (Editors): *Invariant Subspace and Allied Topics*. Narosa Publishing House, New Delhi, 1990.
- 42 B.S. Yadav and S. Chatterjee: *On a characterization of invariant subspace lattices of weighted shifts*. Proc. Amer. Math. Soc., 84 (1982), 492–496.
- 43 B.S. Yadav and S. Chatterjee: *Invariant subspace lattices of Lambert's weighted shifts*. J. Australian Math. Soc., 33 (1982), 135–142.
- 44 D.V. Yakubovich: *Invariant subspaces of weighted shift operators*. Zapiski Nauk Sem. LO-MI, 141 (1985), 100–143.
- 45 K. Zhu: *An Introduction to Operator Algebras*. CRC Press, New York, 1993.

Johan Bosman

Ina Boudier Bakkerlaan 59
3582 VR Utrecht
jgbosman@math.uu.nl

Lenny Taelman

Maurice Verdoncklaan 9
B9050, Gentbrugge, België
lenny.taelman@rug.ac.be

On sums of sums of values of Dirichlet characters

In de Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) komt tweemaal per jaar een zogeheten ster-opgave voor. Voor een dergelijke opgave is bij de UWC-redactie geen oplossing bekend. Dit artikel is ontstaan naar aanleiding van de oplossing die Johan Bosman en Lenny Taelman hebben gevonden voor de ster-opgave van de UWC van vorig jaar (september 2000, pagina 303). Johan Bosman en Lenny Taelman zijn studenten wiskunde aan de universiteiten van respectievelijk Utrecht en Gent.

Using elementary techniques we prove relations between sums of Dirichlet characters. In the special case of Jacobi symbols these relations are closely related to the class number formula for quadratic number fields with negative discriminant. We then use these relations to prove problems from the Dutch-Flemish University Mathematics Competition.

Notations

Let n be a positive integer and let χ be a nontrivial Dirichlet character modulo n . We define the function $s : \mathbf{Z}_{>0} \rightarrow \mathbf{C}$ as follows:

$$s(m) = s_{n,\chi}(m) := \chi(0) + \cdots + \chi(m).$$

Note the following identity:

$$\sum_{x \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}} \chi(x) = 0. \quad (1)$$

To see this, take $y \in \mathbf{Z}$ for which $\gcd(y, n) = 1$ and $\chi(y) \neq 1$, then $\sum_{x \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}} \chi(x) = \sum_{x \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}} \chi(xy) = \chi(y) \sum_{x \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}} \chi(x)$ and (1) follows. We now see that $s(x+n) = s(x)$ for all $x \in \mathbf{Z}_{>0}$ so that s is well-defined as a map from $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ to $\mathbf{C}$ and hence s is well-defined on rational numbers $\frac{p}{q}$ with $\gcd(q, n) = 1$.

Rewriting (1) we have $\chi(0) + \cdots + \chi(x) + \chi(x+1) + \cdots + \chi(n-1) = 0$ or $s(x) + \chi(-1)s(n-x-1) = 0$, so we find the important identity

$$s(x) = -\chi(-1)s(-x-1). \quad (2)$$

Main Result

We shall prove the following result.

Theorem. Let $m > 1$ be an integer coprime to n . Then the value of

$$C = C(n, \chi) := \frac{\sum_{k=0}^{m-1} s(-\frac{k}{m})}{m - \overline{\chi(m)}}, \quad (3)$$

where $\overline{\chi(m)}$ denotes the complex conjugate of $\chi(m)$, does not depend on m .

Proof. Define $S := s(0) + \cdots + s(n-1)$. We will compute the expression $\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} s(l - \frac{k}{m})$ in two ways.

First of all,

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} s\left(l - \frac{k}{m}\right) = mS, \quad (4)$$

since $l - \frac{k}{m}$ meets every residue class modulo n exactly m times. But on the other hand, $s(l - \frac{k}{m}) = s(-\frac{k}{m}) + \chi(1 - \frac{k}{m}) + \cdots + \chi(l - \frac{k}{m})$, so

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} s\left(l - \frac{k}{m}\right) &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \left(s\left(-\frac{k}{m}\right) + \sum_{a=1}^l \chi\left(a - \frac{k}{m}\right) \right) \\ &= n \sum_{k=0}^{m-1} s\left(-\frac{k}{m}\right) + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{a=1}^l \sum_{k=0}^{m-1} \overline{\chi(m)} \chi(am - k) \\ &= n \sum_{k=0}^{m-1} s\left(-\frac{k}{m}\right) + \overline{\chi(m)} \sum_{l=0}^{n-1} s(ml) \\ &= n \sum_{k=0}^{m-1} s\left(-\frac{k}{m}\right) + \overline{\chi(m)} S. \end{aligned}$$

Combining this with (4) we see that $n \sum_{k=0}^{m-1} s(-\frac{k}{m}) + \overline{\chi(m)} S = mS$ or, in other words,

$$\frac{\sum_{k=0}^{m-1} s(-\frac{k}{m})}{m - \overline{\chi(m)}} = \frac{S}{n},$$

which is clearly independent of m . $\square$

Note that, in the special case where χ is the Jacobi symbol, and $n \equiv 3 \pmod{4}$ is square-free and not equal to 3, then $C(n, \chi)$ is the class number of $\mathbf{Q}(\sqrt{-n})$ (see for example the book *Zetafunktionen und quadratische Körper* by Don Zagier).

Corollary. Let x be an element of $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Then

$$\frac{\sum_{k=0}^{m-1} s\left(\frac{x+k}{m}\right) - \overline{\chi(m)}s(x+m-1)}{m - \overline{\chi(m)}} = C(n, \chi), \quad (5)$$

where C is as in the theorem.

Proof. Note that after substitution $x = -m$ the expression (5) is clearly equal to (3) since we sum the same terms, but only in backward order. Now substitute $x = my$. We will prove by induction on y that the value of (5) is the same for all values of $y \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Above we showed this for $y = -1$, so let's get to the induction step. It is enough to show that

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} s\left(y+1+\frac{k}{m}\right) - \sum_{k=0}^{m-1} s\left(y+\frac{k}{m}\right) \\ = \overline{\chi(m)}(s(m(y+1)+m-1) - s(my+m-1)). \end{aligned}$$

This is immediate, for denoting with LHS and RHS the lefthand and righthand side of this equality, respectively, we see that

$$\begin{aligned} LHS &= \sum_{k=0}^{m-1} \left(s\left(y+1+\frac{k}{m}\right) - s\left(y+\frac{k}{m}\right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \chi\left(y+1+\frac{k}{m}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \overline{\chi(m)}\chi(my+m+k) = RHS. \quad \square \end{aligned}$$

Examples

In this section we let n be a positive odd integer which is not a square and we let χ be the Jacobi symbol modulo n . In this case it is well-known that

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ -1 & \text{if } n \equiv -1 \pmod{4}, \end{cases}$$

and

$$\left(\frac{2}{n}\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \equiv \pm 1 \pmod{8}, \\ -1 & \text{if } n \equiv \pm 3 \pmod{8}. \end{cases}$$

We will show by examples how we can use our theorem and its corollary together with (2) to prove identities involving sums of Jacobi symbols. The examples here are problems of the third edition of the Dutch-Flemish University Mathematics Competition 2000. Note that choosing $m = 2$ in (3) we find that

$$C = \frac{s\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2 - \left(\frac{2}{n}\right)}. \quad (6)$$

If $n \equiv 1 \pmod{4}$ then $\left(\frac{-1}{n}\right) = 1$. Using (2) we see that $s\left(\frac{n-1}{2}\right) = -s\left(\frac{n-1}{2}\right)$ and therefore

$$C = 0 \quad \text{if } n \equiv 1 \pmod{4}. \quad (7)$$

As a first example we will prove the following two identities:

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} s(k) = \begin{cases} \frac{n+3}{6} s\left(\frac{n-1}{2}\right) & \text{if } n \equiv 3 \pmod{8}, \\ \frac{n+1}{2} s\left(\frac{n-1}{2}\right) & \text{if } n \equiv 7 \pmod{8}. \end{cases} \quad (8)$$

To see this, first note that in both cases $n \equiv -1 \pmod{4}$. Thus $\left(\frac{-1}{n}\right) = -1$, so that the following identity is a consequence of (2):

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} s(k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} s(k) + \frac{1}{2} s\left(\frac{n-1}{2}\right).$$

If we substitute $m = n + 1$ into (3), then we see that

$$\sum_{k=0}^n s(k) = nC = \frac{n}{2 - \left(\frac{2}{n}\right)} s\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

and (8) follows. The second example is

$$s\left(\frac{n-1}{4}\right) + s\left(\frac{3(n-1)}{8}\right) = s\left(\frac{n-1}{8}\right) \quad \text{if } n \equiv 1 \pmod{8}. \quad (9)$$

To see this, first substitute $m = 2, x = -\frac{7}{4}$ into (5) and consider (7) to derive

$$s\left(-\frac{3}{8}\right) + s\left(-\frac{7}{8}\right) - s\left(-\frac{3}{4}\right) = 0.$$

Using (2) we obtain from this that

$$s\left(-\frac{1}{4}\right) + s\left(-\frac{3}{8}\right) - s\left(-\frac{1}{8}\right) = 0,$$

which is equivalent with (9). The last example we show here is

$$s\left(\frac{n-3}{8}\right) + s\left(\frac{3n-1}{8}\right) = s\left(\frac{n-1}{2}\right) \quad \text{if } n \equiv 3 \pmod{8}. \quad (10)$$

First we substitute $x = -\frac{3}{2}, m = 2$ into (5) and we get:

$$\frac{s\left(-\frac{1}{4}\right) + s\left(-\frac{3}{4}\right) + s\left(-\frac{1}{2}\right)}{3} = C = \frac{s\left(-\frac{1}{2}\right)}{3}.$$

From (2) it follows that $s\left(-\frac{3}{4}\right) = s\left(-\frac{1}{4}\right)$, so we see that

$$s\left(-\frac{3}{4}\right) = 0. \quad (11)$$

Next, we substitute $x = -\frac{7}{4}, m = 2$ into (5) and we get:

$$s\left(-\frac{7}{8}\right) + s\left(-\frac{3}{8}\right) - s\left(-\frac{3}{4}\right) = s\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Combining this with (11) and (2) we obtain that

$$s\left(-\frac{3}{8}\right) + s\left(-\frac{1}{8}\right) = s\left(-\frac{1}{2}\right),$$

which is equivalent with (10).

With the same tools one can also prove the following similar propositions:

$$\begin{aligned} s\left(\frac{n-5}{8}\right) + s\left(\frac{n-1}{4}\right) &= s\left(\frac{3n-7}{8}\right) & \text{if } n \equiv 5 \pmod{8}; \\ s\left(\frac{n-7}{8}\right) + s\left(\frac{3n-5}{8}\right) &= 2s\left(\frac{n-3}{4}\right) & \text{if } n \equiv 7 \pmod{8}; \\ s\left(\frac{n-3}{4}\right) &= s\left(\frac{n-1}{2}\right) & \text{if } n \equiv 7 \pmod{8}. \end{aligned} \quad \Leftarrow$$

Danny Beckers

Universiteit Nijmegen, Mathematisch Instituut
Postbus 9010, 6500 GL Nijmegen
dbeckers@sci.kun.nl

Oud Archief

De sensatie een oud tijdschrift of een oude brief op te slaan kennen de meesten van ons wel. 'Deden ze dat toen zo? Maakten ze zich daar toen druk over?' En dan realiseren we ons dat onze hedendaagse gewoontes ook maar toevallig zijn. Danny Beckers, aio in de geschiedenis van de wiskunde aan de KUN, zal in deze rubriek geregeld een titelblad, een mooi plaatje, een raar symbool of een bizarre ruzie uit de geschiedenis van het Wiskundig Genootschap aangrijpen terwille van de historische verlustiging.

In 1663 verscheen het hier afgebeelde pamflet *De Bril voor de belachelijke Amsterdamse geometristen*. Het werd los verkocht in de straten van Amsterdam, en verscheen als aanhangsel van het eerste lesboek van de auteur: Cornelis van Leeuwen. Van Leeuwen had zich kort tevoren in Amsterdam gevestigd als rekenmeester en probeerde met zijn publicaties de aandacht van potentiële leerlingen op zich te vestigen. De concurrentie was serieus: enerzijds was daar Klaas Gietermaker (1621–ca. 1677), de examinerator van de stuurlieden van de V.O.C. — een van de hoogste ambten die je indertijd als wiskundige kon bereiken; anderzijds was er de grijze en uiterst devote Christiaan Anhaltin (1603–ca. 1676) die zich met zijn boeken over architectuur en navigatie een zeer respectabele positie had verworven als wiskundige. Een dergelijke reputatie garandeerde een stabiele toevloed van leerlingen. Naast deze twee 'groten' waren er een aantal nieuwkomers die allemaal uit dezelfde vijver leerlingen trachtten te vissen.

Van Leeuwen valt ze allemaal aan in zijn pamflet: ze zouden hun vak niet verstaan, en pronken met stellingen en constructies die helemaal niet door henzelf bedacht waren. Dat laatste sloeg op een andere vorm van reclame, namelijk het aanplakbiljet dat poten-

tiële leerlingen aanmoedigde een probleem op te lossen. Als ze er niet uitkwamen konden ze de oplossing tegen gepaste betaling bij de auteur komen leren.

De mensen die Van Leeuwen in zijn pamflet bespote reageerden allemaal weer met pamfletten — blijkbaar waren ze benauwd dat het Amsterdamse publiek de aantijgingen van Van Leeuwen serieus zou nemen, en trachtten ze hem snel de wind uit de zeilen te nemen. Tenslotte waren ze voor hun inkomsten totaal afhankelijk van hun leerlingen. In die pamfletten werd Van Leeuwen belasterd, maar een aantal auteurs maakte direct van de gelegenheid gebruik om ook andere collega's onder vuur te nemen. Dit leidde tot een uiterst vermakelijke serie pamfletten waarin de diverse Amsterdamse rekenmeesters elkaar voor rotte vis uitmaakten, maar waarin we tevens leren dat zij elkaar geregeld opzochten om wiskundige vraagstukken in een soort wedstrijdverband op te lossen of gewoon elkaanders kundigheid in te kunnen schatten.

Eveneens komt uit de pamflettenreeks een aardig beeld naar voren van het soort wiskunde waar de Amsterdamse rekenmeesters zich mee bezig hielden. Dat was hoofdzakelijk de wiskunde die nodig was om navigator, landmeter of wijnroeier te kunnen worden. De bewijzen en constructies — waaronder een paar aardige — leken voornamelijk te dienen om het vernuft van de concurrentie te kunnen meten.

De onderlinge ergernis tussen de rekenmeesters liep hoog op in 1663. Mogelijk dat de concurrentie heel hevig was in die periode. Zelfs de zo bedaarde en gerespecteerde Anhaltin, die te pas en te onpas bijbelcitaten door zijn werk strooide, viel in zijn traktaat ter verdediging tegen de beschuldigingen die jegens zijn persoon waren gemaakt een moment uit zijn rol:

"Als het wederom gebeurt my te lasteren, soo sal ick haer niet ontsien meer soodanige dwarsen en sotten tegelyck met malkanderen in eenen Mortier steecken en stooten die te samen tot stof! Ick sal Van Leeuwen een oog uytsteken en den opgeblaesene Leeuw de voeten voor en agter afkappen, also dat hy syn levedaghe de smert en lyden voelen sal."

Uiteraard wist ook Anhaltin wel waarvoor hij zijn verweer schreef: hij eindigde zijn pamflet met een vriendelijke woord tot de lezer, en benadrukte nog eens dat eenieder zijn kinderen bij hem kon laten opvoeden!

Literatuur

Fred van der Blij, 'Uit een School-boeck der wynroeyeryen met aenhangh genaemt den Bril, voor de Amsterdamsche belachelijcke geometristen' in: *Euclides* 24 (1948/49), pp. 65–78.



Jan van de Craats

Koninklijke Militaire Academie
Postbus 90154, 4800 RG Breda
J.vd.Craats@mindef.nl

Floris Takens

Vakgroep Wiskunde, Universiteit Groningen
Postbus 800, 9700 AV Groningen
F.Takens@math.rug.nl

De juiste toon, de

Dit artikel is gebaseerd op een voordracht die werd gehouden tijdens de Nationale Wiskunde Dagen. Deze bijeenkomst werd georganiseerd door het Freudenthal Instituut op 2 en 3 februari 2001 te Noordwijkerhout en vond voor de zesde keer plaats. In het artikel worden muzikale en wiskundige achtergronden van de verschillende stemmingswijzen voor toetsinstrumenten belicht die in de loop der eeuwen in zwang zijn geweest.

De verdeling van het octaaf in twaalf gelijke delen, de zogenaamde *evenredigzwevende stemming*, wordt door velen als een soort muzikaal axioma gezien, een onontkoombaar natuurgegeven. Echter, die octaafverdeling is pas tegen het einde van de achttiende eeuw in de westerse muziek gemeengoed geworden als een compromissysteem voor gebruik bij instrumenten waarvan men de stemming tijdens het spelen niet kan beïnvloeden, zoals het clavecimbel, de piano of het orgel. Vóór die tijd en in sommige delen van Europa ook nog lang daarna, hanteerde men echter andere stemmingswijzen, bijvoorbeeld de zogenaamde *middentoonstemming* of de *stemming van Werckmeister*. Bespelers van authentieke barokinstrumenten zoals de traverso, een voorloper van de moderne dwarsfluit, worden hiermee geconfronteerd wanneer ze met een toetsinstrument samenspelen: in de moderne, evenredigzwevende stemming klinken veel samenklanken storend vals. Trouwens, ook bespelers van moderne blaas- en strijkinstrumenten hebben vaak met stemmingsproblemen te kampen wanneer ze met een piano samenspelen.

Tonen, boventonen en zwevingen

De tonen waaruit muziek is opgebouwd bereiken ons oor via luchttrillingen, dat wil zeggen fluctuaties in de luchtdruk. Aan elke toon kunnen we, naast de tijdsduur, drie aspecten onderscheiden: de *toonhoogte*, de *luidheid* en de *klankkleur* (het timbre). Maken we zo'n toon zichtbaar door de luchtdruk tegen de tijd uit te zetten, dan zien we een min of meer periodiek patroon (zie figuur 1). De toonhoogte correspondeert daarbij met de frequentie, de luidheid met de amplitude, en de klankkleur met de specifieke vorm van het golfpatroon dat zich telkens herhaalt. Tonen met dezelfde toonhoogte hebben dezelfde frequentie.

Dat een toon A van 440 Hertz op een piano anders klinkt dan dezelfde toon op een viool of op een klarinet komt doordat de specifieke golfvorm bij de pianotoon anders is dan die bij de viool of de klarinet. In figuur 2 is een deel van de geluidscurve te zien van een toon C van 258 Hertz, gespeeld op een klarinet. Hier is de periodiciteit van de trilling heel goed zichtbaar.

Tonen worden voortgebracht door trillende voorwerpen. Zulke voorwerpen kunnen meestal van nature op verschillende wijzen en met verschillende frequenties trillen. Bij gespannen snaren (denk aan de viool, de gitaar of de piano) of bij luchtkolommen in holle pijpen (bijvoorbeeld blaasinstrumenten, het orgel of de menselijke stem) vormen de frequenties van die afzonderlijke trillingsmogelijkheden in goede benadering de eenvoudige verhoudingsreeks $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : \dots$. De laagste frequentie heet de grondtoon, de andere heten de boventonen. De frequentie van de n -de boventoon is n maal de frequentie van de grondtoon, die dus ook de *eerste* boventoon genoemd mag worden (hoewel dat natuurlijk niet gebruikelijk is). In het algemeen laat een trillend voorwerp tegelijk met de grondtoon een combinatie van boventonen horen: de boventonenmix bepaalt de klankkleur. In mathematisch-fysische zin houdt dit nauw verband met de van J. B. J. de Fourier (1768-1830) afkomstige observatie dat men elk periodiek signaal kan schrijven als een superpositie van harmonische trillingen (dat wil zeggen sinusoiden) met frequenties die gehele veelvouden zijn van de frequentie van het signaal.

Voor de stemmingsproblematiek is verder het verschijnsel *zwevingen* van belang. Wanneer men tegelijkertijd twee tonen laat klinken met frequenties die weinig verschillen, neemt men zwevingen waar: een afwisselend aanzwellen en afnemen van het geluid in een frequentie die overeenkomt met de verschilfrequentie van de beide tonen. Dit meestal als onaangenaam ervaren fenomeen maakt dat we zo'n samenklank dan als 'vals' of 'onzuiver' bestempelen, en er zo mogelijk naar streven die onzuiverheid op te heffen door de frequenties van de beide tonen precies gelijk te maken.

Men kan het optreden van zwevingen als volgt verklaren. Een harmonische trilling wordt gegeven door een formule van de vorm $f(t) = A \cos(2\pi \nu t - \phi)$. Hierin is A de amplitude, ν de frequentie

juiste stemming

en ϕ de fasehoek. De superpositie van twee van die signalen kan men schrijven als

$$\begin{aligned} f_1(t) + f_2(t) &= A_1 \cos(2\pi\nu_1 t - \phi_1) + A_2 \cos(2\pi\nu_2 t - \phi_2) \\ &= (A_1 - A_2) \cos(2\pi\nu_1 t - \phi_1) + \\ &\quad + 2A_2 \cos\left(2\pi\frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t - \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \cos\left(2\pi\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t - \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right). \end{aligned}$$

We hebben hierbij verondersteld dat $A_1 \geq A_2 > 0$. Als $\nu_1 \neq \nu_2$ is dit geen harmonische trilling, maar wanneer de frequenties ν_1 en ν_2 dicht bij elkaar liggen, kan men de uitdrukking op de laatste regel opvatten als een hoogfrequent signaal met frequentie $(\nu_1 + \nu_2)/2$ dat vermenigvuldigd wordt met het laagfrequente signaal

$$2A_2 \cos\left(2\pi\frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t - \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$$

waarvan de absolute waarde fluctueert met een frequentie van $|\nu_1 - \nu_2|$ Hertz. Het resultaat is een hoogfrequent signaal dat $|\nu_1 - \nu_2|$ maal per seconde aanzwelt en weer afneemt. We zien overigens dat de term op de laatste regel verwaarloosbaar is als $A_1 \gg A_2$, dat wil zeggen wanneer de ene toon veel luider is dan de andere toon. Er zijn in dat geval dan ook nauwelijks zwevingen te horen.

In figuur 7, waarvan de details ter plaatse worden toegelicht, is sprake van de superpositie van twee harmonische trillingen met frequenties van 880 Hertz en 869.1 Hertz en amplituden die dezelfde orde van grootte bezitten. De verschilfrequentie bedraagt dan 10.9 Hertz, en we zien dat de hoogfrequente trillingen elkaar inderdaad bijna 11 keer per seconde maximaal versterken ('in fase zijn') en even zo vaak maximaal uitdoven ('in tegenfase zijn').

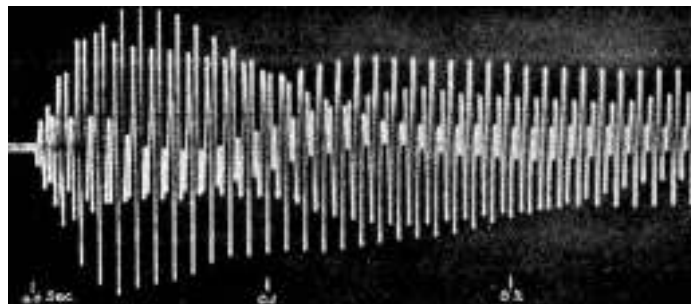
Intervallen en toonsystemen

Het is een ervaringsfeit dat twee tonen harmonieus samenklinken als ze een eenvoudige frequentieverhouding hebben. In de muziektheorie hebben zulke muzikale intervallen speciale namen. Zo noemt men een interval met een frequentieverhouding 1 : 2 een octaaf. Dit is het belangrijkste interval in de muziek: twee tonen die samen een octaaf vormen, versmelten zo zeer met elkaar dat men ze nog maar nauwelijks

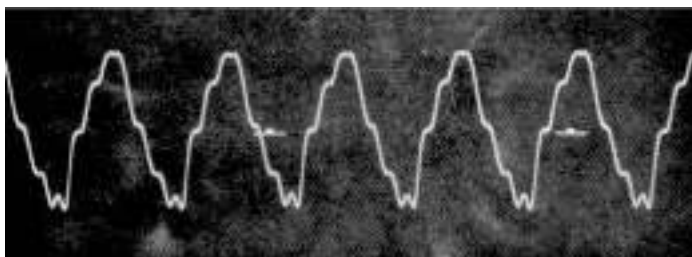
van elkaar kan onderscheiden. Als mannen en vrouwen samen zingen, zullen de vrouwen in het algemeen een octaaf hoger zingen, terwijl ze het idee hebben dat ze toch 'hetzelfde' zingen. Tonen die een octaaf verschillen, geeft men in de muziek ook met dezelfde naam aan; zo heten de tonen met frequentie ..., 55, 110, 220, 440, 880, 1760, 3520, ... Hz allemaal A.

Na het octaaf zou men wellicht het interval met frequentieverhouding 1 : 3 willen behandelen, maar die tonen liggen heel ver uit elkaar: de ongeoefende menselijke stem heeft al moeite om zo'n interval te omvatten. Gezien het bovenstaande ligt het daarom meer voor de hand om de laagste toon een octaaf omhoog te halen, waardoor het interval 2 : 3 ontstaat, de *kwint*. Haalt men de laagste toon nóg een octaaf omhoog, dan ontstaat de *kwart* met frequentieverhouding 3 : 4.

Evenzo is het volgende belangrijke muzikale interval niet 1 : 5 of 2 : 5, maar de *grote terts* met frequentieverhouding 4 : 5. Voor de muziektheorie zijn hiermee de belangrijkste bouwstenen voor toonsystemen gegeven: het octaaf, de kwint en de grote terts. Een toonsysteem wordt daarbij gevormd door op een systematische wijze 'goed bij elkaar passende' tonen bij elkaar te nemen. De algemene conventie in de muziek is daarbij dat men met elke toon ook automatisch alle octaaftransposities van die toon in het systeem opneemt. We zullen hieronder een aantal voorbeelden van toonsystemen behandelen.



Figuur 1 Grafische weergave van een pianotoon C van 129 Hz. Duidelijk is het aanslagverschijnsel te zien waarbij de frequentie van de trilling zich na het moment van aanslaan snel stabiliseert terwijl de amplitude sterk toeneemt om daarna geleidelijk af te nemen. Ook de klankkleur, dat wil zeggen de vorm van de golf, verandert daarbij enigszins. (De illustratie is afkomstig uit [5], pagina 95)



Figuur 2 Grafische weergave van een klarinettoon C van 258 Hz. (Illustratie afkomstig uit [5], pagina 150)

Systemen gebaseerd op de kwintenrij

Door zes kwinten te stapelen krijgt men zeven tonen die samen met al hun octaaftransposities het *Pythagoras-toonsysteem* vormen. In schema, met de in de muziektheorie gebruikelijke toonnamen:

F - C - G - D - A - E - B

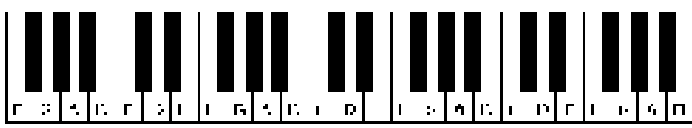
Veel instrumenten worden gestemd volgens een deel van deze kwintentrij, bijvoorbeeld de viool (G–D–A–E) en de cello (C–G–D–A). Ook toetsinstrumenten werden vroeger zo gestemd: zeven tonen per octaaf, gestemd volgens deze kwintentrij. We vinden ze ook op de witte toetsen van de piano. In figuur 3 zijn de zes gestapelde kwinten gemarkeerd. Die kwinten worden in het Pythagoras-systeem dus zuiver gestemd; de andere tonen kunnen daaruit via octaaftransposities afgeleid worden: gelijknamige tonen verschillen een geheel aantal (zuiver gestemde) octaven. Overigens, bij de moderne piano worden de kwinten om redenen die later zullen worden uitgelegd, nu juist *niet* helemaal zuiver gestemd; het verschil is echter heel gering.

In figuur 3 is tevens te zien hoe de verschillende muzikale intervallen aan hun naam komen: een kwint beslaat 5 witte toetsen, een octaaf acht. Een belangrijke opmerking is verder dat het Pythagoras-toonsysteem niet cyclisch is: de uiteinden B en F van de bovenstaande kwintengerij, die op het klavier na octaaftransposities ook een kwint lijken te vormen, beslaan in werkelijkheid een interval dat veel kleiner is.

Toen men behoefte kreeg aan uitbreiding van dit toonsysteem, werd de kwintentrij naar beide kanten voortgezet:

... Es – Bes – F – C – G – D – A – E – B – Fis – Cis – Gis ...

Een verdere uitbreiding naar rechts van de kwintenrij geeft een toon Dis een kwint boven de Gis die vrijwel gelijk blijkt aan de meest linkse toon uit deze rij, de Es, op zeven octaaftransposities na. Dat komt omdat twaalf kwinten omhoog vrijwel gelijk is aan zeven octaven: $(3/2)^{12} \approx 129.7463379 \approx 2^7 = 128$. Dat is duidelijk te zien in figuur 4, waar de *kwintenspiraal* naar beide zijden nog een eind verder is doorgetekend. Eén volledige rondgang correspondeert daar met een stijging over zeven octaven. Aangezien muzikale intervallen gekarakteriseerd worden door frequentieverhoudingen, ligt het voor de hand om met een *logaritmische schaal* te werken: gelijke muzikale inter-

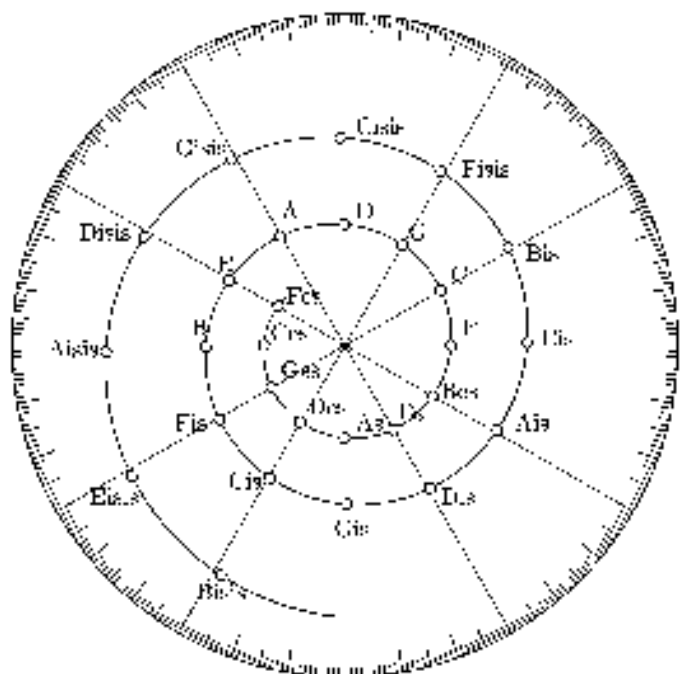


Figuur 3 De tonen van het toonsysteem van Pythagoras op het klavier. De zes aangegeven kwinten worden in dit systeem zuiver gestemd.

vallen corresponderen dan met gelijke toenames langs die schaal. In figuur 4 meet die schaal de toename van het argument in graden. Langs de rand is die schaalverdeling aangegeven.

In de spiraal beslaat een volledige rondgang zeven octaven, dus één octaaf meet $360/7$ graden. Een kwint (frequentieverhouding $2 : 3$) meet dan $\log(3/2)/\log(2) \times 360/7 \approx 30.083786$ graden, want het is een logaritmische schaal. Het grondtal van de logaritme kunnen we vrij kiezen; het ligt hier voor de hand om 2 als grondtal te nemen, zodat $\log(2) = 1$ wordt. De spaken in de spiraal verdelen de zeven octaven in twaalf precies even grote taartpunten van 30 graden. Een zuivere kwint is slechts weinig groter dan zo'n taartpunt, maar door accumulatie ontstaat bij een volledige rondgang toch een verschil van ruim 1 graad.

De kwintenspiraal laat ons de systematiek in de naamgeving van tonen zien: de rij F–C–G–D–A–E–B wordt telkens herhaald, met achtervoegsels *-is*, *-isis*, ... aan de rechterkant, en *-es*, *-eses*, ... aan de linkerkant. In de muzikale praktijk worden dubbele achtervoegsel slechts zelden gebruikt, en drievoudige en hogere achtervoegsels nooit, maar het systeem laat dit in principe wel allemaal toe.

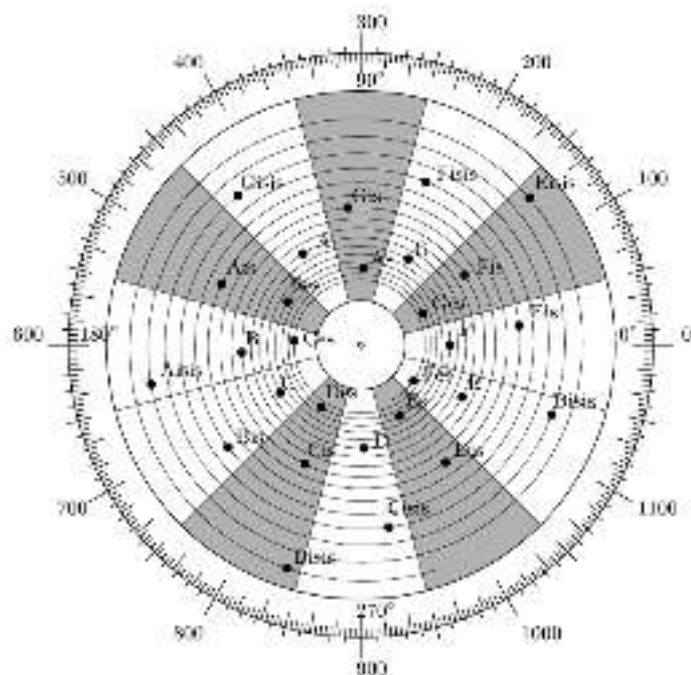


Figuur 4 De kwintenspiraal over zeven octaven. Langs de rand een schaalverdeling in graden. Eén rondgang langs de spiraal (360 graden) correspondeert met een stijging over zeven octaven. Een stijging over een kwint meet 30.083786 graden. De spaken zijn om de 30 graden getekend.

Figuur 5 laat de kwintenspiraal nog op een andere manier zien. Nu correspondeert een volledige rondgang met één octaaf. Ook hierbij is ter oriëntatie zo'n octaaf in twaalf gelijke delen verdeeld, en muzikanten zullen in het achterliggende zwart-witpatroon de witte en de zwarte toetsen van de piano herkennen. Nu correspondeert de kwint met een hoek van $\log_2(3/2) \times 360 \approx 210.5865003$ graden.

Langs de rand van figuur 5 zijn twee schaalverdelingen aangebracht: een verdeling in graden (binnenkant) en een verdeling in *cents*, een door de Britse musicoloog A.J. Ellis ingevoerde eenheid om intervallen te meten. Ellis verdeelde het octaaf in 1200 cent, zodat bij een onderverdeling van het octaaf in twaalf gelijke delen elk deel 100 cent toebedeeld krijgt.

Meten in figuur 5 is eenvoudig: leg een liniaal langs de betreffende



Figuur 5 De kwintenspiraal, maar nu veel 'strakker opgewonden'. Eén volledige rondgang correspondeert nu met één octaaf, en niet met zeven octaven zoals in figuur 4. Langs de cirkelrand is een schaalverdeling getekend in graden (binnenkant) en cents (buitenkant) met 10 cent per schaaldeel. Een stijging over een kwint correspondeert nu met een hoektoename van 210.5865 graden, oftewel 701.9550 cent.

toon en het middelpunt van de cirkel, en lees de schaalwaarde (in cents of in graden) op de rand af. Het nulpunt van de beide schalen is hier, min of meer willekeurig, bij de toon F gekozen. In onze berekeningen met betrekking tot intervallen gaat het altijd over *verschillen*, dus de keuze van het nulpunt van de schalen is niet relevant. We zien dat 360 graden in onze figuur correspondeert met 1200 cent, dat wil zeggen dat 3 graden overeenkomt met 10 cent. De streepjes van de schaalverdeling langs de buitenrand zijn om de 10 cent gezet.

Bij het stemmen van instrumenten, zelfs voor professionele doeleinden, wordt een nauwkeurigheid van 1, hooguit 2 cent als bevredigend ervaren. Een nauwkeuriger schaalverdeling heeft dus voor de muzikale praktijk nauwelijks zin. Bij onze berekeningen zullen we echter wel een grotere nauwkeurigheid gebruiken om accumulatiefouten te vermijden.

In de evenredigzwevende stemming wordt het octaaf in 12 gelijke delen van 100 cent (30 graden in onze figuur) verdeeld. Die delen zijn gelijk in *logaritmische zin*, dat wil zeggen dat de tonen van zulke deelintervallen dezelfde frequentieverhouding hebben. Men noemt zo'n deelinterval van 100 cent een *halve-toonsafstand*. De stemming heet *evenredigzwevend* omdat er bij de kwint, die nu 700 cent meet in plaats van de zuivere waarden van 701.9550 cent, zweepingen optreden die in aantal evenredig zijn met de frequenties van de betreffende tonen: neemt men de kwint een octaaf hoger dan treden er twee maal zoveel zweepingen per seconde op.

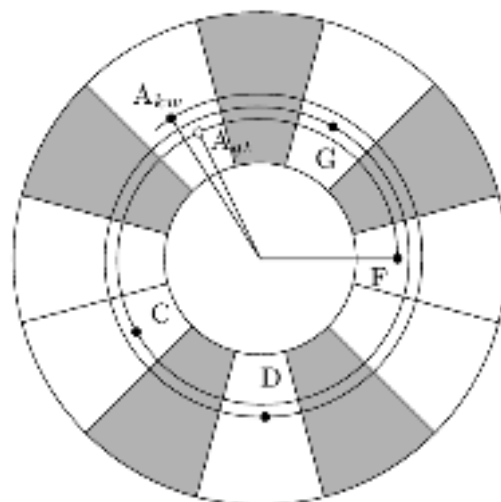
Valse grote tertsen

Met slechts twee muzikale bouwstenen, het octaaf en de kwint, is hierboven via de kwintenspiraal een fraai toonsysteem geschapen met een in principe onbeperkt aantal tonen binnen elk octaaf, allemaal geconstrueerd via zuivere kwint- en octaafintervallen. Toch vertoont dit systeem een belangrijk nadeel, zelfs als men zich tot de zeven tonen van het Pythagoras-systeem zou beperken: de 'grote tertsen' F-A, C-E en G-B klinken vals, dat wil zeggen dat ze hinderlijke zweepingen

laten horen wanneer men de beide tonen waaruit zo'n interval bestaat, tegelijkertijd laat klinken. Althans, wanneer men tonen heeft die rijk zijn aan boventonen. De zweepingen worden namelijk veroorzaakt door het feit dat de vijfde boventoon van de laagste toon bijna dezelfde frequentie heeft als de vierde boventoon van de hoogste. Het samen klinken van die twee boventonen veroorzaakt de zweepingen.

Overigens, iets dergelijks gebeurt ook bij de zweepingen die optreden bij de verkleinde kwinten in de evenredigzwevende twaalftoonsstemming (zo'n kwint meet 700 cent in plaats van de correcte waarde van 701.9550 cent die hoort bij een frequentieverhouding van 2 : 3). In die stemming worden de zweepingen veroorzaakt door het bijna gelijk zijn van de derde boventoon van de laagste toon van het interval, en de tweede boventoon van de hoogste toon.

We kunnen de valsheid van de grote tertsen in de zuivere kwintenrij aan de hand van een eenvoudige berekening laten zien. Neem bijvoorbeeld de grote terts F-A. In het Pythagoras-systeem is het interval F-A opgebouwd uit vier kwinten: F-C-G-D-A, en dus is de frequentieverhouding ervan $2^4 : 3^4 = 16 : 81$, of, als we de F twee octaven omhoog halen, $64 : 81$. Die verhouding is echter vrijwel gelijk aan de zuivere grote tertsverhouding $4 : 5 = 64 : 80$. Bij een zuivere grote terts F- A_{gt} klinkt de toon A_{gt} dus merkbaar lager dan de A_{kw} die uit de kwintenrij komt. figuur 6 illustreert dit. De zuivere grote terts meet $\log_2(5/4) \times 360 \approx 115.894$ graden (386.314 cent), terwijl de grote terts uit de kwintenrij ongeveer 122.346 graden meet (407.820 cent). Een verschil van ruim zes graden (21.5 cent) in onze figuur, meer dan het vijfde deel van een halve-toonsafstand!



Figuur 6 De valse 'grote terts' F- A_{kw} en de zuivere grote terts F- A_{gt} .

Wie een scherp gehoor heeft, kan het verschil tussen die beide tonen A opmerken wanneer een A_{kw} in een grote-tertsinterval F-A in een melodie optreedt. Maar storend is de A_{kw} vooral wanneer die, zoals in harmonische muziek, *tegelijkertijd* met de toon F klinkt, en zo een valse grote terts F- A_{kw} veroorzaakt. De vijfde boventoon van de F en de vierde boventoon van de A_{kw} vormen dan namelijk een interval met frequentieverhouding $80 : 81$, en dat resulteert in zweepingen. Wanneer de toon A een frequentie van 220 Hz heeft, hoort men elf zweepingen per seconde, een octaaf hoger zijn het er twee maal zo veel, en een octaaf lager twee maal zo weinig (zie figuur 7).

Zulke zweepingen zijn goed hoorbaar wanneer men een clavecimbel of een orgel volgens de kwintenrij gestemd heeft (of volgens de evenredigzwevende stemming, die daar slechts weinig van verschilt).

voor de zuivere kwint, dus bijna een kwart toon te klein). De zwevingen daarvan vergeleek men destijds met het huilen van een wolf, vandaar de term 'wolfskwint'. Ook de grote tertsen Des–F, As–C, B–Dis en Fis–Ais, die men op een zodanig gestemd klavier moet vervangen door respectievelijk Cis–F, Gis–C, B–Es en Fis–Bes, klinken storend vals (427.373 cent, tegen 386.3145 cent voor de zuivere grote terts). Zulke intervallen en alle akkoorden die men daarmee maken kan, moet men dus in de middentoonstemming zoveel mogelijk vermijden. Dat legt grote beperkingen op aan de toonsoorten die men op zo'n instrument gebruiken kan.

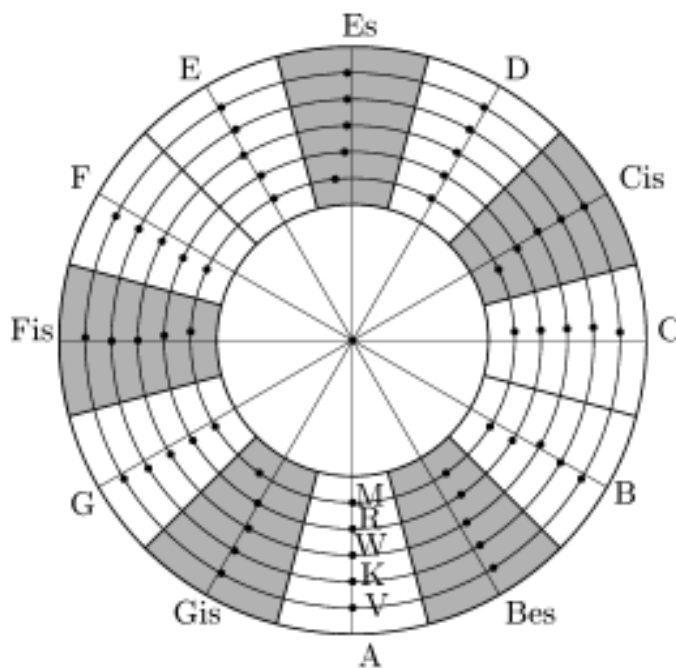
Andere stemmingswijzen

Het waren met name orgelbouwers die met dit probleem worstelden: bij een spinet, virginaal, clavichord of clavecimbel kan men immers zonder veel bezwaar enige snaren bijstemmen om aldus de middentoonstemming aan de toonsoort aan te passen waarin men spelen wil. Juist orgelbouwers, maar ook muziektheoretici en componisten zoals Rameau, hebben daarom gezocht naar stemmingswijzen die het musiceren in veel meer toonsoorten mogelijk maakten, zonder dat de verworvenheden van de zuivere grote tertsen te zeer werden gecompromitteerd. Vaak verkreeg men zulke oplossingen via combinaties van zuivere en middentoonkwinten. De auteurs Fred Bettenhaussen, Frits en Hans van Krevlen behandelen in hun boek *Clavecimbel, clavichord en pianoforte – stemmen, stemmingen en onderhoud* [2] naast de middentoonstemming nog vier andere stemmingen: die van Rameau (1725), Werckmeister III (1691), Kirnberger III (1779) en Valotti (1779). Overigens, in de zestiende, de zeventiende en de achttiende eeuw zijn er nog vele tientallen andere stemmingsvarianten gepubliceerd. Een uitgebreid overzicht daarvan is te vinden in J. Murray Barbour, *Tuning and Temperament* [1].

Het is vermeldenswaard dat Werckmeister zijn stemming als 'wohltemperiert' omschrijft, 'goed getempereerd', hetgeen grond zou kunnen geven aan het vermoeden dat Johann Sebastian Bach zijn beide verzamelingen preludes en fuga's 'Das wohltemperierte Klavier' voor een dergelijke stemming bedoeld heeft. In elk geval wordt de vaak gehoorde bewering dat Bach dit werk voor de evenredigzwevende stemming geschreven heeft, door even zovele autoriteiten tegengesproken. Volledige eenstemmigheid hierover lijkt onder de deskundigen niet te bestaan.

	M	R	W	K	V
Es	21	8	5	4	4
Bes	17	17	7	6	6
F	14	14	9	8	8
C	10	10	10	10	6
G	7	7	7	7	4
D	3	3	3	3	2
A	0	0	0	0	0
E	-3	-3	2	-3	-2
B	-7	-7	3	-1	-4
Fis	-10	-5	0	0	-2
Cis	-14	-3	2	0	0
Gis	-17	-1	3	2	2

Tabel 1 Afwijkingen van de evenredigzwevende stemming in cents voor vijf onevenredige stemmingen: de middentoonstemming (M), Rameau (R), Werckmeister III (W), Kirnberger III (K) en Valotti (V). De stemmingen zijn allemaal genormeerd op de toon A.



Figuur 9 De vijf onevenredigzwevende stemmingen van tabel 1

Hieronder vatten we de gegevens over de vier genoemde stemmingen samen; voor meer bijzonderheden en aanwijzingen hoe men zo'n stemming daadwerkelijk kan realiseren, verwijzen we naar de geciteerde boeken. De auteurs daarvan meten, zoals zo veel muziektheoretici, muzikale intervallen in cents en wij zullen dat hier ook doen. We brengen daarvoor in herinnering dat in onze figuren 5 tot en met 9 een bedrag van 10 cent overeenkomt met een hoek van 3 graden. Zo meet een octaaf 1200 cent, een zuivere kwint 701.9550 cent en een middentoonkwint 696.5784 cent. Een zuivere grote terts meet 386.3137 cent. In de evenredigzwevende stemming, die het octaaf in twaalf gelijke delen verdeelt, meet elke halve-toonsafstand 100 cent, de 'kwint' 700 cent en de 'grote terts' 400 cent.

1. Rameau (1725)

Zuivere kwinten op B, Fis en Cis, middentoonkwinten (696.5784 cent) op Bes, F, C, G, D, A, E, 'overmatige kwinten' (709.0430 cent) op Gis en Es.

2. Werckmeister III (1691)

Vrijwel zuivere kwinten (701.7108 cent) op Es, Bes, F, A, E, Fis, Cis, Gis, middentoonkwinten (696.5784 cent) op C, G, D en B.

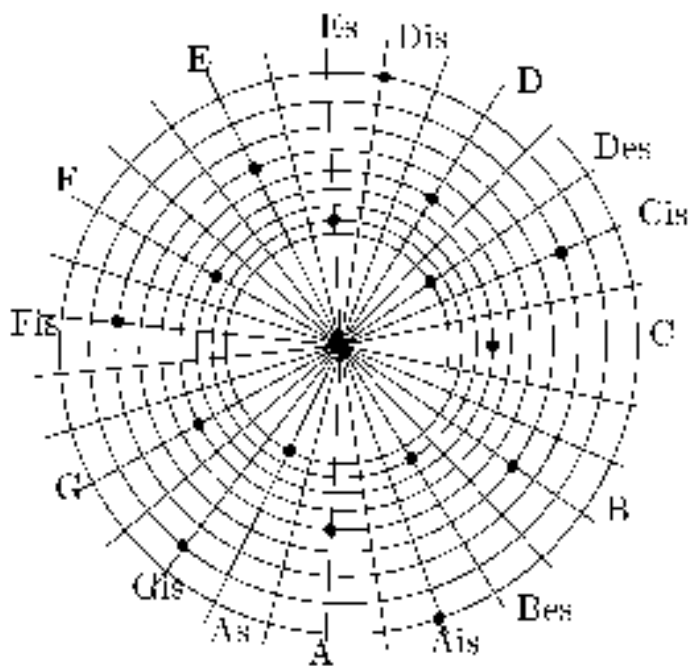
3. Kirnberger III (1779)

Zuivere kwinten op Es, Bes, F, E, B, Cis, Gis, evenredig zwevende kwint (700 cent) op Fis, middentoonkwinten (696.5784 cent) op C, G, D en A. Samen is dit een vrijwel gesloten kwintencirkel; het verschil bedraagt minder dan 0.002 cent

4. Valotti (1779)

Zuivere kwinten op Es, Bes, B, Fis, Cis, Gis, verkleinde kwinten (698.0450 cent) op F, C, G, D, A, E.

In tabel 1 geven we voor deze stemmingen de afwijkingen van de evenredig zwevende stemming, afgerond op gehele cents. Achtereenvolgens: de middentoonstemming (M), Rameau (R), Werckmeister III (W), Kirnberger (K) en Valotti (V). Als referentietoon is de toon A gekozen. Die kan men bijvoorbeeld op de thans gebruikelijke toonhoogte van 440 Hz fixeren, of naar believen op een andere toonhoogte.



Figuur 10 De middentoonspiraal en het 31-toonssysteem van Huygens

Opmerkelijk is het feit dat de tabel laat zien dat de drie laatste stemmingen allemaal slechts weinig afwijken van de evenredigzwevende stemming, die uiteindelijk het pleit gewonnen heeft, ondanks de onzuivere tertsen. Dit verklaart mede dat men in deze stemmingen reeds 'alle' toonsoorten kon gebruiken zonder dat er hinderlijke wolfskwinten opdoken. En het zou ook kunnen betekenen dat 'Das wohltemperierte Klavier' van Bach in de thans gebruikelijke evenredigzwevende stemming op het punt van de stemming nauwelijks anders klinkt dan het in Bachs oren geklonken moet hebben.

In figuur 9 zijn de vijf onevenredigzwevende stemmingen nog eens in een cirkeldiagram weergegeven. Ook daarin is te zien hoe gering de afwijkingen van de laatste drie stemmingen zijn van de evenredigzwevende stemming, die overeenkomt met de twaalf spaken van het wiel.

De evenredigzwevende stemming als winnaar

Men kan twee ontwikkelingen in de muziekgeschiedenis aanwijzen als oorzaak voor het verdwijnen van de verschillende onevenredigzwevende stemmingen en de eindoverwinning van de octaafverdeling in twaalf gelijke delen als stemmingswijze voor instrumenten met twaalf tonen per octaaf, ondanks de valse grote tertsen die in deze stemming optreden.

De eerste is het feit dat componisten bij langere stukken steeds vaker gingen *moduleren*, dat wil zeggen dat zij het tonale centrum, en daarmee de gehele tonenvoorraad, tijdelijk verschoven, bijvoorbeeld een kwint omhoog of een kwint omlaag. Zo is het in de zogenaamde klassieke sonatevorm gebruikelijk dat de tweede themagroep 'in de dominant' staat, dat wil zeggen dat het tonale centrum tijdelijk een kwint omhoog schuift. In de middentoonstemming kan dat problemen geven: bepaalde samenklanken die in de centrale toonsoort goed klinken, bevatten na de modulatie een wolfskwint of een valse grote terts. Nog veel erger wordt dat probleem bij modulaties over een grote terts, die incidenteel bij Mozart, veel vaker nog bij Beethoven, en in vrijwel alle composities van Schubert voorkomen, dikwijls met een verrassend en ontroerend muzikaal effect. Latere romantische compo-

nisten zoals Liszt, Wagner en Franck, stapelen voortdurend modulatie op modulatie. Dit proces bevorderde de acceptatie van de evenredigzwevende octaafverdeling, waarin alle toonsoorten 'even vals' klinken.

De tweede ontwikkeling die hier sterk aan bijdroeg was het feit dat op de piano, die in de negentiende eeuw het dominerende muziekinstrument werd — bijna alle grote componisten waren ook goede pianisten en er is geen muziekinstrument met een rijker repertoire aan onbetwiste meesterwerken — de valse grote tertsen nauwelijks storend zijn omdat een pianotoon betrekkelijk arm is aan boventonen. De enigen die echt last van stemmingsproblemen bleven houden, waren blazers en strijkers die met een piano samenspeelden. Zij werden, en worden nog steeds, voortdurend geconfronteerd met conflicten tussen de 'zuivere' intervallen, waaraan ze gewend zijn als ze alleen of met 'soortgenoten' spelen, en de daarvan afwijkende 'valse' tonen van de evenredigzwevende stemming van de piano. Zij zullen daarmee moeten leven of een ander begeleidingsinstrument moeten zoeken.

De 31-toonsstemming van Huygens

Vanuit historisch, wiskundig en muzikaal oogpunt bezien is het interessant om ook aandacht te schenken aan een heel andere oplossing van de stemmingsproblematiek. Een oplossing die het uiteindelijk niet gehaald heeft, maar die in de vorige eeuw weer een opmerkelijke revival beleefde door de inspanningen van de fysicus A.D. Fokker (1887-1972). Het gaat hier om het voorstel uit 1691 van Christiaan Huygens [6] voor een evenredigzwevende verdeling van het octaaf in niet minder dan 31 gelijke delen.

Huygens, die behalve wiskundige, astronoom en natuurkundige ook een enthousiast amateurmusicus was, had zich zoals zoveel wetenschappers in zijn tijd ook met de theoretische grondslagen van de muziek beziggehouden. Hij was goed op de hoogte van het verband tussen muzikale intervallen en frequentieverhoudingen en de functie van het octaaf, de kwint en de grote terts als fundamentele bouwstenen voor toonsoorten. Hij kende ook het tertsenprobleem voor orgels, clavecimbel en andere toetsinstrumenten en de noodzaak om bij zulke instrumenten 'getempereerde kwinten' te gebruiken om hinderlijk valse grote tertsen te vermijden. Net als vrijwel alle musici uit die tijd verwierp Huygens de evenredigzwevende twaalftoonssstemming (die onder andere door Simon Stevin gepropageerd was) juist vanwege de daarin voorkomende valse tertsen. Voor Huygens was de middentoonstemming, door hem in zijn Franstalige publicaties *le temperament ordinaire* (het gewone temperament) genoemd, de norm.

Natuurlijk kende Huygens wel degelijk ook het grote voordeel van de evenredigzwevende stemming, namelijk het feit dat je daarin zonder beperkingen kunt transponeren, dat wil zeggen dat je elk van de twaalf tonen als *tooncentrum* kunt nemen, en dus in elke toonsoort even goed, of, zo je wilt, even slecht kunt musiceren. Anders gezegd: alle toonsoorten klinken even vals.

Maar Huygens stelde een oplossing voor die de voordelen van de middentoonstemming zou combineren met de onbeperkte transpositiemogelijkheden van de evenredigzwevende stemming: een veel fijnmaziger octaafverdeling. Als je het octaaf in N gelijke deelintervallen verdeelt, kun je ervoor zorgen dat alle tonen van de middentoonstemming goed benaderd worden door N groot genoeg te kiezen.

Aan de hand van het spiraaldiagram van figuur 8 kunnen we dit duidelijk maken. Daarin is de middentoonkwint, die $(1/4) \times \log_2(5) \times 1200 \approx 696.5784$ cent meet, de bouwsteen: elke toon in de middentoonstemming is op octaaftransposities na opgebouwd uit een geheel aantal van die kwinten. Huygens heeft ontdekt dat de breuk $18/31$ een zeer goede benadering is van de breuk $696.5784/1200$ die in figuur 8

de verhouding tussen de middentoonskwint en het octaaf aangeeft. Die laatste breuk is namenlijk, op zes decimalen afgerond, gelijk aan 0.580482 terwijl $18/31 \approx 0.580645$. Als je dus het octaaf in 31 gelijke delen verdeelt, komen 18 schaaldelen vrijwel overeen met de midden-toonskwint. Het verschil bedraagt, omgerekend in cents, minder dan 0.2 cent. Door accumulatie zal het verschil bij de andere tonen groter worden, maar zelfs na 12 stappen bedraagt het nog steeds minder dan 2.4 cent. Kortom, binnen het 31-toonssysteem van Huygens is de middentoonstemming vrijwel zonder hoorbare afwijkingen realiseerbaar. In figuur 10 wordt dit geïllustreerd. Bovendien kan nu elk van de 31 tonen als tooncentrum genomen worden, want het systeem is cyclisch. Binnen het systeem van Huygens kan men dus onbeperkt transponeren.

Het enige nadeel is natuurlijk dat een klavier met 31 toetsen per octaaf in de praktijk lastig te construeren en te bespelen is. Huygens stelde daarom voor om een toetsinstrument te bouwen met weliswaar 31 snaren per octaaf, maar met daarboven een verplaatsbaar normaal klavier van 12 toetsen per octaaf, met aan de onderzijde van de toetsen pennen die de gewenste selectie van 12 snaren bedienen. Door het klavier te verschuiven kan men een andere selectie kiezen, waarbij de pennen dus boven een ander twaalfstal snaren terecht komen. Figuur 11 geeft een schematische tekening van zo'n constructie.

Hoewel Huygens gedetailleerde tekeningen gemaakt heeft voor zo'n instrument, is het niet helemaal duidelijk of het ooit daadwerkelijk gebouwd is. De fysicus A.D. Fokker heeft echter kort na de Tweede Wereldoorlog voor Teylers Museum te Haarlem een 31-toonsorgel laten bouwen, niet met een verplaatsbaar klavier, maar met een toetsenbord met 31 toetsen per octaaf naast en boven elkaar, zo ongeveer als bij de toetsen van een schrijfmachine (zie figuur 12). Daarnaast heeft het orgel ook een 'gewoon' 12-toetsenklavier, waarmee naar keuze een selectie uit de 31 tonen gemaakt kan worden, bijvoorbeeld volgens de middentoonstemming.

Waarom eenendertig?

In zijn artikel legt Huygens niet uit hoe hij aan het aantal van 31 gekomen is. Gewoon proberen? Dat lijkt niet zo waarschijnlijk, te meer daar het in zekere zin de best mogelijke praktisch realiseerbare oplossing is van het stemmingsprobleem zoals hij zich dat gesteld zou kunnen hebben: *het zo goed mogelijk inpassen van de middentoonstemming in een evenredigzwevende stemming met een niet al te groot aantal tonen per octaaf*. Waar dat op neer komt, is het benaderen van de middentoons-kwintverhouding $\mu = (1/4) \times \log_2(5) \approx 696.5784/1200$ door breuken met een niet al te grote noemer. De wiskundige denkt dan direct aan *kettingbreuken* (zie bijvoorbeeld Hoofdstuk 14 van het boek *Getaltheorie voor beginners* [3]). Met behulp van de kettingbreukontwikkeling van μ kun je namelijk een rij gewone breuken p_n/q_n opstellen, de zogenaamde *convergenten*, die het getal μ ‘zo goed



Figuur 11 Schema van Huygens ontwerp voor een verplaatsbaar twaalftoetsenklavier met pennen die bevestigd zijn aan de toetsen waarmee een selectie uit de snaren van het 31-toonstelsel gemaakt kan worden. Verschuiven van het klavier geeft een andere selectie. De pennen zijn zo gemonteerd dat de zwarte toetsen staan voor Cis, Es, Fis, Gis en Bes.



Figuur 12 A.D. Fokker achter het grote klavier van het 31-toonsorgel

mogelijk benaderen'. Met dat laatste wordt bedoeld dat die convergenten de eigenschap hebben dat p_n/q_n de beste rationale benadering van μ is met een noemer kleiner dan q_{n+1} . In het bijzonder vormen de noemers altijd een strikt stijgende rij natuurlijke getallen.

De kettingbreukontwikkeling van μ begint als volgt:

$$\mu = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}$$

De convergenten van μ , krijg je door de ontwikkeling na een aantal stappen af te breken, dat wil zeggen de stippeltjes en het daaraan voorafgaande plusteken te verwijderen. Na vereenvoudiging van de resulterende samengestelde breuk vinden we

$$1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{7}{12}, \frac{11}{19}, \frac{18}{31}, \frac{101}{174}, \frac{119}{205}, \dots$$

De eerste convergenten zijn natuurlijk nog te grof. De breuk $7/12$ komt echter al aardig in de buurt. Die hoort dan ook bij de bekende evenredigzwevende twaalftoonsstemming, waarin de kwint zeven halve-toonsafstanden meet. De volgende breuk $11/19$ levert een nog betere benadering op (met echter toch nog duidelijk hoor- en zichtbare afwijkingen, zie figuur 13), maar spectaculair goed is $18/31$, vooral ook omdat de volgende convergent $101/174$ zo'n veel grotere noemer heeft. Van alle breuken met een noemer kleiner dan 174 geeft, volgens de bovengenoemde eigenschap van kettingbreuken, $18/31$ de beste benadering van μ .

Ten aanzien van de convergent 11/19 kan nog worden opgemerkt dat men een klavier met 19 toetsen per octaaf kan maken door de vijf zwarte toetsen van een gewoon klavier te verdubbelen en nog twee zwarte toetsen toe te voegen: een toets tussen E en F en een toets tussen B en C. In zijn *Syntagma Musicum*, II, Chap. XI, p. 63 maakt Praetorius (1571-1621) gewag van een clavecimbel met 77 toetsen over vier octaven dat op een dergelijke wijze was geconstrueerd, en dat

Opmerkelijk is dat Huygens onze Bes als B noteert (zoals dat thans ook nog steeds in het Duits gebeurt) en onze B als B^x (in het Duits gebruikt men daar tegenwoordig de letter H voor). De zogenaamde ‘enharmonische’ tonen Ais, As, Dis en Des, die in de evenredigzwevende twaalftoonsstemming samenvallen met respectievelijk Bes, Gis, Es en Cis maar die in de 31-toonsstemming aparte tonen zijn, zijn met sterretjes aangegeven.

Nadat Huygens de samenstelling van zijn tabel nog wat verder heeft toegelicht, waarbij hij steeds gebruik maakt van de in die tijd nog tamelijk nieuwerwetse logaritmen, sluit hij zijn betoog af met de ontboezeming: *Er is niets zo handig bij muzikale berekeningen als het gebruik van logaritmen*, een uitspraak waarbij we ons van harte kunnen aansluiten, want onze cirkel- en spiraaldiagrammen konden natuurlijk ook alleen maar tot stand komen omdat we Maple en PostScript met logaritmen konden laten werken.

Huygens invloed op de muziektheorie

Christiaan Huygens publiceerde zijn verhandeling over muziek als brief aan de redacteur in het tijdschrift *Histoire des Ouvrages des Sçavans* dat opgericht was door de naar De Nederlanden gevluchte hugenoot Henri Basnage de Beauval. Het betreffende tijdschriftnummer werd drie maal herdrukt, en een vertaling ervan in het Latijn door Willem Jacob 's-Gravesande verscheen in 1724 onder de titel *Novus cyclus harmonicus*. In die tijd vond Huygens voorstel voor een octaafverdeling in 31 gelijke deelintervallen wel degelijk weerklank, getuige ook een tekening ervan in de *Elementa musica* (Den Haag, 1739) van de organist Quirinus van Blankenburg (1654-1739) (zie figuur 16, ontleend aan [6], p. 105). Hij plaatste de 31 tonen van Huygens systeem langs de omtrek van een cirkel, en verbond de ‘grote tertsen’, die in het systeem vrijwel zuiver worden weergegeven, door lijnen. Zo ontstond een ‘ster-31-hoek’, die je op kunt vatten als een soort grote-tertsencirkel, naar analogie van de kwintencirkel die bij de evenredigzwevende twaalftoonsstemming behoort. De acht grote tertsen van de midden-tonestemming zijn daarbij door dikke lijnen aangegeven.

Het is instructief om de namen van de verschillende tonen te bestuderen. Merk ook op dat de prent van Van Blankenburg in wezen niet anders is dan onze figuur 10. De beide figuren passen, op een verticale spiegeling na, volledig op elkaar. Ondanks Huygens autoriteit en de steun van een aantal invloedrijke muziektheoretici heeft zijn 31-toonssysteem nooit echt ingang gevonden. Gezegd moet worden dat Huygens voorstel voor een verplaatsbaar klavier boven een instrument met 31 snaren per octaaf ook op onoverkomelijke praktische bezwaren



Figuur 16 De plaat die Quirinus van Blankenburg ontwierp als illustratie van het 31-toonssysteem van Huygens. Vergelijk ook met figuur 10.

stuitte, zeker in die tijd. Daar komen de reeds eerder genoemde ontwikkelingen bij die de middentoonstemming, in zekere zin de grondslag van Huygens systeem, steeds meer naar de achtergrond schoven, waarmee ook het 31-toonssysteem tot een museumstuk gedegradeerd werd. Of de pogingen van A.D. Fokker om het daar weer uit te bevrijden uiteindelijk succesvol zullen blijken, zal de toekomst moeten leren.

Dankbetuiging

De auteurs zijn Aad Goddijn erkentelijk voor zijn commentaar op een eerdere versie van dit artikel.

Referenties

- 1 J. Murray Barbour, *Tuning and Temperament — A Historical Survey*, Michigan State College Press, East Lansing, 1951.
- 2 Fred Bettenhausen, Frits & Hans van Krevelen, *Clavecimbel, clavichord en pianoforte — stemmen, stemmingen en onderhoud*, Uitg. De Toorts, Haarlem, 1984.
- 3 Frits Beukers, *Getaltheorie voor beginners*, Epilon Uitgaven nr. 42, Utrecht, 1999.
- 4 Hermann L.F. Helmholtz, *On the Sensations of Tone* (Engelse vertaling en uitgebreide bewerking (1885) door Alexander J. Ellis van *Die Lehre von den Tonempfindungen*, Heidelberg, 1862, 1877), heruitgave Dover, New York, 1954.
- 5 James Jeans, *Science & Music*, Cambridge Univ. Press, 1937, heruitgave Dover, New York, 1968.
- 6 Christiaan Huygens, *Le cycle harmonique* (Rotterdam 1691), *Novus cyclus harmonicus* (Leiden 1724), with Dutch and English translations. Edited by Rudolf Rasch. Diapason Press, Utrecht, 1986.

Jan Moree

Freesiastraat 13
2651 XL Berkel en Rodenrijs
j.moree@net.hcc.nl

Pieter Moree

Korteweg-De Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam
moree@science.uva.nl

Lars Roobol

Kernfysisch Versneller Instituut
Zernikelaan 25, 9747 AA Groningen
roobol@KVI.nl

Wiskundige voorouders

Het Erdős-getal behoort tot de wiskundige folklore. Samen met honderden wiskundigen werkte Erdős op zeer uiteenlopende onderzoeksgebieden. Deze wiskundigen hebben elk weer vele co-auteurs en zo kun je uitrekenen hoe ver je in de graaf van co-auteurs van Erdős verwijderd bent. Erdős heeft zelf het getal nul, zijn co-auteurs Erdős getal één en de co-auteurs van de co-auteurs Erdős-getal twee.

Dit artikel gaat niet over co-auteurschap, maar over ouderschap. Met de komst van internet is het heel wat makkelijker geworden om naar verwanten te zoeken, in heden en verleden. Voor wiskundigen is het recent ontworpen Mathematics Genealogy Project zeker interessant.

Genealogie, oftewel stamboomonderzoek, bracht vroeger archiefbezoek, veel schrijfwerk en kaartenbakken met zich mee. Tegenwoordig kan men van achter de computer via internet, nieuwsgroepen en bulletin boards snel allerlei gegevens verzamelen. Oude rotten in het vak noemen dit wel 'leunstoelgenealogie'. Een belangrijke gegevensbron is die van de 'mormonen', die een zeer grote site met miljoenen namen uit de hele wereld heeft [6]. In Nederland is het Centraal Bureau voor Genealogie de belangrijkste bron; zie [10]. Ook Nederlandse gemeenten beginnen met het plaatsen van gegevens uit hun Doop-Trouw-Begraafarchieven op het internet (de gemeente Delft bijvoorbeeld, zie [2]).

Het schrijfwerk heeft grotendeels plaats gemaakt voor het invoeren van gegevens in genealogieprogramma's. Men kan dan een uitvoer naar wens genereren, zoals een kwartierstaat, afstammingsreeks of een getekende stamboom. Een kwartierstaat is de verzameling van alle mensen die voorouder zijn van een bepaalde persoon (de zogeheten *proband* van de kwartierstaat). Een afstammingsreeks is een diagram waarin de (familie)relatie tussen de proband en een bepaalde voorouder wordt getoond. Een kwartierstaat is dus een binaire boom, een afstammingsreeks een pad in een binaire boom.

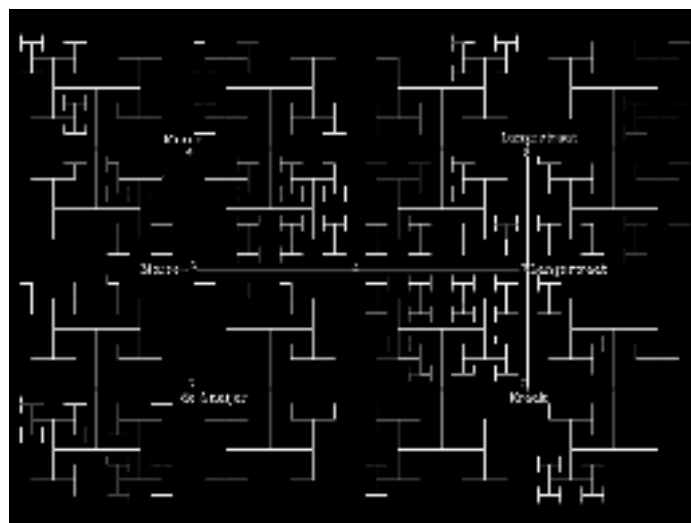
Veel informatie over het gebruik van de computer bij genealogie (programma's, online zoekmogelijkheden, een downloadbare cursus *oud schrift*) is te vinden op de site van Herman de Wit en Hein Vera [8].

Karel de Grote

Wie na noeste arbeid in archieven tot de conclusie komt af te stammen van Karel de Grote moeten we helaas ontvreden — vrijwel iedere autochtone Nederlander stamt namelijk af van Karel de Grote, zoals enig nadenken leert! De redenering heeft te maken met de 'paradox van de genealogie'. De paradox is dat als je terug gaat in de tijd je in principe op almaar meer voorouders uitkomt, terwijl anderzijds het totaal aantal mensen afneemt. Tengevolge van oorlogen en bijvoorbeeld de pest

klopt dat niet helemaal, maar over wat grotere tijdschalen gezien weer wel. De oplossing van de paradox is: inteelt. Als een stamboom een echte boom zou zijn, dat wil zeggen een graaf zonder circuits, dan zouden er geen huwelijken tussen verwante personen hebben plaatsgevonden en zouden er rond 800 ongeveer 2^{40} voorouders hebben rondgelopen. Als we er vanuit gaan dat de helft daarvan in Europa leefde komen we op meer dan 10^{12} personen uit. Nemen we een bovengrens van de verschillende schattingen die in omloop zijn over de totale bevolking van Europa rond het jaar 800, dan komen we uit op veertig miljoen. Dit betekent dat de 'generieke' Europeaan uit 800 tenminste tienduizendvoudig voorouder is. Nu was Karel de Grote meer dan generiek in de zin dat hij meer nageslacht had dan de kindertijd wist te overleven dan de toen levende gemiddelde Europeaan. Van verschillende oude geslachten kan de afstamming van Karel de Grote worden aangetoond. Gevoegelijk is de kans dat een autochtone Europeaan Karel de Grote tot zijn voorvader heeft vrijwel 1. Er zijn natuurlijk veel minder mensen waarvoor dit gedocumenteerd kan worden. Zelfs als men over documentatie beschikt, dient nog te worden bedacht (zie [3]) dat bij ongeveer 10% van de geboorte-aangiftes de opgegeven vader niet de werkelijke vader is!

Genealogie heeft meer connecties met wiskunde dan alleen de bovengenoemde. Zo is er door statistici onderzoek gedaan naar statistische eigenschappen van stambomen, zie [8]. Weer een ander genealogisch probleem met wiskundige aspecten is hoe een stamboom op



De H-fractal, een compacte manier om een stamboom weer te geven.

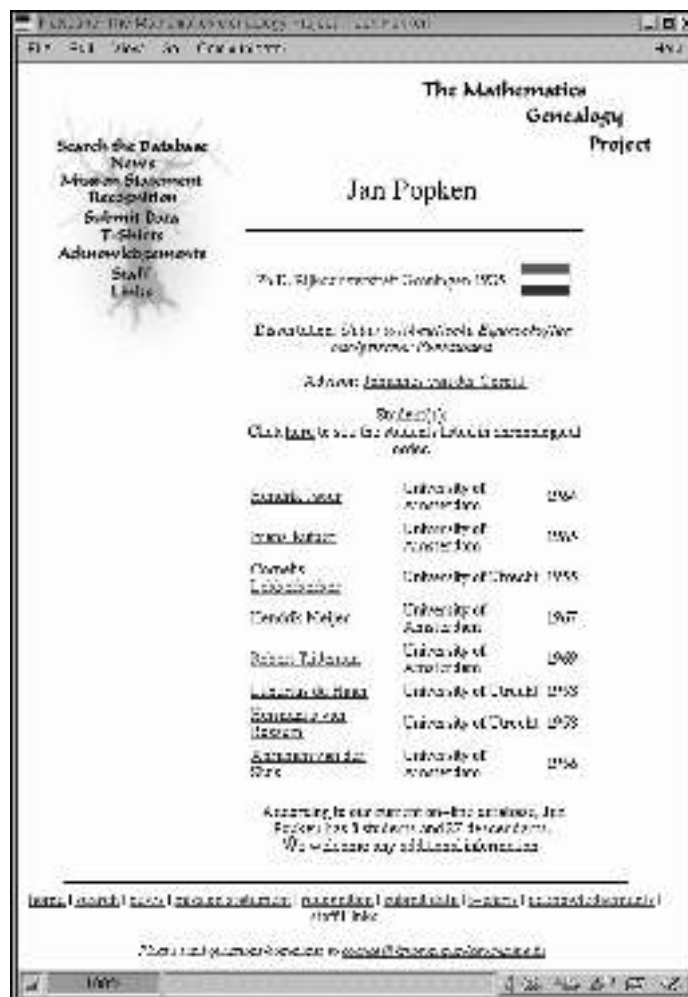
compacte wijze grafisch weer te geven. Een idee hierover, afkomstig van de eerste auteur, is om een H-fractal te gebruiken. Op de dwarsbalk van de H staan de uitgangspersoon en zijn ouders en op de vier uiteinden van de H staan de vier grootouders. Bij onvolledige kennis van de voorouders kunnen de corresponderende stukken uit de H-fractal worden weggelaten. Plaatsbepaling op de H-fractal maakt gebruik van de binaire representatie van getallen. Voor een voorbeeld zie [5].

The Mathematics Genealogy Project

Wie bij snuffelen in zijn of haar stamboom op personen van twijfelachtig allooi stuit, kan, als hij/zij een doctorstitel in de wiskunde op zak heeft, altijd nog zijn heil zoeken in de wiskundige genealogie. Onder *wiskundige ouder* wordt de promotor verstaan. Is er verder nog een copromotor dan heeft men twee wiskundige ouders. De meeste universitaire wiskundebibliotheken hebben wel een kast staan met proefschriften. Met enig geluk komt men zo een heel eind met het uitzoeken van zijn wiskundige voorouders. Verder zijn necrologieën van wiskundigen in het *Nieuw Archief* erg handig (die men met MathSciNet [4] of Zentralblatt [9] op het spoor kan komen). Vaak staan in die necrologieën lijstjes van alle mensen die bij de betreffende persoon zijn gepromoveerd. Echter alleen aan wat meer bekende wiskundigen wordt een necrologie in het *Nieuw Archief* gewijd. Is een overleden wiskundige lid geweest van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, dan komt er in hun verslagen een necrologie.

Er is een indrukwekkende site [1] waar men naar wiskundige voorouders kan zoeken. Deze site heeft zijn oorsprong in het gebrek aan succes dat Harry B. Coonce, een Amerikaans emeritus hoogleraar wiskunde, had toen hij zijn wiskundige voorouders poogde te achterhalen. Zijn frustratie hierover was voor hem de aanleiding om een hulpmiddel op te zetten waarmee uiteindelijk iedere wiskundige (een gedeelte van) zijn wiskundige afstamming zou moeten kunnen terugvinden. Het resultaat is het *Genealogy Project for Mathematicians*. Men kan hier een naam intypen en dan zoekt de database naar een voorvader. Zo kan men een aantal generaties teruggaan. Coonce heeft inmiddels een aantal medewerkers die hem helpen met het onderhouden van zijn site. Zijn hoop is dat de database, die inmiddels al meer dan 43.000 namen bevat, uiteindelijk de namen van alle wiskundigen zal bevatten die ooit een doctorstitel hebben behaald gedurende de 20ste eeuw. Hij begon met vrienden en wiskundigen informeel te vragen naar namen. Recentelijk heeft hij universiteiten aangeschreven waar men een doctorstitel in de wiskunde kan behalen (in Amerika is dat niet voor iedere universiteit het geval), waarna die hem hun gegevens ter beschikking gesteld hebben. Zijn verwachting is dat de database uiteindelijk zo'n 80.000 namen zal bevatten, waarbij jaarlijks dan weer namen van nieuw gepromoveerden bijkomen.

Helaas bevat de database op het moment nog weinig Europese data. Hopelijk draagt dit stukje eraan bij dat er vanuit Nederland meer gegevens in de database terecht komen. Op de site kan men namelijk



Popken (de wiskundige grootvader van de tweede auteur) en zijn wiskundige afstammelingen in de eerste graad. Bron: <http://mathgenealogy.mnsu.edu/>

klikken op 'submit data'. Na invoering van de eigen naam kan men dan de naam van een persoon, van zijn promotor of eventueel promotoren invoeren, alsmede de titel van het proefschrift, het jaar waarin deze verdedigd is en de naam van de universiteit die de titel heeft verleend. Onvolledige informatie wordt ook gewaardeerd. Onze ervaring is dat het een kleine week duurt voor de data ook daadwerkelijk in de database beschikbaar komen.

Iedereen hoopt natuurlijk iemand als Carl Friedrich Gauss in zijn wiskundige stamboom te hebben. Vooralsnog zijn er in de database slechts 24 afstammelingen van Gauss te vinden. Felix Klein daarentegen trad 52 maal op als (co)promotor en heeft op het moment 7236 afstammelingen in de database.

Referenties

- 1 Harry B. Coonce
<http://mathgenealogy.mnsu.edu/>.
- 2 Delftse archieven
<http://www.archief.delft.nl/>.
- 3 M.J.C. Koens e.a., *Het hedendaags personen- en familierecht (behoudens het huwelijksvermogensrecht)*, Zwolle, 1995, 141–143.
- 4 About MathSciNet
<http://www.ams.org/mathscinet/>.
- 5 Jan C. Moree
<http://web.inter.nl.net/hcc/J.Moree/linkgen2.htm>
- 6 'Mormonensite'
<http://www.familysearch.org/>.
- 7 Lars P. Roobol
<http://www.oprit.rug.nl/proobol/PRL.htm>
- 8 Herman de Wit en Hein Vera
<http://www.geneaknowhow.net/>.
- 9 Zentralblatt
<http://www.emis.de/ZMATH/de/zmath.html>

Bert Zwaneveld

afdeling Natuur- en Technische Wetenschappen

Open Universiteit Nederland

Postbus 2960, 6401 DL Heerlen

bert.zwaneveld@ou.nl

Het Wiskunde B1,2 examen

Woensdag 16 mei en donderdag 31 mei zijn voor het eerst de VWO-examens Wiskunde B nieuwe stijl afgenomen. Volgend jaar, als de tweede fase volledig is ingevoerd, is dit examen voor alle leerlingen met wiskunde B. Dit jaar neemt ongeveer eenderde deel van de leerlingen aan het vernieuwde Wiskunde B examen deel. Die leerlingen staan in september aan de poort van de universiteiten. Bert Zwaneveld legt uit wat er is veranderd.

Dit jaar zijn er drie verschillende examens Wiskunde B voor VWO afgenomen: Wiskunde B, Wiskunde B1 en Wiskunde B1,2. Op de volgende bladzijden is, zonder verder commentaar, het Wiskunde B1,2 examen opgenomen. De andere examens zijn te vinden op www.cito.nl. Het eerstgenoemde examen is nog oude stijl, de twee andere zijn de examens nieuwe stijl. Voor een kritische bespreking was bij het ter perse gaan van dit nummer geen tijd. Het is aan de lezer deze examens te beoordelen.

Tweede fase

De nieuwe programma's horen bij de vernieuwde Tweede Fase van HAVO en VWO, de klassen 4, 5 en 6 (VWO). Die vernieuwde Tweede Fase staat beter bekend onder de naam 'studiehuis'. In de Tweede Fase zijn vier profielen gedefinieerd: Cultuur en Maatschappij (CM), Economie en Maatschappij (EM), Natuur en Gezondheid (NG) en Natuur en Techniek (NT). Voor dit artikel is eigenlijk alleen het programma/examen Wiskunde B1,2 van het NT-profiel van belang. Het Wiskunde B1 programma hoort bij het NG-profiel en is een echte deelverzameling van het B1,2 programma.

Dit jaar is het eerste jaar met de examens nieuwe stijl. Doordat voor een geleidelijke invoering is gekozen — scholen konden kiezen of ze dit jaar of volgend jaar voor het eerst de eindexamens nieuwe stijl zouden afnemen — moeten dit jaar de examens oude en nieuwe stijl naast elkaar worden afgenomen. Dit eerste jaar is het aantal scholen dat de nieuwe examens afneemt overigens nog beperkt.

De kern van de programmavernieuwing is globaal dat het onderwerp ruimtemeetkunde vervangen is door onderdelen van de vlakke meetkunde. Dat is vooral gedaan om aandacht te kunnen geven aan het bewijzen. Daarnaast is voor alle programma's, dus ook bij Wiskunde A, op zowel HAVO als VWO de grafische rekenmachine als hulpmiddel toegelaten. Eigenlijk moet dit sterker geformuleerd worden: het is een onmisbaar hulpmiddel.

De afgelopen jaren is onder de regie van het Freudenthal-instituut bij wijze van experiment op een aantal scholen met het nieuwe programma en het bijbehorende eindexamen (alleen voor het programma B1,2) ervaring opgedaan.

Oude versus nieuwe stijl

In 2000 bestond het examen Wiskunde B (oude stijl dus), zoals eigenlijk vanaf de invoering eind jaren tachtig, uit de volgende thema's:

- een aantal aspecten van een kromme onderzoeken, die gegeven is in parameter- of vergelijkingvorm;
- een aantal aspecten van een functie onderzoeken; aanvankelijk hoorde hierbij de standaardopdracht 'onderzoek de functie en teken de grafiek';

- een aantal berekeningen in een ruimtetuig uitvoeren;
- van een familie van functies exemplaren bepalen die aan bepaalde voorwaarden voldoen.

De activiteiten van de kandidaten zijn samen te vatten als het oplossen van vergelijkingen, differentiëren, integreren en het uitvoeren van berekeningen in ruimtefiguren. In 2000 waren de thema's in het experimenteel examen Wiskunde B1,2:

- het tekenen en berekenen in een Voronoi-diagram;
- berekeningen uitvoeren in een spiraal van rechthoekige driehoeken
- een kettinglijn onderzoeken en deze met een parabool benaderen, waarbij ook de onderlinge afstand gemaximaliseerd moest worden met de grafische rekenmachine;
- berekeningen uitvoeren aan (de baan van) een punt dat met constante snelheid een cirkelbeweging maakt rond een punt dat met dezelfde snelheid over een rechte lijn beweegt;
- bewijzen dat een zekere vierhoek een koordenvierhoek is;
- bewijzen dat een verzameling lijnstukken aan een gegeven kromme raken (het bewijs was voorgestructureerd).

Hoewel ook hier het oplossen van vergelijkingen, differentiëren, integreren en (meetkundige) berekeningen uitvoeren belangrijke activiteiten van de kandidaten zijn, zijn er ook andere waarvan tekenen en bewijzen de belangrijkste zijn. Het is aan de lezer dit voor de examens van 2001 te beoordelen.



Examen VWO

Vorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 **01**

Tijdvak 1
Woensdag 16 mei
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 91 punten te behalen; het examen bestaat uit 18 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 1, 2, 15, 17 en 18 is een bijlage toegevoegd.

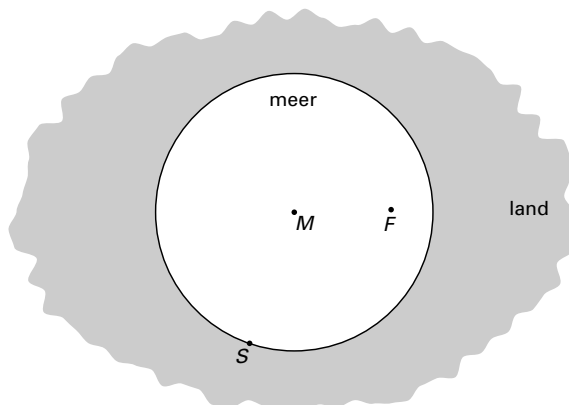
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Boottocht

In een cirkelvormig meer liggen twee eilandjes, M en F . We beschouwen de eilandjes als punten. M ligt precies in het midden van het meer. Zie figuur 1.

figuur 1



S is een punt aan de rand van het meer. Een bootje start in S en vaart in een rechte lijn naar M .

- 5p 1 ☐ Teken in de figuur op de bijlage bij vraag 1 het punt P op de route van het bootje waar het bootje even ver van punt S verwijderd is als van F . Licht je werkwijze toe.

Een ander bootje start in een punt aan de rand van het meer en vaart ook in een rechte lijn naar M . Halverwege is de afstand van het bootje tot het land even groot als de afstand van het bootje tot beide eilandjes.

- 6p 2 ☐ Teken in de figuur op de bijlage bij vraag 2 de punten aan de rand van het meer van waaruit het bootje vertrokken kan zijn. Licht je werkwijze toe.

Oppervlaktebenadering

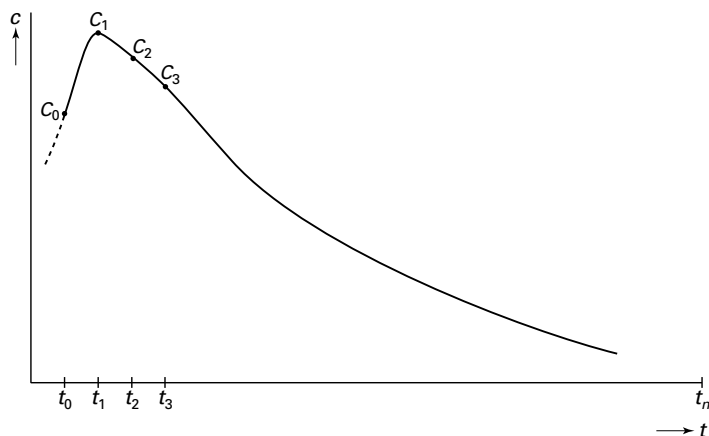
Deze opgave gaat over een voorbeeld uit de farmacokinetiek, de wetenschap die onder andere het verloop bestudeert van de concentratie van een geneesmiddel in het bloed.

In een praktijktest wordt op regelmatige tijden met tussenpozen Δt de concentratie van een geneesmiddel bij een persoon gemeten.

Op de tijdstippen $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ is de gemeten concentratie $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$. In figuur 2 zijn de punten $C_k(t_k, c_k)$ weergegeven. Deze punten liggen op de kromme die het verloop weergeeft van de concentratie van dit geneesmiddel.

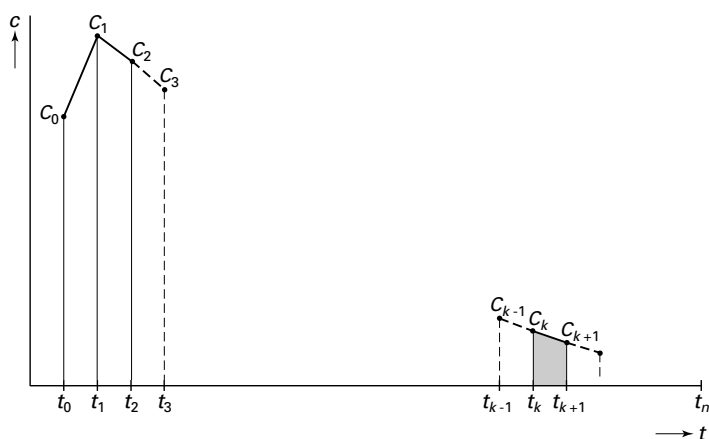
Een maat voor de werkzaamheid van een geneesmiddel is de oppervlakte onder deze kromme. In de farmacokinetiek noemt men dit de AUC (Area Under Curve).

figuur 2



In figuur 3 is aangegeven hoe de oppervlakte onder de kromme benaderd kan worden. Twee opeenvolgende meetpunten bepalen een trapezium. Het trapezium tussen t_k en t_{k+1} is grijs aangegeven. De som van de oppervlakten van alle trapezia is een benadering van de AUC.

figuur 3



De vraag rijst natuurlijk „Hoe nauwkeurig is deze methode?”. Dit gaan we in deze opgave voor een speciaal geval onderzoeken.

- 3p **3** ☐ Toon aan dat de oppervlakte van het grijsgemaakte trapezium gelijk is aan $\frac{1}{2}(c_k + c_{k+1}) \cdot \Delta t$
- 4p **4** ☐ Bewijs dat de AUC tussen t_0 en t_n benaderd wordt door $\left(\frac{1}{2}(c_0 + c_n) + \sum_{p=1}^{n-1} c_p \right) \cdot \Delta t$

Om de nauwkeurigheid van deze manier van benaderen aan de hand van een voorbeeld te testen, nemen we aan dat het dalende gedeelte van de kromme gegeven wordt door $c = 32 \cdot e^{-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}}$ met c in mg/liter en t in uren, $1 \leq t \leq 5$.

- 5p **5** ☐ Bewijs met behulp van integraalrekening dat de AUC voor $1 \leq t \leq 5$ gelijk is aan $64 - \frac{64}{e^2}$.

Neem aan dat de concentratie om het half uur gemeten wordt en dat de meetpunten inderdaad op de grafiek van c liggen.

- 7p **6** ☐ Bereken hoeveel procent de benadering van de AUC voor $1 \leq t \leq 5$, bepaald met behulp van de formule van vraag 4, afwijkt van de werkelijke oppervlakte. Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

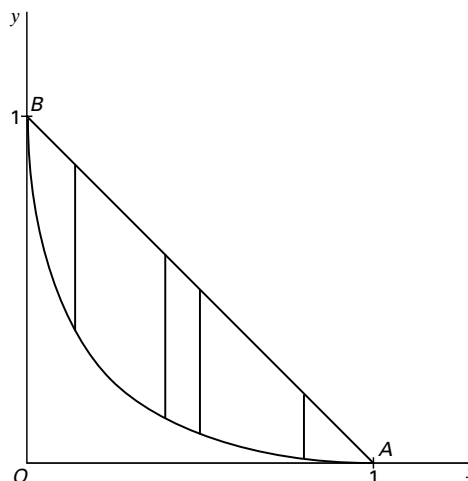
Machten van sinus en cosinus

Gegeven is de functie $f(x) = (1 - \sqrt{x})^2$ met $0 \leq x \leq 1$.

Verder is gegeven het lijnstuk AB met $A(1, 0)$ en $B(0, 1)$. Zie figuur 4.

Tussen de grafiek van f en het lijnstuk AB worden verticale verbindingslijnstukken getekend. In figuur 4 zijn enkele verbindingslijnstukken getekend.

figuur 4



- 5p **7** ☐ Toon aan dat de lengte van een verticaal verbindingslijnstuk gegeven wordt door de formule $L = -2x + 2\sqrt{x}$.

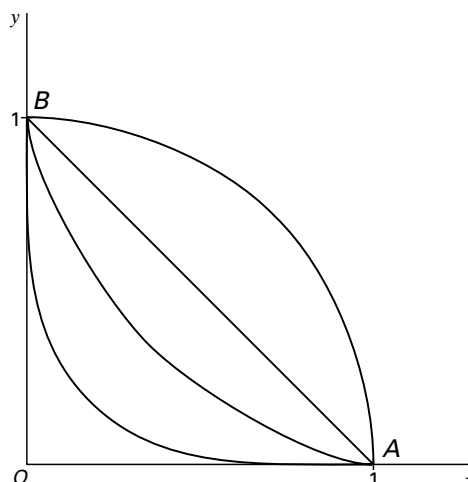
- 4p **8** ☐ Bereken exact de maximale lengte van zo'n verbindingslijnstuk.

Voor elk positief geheel getal n bekijken we de baan K_n van een punt dat beweegt volgens

$$\begin{cases} x(t) = \cos^n t \\ y(t) = \sin^n t \end{cases} \quad \text{met } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi.$$

In figuur 5 zijn vier banen getekend.

figuur 5



Gegeven een punt P van K_6 .

- 5p **9** ☐ Toon aan dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan K_6 in punt P gelijk is aan $-\tan^4 t$.

In een punt P van K_6 heeft de raaklijn aan K_6 richtingscoëfficiënt -9 .

- 3p **10** ☐ Bereken de coördinaten van P .

Voor een bepaalde waarde van n liggen de punten van K_n op de grafiek van f en voor een bepaalde waarde van n liggen de punten van K_n op het lijnstuk AB .

- 6p **11** ☐ Onderzoek welke twee waarden van n dit zijn en toon met behulp van formules de juistheid van je bewering aan.

Water met koolzuur

Hieronder staat een samenvatting van een krantenartikel afkomstig uit NRC-Handelsblad van 23 oktober 1997.

artikel

DEN HAAG, 23 OKT.

De Consumentenbond verrichtte een smaaktest met een panel van 23 geoefende proevers. De proevers dronken het kraanwater van negen waterleidingbedrijven en negen gebottelde koolzuurvrije waters.

Opmerkelijk was dat het lekkerste flessenwater werd verslagen door zes kraanwaters.

Tegelijkertijd met dit onderzoek werd een onderzoek onder

Water met koolzuur

cafés gehouden. Wie in een café een glas mineraalwater bestelt, krijgt vaak een glas leidingwater vermengd met koolzuur. Dat concludeert de Consumentenbond in zijn gids van november. Onderzoekers kregen bij 11 van de 31 bezochte

horecagelegenheden hetzelfde water geserveerd als uit de kraan van het toilet van de uitspanning. Achter de bar werd het water door een pompje van koolzuur voorzien.

In een reactie op de conclusies zegt directeur J.H. Peters van het Bedrijfschap Horeca dat de gesuggereerde omvang van het verschijnsel "schromelijk overdreven" is.

In het artikel wordt het opmerkelijk genoemd dat het lekkerste flessenwater werd verslagen door zes kraanwaters. Stel dat de 18 geproefde waters in een willekeurige volgorde worden geplaatst. Je kunt je nu afvragen hoe groot de kans is dat op de zevende plaats voor het eerst een flessenwater voorkomt.

- 5p **12** ☐ Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat op de zevende plaats voor het eerst een flessenwater voorkomt.

In een reactie op het onderzoek beweert de heer Peters dat de omvang van het verschijnsel schromelijk overdreven is.

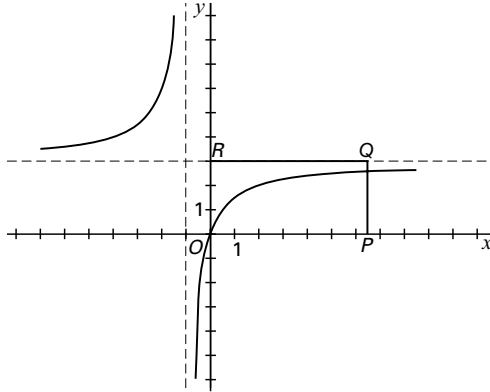
Een café dat kraanwater-met-koolzuur serveert als mineraalwater noemen we een 'knoeier'. Misschien heeft Peters wel gelijk en schetst het artikel een te somber beeld. Veronderstel dat in werkelijkheid 20% van de cafés tot de 'knoeiers' behoort.

- 4p **13** ☐ Bereken in vier decimalen de kans dat in een aselechte steekproef van 31 cafés minstens 11 'knoeiers' voorkomen.

Een functie en een rij

Gegeven is de functie $f(x) = 3 - \frac{3}{x+1}$. Zie figuur 6.

figuur 6



In figuur 6 is rechthoek $OPQR$ getekend met $R(0, 3)$ en $P(b, 0)$ met $b > 0$.
De grafiek van f verdeelt de rechthoek in twee delen met gelijke oppervlakte.

8 p **14** ☐ Bereken b in twee decimalen nauwkeurig.

Voor de rij $v_0, v_1, v_2, \dots$ geldt $v_n = f(v_{n-1})$ met $v_0 \geq 0$ en $n \geq 1$.

Op de bijlage bij vraag 15 is een gedeelte van de grafiek van f getekend.

6 p **15** ☐ Onderzoek voor welke waarden van v_0 de rij convergeert. Licht je antwoord toe, bijvoorbeeld met behulp van een webgrafiek.

Voor bepaalde startwaarden $v_0 < 0$ breekt de rij $v_0, v_1, v_2, \dots$ met $v_n = f(v_{n-1})$ en $n \geq 1$ af, omdat de termen niet meer gedefinieerd zijn.

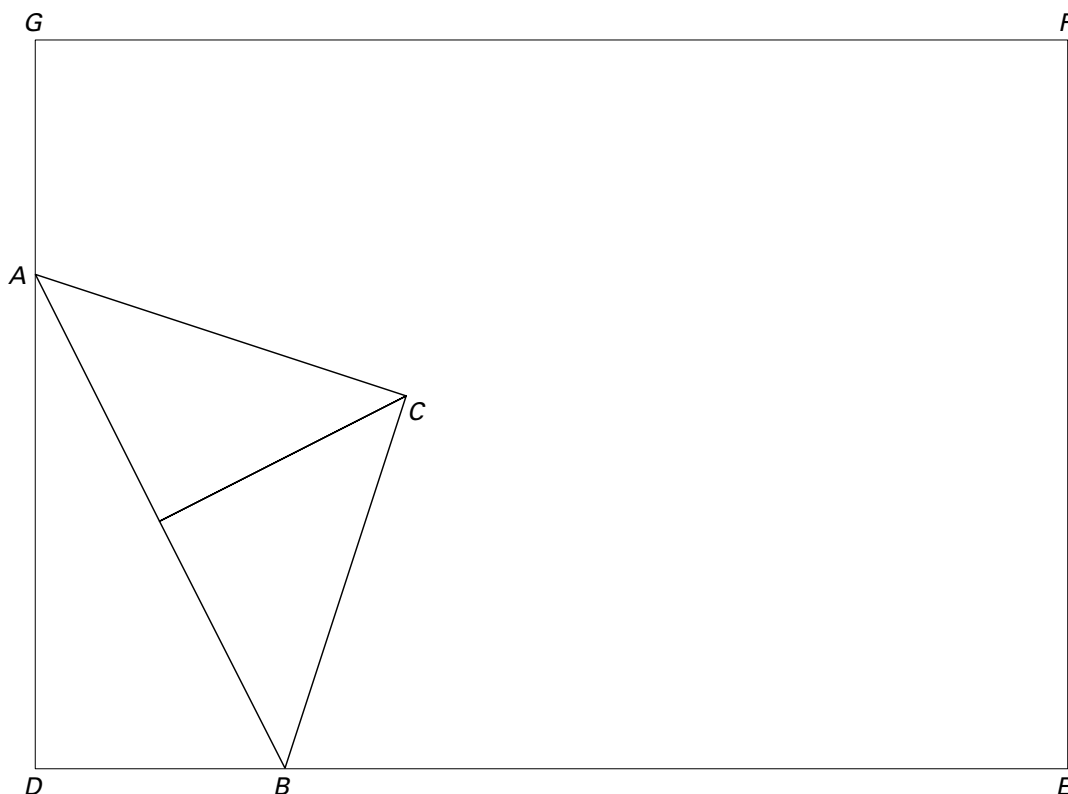
5 p **16** ☐ Geef twee van dergelijke startwaarden. Licht je antwoord toe.

Bewegende, gelijkbenige, rechthoekige driehoek

Een gelijkbenige rechthoekige driehoek wordt in de linkeronderhoek van een vel papier gelegd. De eindpunten van de schuine zijde van de driehoek zijn A en B en het derde hoekpunt is C . Punt A ligt op de linkerzijde van het papier en punt B op de onderzijde van het papier. De hoekpunten van het papier noemen we D , E , F en G . Zie figuur 7.

Figuur 7 is op de bijlage afgedrukt.

figuur 7



We laten de driehoek over het papier bewegen waarbij A op de linkerzijde en B op de onderzijde van het papier blijft. In de beginsituatie valt B samen met D . B beweegt over de onderzijde van het papier tot A samenvalt met D . Tijdens de beweging beschrijft C een baan over het papier.

- 5p **17** ☐ Bewijs dat C tijdens deze beweging over de bissectrice van $\angle D$ beweegt. Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de bijlage bij vraag 17.

- Het punt M is het midden van AB . Bij de beweging beschrijft ook M een baan.
 5p **18** ☐ Laat zien dat deze baan een kwartcirkel is en geef het middelpunt van deze cirkel. Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de bijlage bij vraag 18.

Einde

Joost van Hamel

*School of Mathematics and Statistics
University of Sydney, NSW 2006, Australia
vanhamel@maths.usyd.edu.au*

Column Wiskundigen in den vreemde

From down under

Sinds mei 2000 werkt Joost van Hamel als postdoc aan de faculteit wiskunde van de Universiteit van Sydney. Het afgelopen jaar heeft hij ons op de hoogte gehouden hoe het hem daar is vergaan. Deze column is de laatste in een serie van vier.

Al een jaar hier in Sydney. Het lijkt nog maar zo kort geleden dat Jacqueline en ik hier aankwamen. Gelukkig is het nog lang niet voorbij, want we hebben het hier erg naar onze zin. Waarschijnlijk blijven we hier nog wel een jaar of drie, want Jacqueline is inmiddels aan een promotieonderzoek begonnen. Wat dat betreft is het prettig dat ik een driejarige postdocplaats heb. Daarna zal ik nog een jaartje op de een of andere manier aan de slag moeten blijven, maar dat lijkt geen onoverkomelijk probleem. Ik ben in ieder geval wel blij dat ik voorlopig niet op zoek hoef naar een nieuwe postdocplek. Een buitenlands avontuur als het onze is een hoop gedoe, en als je dan elk jaar weer op zoek moet naar wat nieuws, blijft er weinig tijd en rust over om ergens echt een leven op te bouwen.

Tot nu toe ben ik erg tevreden met mijn verblijf hier in Sydney. Niet alleen omdat het een mooie stad in een schitterend land met een prachtig klimaat is. Voor mijn vertrek was ik sceptisch of een tijd in het buitenland ook veel bij zou dragen aan mijn academische ontwikkeling. Onder de wiskundigen met wie ik sprak leek dit het heersende idee. Zonder een buitenlands verblijf was een wetenschappelijke vorming niet compleet. Ik vroeg me af of dat nog wel zo sterk gold als vroeger. Waarom was het nodig ergens een jaar of langer te zitten, als je zonder dat al zoveel internationale informatie en inspiratie op kon doen, op congressen, met werkbezoeken, per e-mail en per internet? Ik had de indruk dat het idee van een buitenlands verblijf voor een groot deel een overblijfsel was uit de tijd dat wereld nog groot was, een vliegreis een fortuin kostte en je er met de trein een hele dag over deed om naar Parijs te gaan.

Inmiddels besef ik dat het verschil maakt of je ergens voor een paar weken te gast bent, of dat je er in dienst bent. Je maakt dan deel uit van het geheel, en dus kom je in nauwer contact met de academische cultuur ter plekke. Ik hebt hier de tijd om niet alleen maar over wiskunde te praten, maar ook om te zien 'hoe' het onderzoek en onderwijs gedaan worden. Ik zie inspirerende voorbeelden, en ook voorbeelden van hoe ik het niet zou willen; ik vergelijk de aca-

demische cultuur hier met wat ik ervan ken in Nederland, en ik zie wat me beter bevalt en wat niet. Dat zijn dingen waar je op werkbezoeken meestal nauwelijks aan toekomt, omdat dan alles gericht is op de wiskunde zelf. Het contact met de faculteit als instituut is dan veel oppervlakkiger. Kortom, deze postdoc-periode blijkt zeker een verrijkende ervaring in mijn academische ontwikkeling; meer dan ik van te voren had verwacht.

Ik denk wel dat ik hier in Sydney geluk heb gehad. De cultuur hier binnen de algebra-groep is heel erg gericht op onderling contact. De vaste stafleden hebben me helemaal opgenomen en daarnaast lopen er veel interessante gasten rond die hier vaak voor een maand of meer zijn. Ik ken genoeg verhalen van postdocs die zich buiten het faculteitsleven voelden staan. Dat het voor mij zo goed uitpakt is echt puur geluk, want voor ik hier begon was ik hier alleen maar een middagje geweest, en kende ik niemand persoonlijk. Ik kende de verhalen van Wieb Bosma, maar die heeft hier in de computeralgebra-groep gezeten, niet in de algebra-groep — vreemd genoeg is er, zeker binnen werktijd, maar weinig contact tussen de twee groepen. Al met al is het dus meer geluk dan wijsheid dat ik het hier zo naar mijn zin heb. Uiteindelijk hangt dit soort dingen toch van het toeval aan elkaar. Als twee of drie mensen hier de afgelopen maanden niet waren geweest of veel minder tijd hadden gehad, dan had ik het nog steeds heel gezellig gevonden, maar academisch waarschijnlijk minder inspirerend.

Al met al denk ik dat het van te voren moeilijk te voorspellen is of een postdoc-periode echt een succes gaat worden of niet (tenzij je de faculteit waar je heengaat al heel erg goed kent). Toch denk ik dat het verstandig is navraag te doen, voor je ergens in het buitenland als postdoc heengaat. Hoe open is de atmosfeer er? Hoe druk is men met onderwijs en administratieve zaken? Zijn er vaak gasten van buiten, en worden die 'afgeschermd' door de gastvrouw/gastheer, of 'gedeeld' door de groep? Je zit er uiteindelijk al gauw een jaar, in een verder vreemde omgeving, lang genoeg om je behoorlijk miserabel te voelen als het niet goed uitpakt. Maar, zoals gezegd, zelf heb ik dit allemaal aan het toeval over gelaten, en het bevalt me uitstekend hier. De volgende keer neemt een andere wiskundige in den vreemde de fakkel over. Ik ben benieuwd.



Wim Groen

Vrije Universiteit, Faculteit der Exacte Wetenschappen

Divisie Wiskunde en Informatica, De Boelelaan 1081, 1081 HV Amsterdam

groen@cs.vu.nl

Keuzeonderwerpen in het onderwijs

De eerste zebrabloekjes

Vanaf 1998 zijn middelbare scholen begonnen met het Tweede Fase onderwijs. Een van de spannendste en meest uitdagende aspecten van de Tweede Fase is de invoering van het keuzeonderwerp, het zogeheten zebrablok. Wim Groen vertelt hoe de zebrablokken in de praktijk gestalte hebben gekregen en hoe de invoering is verlopen.

Op 1 december 1994 begon de vakontwikkelgroep voor wiskunde met haar werkzaamheden. Het was haar taak programma's te ontwerpen voor de wiskundevakken in de nieuwe profielstructuur van de bovenbouw van het HAVO en het VWO. Die profielstructuur zou in 1998 of 1999 in de HAVO-VWO scholen van start gaan in de klassen vier, vijf en zes.

Hoewel we dat zelf toen niet zo in de gaten hadden, was het een turbulente tijd in wiskundeonderwijsland. In 1985 waren de wiskundeprogramma's voor het VWO vernieuwd; we gingen toen over van de vakken Wiskunde I en II naar Wiskunde A en B, wat zowel nationaal als internationaal een kleine revolutie was geweest. Via Wiskunde A kregen toepassingen voor het eerst een officiële plaats in de programma's. De maatschappelijke relevantie werd een criterium voor leerstofkeuze. Het HAVO volgde in 1990. Ook daar verscheen naast het 'gewone' vak Wiskunde B het vak Wiskunde A waarin de toepassingen centraal stonden. Aan de basisvorming werd vanaf 1988 hard gewerkt door de COW (Commissie Onderwijs Wiskunde).

Inmiddels werden de kritische geluiden over Wiskunde B in het VWO luider en luider. De examenresultaten waren slecht. Teruglopende studentenaantallen bij de wiskunde- en informaticaopleidingen zouden wel eens het gevolg kunnen zijn van het feit dat de wiskunde in het voortgezet onderwijs de leerlingen geen goed beeld gaf van de discipline wiskunde op de universiteit. In het VWO kwamen er nauwelijks nog universitair opgeleide docenten wiskunde bij. De zojuist vernieuwde onderbouw (basisvorming wiskunde, gestart in 1993) maakte een herstructurering van de Wiskunde B hard nodig. De komst van de grafische rekenmachine vroeg om een herwaardering van de manier waarop de analyse moest worden opgebouwd. Redenen genoeg voor het mi-

nisterie om op 23 mei 1993 een Studiecommissie Wiskunde B VWO in te stellen, die tot taak kreeg de problemen te inventariseren en voorstellen te doen voor het oplossen van die problemen.

Het mooie en informatieve rapport van deze studiecommissie verschijnt in oktober 1994; in diezelfde maand verschijnt ook het definitieve rapport van de Stuurgroep Profiel Tweede Fase Voortgezet Onderwijs, waarin de huidige profielstructuur voor de bovenbouw van HAVO en VWO wordt geïnitieerd. Weer twee maanden later, ik vermeldde het al eerder, mocht de vakontwikkelgroep een begin maken met de invulling van de wiskundevakken in die profielstructuur. Het is opmerkelijk dat geen enkel lid van de vakontwikkelgroep ook aan de studiecommissie Wiskunde B deelnam.

Zebrablokken

Ook de vakontwikkelgroep levert geen half werk. Al in oktober 1995 ligt er een uitvoerige beschrijving van de voorstellen voor de examenprogramma's wiskunde, zowel voor HAVO als voor VWO. In die voorstellen zijn dan de resultaten van een inmiddels gehouden raadplegingsconferentie met een vijftigtal wiskundeleraars uit het voortgezet onderwijs en een raadpleging georganiseerd door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars al verwerkt.

In het rapport vinden we op het formaat van een bladzijde A4 een overzicht in drie kolommen van de programmavoorsstellen. Er is een gemeenschappelijk deel en er zijn profieldelen. Deze profieldelen zijn aangegeven door middel van witte blokken met een dunne rand (algebra en analyse), witte blokken met een brede rand (discrete wiskunde), lichtgrijze blokken (statistiek en kansrekening), donkergrijze blokken (meetkunde). Helemaal onderaan zien we gearceerde blokken; dat zijn de keuzeonderwerpen. De laatstgenoemde blokken ontleen aan hun arcering de naam zebrablokken.

Over die keuzeonderwerpen schrijft de commissie in haar rapport: "In de VWO-kaart staat onderaan elk VWO-profiel een blok (zebrablok genoemd vanwege de vormgeving in dat schema) van 40 studielasturen waarin ruimte is voor keuzeonderwerpen. Daarin wordt leerlingen de



De eerste zes zebraboekjes van Epsilon uitgaven

gelegenheid geboden om zelfstandig of in (klein) groepsverband een of meerdere onderwerpen te bestuderen of opdrachten uit te voeren die passen bij het profiel, de wiskunde in dat profiel en wellicht zelfs de toekomstige studie. De leerling dient een keuze te kunnen maken uit een flink aantal beschikbare Zebraboekjes. De studielast van elk zebraboekje kan variëren en de leerling dient bij zijn keuze te zorgen voor een studielast van 40 uur. Er is voor deze opzet van keuzeonderwerpen gekozen om nog meer dan in het reguliere programma recht te doen aan onderzoeksvaardigheden en studievvaardigheden.”

“Niet alleen de leermethoden zullen dergelijke keuzeonderwerpen aanbieden. Belangstellenden van universiteiten (en bij navraag bleken deze gemakkelijk te vinden) zullen worden uitgenodigd dergelijke Zebraboekjes te maken, die al dan niet in samenwerking met de educatieve uitgeverijen beschikbaar komen voor de scholen. Docenten van het voortgezet onderwijs worden bij de beoordeling van de haalbaarheid van de diverse onderwerpen betrokken. [...] Een uitputtende lijst van mogelijke keuzeonderwerpen is uiteraard niet te geven. Daarom ontstaan we hier met het opsommen van een aantal voorbeelden per profiel.” (Zie tabel 1)

“De wiskunde in het profiel Cultuur en Maatschappij omvat zelfs twee Zebrablokken. Het blok dat exclusief voor C&M is gereserveerd, omvat 40 studielasturen die dienen te worden besteed aan keuzeonderwerpen in een culturele en/of historische context.” Aldus de voorstellen over het keuzeonderwerp op bladzijde 54 van het rapport. Vooral het commissielid Jan Breeman schijnt zich sterk gemaakt te hebben voor de introductie van zo’n keuzeonderwerp in het nieuwe programma.

In dit standpunt wijkt de vakontwikkelgroep nogal af van wat de studiec commissie Wiskunde B kort daarvoor in haar eindrapport had geschreven: “De Commissie is voorstander van een keuzeonderwerp binnen het examenprogramma. [...] Toch durft zij een keuzeonderwerp niet aan te bevelen omdat de enquête onder de docenten uitwijst dat men hier niet op zit te wachten en ook omdat eerdere keuzeonderwerpen, zoals bij Wiskunde II, nooit een succes zijn geworden. . .” (Rapport studiec commissie Wiskunde B, blz. 63).

Hoe het verder ging

Tussen het tijdstip van het verschijnen van het eindrapport van de vakontwikkelgroep (oktober 1995) en het moment dat de eerste scholen van start gaan met het nieuwe Tweede Fase programma (september 1998) gebeurt er nog van alles. Om een evenwichtiger verdeling van de leerstof over de schooljaren te krijgen, verdwijnt het gemeenschappelijke deel en wordt opgenomen in de profielen. Ter voorkoming van overlading worden er nog diverse onderdelen van de voorstellen geschrapt. Stonden er voor Cultuur & Maatschappij eerst twee zebra blokken in het programma, in de eindsituatie zijn die allebei verdwenen en staat er alleen in de drie andere profielen telkens precies een zebra blok. En de optimistische opmerking in het rapport dat er velen als het ware stonden te trappelen om zebra boekjes te gaan schrijven bleek meer waar te zijn dan sceptici hadden voorspeld! Langzaam maar zeker begint er werkelijk een voorraad van zebraonderwerpen te ontstaan. In het volgende zal ik proberen een beeld te geven van de situatie op dit moment (voorjaar 2001).

Natuur & Techniek	Natuur & Gezondheid	Ec & Mij/Cultuur & Mij
volledige inductie	genetica	speltheorie
priemgetallen	chemische reacties	elasticiteit
codering	populatiegroei	duale lp-probleem
analogie	prooi-roofdier	Poissonverdeling
centrale projectie	Markovketens	voorraadmodellen
kaartprojecties	vormen in de natuur	tijdreeks analyse
cryptosystemen	recursie	wachttijden
de wetten van Kepler	chaos	codering
projectieve meetkunde	codering	recursie
recursie	numerieke methoden	optimaliseringsproblemen
numerieke methoden	links en rechts in de natuur	numerieke methoden
dubbelverhouding	dosis-reactie-modellen	differentievergelijkingen
chaos	echografie	netwerken
complexe getallen	dimensies in de natuur	Markovketens
taylorreeksen	grafan (Euler, Hamilton handelsreizigersprobleem)	portfolio-modellen
curve-fitting	computeralgebra	3d lin. prog/simplex
groeptheorie		
convergentie		
matrices en determinanten		
kegelsneden (anal. mtk)		
grafan (Euler, Hamilton, handelsreizigersprobleem)		
computeralgebra		

Tabel 1 Een lijst van keuzevakken per profiel

Epsilon en Wolters Noordhoff

Twaalf zebra boekjes zijn er inmiddels verschenen; acht bij Epsilon uitgaven en vier bij Wolters-Noordhoff. De Epsilonboekjes worden uitgegeven in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars; op de achterkant wordt de rol van Jan Breeman nadrukkelijk vermeld: “De zebra-reeks is ontstaan naar het idee van Jan Breeman om VWO-leerlingen in keuze-uren kennis te laten maken met onderwerpen uit de wiskunde die buiten het standaardcurriculum vallen, maar wel zeer de moeite waard zijn.” Titels van de Epsilon Zebra boekjes zijn:

1. Jan van den Broek en Peter Kop: *Kattenaids en statistiek*. Over het verwerken van steekproefgegevens en het toetsen van hypothesen.
2. Agnes Verweij en Martin Kindt: *Perspectief, hoe moet je dat zien?* Over de theorie van het perspectief en het gebruik daarvan in schilderen.
3. Jan Smit en Wim Kremers: *Schatten, hoe doe je dat?* Manieren om de omvang van een populatie te schatten met behulp van een steekproef.
4. Wim Kleijne en Ton Konings: *De gulden snede*. Klassieke meetkunde, Fibonacci-rijen en kunst.
5. Henk Tijms, Frank Heierman en Rein Nobel: *Poisson, de Pruisen en de Lotto*. Introductie tot en toepassingen van de Poissonverdeling.
6. Frits Beukers: *Pi*. Over de geschiedenis van (het berekenen van) pi.
7. Peter Lanser: *De laatste stelling van Fermat*. Over de geschiedenis van de stelling en het bewijs ervan.
8. H. de Swart, A. van Deemen, E. van der Hout en P. Kop: *Verkiezingen, een web van paradoxen*. Over de voor- en nadelen van verschillende kiesmechanismen.

Bij Wolters-Noordhoff zijn de volgende Zebraboekjes uitgekomen:

1. Prof. dr. F. van der Blij: *Wiskunde met verve*. Hoe kunstenaars wiskunde kunnen gebruiken.
2. Jan van den Brink: *GPS en wiskunde*. Over plaatsbepaling met behulp van satellieten.
3. Vincent van Leijen: *Over zeeën van tijd*. Hollandse navigatie in de 16e en 17e eeuw.
4. Jelske Kuijper: *Op een goudschaal*. Afwegingen over de gulden snede.

Overeenkomsten en verschillen

Op het eerste gezicht lijken de boekjes van de beide series wel een beetje op elkaar. Ze hebben hetzelfde formaat en dezelfde omvang: zo'n 50 à 60 bladzijden. Als je wat beter kijkt, zie je toch grote verschillen.

De boekjes van Wolters-Noordhoff hebben een consequente vormgeving; bladspiegel en lettertype zijn in alle boekjes dezelfde. Men houdt zich keurig aan de conventies voor wiskundeteksten; variabelen zijn cursief gezet en formules hebben de gangbare lay-out. Ook de indeling is voor alle boekjes gelijk. *Vooraf* — de auteur geeft kort aan wat je kunt verwachten, welke wiskunde je nodig hebt en welke activiteiten je geacht wordt te gaan ontplooiën. *Bron* — een beschrijving van de context waarin je het onderwerp kunt plaatsen. *Opdrachten* — dit is het centrale deel van het boekje. In een aantal hoofdstukjes vind je informatie over het onderwerp. Kleine stukjes leestekst worden afgewisseld met opdrachten, zodat je actief moet blijven en voortdurend kunt controleren of je nog begrijpt waar het over gaat. Je wordt geacht dit deel in twaalf studielasturen te kunnen doorwerken.

In het hoofdstuk *Onderzoek* krijg je suggesties voor nader te onderzoeken thema's, voor bronnen om verdere gegevens te vinden en voor de manier waarop je van dat onderzoek verslag zou kunnen doen (logboek, dossier, verhaal). Nadrukkelijk wordt steeds vermeld dat je het onderzoek alleen of in een groepje kunt doen en dat je over de te kiezen werkwijze vooraf afspraken moet maken met de docent.

Als je ervoor kiest het onderzoek af te ronden met een *Presentatie* dan vind je in het hoofdstuk dat die naam draagt daarvoor waardevolle tips. Het slothoofdstuk *Antwoorden of Aanwijzingen* dient ter ondersteuning van het centrale deel van het boekje. Mocht je bij het doorwerken van de opdrachten ergens vast lopen, dan kun je hier misschien iets vinden om weer verder te kunnen.



De zebraboekjes van Wolters-Noordhoff

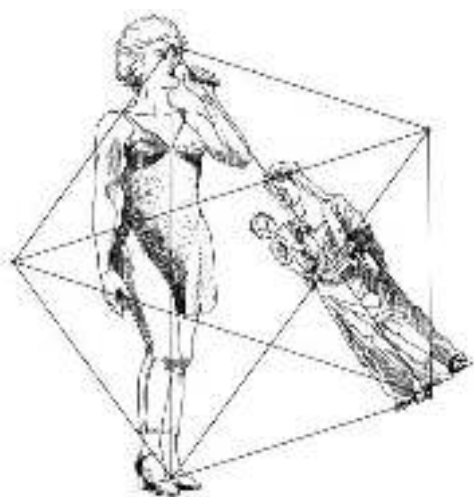
De boekjes die zijn uitgegeven door Epsilon verschillen sterk in vorm en opbouw. Kennelijk leveren de auteurs de tekst camera-ready aan. De ene auteur cursiveert de variabelen wel, de andere doet dat niet; in het ene boekje vind je wel een kopregel die je vertelt in welk hoofdstuk je bent, in het andere boekje niet. Ook de lettertypen verschillen van boekje tot boekje. Wel zitten er in bijna alle boekjes gemeenschappelijke elementen: steeds vind je achterin de antwoorden van de opgaven uit het centrale deel en ook wordt vaak een suggestie gedaan voor verder werk door het formuleren van een zogenoemde eindopdracht. Aanwijzingen voor een eindverslag of een presentatie komen in de Epsilonboekjes niet of slechts zijdelings voor.

Ook de didactiek in de Epsilonserie is niet in alle boekjes dezelfde. In het ene boekje (*Perspectief*, *De Gulden Snede*) wisselen verhalende tekst en opgaven elkaar af, in het andere (*Kattenaids en Statistiek*, *Pi*) bestaat een hoofdstuk uit een aantal verhalende paragrafen en bevat de slotparagraaf van een hoofdstuk de opgaven.

Op een goudschaal

Omdat in beide series een boekje over de gulden snede voorkomt, ligt het voor de hand die boekjes eens met elkaar te vergelijken.

Jelske Kuijper (*Op een goudschaal*, uitg. WN) introduceert de Gulden Snede als een speciale manier om een lijnstuk te versnijden, die in veel wiskundige figuren voorkomt, bij voorbeeld de vijfhoek. Als aandachtstrekker dient de vraag of de navel de gouden positie inneemt, zie figuur 1. De eerste drie hoofdstukken in het opdrachtendeel



Figuur 1 Neemt de navel een gouden positie in? Uit: *Op een goudschaal*, p. 9.

zijn voornamelijk meetkundig van aard en hebben de titels:

1. De Gulden Snede: echt of bedacht (constructie van Hero; gouden rechthoeken (Parthenon, Le Corbusier), schelpen, zonnebloemen, Lucas-rijen)
2. Historische goudmijnen (pentagram, stellingen van Euclides over de Gulden Verhouding, de gouden driehoek in de regelmatige vijfhoek, constructie van de gouden driehoek)
3. Gouden figuren (in het platte vlak: gouden driehoeken en rechthoeken, Penrose-betegeling. In de ruimte: regelmatige veelvlakken)

We krijgen, voordat we aan het onderzoek toekomen, nog twee hoofdstukken:

4. Gouden getallen (Fibonacci-getallen, kettingbreuken)
5. Natuurlijk goud; vergulde kunst (over toepassingen van de Gulden Snede in de beeldende kunst)

Volgens de aanwijzingen in het woord vooraf zou je deze vijf hoofdstukken in twaalf studielasturen moeten kunnen doorwerken. Je hebt dan kennism gemaakt met allerlei meetkundige aspecten van de Gulden Snede en terloops aardig wat klassieke meetkunde voorbij zien komen, zoals de stellingen over omtrekshoeken en middelpuntshoeken in een cirkel en de machtsstelling. Je hebt gewerkt aan fibonacci-rijen, gestoeid met kettingbreuken, spiralen geanalyseerd en je verdiept in de modulator van Le Corbusier.

In het onderzoekdeel krijg je bijvoorbeeld de volgende suggestie: "Was Seurat een uitzondering, of pasten meer schilders de Gulden Snede toe in hun schilderijen? Bekijk bijvoorbeeld schilderijen van Piet Mondriaan, hoe deed hij het? Je kunt ook zoeken naar kunstenaars die gouden figuren afbeeldden, zoals Dali. Laat zien hoe ze dat deden. Speelde de Gulden Snede bij deze kunstenaars verder ook een rol? Doe je eigen kunsthistorische onderzoek en bedenk dat je interessante vondsten ook kunt gebruiken bij een presentatie zoals in deel 3 van dit boekje beschreven staat. Als 'zijpad' van dit thema kun je ook onderzoek doen naar de Gulden Snede in de muziek; je vindt daarover meer informatie op het Internet." [Op een goudschaal; blz. 41/42]

En zo staan er nog negen andere suggesties. Er wordt aanbevolen aan dit onderzoek ook twaalf uur te besteden. Je hebt dan nog twaalf uur over om het geheel op een aantrekkelijke manier te presenteren.

De gulden snede

Wim Kleijne en Ton Konings zijn onze gidsen bij de verkenning van de Gulden Snede in de zebra-reeks van Epsilon. In hoofdstuk 1 (*Een goddelijke verhouding*) introduceren zij de Gulden Snede als een getal

dat 'al eeuwen in de belangstelling staat' en dat een rol speelt bij de verdeling van een lijnstuk in twee stukken. Zij vermelden dat rechthoeken waarvan de lengte en breedte zich verhouden als de Gulden Snede volgens sommigen een zeker schoonheidsideaal vertegenwoordigen en kondigen aan dat er ook een verband is met Fibonacci-rijen. Er volgt dan een lang hoofdstuk (*De wiskunde van de Gulden Snede*) dat opent met een verhaal over het pentagram en de magische betekenis daarvan. Vervolgens onderzoeken we de vijfhoek en maken kennis met passer-en-liniaal constructies van de verdeling van een lijnstuk in de verhouding van de Gulden Snede (zie figuur 2).

Lucas-rijen en Fibonacci-rijen vormen een intermezzo en daarna verdiepen we ons in de gulden driehoek en de regelmatige tienhoek. We construeren het pentagram en eindigen met fractals waarin de goddelijke verhouding een rol speelt.

In het hoofdstuk *Eindopdrachten* vinden we beknopte aanwijzingen voor het uitvoeren van zo'n opdracht en zeven tamelijk uitvoerig toegelichte suggesties voor onderzoeksthema's. Uiteraard wordt frequent verwezen naar de studie van Albert van der Schoot over de geschiedenis van de goddelijke proportie (De ontstelling van Pythagoras).

Opvallend in beide boekjes is de rol van de passer-en-liniaal constructie uit de klassieke meetkunde. De auteurs gaan ervan uit dat leerlingen min of meer met die traditie op de hoogte zijn. Ze zouden zich daarin wel eens kunnen vergissen. Zoals uit bovenstaande zeer beknopte synopsis al blijkt, is het boekje van Jelske Kuijper rijker en veelzijdiger dan het epsilonboekje. Een wiskundeleraar aan een gymnasium die voor zijn leerlingen dit onderwerp heeft gekozen, zei me dat hij 'het boek van Kuijper mooier, maar voor de leerlingen erg zwaar vindt.' Dat is natuurlijk ook maar een schatting, maar ik kan me voorstellen dat hij tot dit oordeel komt. Het lijkt me toe dat het epsilonboekje door leerlingen wat beter zonder hulp van de leraar kan worden doorgewerkt.

Ervaringen

De meeste boekjes laten zich vlot lezen, voor zover je dat althans van een wiskundeboek kunt zeggen. Je moet natuurlijk pen en papier erbij hebben en meeschrijven en -rekenen, want anders ben je al snel het spoor bijster. Het lijkt me toe dat de gemotiveerde VWO-leerling met deze boekjes goed aan de slag kan. Of dat ook werkelijk het geval zal zijn, moet de praktijk natuurlijk nog uitwijzen. Enig rondbellen naar vier mij bekende wiskundeleraars gespreid over verschillende regio's van het land leverde verschillende reacties op.

Leraar 1 "Onze school is in 1999 met de Tweede Fase begonnen en onze leerlingen zullen dus in 2002 met de nieuwe examens kennismaken. Met het keuzeonderwerp zijn we dan ook nog niet begonnen. Het standaardprogramma is al zo omvangrijk dat we, ook doordat we minder contacturen hebben, de grootste moeite zullen hebben om dat netjes af te krijgen. Je begrijpt dat we daar toch de prioriteit leggen, want wat op het centraal schriftelijk wordt gevraagd, wil je toch zeker behandeld hebben. Het keuzeonderwerp schuiven we dus maar helemaal naar achteren."

"We stellen ons voor dat de leerlingen zelfstandig een door ons gekozen boekje gaan doorwerken en dat het resultaat van die arbeid als 'voldaan' zal worden afgetekend. Welke criteria we daarbij zullen aanleggen, moeten we nog bekijken. Misschien combineren we het keuzeonderwerp wel met een praktische opdracht."

Leraar 2 "Onze school is in 1998 met de Tweede Fase begonnen en dezer dagen hebben we het keuzeonderwerp net afgerond. We hebben

het eenvoudigste boekje gekozen (Verkiezingen), omdat we de indruk hebben dat leerlingen anders vastlopen en voor een intensieve begeleiding hebben we geen tijd. Over het begeleiden van leerlingen die aan een project werken, hebben we wel een instructiemiddag gehad. Zoals gebruikelijk schoot die zijn doel weer ver voorbij. We kregen een syllabus van ruim 60 bladzijden, waarin allerlei tips voor de begeleider stonden. Buitengewoon handig voor een hoogleraar die een dissertatieonderzoek moet begeleiden, maar voor de schoolsituatie veel te uitgebreid.”

“Voor de afronding van het keuzeonderwerp hebben we een toets gegeven waarbij de leerlingen het boekje mochten gebruiken. Wie er met de pet naar heeft gegooid, valt dan toch wel door de mand. Al met al zullen de meeste leerlingen er niet veel meer dan circa 20 uur aan hebben gewerkt. Men vergeet vaak dat de meeste leerlingen alleen er naar streven om met minimale inspanning zo goed mogelijk het examen te halen.”

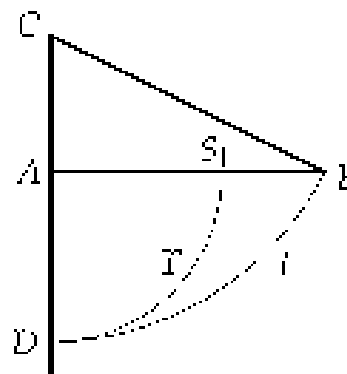
“Er zou flink gesneden moeten worden in de werkstukcultuur, want die cultuur werkt ‘handig lenen’ in de hand en je kunt je afvragen of dat wel zo goed is.”

Leraar 3 “Mijn leerlingen werken aan het epsilonboekje over de Gulden Snede. Ze doen dat grotendeels zelfstandig en ze zijn er best leuk mee aan de slag. Nadat ze het opdrachtendeel hebben doorgewerkt, moeten ze nog een onderzoekje doen. Ze kunnen daarvoor een thema kiezen uit de lijst die het boek geeft, maar ik heb ook zelf nog wat ideeën aangedragen en ze mogen ook zelf een thema kiezen. Van dat onderzoeksdeel moeten ze een verslagje maken van ongeveer vier bladzijden. Het geheel sluiten we af met een toets die voor circa 70% over het opdrachtendeel en voor circa 30% over het onderzoeksdeel gaat. Hoe het zal gaan aflopen weten we nog niet, maar aan vroegere ervaringen (lang geleden) met dit soort projectjes bewaar ik goede herinneringen. Toen waren de leerlingen behoorlijk enthousiast, vonden het leuker dan de gewone stof.”

“Het cijfer voor het keuzeonderwerp tellen we als een praktische opdracht; zo kunnen we twee eisen van het programma handig combineren. De geïnvesteerde tijd is veel minder dan wat het programma eist, want wat het zwaarst is, moet het zwaarst wegen. We zitten nu natuurlijk nog in de ontwikkelingsfase. Als het programma straks is uitgekristalliseerd, is er misschien wel meer tijd voor het keuzeonderwerp vrij te maken.”

Leraar 4 “De Wiskunde A leerlingen hebben gekozen voor het boekje Wiskunde met verve van Van der Blij. We hebben dat min of meer klassikaal met elkaar doorgewerkt. Het is nodig sommige opgaven met elkaar te bespreken, anders lopen ze vast. Bovendien moeten ze ook wennen aan een andere stijl van omgaan met wiskunde. Nadat ze het opdrachtendeel hebben doorgewerkt, moeten ze leren omgaan met een eenvoudige programmeertaal die ze kunnen gebruiken om zelf een kunstwerk te maken; ook moeten ze een onderzoekje doen. Vooral die programmeertaal vonden sommigen moeilijk. Voor onderzoeksthema’s heb ik, naast wat het boek geeft, ook zelf nog een aantal suggesties gedaan, zoals vragen rond regelmatige veelvlakken, de Gulden Snede of magische vierkanten. Maar ze mogen ook zelf iets kiezen. De afronding laat ik vrij: ze mogen gewoon een klassiek verslag maken, maar ook met behulp van de computer zelf een kunstwerk ontwerpen en dat presenteren. De grote meerderheid (80%) kiest voor het vertrouwde verslag.”

“We hebben er behoorlijk wat tijd in gestoken en die tijd is er ook in het programma, al halen we de bedoelde veertig studielasturen niet.



Figuur 2 Hoek A is recht; $AC = \frac{AB}{2}$; t is cirkelboog (C, BC) ; T is cirkelboog (A, AD) ; S_1 verdeelt AB volgens de gulden snede. Uit: *De Gulden Snede*, p. 11.

Zoals te verwachten zijn de reacties van de leerlingen wisselend: sommigen vinden 't leuk, anderen niet.”

Een goed idee?

De gematigd positieve reacties van deze vier leraren wettigen de vraag: “Was het een goed idee van Jan Breeman de leerlingen kennis te laten maken met interessante onderwerpen die buiten het standaardcurriculum vallen?” Op het eerste gezicht lijkt dat wel het geval. Wie zijn vak leuk vindt, kan daar toch niets tegen hebben. Of de praktijk van het keuzeonderwerp veel enthousiaste leerlingen en leraren zal opleveren, waag ik te betwijfelen. Die twijfel wordt ook bevestigd door de resultaten van de enquête onder wiskundeleraren die door de studiecommissie Wiskunde B is gehouden. Uiteindelijk heeft de uitkomst er toe geleid dat die commissie de introductie van een keuzeonderwerp ontraadde. In de geschiedenis van de leerplanontwikkeling zie je dat nieuwe elementen in examen-programma's bijna altijd worden doorgedrukt door specialisten in het vak die, nadat ze geruime tijd het vak hebben beoefend, menen dat ook beginners moeten kennismaken met de dingen waar zij zelf zo van genieten. Of dat voor beginners werkelijk wel zo leuk is, is lang niet zeker. Elke generatie leerlingen begint weer bij het begin en er zal maar een zeer kleine fractie zijn die in staat is de motiverende werking van zo'n geavanceerd keuzeonderwerp te ervaren. Voor de meeste leerlingen zal het gewoon de zoveelste taak zijn die gedaan moet worden om door het examen te komen. ←

Ferdinand Verhulst

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Postbus 80010, 3508 TA Utrecht

verhulst@math.uu.nl

Boekbespreking Wiskundigen in de literatuur

Grijze muis of geniale gek?

In de boekhandel is wiskunde populairder dan ooit. Er verschijnen tal van populariserende boeken met als onderwerp de stelling van Fermat, het getal nul of het getal pi. Uitgevers als Bert Bakker en Vassalucci brengen romans uit met wiskundigen in de hoofdrol. Wiskunde als studierichting is daarentegen verre van populair: universiteiten en hogescholen doen er alles aan om wiskundestudenten te trekken. Ferdinand Verhulst doet een poging deze verschijnselen te rijmen.

Als je aan iemand vraagt wat hij over wiskundigen weet, dan komt er niet gauw een verhaal over een jonge vent die 's morgens tussen rinkelende flessen wakker wordt met aan zijn beide zijden een schone slaapster; waarna hij later op de dag de wereld versteld doet staan door onoplosbaar lijkende problemen snel te doorzien en daarmee vervolgens een heleboel mensen aan het werk zet. Eigenlijk ben ik bang dat er helemaal geen verhaal komt en dat wiskundigen horen tot de grijze muizen van de wetenschap, een soort sukkels waarvan je er aan een universiteit veel hebt.

Tenzij natuurlijk degene aan wie je dit vraagt toevallig heeft gehoord over de Unabomber, een wiskundige die in Harvard studeerde, in Berkeley werkte en de technologische vooruitgang wilde stoppen door bombrieven te sturen naar wetenschappers. Het

gevolg was drie doden en nog veel meer leed en gewonden. Dit valt na te lezen bij David Gelernter [4], die als een van de slachtoffers overdenkt hoe het mogelijk is dat de maatschappij zulke mensen voortbrengt.

Of dat je kennis juist een biografie over Paul Erdős (bijvoorbeeld die van Hoffman [6]) of over John Nash (zie Nasar [11]) heeft gelezen, levens waarin nogal onaangepast gedrag, ernstige psychische stoornissen en een bizarre levensstijl gepaard gaan met wondermooie wiskunde en grote creativiteit.

In dat geval is er veel recht te zetten bij deze kennis. Gewoon wiskundig werk, ook dat van heel briljante mensen, betekent hard werken en gaat net zoals al het wetenschappelijk werk gepaard met veel transpiratie en een beetje inspiratie.

Erg aantrekkelijk is dat niet, die keuze tussen grijze muis en geniale gek, althans zoals die in de ogen van het grote publiek bestaat. Die keuze komt natuurlijk ten dele door de opzetjes van journalisten die graag het bizarre en sensationele uitvergrooten in hun artikelen; dat is makkelijk scoren. Maar zo zijn natuurlijk niet alle journalisten. Er zijn heel wat zorgvuldige en doordachte biografieën van wiskundigen geschreven door wetenschapsjournalisten. In de referenties noem ik een aantal recente publicaties van dit type.

Jurassic Parc

De manier waarop wiskundigen en wiskunde in de publiciteit komen is van levensbelang voor de wiskundige gemeenschap. Het bepaalt de beeldvorming bij de jeugd en daarmee de instroom van het aantal studenten aan universiteit en hogeschool. Ten tweede — en even belangrijk — heeft het veel invloed op de toewijzing van gelden en tevens op bescherming in magere jaren, zoals in de afgelopen periode. Hoe denkt u dat de Nederlandse sterrenkundigen de afgelopen decennia zo buiten-proportioneel veel geld in de wacht wisten te slepen? Excellente beeldvorming bij het grote publiek natuurlijk, en bij politici en beleidsambtenaren. Nou ja, dat zij hen zeker gegund, maar het wordt wel tijd dat ook wiskundigen zich hiermee bezig gaan houden. En daarbij is het nuttig om eerst te onderzoeken hoe het met die beeldvorming op dit moment gesteld is.

Dat is een grote opdracht. Er is radio en tv, er zijn wetenschapsbijlagen van kranten, biografieën, wetenschapsweken en wat niet al. Hier zou iemand een aardige studie aan kunnen wijden. Zo is er een interessant toonbeeldstuk over Turing en wordt, opvallend genoeg, in Spielberg's film *Jurassic Park* (een bewerking van het gelijknamige boek van Michael Crichton) een van de hoofdrollen gespeeld door een zeer bijdehante wiskundige.

Deze wetenschapper ziet alle ongelukken prima aankomen en hij houdt ook nog het hoofd koel.

Wiskundigen in romans

De media vormen wel een erg groot gebied en daarom wil ik me nu beperken tot een opmerkelijke nieuwe ontwikkeling, de publicatie van romans waarin wiskundigen een belangrijke rol spelen. Daarbij zijn boeken waarin een van de personen wiskundige is of wiskunde studeert. Dat is bijvoorbeeld het geval in *De blinde fotograaf* van Anjet Daanje [2]. In deze thriller-achtige roman gaat een wiskundestudente op zoek naar een misdadiger in haar omgeving. Het is een aardig geschreven boek, maar dat deze studente wiskunde studeert doet er helemaal niet toe.

Opmerkelijk is de rol van wiskunde in een aantal sciencefiction boeken, bijvoorbeeld

die van David Zindell [15], [16]. Hierin wordt de hoofdrol gespeeld door ruimtevaarders die lid zijn van de 'order of mystic mathematicians'. Zij banen zich een weg door wilde variëteiten in de ruimte door stellingen te bewijzen die hen door singulariteiten loodsen. Erg spannend, maar niet geheel aansluitend bij onze dagelijkse praktijk.

Wilde getallen

In een aantal recente boeken speelt de wiskunde een echt wezenlijke rol in het dagelijks leven van de hoofdpersonen. *De wilde getallen* [12] van Philibert Schogt beschrijft de zoektocht van Isaac Swift naar het bewijs van het 'wilde-getallen-probleem', een fictief probleem uit de getaltheorie. Het speelt zich af op een wiskunde-instituut waarvan de beschrijving een authentieke indruk maakt. Er is een oudere wiskundige, Dimitri Arkanov,

met een grote naam in zijn vak, op zijn reit, maar als criticus en stimulator van groot belang. Er is een jonge, brutale wiskundige, Larry Oberdorfer, die gemakkelijk succes lijkt te hebben en die graag op een ieders tinnen staat. En dan is er de onvermijdelijke amateur, Leonard Vale, een gewezen leraar in tweedjasje die zich interesseert voor getaltheorie, een beetje gestoord is en verder iedereen van zijn werk houdt. Zo beweert hij bijvoorbeeld dat hij transcendente getallen aan het uitvinden is die de verzoening tussen quantummechanica en Einsteins relativiteitstheorie teweeg zullen brengen.

Isaac vindt omgaan met vrouwen moeilijk. Zijn relatie gaat stuk en ondertussen denkt hij zonder ophouden aan het wilde-getallen-probleem. Na een tijd van als bezeten dag en nacht doorwerken lost hij echter het probleem op en legt zijn resultaat aan Arkanov



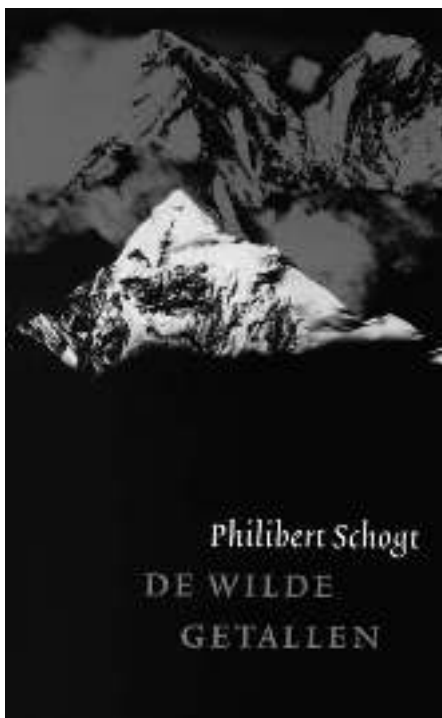
Jeff Goldblum als wiskundige in de film Jurassic Park, hier oog in oog met een gevaarlijke dinosaurus.

voor. Deze is na bestudering van de tekst opgetogen en wil het resultaat onmiddellijk publiceren. De euforie is compleet, maar dan komt Leonard Vale die Isaac van diefstal van zijn resultaten beschuldigt en hem naar het leven staat. De genadeklap is dat Oberdorfer na een blik op de eerste pagina van het manuscript een cirkelredenering aanwijst die de hele stelling in de mist doet verdwijnen. Heeft Isaac nog een toekomst in de wiskunde? Na alle spanning en opwindning op het wiskunde-instituut loopt het toch nog goed af.

Moeders

Wiskundige moeders van Sue Woolfe [14] stond maandenlang op Australische bestsellerlijsten. Dat maakte me nieuwsgierig. Het gaat in deze roman om vier generaties van moeders, waarvan de eerste — een akelig mens — haar dochter Juanita vijftien jaar in een nonnenklooster laat opvoeden terwijl ze zelf het geld van de familie er doorheen jaagt. Juanita is beeldschoon en wiskundig begaafd. Haar hele leven werkt ze heimelijk aan de nieuwe getallen die ze aan het ontdekken is. Haar dochter Frances lijkt uiterlijk niet op haar moeder maar heeft wel veel talent voor wiskunde. Het is het leven van Frances en het streven naar erkenning van haar moeder en haarzelf dat door haar dochter, Hypatia, in de vorm van een biografie wordt beschreven.

Ingewikkeld? Ja, en het wordt dat nog veel meer door het voortdurend heen en weer springen tussen interne dialogen en brieven van Juanita, Frances en Hypatia, aangevuld



met stukjes over grote wiskundigen die uit de populaire literatuur zijn gehaald. De uitgever noemt dit op de omslag een 'schitterend poëtische stijl'; dat is het soms, maar vaak is het alleen warrig.

Professionele wiskundigen komen er niet best af: cynisch, seksistisch, honend en diefachtig. Frances probeert op een wiskundecongres in Athene een voordracht te houden over het werk van haar moeder en haarzelf. De hoon en blinde agressie die haar daarbij ten deel vallen is volstrekt vreemd aan wat zich op wiskundecongressen afspeelt. Niet dat wiskundigen zo bijzonder aardig zijn, maar ze zijn op een paar uitzonderingen na bereid om nieuwe dingen aan te horen en tamelijk beleefd in de omgang.

Het boek is schijnbaar van wiskunde en wiskundigen doordrenkt. De mooie Juanita bijvoorbeeld ligt in bad terwijl haar minnaar haar uit de werken van Cantor voorleest. (Ik hoorde dit soort onderwerpen op de colleges van N.G. de Bruijn in Amsterdam; wel degelijk, maar een stuk saaier.) Voortdurend wordt er gesproken over het bewijzen van stellingen en het zoeken naar 'nieuwe getallen'. Ik zeg 'schijnbaar van wiskunde doordrenkt', want het gaat niet echt over wiskunde, maar over verhoudingen tussen moeders en dochters. Naast de erkenning die Frances voor haar moeder probeert te verkrijgen probeert ze haar moeder via de wiskunde te bereiken, waarbij ze ondertussen haar eigen dochter verwaarloost. Zo worden de misstanden voortgezet.

Diepgaande problemen tussen moeders en dochters vormen zo'n wijd verbreid verschijnsel dat veel van de belangstelling voor deze roman hieruit verklaard kan worden. Emotionele verwaarlozing van kinderen kan in elke context plaatsvinden, maar misschien lopen wiskundigen die onderzoek doen wat dit betreft wel meer gevaar door hun preoccupatie met het vak. Hoewel Sue Woolfe de wereld van de wiskundigen cartoonesk tekent heeft ze goed begrepen dat wiskundig onderzoek in stroomversnelling de geest volledig in beslag neemt en bijna obsessieel kan worden. Het is de spanning en de opwindning hiervan die zo stimulerend is voor ons vak.

Obsessie

Iets van het obsessieel dat in onderzoek een rol kan spelen vinden we in *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture* van Apostolos Doxiadis [3]. Deze oom houdt zich zijn hele leven bezig met het vermoeden van Goldbach ('elk even natuurlijk getal groter dan 2 is de som van twee priemgetallen') en zijn gedrevenheid om het vermoeden te bewijzen doet pathetisch aan. Oom Petros geeft trouwens een neefje het bewijs van het vermoeden als sommetje op. De jongen brengt op deze manier gekweld de zomer door en uit zijn reacties concludeert oom Petros dat neeflief geen wiskundige moet worden. Misschien moet je voor wiskundig werk behalve vaktechnisch talent ook een speciale psychologische gesteldheid hebben, maar om dat met het vermoeden van Goldbach te testen gaat wel erg ver.

Het boek van Doxiades is spannender dan *The parrot's theorem* van Dennis Guedj [5], maar in Guedj's boek komt veel meer wiskunde voor. Het is een aardig verhaal waarin een dove jongen een rol speelt, een vreemde wiskundige heremiet die in het Amazonegebied woont en nog wat wonderlijke karakters; de avonturen dienen als raamver telling voor allerlei wiskundige wetenswaardigheden. Het is amusant maar niet echt opwindend.

Moord

Tenslotte iets over *De vitalist* van Gerrit Krol [8], een boek dat in 2000 drie drukken heeft beleefd. Het gaat over de ervaringen van drie bevriende paren waarvan een van de mannen, Johan, hoogleraar wiskunde te Leiden is. Erg knus zijn de bijeenkomsten van de vrienden niet, er is veel persoonlijke irritatie en overspel op de achtergrond. Hierbij is Johan de wat naïeve en seksueel onervaren aanwezige die regelmatig uitspraken doet waarmee niemand weg weet. Is deze grijze muis een gek? Daar lijkt het op, want hij is



direct betrokken bij de dood van een van de jonge vrouwen in de groep. Hoewel op de omslag staat dat Johan een moord pleegt, blijft dat in het boek een open vraag; de rechter spreekt hem vrij van de beschuldiging van moord. Hij heeft regelmatig ontmoetingen en gesprekken met de gestorven vrouw en met God en maakt daarin een randpsychotische indruk. Aan het einde van het boek loopt Johan hand in hand met de gestorven vrouw de zee in.

Ik kan niet zeggen dat ik dit veel geprezen werk een aanbeveling vind voor de wiskundestudie of zelfs maar een interessant boek. Het staat vol raadselachtige en quasi-diepzinnige

opmerkingen, terwijl geen van de beschreven karakters echt leeft. Dat geldt trouwens wel meer voor boeken van Nederlandse literatoren: knap schrijfwerk maar een gedepersonaliseerde beschrijving van mensen.

Herontdekking van de wiskunde

Er is eerder een fase geweest waarin wiskunde een rol speelde in de literatuur, namelijk in het Wenen van de eerste tientallen jaren na 1900. Karl Sigmund [13] heeft daar een aardig overzicht van gegeven. Hoe komt het dat opnieuw een soort minihype van wiskunde in de literatuur is ontstaan?

Zoals bij alle hype's is zo'n vraag moeilijk te beantwoorden. In mijn omgeving heb ik soms gemerkt dat mensen zich geïntrigeerd afvragen hoe wiskundigen bezig zijn met hun werk. Men stelt zich dan voor dat dit in volledig isolement gebeurt (is maar zeer ten dele zo), dat het meestal om heel klassieke problemen gaat (gelukkig meestal niet) en dat het veel nut heeft in andere wetenschappen (meestal ook niet, helaas). Weinig mensen hebben echter een idee van het enthousiasme en de gedrevenheid bij wiskundig werk. Kennelijk hebben sommige schrijvers hier een nieuw onderwerp ontdekt naast meer bekende zoals kunstenaars en ontdekkingsreizigers. Wellicht is dit ook een nevenproduct van de biografieën van bekende wiskundigen die de laatste jaren verschenen zijn.

Voor al in de romans van Schogt, Doxiades en Woolfe spelen de opwinding die wiskundig onderzoek geeft en het hierdoor gegrepen zijn een hoofdrol. Het is heel opmerkelijk dat deze zaken van 'la vie intérieure' van wiskundigen tot de literaire wereld zijn doorgedrongen. Is het beschrijven van deze eigenschappen wel



wenselijk en staan we niet een beetje te kijk?

Ja, ik denk dat zulke beschrijvingen wenselijk zijn, zelfs als dit in een mager boek als dat van Gerrit Krol gebeurt. Het plaatst wiskundigen op het wereldtoneel, het wekt algemene interesse en het geeft de publiciteit die onze beroepsgroep hard nodig heeft.

Dankwoord

Mijn collega's Wilberd van der Kallen, Jan Strooker en Henk van der Vorst dank ik voor hun opmerkingen en de boeken die ze me hebben geleend.

Referenties

- 1 Steve Batterson (2000), *Stephen Smale*, AMS, Boston (besproken in NAW, december 2000).
- 2 Anjet Daanje (1998), *De Blinde Fotograaf*, Kwadraat, Utrecht.
- 3 Apostolos Doxiadis (2000), *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture*, Bloomsbury USA (besproken in Notices AMS, vol. 47, 1274–1275, november 2000). Nederlandse vertaling: *Oom Petros en het vermoeden van Goldbach*, De Bezige Bij (besproken in NAW, maart 2001).
- 4 David Gelernter (1997), *Drawing life, surviving the Unabomber*, The Free Press (Simon and Schuster), New York.
- 5 Dennis Guedj (2000), *Le Théorème du perroquet*, Editions du Seuil (Points). Nederlandse vertaling: *De stelling van de papegaai*, Ambo/Anthos uitgevers (besproken in NAW, maart 2000).
- 6 Paul Hoffman (1998), *The man who loved only numbers*, Fourth Estate, London.
- 7 Dieter Jörgensen (2000), *De Rekenmeester*, BZZTôH, Den Haag (besproken in NAW, september 2000 en in Pythagoras, oktober 2000).
- 8 Gerrit Krol (2000), *De vitalist*, Querido, Amsterdam.
- 9 Norman Macrae (1999), *John von Neumann*, AMS, Boston.
- 10 Vladimir Maz'ya and Tatyana Shaposhnikova (1998), *Jacques Hadamard, a universal mathematician*, AMS/London Mathematical Society.
- 11 Sylvia Nasar (2000), *Een schitterend brein*, De Bezige Bij, Amsterdam (vertaling van 'A beautiful mind', Simon and Schuster, New York, 2000; besproken in NAW, september 2000).
- 12 Philibert Schogt (1998), *De wilde getallen*, De Arbeiderspers, Amsterdam (in het Engels vertaald als: *The Wild Numbers*, Four Walls Eight Windows', 2000; besproken in Notices AMS, vol. 47, 1274–1275, november 2000).
- 13 Karl Sigmund (2000), *Musil, Perutz, Bruch, Les mathématiques des écrivains viennois*, Gazette Mathématique, november 2000.
- 14 Sue Woolfe (1997), *Wiskundige moeders*, Vassalucci, Amsterdam (vertaling van 'Leaning towards infinity', Vintage, Random-House Australia, 1996).
- 15 David Zindell (1996), *The Wild*, HarperCollins, London.
- 16 David Zindell (1998), *War in Heaven*, Bantam Books, New York.

Wieb Bosma

Katholieke Universiteit Nijmegen, Subfaculteit Wiskunde
Toernooiveld, 6525 ED Nijmegen
bosma@sci.kun.nl

Boekbespreking Wis- en natuurlyriek

De kloof gedicht

De digitale kloof scheidt menig baby-boomer van zijn op de digitale snelweg voortrazende kinderen. De generatiekloof scheidt hem van zijn ouders, die inmiddels via het seniorenweb digitaal dreigen in te voegen. De kloof die Drs. P en Marjolein Kool beloven te dichten met hun recent verschenen Wis- en natuurlyriek (met chemisch supplement) scheidt geen generaties, maar twee culturen.

Het begrip 'The Two Cultures' werd in 1956 door wetenschapper 'by training' en schrijver 'by vocation' C.P. Snow voor het eerst gebruikt om de verschillende werelden van alfa's en bèta's aan te duiden. Het begrip werd beroemd na zijn *Rede Lecture* van 1959 in Cambridge onder de titel *The two cultures and the scientific revolution*. Snow merkt in die nog steeds lezenswaardige redevoering een aantal kenmerkende asymmetrieën op tussen de wereld der natuurwetenschappen en die der kunsten. Zoals de sindsdien vaak opgemerkte tendens van culturele smaakmakers om zich voor te laten staan op hun onbegrip voor alles wat zweemt naar exacte wetenschap en naar wiskunde in het bijzonder, terwijl omgekeerd bijna elke bèta met plezier zijn favoriete schrijvers opsomt of meepraat over moderne kunst. En dan het dedain waarmee de alfa's het begrip cultuur hebben gemonopoliseerd.

Trots

Overigens doet de rede op belangrijke punten gedateerd aan. De wetenschappelijke revolutie uit de titel is inmiddels ingehaald door de digitale revolutie, het vooruitgangsoptimisme is na het doemdenken aan een nieuwe opgang toe en de nadruk op de tegenstelling tussen de culturen van Oostblok en Westen is achterhaald door een politieke revolutie.

Toch is de kloof tussen alfa en bèta er alleen maar groter op geworden. Nog vrij recent verscheen er in Nederland een bundel opstellen over onder de titel *De trots van alfa en bèta*. In het inleidende essay vat Gerrit Krol een aantal punten kernachtig samen. "De wereld, voor de alfa, dat is de geest, met als filiaal: het gevoel. [...] 'Waar gebeurd' is in de kunst nooit een argument. Integendeel, het is haar taak een

nieuwe werkelijkheid te scheppen."

Enerzijds toont dit het contrast met de bètawereld, bestaande uit "de dingen die we weten en kunnen tellen" (Gerrit Krol), anderzijds laat het zien dat binnen de bètawereld de wiskunde een bijzondere plaats inneemt, die alfatrekjes heeft: ook de wiskunde schept haar eigen wereld, die zich in tegenstelling tot de natuurwetenschap weinig aantrekt van de buitenwereld. In haar abstractie, met haar eigen taal, en in haar pogen met zo weinig mogelijk omhaal van woorden de essentie te vatten heeft de wiskunde vooral veel gemeen met de poëzie — het is al vaker opgemerkt.

Poëzie

Als logisch gevolg van de kloof dringt tot de Nederlandse poëzie niet veel door van de exacte wetenschappen. Er zijn wel uitzonderingen, zoals in het werk van Krol zelf en in dat van Leo Vroman. Zoals er in romans een opleving van interesse in de wiskundige wereld waarneembaar lijkt (zie elders in dit nummer) moeten we misschien ook het opduiken van fractals in een gedicht in de laatste bundel van Esther Jansma als een voorzichtig begin van een trend duiden:

*In al haar onderdelen is een roos
roos, in ieder blad is zij volledig
zoals de omtrek van dit continent
in elke millimeter steeds de hele kust*

Al klinkt dit voor wiskundigen clichématig, het maakt recensenten nerveus en sommigen ontgaat de verwijzingen verderop in de bundel *Vanaf nu is zij geen roos maar Julia*.

Veerman

In zijn essay verwijst Krol ook naar Dijksterhuis, die de kloof tussen de faculteiten gevuld zag met wild stromend water. "Stroomopwaarts gaande zult gij echter een veer aantreffen dat u naar de overzijde kan brengen. Het veer heet geschiedenis der exacte wetenschappen en ik

zal mij gelukkig prijzen, wanneer ik uw veerman mag zijn.” Maar Dijksterhuis is dood en zijn magistrale *Mechanisering van het wereldbeeld* lijkt bijgezet in het Scheepvaartmuseum. Wie kan de rol van veerman, met de poëzie als vehikel, beter overnemen dan Drs. P, die al in 1973 beroemdheid verwierf door onnavolgbaar zijn *Veerpont* op de plaat ten gehore te brengen:

*En als de pont dan weer zijn weg zoekt door het ruime sop
Dan komen er werktuiglijk gedachten bij me op
Zo denk ik dikwijls over het geheim van het bestaan
En dat ik op de wereld ben om heen en weer te gaan
Wij zien hier voor ons een onverbiddelijke wet
Want ik als ik niet de veerman was, dan was een ander het*

Die veerpont ging ten slotte zelfs aan populariteit ten onder: *Heen en weer/en weer heen, De boot is vol mensen, stapt u toch niet meer in!*

Wis- en natuurlyriek

In *Wis- en natuurlyriek* doen Drs. P (pseudoniem van Heinz Polzer, geboren in 1919) en Marjolein Kool hun poging alfa's en bèta's te lokken, zoals zij het zelf omschrijven, met “onderwerpen uit de exacte vakken gehuld in vormvaste verzen”. Honderdtien van zulke verzen (en nog acht in het chemisch supplement), die niet alleen qua onderwerp en

vormvastheid afwijken van de meeste moderne poëzie. Breedsprakigheid en een soms wat archaïsche woordkeus zijn karakteristiek voor het *light verse* van Drs. P, die ongeveer tweederde van de productie voor zijn rekening nam. In de voetnoten wordt meer schoolmeesterachtig toegelicht welk begrip in het gedicht aan de orde komt.

Marjolein Kool wijdt een van haar aardigste gedichten aan het stereotype beeld dat de alfa van de bèta heeft. In *Tragedie* komt de alfa smachtend van dorst een bèta tegen en verzucht:

*‘Water, o, een druppel water,’
riep de alfa zwaar geplaagd.
Maar de bèta, echt een prater,
zei: ‘Wat leuk dat u dat vraagt.*

*Elke druppel, waarvan akte,
zorgt dat hij naar bolvorm streeft.
Daar een bol bij oppervlakte
steeds de grootste inhoud geeft.*

De bèta drijft de alfa, die inmiddels smeekt om een emmer water, tot wanhoop:

*‘Emmer, zei u? Da's een kegel
met een afgeknotte top
en drie kegels, meldt de regel
vullen hun cilinder op.*

Het eind van het liedje is:

*Daarop viel hij dood ter aarde.
Ook de alfaman ontsliep,
want dit bleek de druppel waar de
emmer dus van overliep.*

Kool legt een voorliefde voor woordgrappen aan de dag, het uit de context halen van wiskundige begrippen (‘primitieve’, ‘relatie’, ‘afronden’, ‘merkwaardig product’; de moeder van de kroonprins is ‘matrix’) en in het algemeen voor een grap als duidelijke pointe van een gedicht. Het gedicht *Uitgerekend* bijvoorbeeld, dat voluit luidt:

*‘Tijd is geld’ zo sprak de ober
en dat was voor ons een strop,
want hij telde toen de datum
vlotjes bij de nota op*

Sommige van die grappen hebben een aanzienlijke baard, zoals die van de jager die één keer net te hoog en één keer net te laag toch ‘gemiddeld raak’ schoot. Dat ze te verdragen zijn is te danken aan de vlekkeloze, vormvaste uitvoering, maar je krijgt wel het gevoel dat het Sinterklaasgedicht om de hoek ligt.

Virtuoos

Taalvirtuositeit is het handelsmerk van Drs. P. Hij is het ook die de exotischer versvormen hanteert zoals de ‘clerihew’:

*Niels Bohr
Kwam nucleaire wetenswaardigheden op het spoor
en als enthousiast en openhartig type
Publiceerde hij zijn correspondentieprincipe.*



Onbegrip

*De roepstem van zijn vrouw, reeds op de trap
‘Wo bleibst du denn?’ (Het eten stond al klaar)
Hè altijd weer dat oponthoud, verdomme ...*

*‘Ich komme’, sprak hij wrevelig tot haar
Die binnentrad. ‘Sei ruhig schon — ich komme’
En zij, geïntrigeerd: ‘Was machst du doch?’*

*Het was zijn sedertdien beroemde Kromme
Die Carl F. Gauss liet zien; u kent die toch?
Een ware mijlpaal in de wetenschap*

*‘Ganz reizend’, zei ze zonder veel mimiek
Ach ja, wat wist zij ook van statistiek?*

Normale verdeling

*Er werd op het WK-toernooi
Weer zeer normaal gespeeld
De vrije trappen waren mooi
En zeer normaal verdeeld*

*Want 95%
bleef doelloos, uur na uur
zo’n 68, da’s bekend,
belandde in de muur.*

*De 5 procent die overbleef
trof juist een paal of lat,
op één na die een boog beschreef,
de hoek inging en zat!*

*Men was ontroerd en stomverbaasd
en alom klonk applaus
en ieder wist, dit moet wel haast
de kromme zijn van Gauss!*

Bij wijze van voorbeeld is hier één van de vijf strofen van *Decimalen*, dat verhaalt van de ‘vreemde en ascetische’ buurman van de ik-figuur, die als obsessie het eindeloze tijdverdrijf van het berekenen van decimalen van π heeft:

*Ja, deze π (dat staat te lezen in de encyclopedie)
Is eeuwenoud en wetenschappelijk en Grieks en vol magie
Als ik zo pieker over π spreekt u wellicht over een manie
Maar zijn wij allen niet neuro-, fana-, roman- of mystici?
Een ander heeft een kolibrie, een relikwie of een fobie
Maar ik verdiep me onophoudelijk en zonder compromis
In dit unieke en verheven wonder der planimetrie
Ik zoek het antwoord op het grote raadsel π*

Je hoort Drs. P declameren als je dit leest!

Waar Kool vaak een onderwerp uit het moderne leven kiest (voetbal, of het regelmatig terugkerende verschil tussen de sexen), is Drs. P eerder politiek incorrect en refereert hij aan de klassieken. Zie bijvoorbeeld in de inzetten bovenaan deze pagina hoe beiden hetzelfde onderwerp benaderen. Alfa en bèta als broer en zus naast elkaar!

Telduivel

Ik moet toegeven dat ik aan deze recensie begon door te *tellen*, hoeveel gedichten door wie, hoeveel over wiskunde en hoeveel over natuurkunde, hoeveel sonnetten, enzovoorts. Vervolgens zocht en vond ik kleine ergernissen, zoals de voetnoten waarin wordt uitgelegd wat de Gauss-kromme dan wel is (je gaat een mop toch niet uitleggen, een gedicht toch niet verklaren in de bundel zelf?) totdat ik me realiseerde dat ik daarvóór heel veel *plezier* had beleefd aan het bladeren, lezen van een gedicht hier en het bewonderen van het metrum van een bewijs daar. Heerlijk!

Die geconditioneerde hyperkritische reflex, Hans Magnus Enzensberger zou mij daar wel vanaf willen helpen. In zijn tweetalig verschenen essay *Zugbrücke außer Betrieb/Drawbridge up* (naar zijn voordracht voor het laatste International Congress of Mathematicians) ge-

bruikt Enzensberger de slotgracht in plaats van de kloof als metafoor voor de verwijdering tussen de wiskundige cultuur en cultuur in wijdere zin. Voor hem bestaat het neerlaten van de ophaalbrug eruit dat de wiskundige zijn uit beroepsdeformatie onstane angst om met de leek over wiskunde te praten moet laten varen en bereid moet zijn ‘een beetje te liegen’ ten behoeve van de popularisatie.

Hij signaleert de merkwaardige paradox van desinteresse in de principes waarop de moderne technologie is gebaseerd versus toenemende afhankelijkheid ervan. Betreurt hij die desinteresse vooral omdat de cultuur zichzelf beperkt door uitsluiting van het exacte (dit noemt hij ‘culturele castratie’), voor wiskundigen begint de desinteresse langzamerhand bestaansbedreigende vormen aan te nemen. Maar wanneer iemand als Enzensberger de moeite neemt een (veel geprezen) kinderboek rondom wiskunde te schrijven, en om zich als leek te verdiepen in klassengetalproblemen en de classificatie van eindige simpele groepen hoeven we wellicht niet te wanhopen.

Ik zal beginnen mijn colleges met poëzie te larderen! 

Drs. P en Marjolein Kool, Wis- en natuurlyriek. Met chemisch supplement, Amsterdam: Nijgh & van Ditmar, 2000. prijs NLG 29,90. ISBN 90 388 1401 1.

Boekbesprekingen

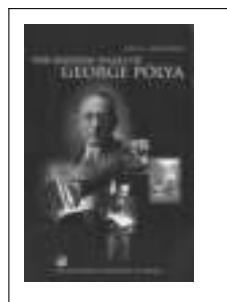
| Book Reviews

Alle in de vijfde serie van het NAW verschenen boekbesprekingen zijn te vinden op onze webpagina.

Tevens staat daar een lijst met ter recensie aangeboden congresverslagen en eventueel andere boeken.

Indien u er prijs op stelt een van deze verslagen te bespreken, meld dit dan binnen een maand na verschijnen van dit nummer (bij voorkeur per e-mail) op onderstaand adres.

Eindredactie: Jaap Top
Redactieadres: Boekbesprekingen WG
Instituut voor wiskunde en informatica
Postbus 800, 9700 AV Groningen
Webpagina: <http://www.math.rug.nl/revwg/>
E-mail: revwg@math.rug.nl



G.L. Alexanderson
The random walks of George Pólya
Washington, DC: M.A.A., 2000
303 p., prijs \$ 29.95
ISBN 0-88385-528-3

This book describes the life and work and some of the associates (such as Fejér, Hardy, Hurwitz) of the Hungarian mathematician George Pólya (1887-1985). The author of this book, a mathematician, in his student days (some thirty years ago) got to know Pólya and has been a friend since.

Pólya enjoyed walking and never obtained a driver's license (as is consistent with titles such as *Zahlentheoretisches und Wahrscheinlichkeitstheoretisches über die Sichtweite im Walde* and *Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung bezüglich die Irrfahrt im Strassennetz* on his publication list). Once he was strolling in a park and his path crossed with a man and his fiancée. This happened again and again and Pólya was embarrassed and worried that the couple might conclude that he was somehow arranging these encounters. This made him wonder how likely it was that walking randomly through paths in the woods, one would encounter others similarly engaged. He proved the following amazing result. Consider a d -dimensional lattice with mutually perpendicular lines connecting points with integer coordinates. At each vertex we choose with probability $1/2d$ an edge to move along. Then in a one- or two-dimensional lattice, the moving point must return to its starting position given sufficient time. But this need not happen in any higher dimension. It was Pólya who coined the term 'random walk' (and 'central limit theorem').

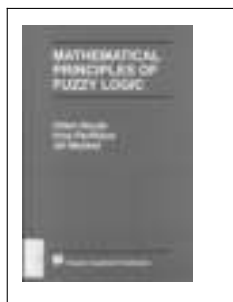
Pólya spent substantial amounts of time during his career in various places (Budapest, Vienna, Göttingen, Paris, Zürich, Princeton, Palo Alto CA). The book follows Pólya on this 'random walk' and contains many useful appendices: a list of his works, several essays (reprinted from a 1987 obituary by the author and L.H. Lange) by various experts on his mathematical contributions (mainly to analysis, inequalities, mathematical physics, combinatorics, probability), a list of 68 mathematical items to which Pólya's name has become attached, recipients of honours given in his name, reprints of four short easy Pólya articles, and brief biographies of mathematicians mentioned in the book. (I was surprised to see Emil Artin described there as a ring theorist!) Furthermore, the book contains many pictures and illustrations.

Already very early on, Pólya had a great interest in *how* mathematicians came to their discoveries and he spent a lot of time thinking about problem solving strategies. This gave rise to several books of which *How to solve it* (translated into 21 languages) is the most famous. Other classics his name is associated with are *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, two parts, written with G. Szegő and *Inequalities* with Hardy and Littlewood. Pólya was someone who spent a great deal of effort in making the line of reasoning as simple and clear as possible and this is just one reason why he was popular as a coauthor.

The biographical sketches and anecdotes that form the body of this book give a vivid glimpse of the life, personality, associates and mathematical contributions of Pólya. I enjoyed reading this

book, it also made me look up some of his papers and I expect many other readers, irrespective of their mathematical specialisation, to have the same inclination.

P. Moree



V. Novak, I. Perfilieva et al.
Mathematical Principles of Fuzzy Logic

Dordrecht: Kluwer, 1999
320 p., prijs NLG 315,-
ISBN 0-7923-8595-0

Fuzzy logic heeft twee aspecten. Enerzijds is zij een hulpmiddel om taalkundige begrippen en logische afleidingen te representeren. Als zodanig wordt fuzzy logic het meest gebruikt, bijvoorbeeld door linguïsten, maar vooral door besliskundigen en regeltechnici, die menselijke kennis van processen vertalen naar fuzzy logic regels. Anderzijds is fuzzy logic een logische, algebraïsche structuur gebaseerd op fuzzy sets. Fuzzy sets zijn feitelijk betrekkelijk eenvoudige wiskundige constructies. Als zodanig vormt fuzzy logic het onderzoeksgebied van een internationaal betrekkelijk overzichtelijke groep onderzoekers, waarvan de meesten al enkele tientallen jaren op dit vakgebied werken. De auteurs, vooral Novak, behoren tot deze groep.

Dit boek is geschreven voor studenten en onderzoekers met interesse voor fuzzy logic en voor mathematische logica en voor algebra (de laatste twee gaan meestal samen), die met begrippen als tralie, consistentie, volledigheid, compactheid, Skolem, filters, ultraproducten, DNF en CNF en dergelijke weten om te gaan en die interesse hebben voor goede, stevige bewijzen. In feite is het boek een uitbreiding van de klassieke logica naar fuzzy logic, waarbij zoveel mogelijk lemma's en theorema's uit de conventionele theorie aangepast en uitgebreid zijn voor de fuzzy theorie.

Het boek bestaat uit zeven hoofdstukken en een kort achteerste hoofdstuk met geschiedkundige opmerkingen. De eerste vijf hoofdstukken behandelen 'fuzzy logic in narrow sense'. Feitelijk gaan deze hoofdstukken over een Boolese algebra waarvan de verbindingen gradueel zijn en de knopen hard, een Lukawiewicz algebra; de knopen die de fuzzy sets representeren spelen dus feitelijk geen rol van betekenis hier. Na een inleiding in fuzzy sets en operatoren, en een inleiding in algebraïsche structuren voor logica volgt een uitvoerige lijst met definities, lemma's en theorema's, die eindigt met het hoofdresultaat, het volledigheidstheorema (hoofdstuk 4). De volgorde van de lemma's en theorema's komt sterk overeen met die uit de meeste logica leerboeken. Hoofdstuk 5 breidt enkele resultaten uit voor de fuzzy predicaatlogica en laat zien hoe normaalvormen kunnen worden gebruikt.

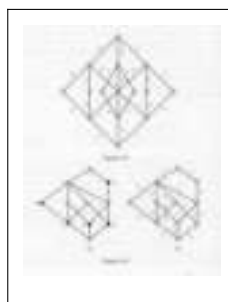
Voor mij persoonlijk is hoofdstuk 6 het meest interessant omdat dit 'fuzzy logic in broader sense' met fuzzy sets en hedges (adjectieven) en functies en relaties behandelt, dus zeggend de knopen uit de bovengenoemde algebra opent en er een betekenis aan geeft. Ik ben van mening dat deze betekenis invloed moet hebben op de algebra en heb daarover in het verleden heel wat keren met V. Novak gediscussieerd. Hij is daar voorzichtiger mee en besluit ook in dit boek dichter bij de klassieke logica te blijven, daarvan uitgaand presenteert hij enkele interessante theorema's

en goede voorbeelden. Helaas zijn voorbeelden vrijwel alleen in dit hoofdstuk te vinden.

Het laatste hoofdstuk (van J. Mockor) is zeer abstract en gaat achtereenvolgens uit van Heyting- en MV-algebra's en bijbehorende categorieën van die in verband met het gebruik van Lukawiewicz-operatoren moeten worden aangepast. Grondige kennis van Heyting-algebra's en zogenaamde topoi is een absolute vereiste voor een goed begrip van dit hoofdstuk. De resultaten in dit hoofdstuk zijn niet baanbrekend en behoren mijns inziens meer thuis in een paper dan in dit boek.

Samenvattend ben ik van mening dat dit een goed geschreven en diepgaand boek is, een must voor ieder die op dit vakgebied werkt en een aanrader voor hen die interesse hebben voor logica in combinatie met fuzzy sets.

J. Hellendoorn



M. Stern
Semimodular Lattices. Theory and Applications

(*Encyclopedia of mathematics and its applications*; 73)
Cambridge: Cambridge University Press, 1999
370 p., prijs £55,-
ISBN 0-521-46105-7

Mathematics is the art of drawing logical conclusions from certain assumptions (where 'certain' may well be understood in a double meaning). The assumptions are usually arrived at by way of abstracting properties of objects of interest in the hope of getting to their essence and, ideally, attaining two goals: an appropriate model of the essential nature of an object under study and an understanding of all the mechanisms that govern all objects sharing those abstract properties.

Lattices arise very naturally in the analysis of general contexts that relate 'objects' and 'properties'. A lattice is then the collection of 'concepts' with respect to a given context, ordered by the notion of 'subconcepts' et cetera (see, for example, B. Ganter and R. Wille, *Formal Concept Analysis*, Springer, 1999). One of the best-known examples of a lattice is the collection of subspaces of a given vector space.

Once lattices are defined as abstract structures, one can study them in a purely algebraic manner as (partially) ordered sets L where any two elements $x, y \in L$ have a unique minimal upper bound $x \vee y \in L$ and a unique maximal lower bound $x \wedge y \in L$, the latter representing binary operations on L . This is the approach the present book takes.

A lattice L may or may not admit an integer valued rank function r satisfying the following abstraction of the dimension function of a vector space

$$r(x \vee y) + r(x \wedge y) \leq r(x) + r(y).$$

The book explores the structure of lattices for which the existence of such a rank function is the essential property. Such lattices are called *semimodular*. Semimodularity can be defined in more general terms; the present book, however, mostly deals with lattices with semimodular rank functions.

The reader should take the 'applications' the title of the book promises with a grain of salt. Rather than showing how problems from other fields might be solved if they are identified as

semimodular and analysed accordingly, the author mainly focuses on the mathematical problems within the abstract semimodular model.

Stern's book is based on his earlier book (from 1991) on the same subject. It is very clearly and carefully written and presents the state-of-the-art of the general theory of semimodular lattices. Stern tries to be as complete as possible also with respect to the inclusion of proofs. Results that rely on other mathematical theories (such as topology for fixed-point theory) or are too specialized (for instance, covering graphs) are only outlined with comprehensive references to the literature.

Although semimodular lattices are also discussed from a combinatorial point of view (exchange properties and greedy algorithms, et cetera), the reader should not expect a comprehensive treatment of matroids, a topic that has grown into a vast body of research results by itself. Moreover, the area of combinatorial optimization, where the related notion of 'submodularity' has proved very useful in the analysis of algorithms, is not covered. Nevertheless, Stern's book is an indispensable reference book and companion for every researcher in the field. It may also serve as a basis for a course on the algebraic and combinatorial theory of semimodular lattices.

U. Faigle

M. Kracht

Tools and Techniques in Modal Logic

(*Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*; 142)

Amsterdam: Elsevier, 1999

559 p., prijs NLG 250,-

ISBN 0-444-50055-3

Modale logica is ontstaan als een tak van de logica waarin filosofen de concepten 'noodzakelijkheid' en 'mogelijkheid' analyseerden met behulp van modale operatoren die aan een klassieke logische taal werden toegevoegd. Gaandeweg is de modale logica ook gebruikt om andere noties te modelleren, zoals tijd, kennis, programma-executie of formele bewijsbaarheid; modale formalismes vinden tegenwoordig toepassingen in heel verschillende disciplines, van economie tot taalkunde en informatica. Deze verbreding heeft geleid tot een enorme diversiteit aan systemen die de naam 'modale logica' dragen; het feit dat wij nog over 'modale logica' als zodanig spreken is grotendeels te danken aan de unificerende kracht van de wiskundige theorie van de modale logica. Het is dus van belang dat deze wiskundige theorie, die over de jaren een behoorlijke kracht en rijpheid heeft bereikt, op een samenhangende wijze toegankelijk is. Kracht's boek is bedoeld als tekstboek en overzichtswerk voor studenten die met modale logica in contact zijn gekomen en het dieper willen bestuderen.

Laat ik eerst een beknopte inhoudsbeschrijving van het boek geven. Het bestaat uit drie delen. Deel 1, *Fundamentals*, geeft een gedegen inleiding in de theorie van de modale logica. De schrijver behandelt eerst alle benodigde achtergrondkennis uit de universele algebra, de logica en de theoretische informatica, om daarna de fundamentele concepten uit de modale logica te introduceren. In het tweede en belangrijkste deel van het boek, *The General Theory of Modal Logic* komt eerst de modale dualiteitstheorie aan de orde, die gebaseerd is op Stone's dualiteit voor Boolese algebra's. Vervolgens behandelt de auteur de theorie rond correspondentie en canoniciteit, en reducties van polymodale tot unimodale logi-

ca; dit deel besluit met een studie van het tralie van modale logica's. In het laatste deel van het boek, *Case Studies*, gaat de auteur nader in op een aantal specifieke onderwerpen; we noemen hier het tralie van uitbreidingen van de transitieve modale logica **K4** en de dynamische logica (een modaal formalisme ontworpen om te redeneren over programma's en processen).

In het algemeen doet de inhoud recht aan de titel door een goed en bijdetijds overzicht te bieden van de bestaande 'tools and techniques' op het vakgebied. Een boek van deze omvang kan geen volledig overzicht van de modale logica geven; naar sommige onderwerpen (zoals de modale bewijstheorie, de modale eerste orde logica, of de theorie rond de fundamentele notie van bisimulatie) zal de lezer dan ook vergeefs zoeken. Op andere terreinen komt het boek een heel eind; met name de stukken over de verbanden tussen algebra en logica en over het tralie van modale logica's bieden veel informatie die eerder alleen verspreid over artikelen te vinden was.

Een zwakke kant van het boek betreft de toegankelijkheid. Mijn grootste bezwaren betreffen de stijl, die niet uitblinkt in helderheid, beknoptheid of nauwkeurigheid; en de structuur, waarin hoofd- en bijzaken onvoldoende worden onderscheiden. Maar voor een geïnteresseerde lezer die over deze bezwaren heen kan stappen ontsluit het boek een schat aan informatie over de wiskundige theorie van de modale logica.

Y. Venema



P. Fletcher

Truth, Proof and Infinity, A Theory of Constructions and Constructive Reasoning

Dordrecht: Kluwer, 1998

469 p., prijs NLG 290,-

ISBN 0-7923-5262-9

De auteur wil een voor de intuïtionistische wiskundige overtuigende rechtvaardiging geven van de formele eerste-orde-theorie van de natuurlijke getallen, de theorie die intuïtionistische logica gebruikt en verder berust op de axioma's van Peano. Hij beweert dat hij er in geslaagd is op te helderen wat de(!) bedoelde interpretatie van deze formele theorie is. Men zou kunnen denken dat zijn onderneming verwant is aan de door Dedekind en Frege ondernomen en door henzelf als mislukt erkende pogingen om het principe van volledige inductie een verzamelingstheoretisch fundament te geven. Dat is echter niet het geval. Het principe van volledige inductie en de daaraan ten grondslag liggende intuïtieve opbouw van de rij der natuurlijke getallen, ofschoon wezenlijk niet tot iets fundamenteels te reduceren, worden door de intuïtionistische wiskundige zonder probleem aanvaard. Iemand die dat niet doet kan al niet begrijpen wat de formele theorie der natuurlijke getallen voor iets is, want ook de formules en de afleidingen van een formele, vooralsnog betekenisloze theorie worden inductief opgebouwd. De moeilijkheid schuilt echter in de betekenis van de intuïtionistische voegtekens en quantificatoren. Het is bekend dat Brouwer krachtig waarschuwde tegen het blind varen op logische regels: je zou ongemerkt van een gebied waar zij van toepassing zijn terecht kunnen komen in een gebied waar zij niet meer gelden, en dan krijg je fouten en strijdigheden. Toen Hey-

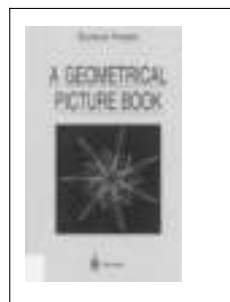
ting toch probeerde de regels van een intuïtionistische logica te formuleren, was dus wel een verklaring nodig waarom je die regels zou mogen hanteren. Zo'n verklaring werd en wordt gezocht in de bedoelde betekenis van de logische symbolen. Men zegt: we maken duidelijk wat de betekenis is van bijvoorbeeld een implicatie $A \rightarrow B$ door aan te geven waaruit een bewijs van $A \rightarrow B$ (in principe) bestaat. Een bewijs van $A \rightarrow B$ is een functie die aan elk bewijs van A een bewijs van B toevoegt. Kunnen we met deze verklaring leven? G. Gentzen vond van niet: de uitdrukking "elk bewijs van A " geeft de verklaring een *impredicatief* karakter: deze uitleg hoe je aan een bewijs van $A \rightarrow B$ moet komen veronderstelt dat er al een zinvol geheel van alle mogelijke bewijzen beschikbaar is. Gentzen vond het daarom nodig te zoeken naar een bewijs dat de formele theorie der natuurlijke getallen niet strijdig is. Later hebben Kreisel en Goodman (zonder volledig succes) geprobeerd een beschrijving te geven van het vreemde universum van alle mogelijke constructies/bewijzen waarin sommige constructies werken als functies gedefiniëerd op het hele universum. Het zal geen verbazing wekken dat het geven van zo'n beschrijving — net als het geven van een beschrijving van het verzamelingstheoretisch universum — moeilijk en gevaarlijk is: de paradoxen liggen op de loer. Evenals Gentzen vindt de auteur dat Heytings verklaringen onvoldoende zijn. Hij meent echter dat hij er — in tegenstelling tot Kreisel en Goodman — wel in geslaagd is een goede theorie van constructies te maken. Het is een hele geschiedenis geworden. In tien moeilijke stappen komt hij van de termen-taal (elke term duidt een constructie aan) tot de formele rekenkunde. Het universum bestaat uit niets dan constructies, en sommige constructies zijn bewijzen. De auteur houdt rekening met overwegingen die voortvloeien uit de onvolledigheidsstelling van Gödel en bouwt daarom reflectieprincipes in die soms te sterk zijn. Daardoor kan het gebeuren dat een constructie zich aandient als een bewijs maar het uiteindelijk toch niet is, net zo als een Turing-machine als het ware door de mand valt als blijkt dat hij slechts partiëel gedefiniëerd is. Ten slotte blijkt elke afleiding in de formele rekenkunde een constructie te leveren die voldoet aan de verwachting gewekt door de bewezen formule.

Het is opvallend dat de auteur als einddoel ziet: een interpretatie van de *klassieke* rekenkunde. Hij doet daarbij een beroep op de bekende dubbele-negatie-vertaling van de klassieke theorie in de intuïtionistische theorie, die echter zeker niet canoniek is. Men kan niet volhouden dat de klassieke rekenkunde een vaste bedoelde intuïtionistische interpretatie heeft. De auteur laat zien dat zijn resultaten kunnen worden uitgebreid tot en met de tweede-orde klassieke rekenkunde, zeg maar, de klassieke analyse.

Ik vind het moeilijk de theorie van de auteur goed te begrijpen. Ik meen (en hoop) dat de uitleg van Heyting misschien wel voldoende is en niet vereist dat we een overzicht hebben van alle mogelijke constructies en dat een partiëel begrip van de notie 'constructie' volstaat. Ik vind het jammer dat de auteur zich niet heeft beperkt tot een zo nauwkeurig en zo eenvoudig mogelijke beschrijving van zijn eigen resultaat, en in het voorbijgaan met alle vragen en opvattingen uit de filosofie van de wiskunde wil afrekenen, zonder de daarbij vereiste zorgvuldigheid in acht te nemen. We stoten af en toe op krasse uitspraken zoals: "Hiermee is bewezen dat de uitdrukking: 'de verzameling van alle natuurlijke getallen' niets betekent."

Het werk van de auteur verdient het bestudeerd te worden ook als we twijfel hebben over het doel dat hij ermee wil bereiken.

Zijn 'Expanded Term Language' is een functionele programmeertaal die voordelen schijnt te hebben boven andere functionele programmeertalen, zoals hij betoogt in hoofdstuk 23. *W. Veldman*



B. Polster
A geometrical picture book
 New York: Springer-Verlag, 1998
 292 p., prijs \$ 49,95
 ISBN 0-387-98437-2

Een fraai boek met mooie en vooral gevarieerde plaatjes, zoals de titel wel doet vermoeden. Denk daarbij niet aan beschrijvende meetkunde, maar veeleer aan een duidelijke en esthetisch aansprekende uitbeelding van een veelheid van combinatorische objecten in hun interne en onderlinge samenhang. Het aantal verschillende onderwerpen dat in een twintigtal hoofdstukken wordt besproken is overweldigend, evenals de respectabele lijst van 122 literatuurverwijzingen. Veel van de structuren worden ingeleid door een compact overzicht van hun axioma's, die het begrip van de daarop aansluitende tekeningen verduidelijken. De gepresenteerde afbeeldingen zijn alle met computerprogramma's vervaardigd en vormen, zoals gezegd, een gevarieerd kijkspel. Ook aan driedimensionale afbeeldingstechnieken, zoals stereogrammen en spiegelgebruik besteedt de schrijver aandacht en een centraal hoofdstuk heeft hij ingeruimd voor het bouwen van ruimtelijke modellen en uitvoeringen in kleur, bijvoorbeeld met pipe cleaners.

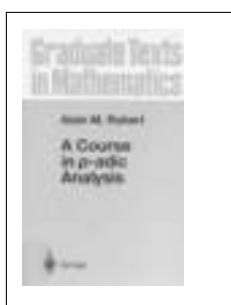
K.A. Post

A. Khrennikov
Superanalysis
 (Mathematics and its Applications; 470)
 Dordrecht: Kluwer, 1999
 347 p., prijs NLG 295,-
 ISBN 0-7923-5607-1

Het is een bekend en vaak becommentarieerd fenomeen dat de eisen aan mathematische strengheid in de theoretische natuurkunde niet hetzelfde zijn als in de wiskunde. Zo deed de bekende fysicus J. Schwinger in 1953 zijn best de differentiaalrekening te generaliseren voor het geval van functies van commuterende en anti-commuterende variabelen. Maar, zoals Andrei Khrennikov fijntjes opmerkt, dit was "on the physical level of strictness". Sinds 1953 is heel wat gebeurd aan het opkrikken van dit strictness-niveau, zoals in de door Martin geïnstigeerde ontwikkeling van een algebraïsche theorie voor commuterende en anti-commuterende coördinaten. Hoewel de strengheid hier in orde was, stond deze theorie ver af van de oorspronkelijke fysische intuïtie. Een benadering die meer in lijn was met wat Schwinger oorspronkelijk voor ogen stond werd in gang gezet door De Witt (in zijn boek *Supermanifolds*, 1984), en Rogers, Vladimirov en Volovich. Deze 'functional superanalysis', analyse van reële functies van commuterende en anti-commuterende variabelen die 'superpunten' in een 'superruimte' definiëren, is het onderwerp van

Khrennikovs boek.

Het eerste hoofdstuk geeft de definities en een inleiding, de volgende zes hoofdstukken zijn gewijd aan eigen resultaten (uit het proefschrift van de auteur, 1990). Deze hebben betrekking op de theorie van gegeneraliseerde functies, pseudodifferentiaaloperatoren, oneindig-dimensionale superanalyse en waarschijnlijkheidsrekening op een superruimte. Het laatste hoofdstuk (VIII) is gewijd aan toepassingen op de natuurkunde. Dit hoofdstuk blijft steken in een aantal suggesties, zodat de kracht van de superanalyse in de kwantumveldentheorie, waar het allemaal om begonnen was, nog niet goed duidelijk wordt. Maar als wiskundige tekst voldoet het boek zeker. Het is duidelijk en systematisch, en bovendien uitdagend: zes hoofdstukken eindigen met "Unsolved problems and possible generalizations". *D. Dieks*



Alain M. Robert
A course in p-adic analysis
(Graduate Texts in Mathematics; 198)
 New York: Springer Verlag, 2000
 427 p., prijs \$54.95
 ISBN 0-387-98669-3

De reële getallen vormen de completering van het lichaam $\mathbb{Q}$ van de rationale getallen ten opzichte van de metriek $(x, y) \mapsto |x - y|$. In plaats van $|\cdot|$ kan men andere 'waarderingen' op $\mathbb{Q}$ bekijken (afbeeldingen $|\cdot| : \mathbb{Q} \rightarrow [0, \infty)$ die voldoen aan $|x| = 0 \iff x = 0$, $|xy| = |x||y|$ en $|x + y| \leq |x| + |y|$) en completeren. Voor ieder priemgetal p is er de zogenaamde p -adische waardering $|\cdot|_p$ die vastgelegd wordt door $|p|_p = 1/p$. De stelling van Ostrowski zegt dat je hiermee essentieel alle waarderingen op $\mathbb{Q}$ te pakken hebt. Completering leidt tot het lichaam $\mathbb{Q}_p$ van de p -adische getallen. Zo gezien presenteren de lichamen $\mathbb{Q}_2, \mathbb{Q}_3, \mathbb{Q}_5, \dots$ zich als alternatieven voor $\mathbb{R}$. Er zijn echter grote contrasten met de reële theorie: de lezer kan zelf gemakkelijk bewijzen dat de driehoeksongelijkheid verscherpt kan worden tot $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$, waaruit volgt dat $\mathbb{N}$ begrensd is in $\mathbb{Q}_p$ en dat de eenheidsschijf $\{x : |x|_p \leq 1\}$ een *ring* is die niet alleen gesloten, maar ook *open* is.

De p -adische getallen werden zo'n eeuw geleden uitgevonden door Kurt Hensel. Was dit aanvankelijk een algebraïsche en getaltheoretische aangelegenheid, later werd ook de *analyse* in dit soort lichamen belangrijk, en het is dit laatste gezichtspunt dat in het boek wordt ingenomen. Men vindt dan ook allerlei onderwerpen uit eerstejaarscolleges terug, zoals continuïteit, differentieerbaarheid, de exponentiële functie en logaritme, de (p -adische) complexe getallen, machtreeksen, enzovoort, waarbij fascinerende verschillen en overeenkomsten met de klassieke theorie worden blootgelegd.

De eerste vijf hoofdstukken vormen een uitstekende eerste excursie naar de ' p -adische wereld'. Doordat slechts een rudimentaire kennis van calculus, algebra en topologie verondersteld wordt is het werk zeer geschikt als tekstboek voor inleidende cursussen. De heldere stijl, de complete bewijzen, en de vele oefeningen, maken het boek ook ideaal voor zelfstudie.

Voor de meer ingewijden bevat het boek ook grote rijkdom-

men. Zo worden lineaire en Euclidische modellen van $\mathbb{Q}_p$ gemaakt, leidende tot mooie fractal-achtige plaatjes, waarmee je de p -adische getallen kunt 'zien'. Een greep uit de onderwerpen: Hensel's Lemma, Newton-benaderingen, eenheidswortels, voortzetting van waarderingen (met een fraai origineel bewijs), convolutie, Mahlerontwikkelingen en Van Hamme's generalisatie, voortbrengende functies, Bell-polynomen, strikte differentieerbaarheid, Iwasawa-logaritme, Volkenborn-integraal, Bernoulligetallen, stelling van Clausen-von Staudt. Nieuw zijn de middelwaardestelling voor analytische functies en Diarra's constructie van een sferisch volledige uitbreiding van $\mathbb{C}_p$ met behulp van ultrafilters.

Hoofdstuk 6 behandelt de theorie van analytische functies en elementen. Dit stuk zal door veel lezers gewaardeerd worden, omdat er tot nu toe geen elementaire inleiding voorhanden was. Enkele onderwerpen: nulpunten van machtreeksen en Laurentreeksen, maximumprincipe, Weierstrassproducten, Mittag-Leffler-ontbindingen, Motzkin factorizaties, analytische elementen, stellingen van Amice-Fresnel en Christol-Robba.

In het laatste hoofdstuk 7 wordt de theorie toegepast om speciale functies te bestuderen (p -adische gammafunctie, Artin-Hasse's en Dwork's exponentiële functie) en interessante congruenties af te leiden. Ook worden sommen van Gauss en de formule van Gross-Koblitz behandeld.

Tot slot: er is een beweging gaande om de p -adische analyse toe te passen, bijvoorbeeld in de fysica (quantummechanica), de waarschijnlijkheidsrekening en de theorie van dynamische systemen. De meningen hierover zijn verdeeld; ikzelf vind het moeilijk hier een ferme positie in te nemen, alhoewel ik tot nu toe de neiging heb het nog enigszins oppervlakkig en speculatief te vinden. Maar hoe dan ook, de p -adiek op zichzelf is al boeiend genoeg en het is voor iedere analyticus de moeite waard eens te kijken wat er zoal te koop is. Dan dient zich hier een goede gelegenheid aan: erg veel tijd hoeft dit — dank zij de helderheid van dit boek — niet te kosten.

W.H. Schikhof



Huang, Yi-Zhi
Two-Dimensional Conformal Geometry and Vertex Operator Algebras
(Progress in Mathematics; 148)
 Boston: Birkhäuser-Verlag, 1997
 280 p., prijs DM 118,-
 ISBN 0-8176-3829-6

Vertex-Operator-Algebra's komen in de theoretische natuurkunde voor als algebraïsche beschrijvingen van Conforme-Velden-Theorie. Het begrip werd geïntroduceerd door Frenkel, Lepowsky en Meurman als een kleine modificatie van de term Vertex Algebra die door Borchers gegeven werd. In het huidige boek behandelt Yi-Zhi Huang naast deze algebraïsche benadering ook de meetkundige benadering in termen van Riemann oppervlakken. De axioma's van een Vertex-Operator-Algebra worden gegeven in termen van 'partial operads' van complexe machten van determinant-lijnbundels over moduli-ruimten van boloppervlakken met buizen en locale coördinaten. Deze meetkundige benadering is gebaseerd op werk van G. Segal en I. Fren-

kel. Het hoofdresultaat van het boek wordt gegeven in Hoofdstuk 5. Daar toont de auteur aan dat de categorie van meetkundig-gedefinieerde Vertex-Operator-Algebra's van zekere rang gelijk is aan de categorie van algebraïsch-gedefinieerde Vertex-Operator-Algebra's van dezelfde rang. Een belangrijk begrip dat leidt tot dit resultaat is het aan elkaar plakken van deze boloppervlakken met buizen (in het boek wordt de Engelse term 'sewing' gebruikt). Dit blijkt bijvoorbeeld al uit de titels van Hoofdstuk 2, 3 en 4: 'Algebraic study of the sewing operation', 'geometric study of the sewing operation' en 'realization of the sewing identities'. In Hoofdstuk 6 wordt de connectie tussen de moduli-ruimte en de 'partial operads' uitgelegd. Het laatste hoofdstuk beschrijft in het kort de zogenaamde Vertex-Associatieve-Algebra's en Huang toont hier aan dat dat de categorie van deze algebra's met centrale lading c gelijk is aan de categorie van meetkundige Vertex-Operator-Algebra's met dezelfde centrale lading.

Omdat een aantal begrippen, zoals bijvoorbeeld 'operad', 'partial operad' en determinant lijnbundel in 4 appendices van in totaal 83 pagina's grondig besproken wordt, is het boek zonder al te veel voorkennis te lezen. Dit betekent echter niet dat het daarom ook een makkelijk boek is. Hoewel ik toch redelijk op de hoogte ben met de theorie van de Vertex-Algebra's, ben ik bij de bestudering van dit boek de draad een paar keer kwijt geraakt. Dit gaf mij een onbevredigd gevoel. Daarom concludeer ik dat het boek interessant is voor onderzoekers op dit vakgebied, omdat het de algebraïsche en meetkundige benaderingen van de Conforme-Velden-Theorie verenigt, echter, ik vind het helaas niet geschikt als leerboek bij een doctoraalcollege of studentenseminarium in de wiskunde.

J. van de Leur

in de algoritmen-index verkeerd zijn en een simpele cryptografische decodering niet voor de hand ligt. Dit doet echter niets af aan het feit dat vele stukken van dit boek met genoegen kunnen worden gelezen. Ofschoon echt nieuwe onderwerpen hier niet aan de orde komen, kan iedereen die interesse heeft in dit specialisme worden aangeraden dit boek toch eens ter hand te nemen.

T.H.M. Smits

D. Eisenbud and J. Harris

The geometry of schemes

(Graduate Texts in Mathematics; 197)

New York: Springer Verlag, 1999

294 p., prijs DM 52,-

ISBN 0-387-98638-5

A great subject and expert authors! The notion of a scheme was conceived by Grothendieck in order to give a common foundation to algebraic geometry and number theory. Examples of schemes are algebraic varieties and (spectra of) rings of integers in number fields. The topology of a scheme is usually not Hausdorff. A scheme is locally affine; as a set it locally consists of the prime ideals of a commutative ring. "Didn't you guys already write a book on schemes?" the authors ask in the preface and the answer is that there were several preliminary versions, the book itself being stimulated and edited by S. Levy. We must be grateful to him, as well as to the authors. Two-thirds of the book is new. After a gentle introduction to affine schemes, there are chapters on projective schemes, blow-ups, local constructions and the number of points of a scheme.

J.H. de Boer



W.A. de Graaf

Lie algebras: Theory and algorithms

(North-Holland mathematical library; 56)

Amsterdam: Elsevier, 2000

393 p., prijs NLG 225,-

ISBN 0-444-50116-9

Het doel van dit boek is tweedelig. Ten eerste geeft het een opsomming van de vele bestaande algoritmen voor het rekenen met eindig-dimensionale Lie-algebra's. Ten tweede geeft het boek een inleiding tot de theorie van eindig-dimensionale Lie-algebra's. Het algoritmische perspectief leidt ertoe dat sommige bewijzen constructiever en transparanter worden. Als voorbeeld moge dienen het gebruik van niet-commutatieve Gröbner-bases bij het bewijs van de stellingen van Poincaré-Birkhoff-Witt en Iwasawa, alsmede de algoritmische classificatie van halfenkelvoudige Lie-algebra's. De laatste twee hoofdstukken gaan verder dan een standaard-inleiding. Hoofdstuk 7 behandelt namelijk vrije Lie-algebra's, Hall-bases en Lie-algebra's met een eindige presentatie. Hoofdstuk 8 behandelt representaties van halfenkelvoudige Lie-algebra's tot en met de formules van Freudenthal, Weyl en Racah. Een zeer lezenswaardige appendix over associatieve algebra's en de Wedderburn-stellingen besluit het boek. Helaas wordt de bruikbaarheid van het boek enigszins beperkt doordat alle paginanummers in de alfabetische index, in de symboolindex en



M. Carter and B. van Brunt

The Lebesgue-Stieltjes Integral

(Undergraduate Texts in Mathematics)

Berlin: Springer-Verlag, 2000

228 p., prijs \$44.95

ISBN 0-387-95012-5

Zoals de titel van dit boek al aangeeft, geeft het een inleiding in de Lebesgue en de Lebesgue Stieltjes integratie-theorie. In 202 pagina's, verdeeld over negen hoofdstukken, proberen de schrijvers deze theorie zo volledig mogelijk te behandelen. Het boek bevat bovendien een epiloog (het tiende hoofdstuk), een appendix met aanwijzingen bij en antwoorden op geselecteerde vraagstukken, een index en een bibliografie met 45 referenties.

Hoewel de schrijvers enige voorkennis veronderstellen met betrekking tot de meest elementaire analytische begrippen als convergentie, continuïteit en Riemann-integraal, geven ze in de eerste drie hoofdstukken een heel compleet overzicht van deze begrippen. In het derde hoofdstuk, dat in z'n geheel gewijd is aan de Riemann-integraal, maken ze bovendien aannemelijk waarom er behoefte is om de al bekende Riemann-integraal te generaliseren.

In het vierde hoofdstuk wordt de Lebesgue-Stieltjes integraal geïntroduceerd. Een gemiste kans van de schrijvers is volgens mij dat ze zich beperken tot de definitie van de integraal over een in-

terval. Pas later, aan het eind van het vijfde hoofdstuk, geven ze aan, zij het erg beknopt, hoe je de generalisatie van interval naar meer algemene verzameling kunt maken. In de hoofdstukken vijf en zes formuleren de schrijvers de basiseigenschappen, alsmede de bekende convergentiestellingen. Ook worden de hoofdstelling van de integraalrekening en het differentiëren onder het integraalteken (in het geval van Lebesgue integralen) genoemd. Helaas laten ze de meeste bewijzen achterwege, omdat "many of these proofs pose a technical demand on the reader greater than what has been expected so far in this text".

In het zevende hoofdstuk wordt ingegaan op dubbele integralen en wordt Fubini genoemd, terwijl in hoofdstuk acht uitgebreid gesproken wordt over de L^p -ruimten. Tevens worden in dit verband ook de Hardy-ruimten en de Sobolev-ruimten kort belicht. Tenslotte krijgt de L^2 -ruimte speciale aandacht in hoofdstuk negen. Er worden expliciet orthonormale bases geconstrueerd met behulp van trigonometrische polynomen (waarmee het verband wordt gelegd met Fourierreeksen) en genormaliseerde eigenfuncties van Sturm-Liouville problemen. Bij dit laatste wordt even geproefd aan enkele speciale functies, zoals Mathieufuncties en de polynomen van Hermite, Laguerre en Legendre.

De uitvoering van het boek is erg fraai en de inhoud wordt rijkelijk geïllustreerd met voorbeelden. Ook is volop aandacht geschonken aan opgaven, niet alleen kwantitatief, maar ook kwalitatief. De opgaven zijn vooral bedoeld om de aangeleverde theorie te verwerken en liggen op een goed niveau. Voor de wiskundige is een klein minpunt het veelal ontbreken van bewijzen, hoewel de schrijvers zich dat terdege bewust zijn en met opzet deze keus van schrijven hebben gemaakt. Dit laatste blijkt niet alleen uit hun voorwoord ("those who try to fill the gap of theoretical background by doing some reading are all too often put off by having to plough through many pages of preliminary measure theory"), maar ook uit de vele referenties naar andere werken voor hen die dieper in de stof willen duiken. Al met al een aardig boek voor een cursus toepassingsgerichte integratietheorie. G.R. Kuik

C. Chicone

Ordinary Differential Equations with Applications

(*Texts in Applied Mathematics*; 34)

New York: Springer-Verlag, 1999

561 p., prijs DM 119,-

ISBN 0-387-98535-2

Het lijkt paradoxaal, maar de vloed aan informatie die ons overstroomt en de intense communicatie die de nieuwe media oproepen, maken *persoonlijke contacten* en *boeken* steeds belangrijker. Juist door deze overvloed ontstaat de behoefte aan goede wegwijzers, raad en gidsen.

Dit boek is geen elementaire inleiding — daar zijn er genoeg van — en ook geen researchboek voor specialisten: het is een inleiding in de moderne theorie van gewone differentiaalvergelijkingen en dynamische systemen. Het mikt op gevorderde studenten en onderzoekers die met dit onderwerp kennis willen maken en wellicht onderzoek willen doen. In die zin is het te vergelijken met een klassieker als Guckenheimer and Holmes (*Nonlinear oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag). De auteur begint met wat hij (ondanks de voornaam een 'hij') als voorbereidende kennis beschouwt: variëteiten, Poincaré-

Bendixson theorie voor periodieke oplossingen, contractie, impliciete functie, existentie en eenduidigheid. Hij heeft hierbij een aparte stijl: hoog niveau maar zonder alle wiskundige details te geven. Dat kan misleidend zijn voor beginners, ik denk dat de inleidende hoofdstukken meer precisie kunnen gebruiken.

Een bladzij of vijftig wordt besteed aan lineaire vergelijkingen met onderwerpen als stabiliteit, Lyapunov exponenten en Floquet-theorie. Nuttig materiaal en interessante voorbeelden. De gevorderde hoofdstukken betreffen hyperboliciteit (met uitvoerige weergave van Hartman-Grobman theorie), continuering van periodieke oplossingen (interessant, maar niet zo helder voor beginners), homocliene banen-Melnikov-chaos (zeer actueel onderzoeksgebied), middelingsmethoden (een korte maar aardige inleiding) en bifurcatie theorie. De stijl hierbij is niet altijd gelijk. Sommige behandelingen, zoals die van de Lyapunov-Schmidt methode hebben een hoog Zwijnstein-gehalte; veel materiaal, bijvoorbeeld bifurcatietheorie, wordt goed ingeleid.

Een apart onderwerp vormen de toepassingen. De auteur heeft zich ingespannen om belangrijke en moeilijke voorbeelden te behandelen. Verstoorde Keplerbeweging, gekoppelde slingers, de Fermi-Pasta-Ulamketen, lopende golven. Er is bovendien veel aandacht voor 'waar de problemen vandaan komen'. Dat is bij dit vakgebied en de toegepaste wiskunde in het algemeen vooral de klassieke mechanica en de theorie van partiële differentiaalvergelijkingen.

De goede onderwerpenkeuze, de belangrijke toepassingen en het aanstekelijke enthousiasme van de auteur maken dit boek tot een belangrijke aanwinst van de wiskundeliteratuur. F. Verhulst

S. Marde

Strong shape and homology

(*Monographs in Mathematics*)

Berlin: Springer Verlag, 2000

489 p., prijs DM 159,-

ISBN 3-540-66198-0

Shape theory can be viewed as an appropriate extension of homotopy theory to general spaces. Standard notions of homotopy theory are known to be inadequate to study global properties of spaces with bad local behaviour. Therefore, shape theory has been designed to overcome these shortcomings of homotopy theory and coincides with it when restricted to spaces with good local behaviour (like the ANR's, polyhedra or CW-complexes). Situations concerning global properties of spaces having irregular local behaviour naturally appear in many areas of mathematics. Standard examples (where shape theory already has been applied successfully) are fibers of mappings, sets of fixed points, attractors of dynamical systems, spectra of operators, boundaries of certain groups, et cetera.

The main purpose of this book, however, is to expose in detail strong shape theory. This is a finer theory than the ordinary shape theory, with various advantages. It is occupying an intermediate position between homotopy theory and ordinary shape, similar to the position of strong homology (which is a strong shape invariant, generalizing Steenrod homology) in between singular homology (which is a homotopy invariant) and Čech homology (which is a shape invariant).

The approach in this book to strong shape of topological spaces

consists of two steps. Firstly, one approximates spaces by suitable inverse systems of polyhedra (or ANR's) and secondly, one develops a homotopy theory of such systems. Then this homotopy theory is applied to the associated systems and it is shown that results only depend on the spaces; they are independent of the choice of the approximating systems. In a similar way, strong homology groups are first defined for inverse systems of spaces. For the right approximation process, one needs delicate constructions like resolutions and strong expansions. Moreover, the right modification of homotopy to systems of spaces is the rather involved coherent homotopy.

This book consists of four chapters. Chapter 1 is devoted to coherent homotopy. The coherent homotopy category, whose objects are inverse systems and with homotopy classes of coherent mappings as morphisms, is here the main object of study. In Chapter 2, the strong shape category is constructed, as announced above using coherent homotopy of inverse systems (which was considered in Chapter 1). In Chapter 3, the derived functors $\lim^n$ of the inverse limit functor $\lim$ are defined and their basic properties are discussed. A proper understanding of these functors is required to understand strong homology. This is the subject of Chapter 4 where the strong homology groups of spaces are introduced. It is also proved that they are invariants of strong shape. Other more specific properties of strong homology established in this final chapter are strong excision and the cluster property. The book ends with an extensive list of references (completing the bibliographic notes given in each section), with a list of special symbols used in the book, with an author index and with a subject index.

W. Malfait

A. Ranicki

High-dimensional Knot Theory; algebraic surgery in Co-dimension; 2

(Monographs in Mathematics)

Berlin: Springer-Verlag, 1998

646 p., prijs \$119,-

ISBN 3-540-63389-8

Een citaat uit het begin van het boek: "An n -dimensional knot (M, N, k) is an embedding of an n -dimensional manifold in an $(n+2)$ -dimensional manifold, $k: N^n \subset M^{n+2}$. An n -knot is a knot of the type (S^{n+2}, S^n, k) . A classical knot is a 1-knot $k: S^1 \subset S^3$. [...] Although high-dimensional knot theory does not have such glamorous applications as classical knot theory, it has many fascinating results of its own, which make use of a wide variety of sophisticated algebraic and geometric methods. [...] The book has actually two aims: (i) to serve as an introduction to high-dimensional knot theory, using surgery theory to provide a systematic exposition, (ii) to serve as an introduction to algebraic surgery theory, using high-dimensional knots as geometric motivation."

Net als in de klassieke knopentheorie speelt het complement van de knoop — of liever nog het complement X van een tubulaire omgeving van de knoop — een belangrijke rol. In goede meetkundige situaties is er een afbeelding $X \rightarrow S^1$. Door die vervolgens terug te trekken naar de universele overdekking $\mathbf{R} \rightarrow S^1$ krijgt men $\bar{X} \rightarrow \mathbf{R}$. De overdekkingsgroep $\mathbf{Z}$ werkt dan op $\bar{X}$ en op de homologie $H_*(\bar{X})$. Kortom we krijgen modules over een

polynoomring. Voor de schrijver is dit aanleiding om een zware vracht van honderden bladzijden algebra — in casu algebraïsche K-theorie en algebraïsche L-theorie van polynoomringen — over de lezer uit te storten. Daar tegenover staan enkele tientallen bladzijden meetkunde; inclusief een appendix van 12 pagina's: *The history of open books* geschreven door H. E. Winkelnkemper. Wat die algebra betreft, heeft dit boek (mij) weinig nieuws of verrassends te bieden. En de toepassing van de algebra in de meetkunde wordt, voor zover ik kan zien, niet duidelijk gepresenteerd.

In de inleiding staat: "High-dimensional knot theory has a somewhat deserved reputation as being an arcane geometric machine — I hope that aim (i) is sufficiently achieved to demystify the geometry, and make it more accessible to algebraic topologists. Likewise, surgery theory has a somewhat deserved reputation as being an arcane algebraic machine — I hope that aim (ii) is sufficiently achieved to demystify the algebra, and make it more accessible to geometric topologists." Helaas is de schrijver, wat mij betreft, niet in zijn opzet geslaagd.

J. Stienstra



P. de Wilde and A.J. van der Veen Time varying systems and computations

Dordrecht: Kluwer, 1998

459 p., prijs NLG 280,-

ISBN 0-79238189-0

Dit boek behoort tot de driehoek numerieke lineaire algebra, operatorentheorie en mathematische systeemtheorie. Het is een bewerking en verdere uitwerking van het proefschrift van de tweede auteur met de eerste als promotor. Het belangrijkste thema is de ontwikkeling van efficiënte algoritmen voor het numeriek uitvoeren van fundamentele operaties op matrices met behulp van input-output systemen. Het gaat hierbij steeds om blok-matrices die eindig of oneindig kunnen zijn en in het laatste geval worden ze verondersteld te corresponderen met lineaire operatoren op zekere ℓ^2 -ruimten. De connectie met de systeemtheorie is gelegen in het feit dat de matrices verschijnen als overdrachtsoperatoren van tijdsvariante discrete-tijd systemen.

Inverteren van matrices, diverse multiplicatieve ontbindingen, zoals QR- en URV-decomposities maar ook spectrale en inwendige/uitwendige factorisaties, approximatie met matrices van lage complexiteit, en constructie van matrices uitgaande van partiële informatie over de elementen (interpolatie en completering) zijn enkele van de fundamentele matrix-operaties die in dit boek aan de orde komen. Vertaald in systeemtheoretisch termen gaat het dan om het inverteren van systemen waarbij de rol van input en output worden verwisseld of de ontbinding van een systeem in een serie schakeling of een netwerk van eenvoudigere systemen. De auteurs spreken in dit verband van een 'computational network'.

In dit boek is nog een ander deelgebied van de wiskunde prominent aanwezig, namelijk de complexe functietheorie. Het begrip z -transformatie dat in de theorie van tijdsinvariante systemen de overgang beschrijft van het tijdsdomein naar het frequentiedomein wordt hier gegeneraliseerd naar het tijdsvariante geval

door een matrix op te vatten als een som van verschoven diagonaal operatoren. De ruimte van bovendriehoeksoperatoren is dan het analogon van de functie-ruimte H^∞ , waarbij de complexe variabele z vervangen is door een verschuivingsoperator, en de rol van elementen uit de Hardy-ruimte H^2 wordt overgenomen door bovendriehoeksmatrices die Hilbert-Schmidt operatoren induceren. Deze analogie, die in zekere zin teruggaat op het werk van W.B. Arveson over nestalgebra's, speelt een belangrijke rol in het hele boek en keert ook steeds weer terug in de keuze van de onderwerpen en de opzet van de bewijzen.

Veel van het materiaal dat in dit boek wordt gepresenteerd is van recente datum en is ontwikkeld in de laatste tien jaar. De eerste auteur heeft in deze ontwikkeling ook een leidende rol gehad. Andere boeken die de relatie tussen operatoren op ℓ^2 -ruimten en tijdsvariante systemen als thema hebben en deels vergelijkbare onderwerpen behandelen, zijn:

- A. Halanay and V. Ionescu, *Time-varying discrete linear systems*, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1996;
- C. Foias, A.E. Frazho, I. Gohberg, M.A. Kaashoek, *Metric constrained interpolation, commutant lifting and systems*, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1998.

Dit boek is echter uniek in zijn concentratie op de numerieke aspecten. Of het materiaal zoals hier gepresenteerd al zijn uiteindelijk vorm heeft gevonden is voor uw recensent nog een vraag. Gemakkelijk leesbaar is het boek niet. De auteurs, beiden niet van wiskundige huize maar afkomstig uit de elektrotechniek, laten matrices werken op rijvectoren die van links worden ingevoerd en alle matrixvermenigvuldigingen moeten dus van links naar rechts gelezen worden. Dit past goed bij de beschrijving van netwerken, maar binnen de wiskunde is het minder gebruikelijk. Voor het reconstrueren van alle details van de bewijzen heeft de lezer ook nog het nodige werk te verzetten. Maar het boek is rijk aan ideeën. Als stimulans voor verder onderzoek en bron van nieuwe technieken voor de constructie van numerieke algoritmen scoort het naar mijn mening zeer hoog.

M.A. Kaashoek

van de mee-roterende schokgolf aan de tip van een supersoon draaiend rotorblad van een straalvliegtuigmotor, en nog wat andere voorbeelden. Het gevolg is dat het aantal boeken over niet-lineaire akoestische golfverschijnselen bescheiden is. Daarom is het zo buitengewoon plezierig dat (de onlangs overleden) David Crighton, als managing editor van de reeks *Cambridge Texts in Applied Mathematics*, dit aardige boekje heeft doen uitgeven.

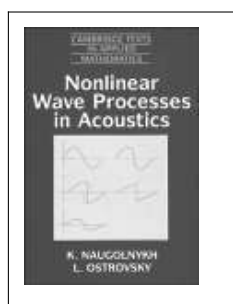
Geluid in lucht is een gas-dynamisch verschijnsel, dat in een of andere zin beschreven wordt door de compressibele Navier-Stokes vergelijkingen met bijpassende thermodynamische relaties. Als we niet meer kunnen lineariseren moeten we iets anders doen om deze moeilijke vergelijkingen te doorgronden. De hoofdstukken gaan over allerlei aanpakken en toepassingen.

Het begint met een nuttig algemeen overzicht waarin de algemene vergelijkingen stap voor stap worden omgeschreven tot min of meer zwak niet-lineaire golfvergelijkingen. Vervolgens krijgen we een hoofdstuk over schokken en pulsen. In het één-dimensionale (niet-visceuze) geval is dit probleem algemeen al opgelost door Riemann, en dat geeft prettige steun als we verder willen. Het blijkt dat we dan de Burgers vergelijking en de Korteweg-de Vries-Burgers vergelijking ontmoeten. Het derde hoofdstuk gaat over de niet-lineaire modificaties die nodig zijn voor een stralenbenadering, dat wil zeggen als de lengteschaal van de golven veel kleiner is dan die van het medium. Ook hier is de beschrijving lokaal één-dimensionaal, en is Burgers alom aanwezig. Interessant is het verschijnsel van zelf-refractie. Hoofdstuk vier generaliseert de stralen tot bundels (de zogenaamde parabolische benadering). De volgende twee hoofdstukken gaan over niet-lineariteit in niet-dispersieve en dispersieve media (bijvoorbeeld solitonen in bellenmengsels of korrelige media). Het laatste hoofdstuk tenslotte betreft een aantal bijzondere onderwerpen (gestimuleerde verstrooiing, zelf-focussing, golffront omkering).

Het boekje is leuk en oogt verzorgd, maar is minder geschikt voor een breed publiek. De lezer moet een fysische achtergrond (warmte- en stromingsleer) hebben, terwijl de stijl beknopt is waardoor het verifiëren van resultaten enige studie kost. Het boekje biedt een breed spectrum van niet-lineaire akoestische golfverschijnselen, maar om een overzicht te verwerven moet wel gestudeerd worden.

Het niveau en de stijl is vergelijkbaar met Whitham's *Linear and Nonlinear Waves*.

S.W. Rienstra



K. Naugolnykh and L. Ostrovsky
Nonlinear Wave Processes in Acoustics

(Cambridge Texts in Applied Mathematics)
Cambridge: Cambridge University Press, 1998
298 p., prijs £19,95
ISBN 0-521-39984-X

De verstoringen die gepaard gaan met gewone akoestiek zijn zo klein, dat dit in hoge mate een lineair verschijnsel is. Een nog juist hoorbare geluidsgolf veroorzaakt luchtverplaatsingen die maar een duizendste zijn ($\sim 10^{-11}$ m) van de gemiddelde vrije weglengte van luchtmoleculen, bij een amplitude van twee tienmiljardste atmosfeer ($2 \cdot 10^{-5}$ Pascal). Je kunt dit rustig met een factor 10^8 (10^{16} in energie) vergroten zonder direct het lineaire regime te verlaten.

Niet-lineaire akoestiek, waar het huidige boekje over gaat, is dan ook in de wereld van de dagelijkse toepassingen niet zo alom aanwezig als gewone akoestiek. We moeten denken aan de intense schok van bijvoorbeeld een atoombomontploffing, het veld

D. Serre

Systems of conservation laws volume 1 en 2

Cambridge: Cambridge University Press, 1999 en 2000
263 p. en 269 p., prijs £40,- per stuk
ISBN 0-521-58233-4 en ISBN 0-521-6330-3

Both volumes have been translated by I.N. Sneddon from the 1996 French volumes. The first volume consists of seven chapters. In Chapter 1 examples of nonlinear hyperbolic systems are given. Classical results on one-dimensional scalar conservation laws are presented in the second chapter. In the third chapter linear and quasi-linear systems are discussed, as well as the notions of weak solutions and entropy solutions. Shock waves, rarefaction waves, and Lax's theorem are treated in Chapter 4. The numerical scheme of Glimm is presented in Chapter 5. In the sixth chapter

perturbations of conservation laws by diffusion terms of second order are considered, and in Chapter 7 viscosity profiles for shock waves are studied in detail.

The second volume consists of eight chapters (numbered 8 to 15). The main topics that are discussed in these eight chapters are: the maximum principle, the theory of Chuey, Conley and Smoller, compensated compactness, propagation of oscillations, rich systems (that is, systems which may be written in a quasi-linear form), weakly nonlinear geometric optics, Temple fields and systems, Lopatinski's condition, surface waves, stability of shock waves, the instability of vortex sheets, and boundary layers.

All chapters end with an exercise section. Both volumes are well written and clear, and contain many up to date references. The second volume is intended more for research workers and less for students than the first volume. In these volumes I found some interesting examples on shock waves which can easily be incorporated in my PDE-courses for (third and fourth year) aerospace engineering students.

W.T. van Horssen

M.R. Bridson and A. Haeffliger

Metric Spaces of Non-Positive Curvature

(*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*; 319)

Berlin: Springer-Verlag, 1999

643 p., prijs DM 169,-

ISBN 3-540-64324-9

This book studies the relationship between group theory and geometry and is built up in three parts.

Part I: Geodesic Metric Spaces. With this part of the book, the authors intend to introduce the reader to the world of geodesic spaces. These are metric spaces (X, d) in which any two points can be joined by a geodesic.

This part is written in a very accessible way and introduces all basic concepts, such as (pseudo)metric, angle, length of a curve, et cetera. All of these (and further) notions are made very clear by means of many examples and remarks. At this point, the authors also introduce the spaces M_κ^n , the complete, simply connected, Riemannian n -manifolds of constant sectional curvature κ , for any $\kappa \in \mathbf{R}$. The spaces M_κ^2 are used in part II as reference spaces. In the last chapter of this first part, the authors turn their point of view to groups and group actions and present an introduction to what is called geometric group theory.

Part II: CAT(κ) Spaces. After the introductory part I, the authors now really start the study of spaces of bounded curvature. The basic notion, due to A.D. Alexandrov, is that of a CAT(κ) space. Roughly speaking, a metric geodesic space (X, d) is said to be a CAT(κ) space (for some $\kappa \in \mathbf{R}$), if for every geodesic triangle Δ in X (this is a triangle whose sides are geodesics), there is a comparison triangle $\bar{\Delta} \in M_\kappa^2$ (this is a geodesic triangle in M_κ^2 , having sides of the same length as those of Δ) which is 'fatter' than Δ . A space X is then said to be of curvature $\leq \kappa$, if and only if X is locally a CAT(κ)-space.

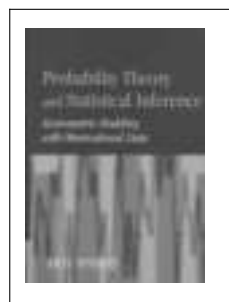
The first five chapters of this part are mainly devoted to the geometry of such spaces. From the sixth chapter onwards, a study of groups acting by isometries on CAT(κ) spaces, in particular CAT(0) spaces (hence the title of the book), is started.

Part III: Aspects of the geometry of Group Actions. This

last part of the book is of a more sophisticated level and consists of four chapters, each dealing with a topic of important research interest. These contain the δ -hyperbolic spaces (of Gromov, Rips, ...), a more elaborated study of groups acting on non-positively curved spaces, complexes of groups and groupoids of local isometries.

This book is beautifully and clearly written and contains many illustrations and examples but also many deep results. It is my opinion that this book will become a standard work in mathematical literature and will be used by many people, from undergraduates to specialists.

K. Dekimpe



A. Spanos

Probability theory and statistical inference

Cambridge: Cambridge University Press, 1999

815 p., prijs £19.95

ISBN 0-521-41354-0

Only a few books have been written on mathematical statistics and probability theory especially for econometrics students. According to the preface, the primary intended audience includes interested undergraduate and graduate students of econometrics as well as practicing econometricians who have been trained in the traditional textbook approach. The present textbook is intended for an introductory course in probability theory and statistical inference, written for students who have had at least a semester course in calculus and some familiarity with descriptive statistics will be of value. The book is well-written and the author has done an excellent job in preparing a text that meets these objectives. However, students will have difficulties in completely understanding the philosophical issues involved if they did not follow an introductory course on (mathematical) statistics and a course on applied statistics. This will provide the students with a feeling for dealing with real data. This will be needed in order to take full advantage of the present text.

A special feature is that several topics are discussed from a historical perspective. This distinguishes this text from a lot of other textbooks on mathematical statistics. Another feature is that the author pays a lot of attention to checking model assumptions. This is in line with the attitude of the author towards actual applications. Every chapter treats most of the important classical topics but also a lot of less usual subjects are discussed. The author proves that it is possible to have an introductory chapter on stochastic processes which pays also attention to Markov chains, ergodicity, mixing, et cetera. An important key to various chapters is the notion of dependence. The reader can also find something on pseudo-random numbers.

There are only a small number of imperfections, for example, the domain of the hypergeometric distribution is not correctly defined. The book is written with care and with a strong and convincing attitude towards teaching theory in view of applications. The author had to make choices with regard to the topics. It is somewhat surprising that matrices are hardly used and geometric interpretations with projections are not used. Especially

for econometricians this is more or less basic. The mathematical statistician will not find the decision-theoretic approach. Also the Bayesian approach is hardly discussed. However, there is a really nice introduction to statistical inference.

T. Steerneman

D. Stirzaker

Probability and random variables

Cambridge: Cambridge University Press, 1999

368 p., prijs £16.90

ISBN 0-521-64445-3

This text offers a beginner's guide, a simple and concise introduction to probability theory. After an elementary discussion of chance, the central and crucial rules and ideas of probability, including independence and conditioning, are set out. Counting, combinatorics, the ideas of probability distributions and densities are then introduced. Later chapters present random variables and examine independence, conditioning, covariance and functions of random variables, both discrete and continuous. The final chapter considers generating functions and applies this concept to practical problems including branching processes, random walks and the central limit theorem. Two examples of exercises are:

1. Let X be a random variable. Is it true that $X - X = 0$ and $X + X = 2X$? If so, explain why.
2. Let X and Y have joint density $f(x, y) = 1$ for $0 \leq x, y \leq 1$. Let $U = \min\{X, Y\}$ and $V = \max\{X, Y\}$. Show that (U, V) has the joint density $f(U, V) = 2$ for $0 \leq U \leq V \leq 1$.

I highly recommend this book as a guide for students of mathematics.

W.J. Brandenburg

V.S. Sunder

Functional analysis. Spectral theory

(Birkhäuser advanced texts)

Basel: Birkhäuser, 1998

241 p., prijs DM 78,-

ISBN 0-8176-5892-0

This book provides an introduction to functional analysis with an emphasis on operators on Hilbert spaces. In the first chapter a quick presentation is given of the basic definitions and theorems of normed spaces, including the Hahn-Banach theorems, the open mapping theorem, and the uniform boundedness theorem. The second chapter discusses elementary properties of Hilbert spaces. In the third chapter the author discusses C^* -algebras, including the Gelfand-Naimark theory and representation theory. The fourth chapter discusses bounded operators on a Hilbert space. The spectral theorem for normal operators is obtained from the results of chapter 3. The spectral theorem for compact operators is proven and Fredholm operators are introduced. The final chapter contains the spectral theorem for unbounded operators. As a textbook for a course in functional analysis I cannot recommend this book except if one is only interested in operator theory on Hilbert spaces. The treatment of Banach spaces and operators on them is too light to use it for a general introduction to functional analysis. The book does have one feature making it worthwhile. The chapter on C^* -algebras does provide a nice introduction to the Gelfand-Naimark theory and representations.

A.R. Schep



R. Ticciati

Quantum field theory for mathematicians

(Encyclopedia of mathematics and its applications; 72)

Cambridge: Cambridge University Press, 1999

699 p., prijs £70

ISBN 0-521-6326-5

De (relativistische) quantumveldentheorie bestaat enerzijds uit een aantal fysische principes, die de quantummechanica in overeenstemming brengen met de speciale relativiteitstheorie. Anderzijds geeft de theorie een serie voorschriften om de interacties tussen elementaire deeltjes uit te rekenen. Zo beschrijft het zogeheten Standaardmodel alle bekende deeltjes en krachten (met uitzondering van de zwaartekracht). Berekeningen in dit model geven een fabelachtige numerieke overeenstemming tussen theorie en experiment. Niettemin bestaat er geen afleiding van de rekenregels uit de principes die een wiskundige zou overtuigen.

Vanaf 1950 vraagt men zich af wat de quantumveldentheorie wiskundig eigenlijk betekent. De fysische principes zijn sindsdien wiskundig helder geformuleerd in de zogenaamde axiomatische quantumveldentheorie, waarover men kan lezen in boeken van Streater-Wightman, Bogoliubov-Logunov-Todorov, Haag, Strocchi, Araki, en anderen. Aan de andere kant van het spectrum is ook volledig begrepen hoe men, als de rekenregels gegeven zijn, eindige kansen voor fysische processen krijgt. Dit is het onderwerp van de renormalisatietheorie, waarover bijvoorbeeld boeken van Speer, Collins, Rivasseau, Smirnov, en Piguët-Sorella gaan. 't Hooft en Veltman ontvingen in 1999 de Nobelprijs voor hun bijdragen aan de renormalisatietheorie van het Standaardmodel. Tenslotte is in de jaren 80 een golf van wiskundig enthousiasme voor conforme, topologische, en supersymmetrische quantumveldentheorieën ontstaan. Zulke modellen zijn weliswaar onfysisch, maar vertonen fascinerende verbanden met representatietheorie, knopentheorie, topologie, enzovoort. De twee recente boeken van Deligne et al., met uitvoerige bijdragen van Witten, bieden hiertoe een inleiding.

Het wiskundige probleem van de quantumveldentheorie ligt in de vrijwel onoverbrugbare kloof tussen de wiskundige axioma's en de fysisch interessante modellen. In de constructieve quantumveldentheorie heeft men enige vereenvoudigde modellen wiskundig weten te vangen; zie de boeken van Glimm-Jaffe en Baez-Segal-Zhou. Maar het Standaardmodel, en zelfs de losse onderdelen daarvan, zijn nog ver buiten bereik. Het Clay Mathematics Institute heeft onlangs zelfs een miljoen dollar uitgelooft voor de constructie van Yang-Mills theorie in vier dimensies.

Ticciati kondigt in zijn voorwoord een "systematic introduction of fundamental principles, enriched with delightful mathematical details" aan, en dit zal de lezer voeren tot de "usual practical knowledge of QFT." Het boek is in een prestigieuze wiskundige serie verschenen, en richt zich volgens de titel ook inderdaad tot wiskundigen. Naar de inhoudsopgave beschrijft het boek het gehele formalisme van de quantumveldentheorie, tot en met de renormalisatie van het Standaardmodel. Volgens de achterflap mogen we ook nog eens een "comprehensive bibliography" verwachten.

In werkelijkheid blijkt dit boek een overzicht te zijn van de fysische stand van zaken rond 1975. De auteur lijkt er geen idee van te hebben wat het betekent om voor een wiskundig publiek te schrijven. De "delightful mathematical details" bestaan uit terzijdes als "there is a branch of mathematics, *distribution theory*, which puts the manipulations above on an axiomatic footing". Ook zonder de miljoen dollar van Clay te hebben gewonnen valt bij vrijwel ieder aspect van de quantumveldentheorie wel iets wiskundigs te zeggen, al was het maar een literatuurverwijzing. Zoniet in dit boek. Slechts over renormalisatie blijkt de auteur op de hoogte te zijn van enige wiskundige resultaten. De "comprehensive bibliography" bestaat uit een paar dozijn boeken en artikelen die de auteur toevallig kent. Nauwelijks een spoor van de wiskundig georiënteerde literatuur.

Dit boek is ook aan fysici of wiskundigen met goede kennis van de natuurkunde niet aan te raden. Hoewel zijn boek in de categorie van verouderde fysica-leerboeken nog niet eens zo slecht is, legt de auteur, een jong docent aan de *Maharishi University of Management*, het uiteraard af tegen Nobelprijswinnaar Weinberg, die in zijn eveneens bij CUP verschenen boeken een meesterlijke behandeling van vrijwel hetzelfde materiaal geeft, maar dan up-to-date en vol diepgang.

N.P. Landsman



C. Roos, T. Terlaky et al.

Theory and Algorithms for Linear Optimization. An Interior Point Approach

(Series in discrete mathematics and optimization)

Chichester: John Wiley & Sons, 1997

482 p., prijs £65

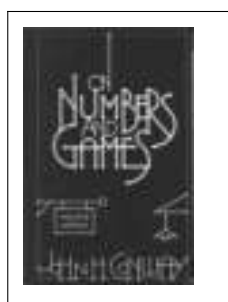
ISBN 0-471-95676-7

Apart from the introduction the book consists of four parts. Part I (Introduction: Theory and Complexity) is self-contained. It is shown that a (canonical) linear optimization problem can be solved by finding a so-called strictly complementary solution of an embedding skew-symmetric problem satisfying the so-called interior-point assumption. To prove the existence of strictly complementary solutions for such skew-symmetric problems the concept of the central path of the problem is introduced. The result is derived from properties of this central path. The whole duality theory of linear programming is derived from the existence of these strictly complementary solutions. A polynomial time algorithm (The Dikin step algorithm) to find a strictly complementary solution for a skew-symmetric problem satisfying the interior point assumption is given. The analysis of this Dikin algorithm is typical for the type of analysis of interior points methods for solving linear optimization problems. Part II (The Logarithmic Barrier Approach) discussing different variants of the dual logarithmic barrier method and the primal-dual logarithmic barrier method to solve linear programs in standard format. In Part III (The Target-following Approach) the notion of central path-following methods (as discussed in Parts I and II) is generalized to target-following methods. It is shown that many classical results in the literature can be put in the target-following scheme and that this scheme often dramatically simplifies the analysis. Part IV (Miscellaneous Topics) consists of 6 chapters that do not fit into the

first three parts. For historical reasons it contains a chapter on Karmarkar's projective method. It also discusses implementation issues of interior point methods. Probably the most important chapter in this part is devoted to parametric and sensitivity analysis. It describes a new approach to sensitivity analysis that is superior to the classical approach.

The authors have succeeded in presenting the results obtained in the research area of interior point methods for linear optimization problems in a uniform way. The algorithms are clearly stated. The mathematical theorems needed to prove correctness, convergence, and complexity are formulated precisely and proved in detail. If you are looking for a complete mathematical treatment of interior point methods, then this is a book you need to buy. If you are looking for a more intuitive description of interior point methods and how and why they work, then you will unfortunately not find that in this book. This is a book written by mathematicians for mathematicians.

A. Kolen



J.H. Conway

On numbers and games (2nd edition)

Natick: A K Peters, 2001

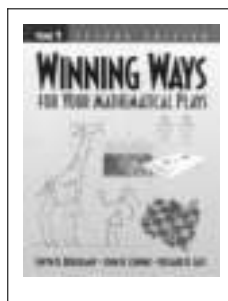
256 p., prijs \$ 39

ISBN 1-56881-127-6

Bij uitgever A K Peters verschijnen momenteel nieuwe edities van enkele populaire boeken van John Conway. De eerste versie van *On numbers and games* kwam eind 1975 uit. De huidige tweede versie verschilt nauwelijks van de eerste; Conway heeft een kort voorwoord toegevoegd plus een lijstje relevante in de afgelopen 25 jaar verschenen referenties.

Het is ook niet nodig om een enthousiast en boeiend geschreven boek als dit, over (vooral niet-standaard) getallen en een aantal strategische spelletjes plus connecties tussen deze twee onderwerpen, nog verder te redigeren. Net als de eerste editie is dit een boek dat bij velen in de smaak zal vallen.

J. Top



E.R. Berlekamp, J.H. Conway, R.K. Guy

Winning ways for your mathematical plays 1 (2nd edition)

Natick: A K Peters, 2001

276 p., prijs \$ 49,95

ISBN 1-56881-130-6

Het voorwoord van dit eerste deeltje van vier waarmee *Winning ways* na 20 jaar opnieuw wordt uitgegeven zegt dat het de hoogste tijd is voor zo'n nieuwe uitgave. Inderdaad vertonen de twee boeken van de eerste editie, zoals ze in veel Nederlandse wiskundebibliotheken staan, duidelijk sporen van slijtage wegens veel gebruik. Ongetwijfeld zal de nieuwe reeks dan ook zijn weg naar de gebruiker wel vinden.

Het gaat dan ook beslist om meer dan een herdruk: niet alleen in de referenties, maar ook in de lopende tekst hebben de auteurs duidelijk hun best gedaan om recente ontwikkelingen in de nieuwe uitgave te verwerken.

J. Top



K. Dzhaparidze
Introduction to option pricing in a securities market

(CWI syllabus; 47)
Amsterdam: CWI, 2000
134 p., prijs NLG 35,-
ISBN 90-6196-487-3

Langzamerhand is in het jonge vakgebied Financiële Wiskunde een behoorlijk aantal studieboeken beschikbaar. Een gemeenschappelijk punt van al deze boeken is dat kennis van enige geavanceerde kansrekening vaak bekend verondersteld wordt, soms zelfs martingaaltheorie en stochastische calculus. Het uitgangspunt van de CWI syllabus die hier besproken wordt, is anders. Weinig tot geen kennis van de waarschijnlijkheidsrekening wordt bekend verondersteld. Zeker voor discrete tijdmodellen met eindige toestandsruimte (bijvoorbeeld het Cox-Ross-Rubinstein model) is dit eenvoudig te rechtvaardigen; kansrekening is niet nodig om derivaten te waarderen en hedge-strategieën te bepalen. Wel levert de kansrekening een elegante presentatie en interpretatie van de resultaten.

De syllabus bestaat uit twee delen. Deel I van de syllabus is geheel gewijd aan eindige financiële markten (met een discrete tijdsparameter), Deel II bevat de overgang naar modellen in continue tijd met in het bijzonder Poisson benaderingen en Gaussische benaderingen. De financiële markt wordt beschreven door het prijsproces van twee producten, obligatie en aandeel. Voor uitbreiding naar meer producten is bewust niet gekozen: de analyse wordt erdoor gecompliceerd, terwijl de ideeën en de essenties niet anders zijn.

In Deel I vinden we achtereenvolgens een technisch deel over recurrente betrekkingen, waarna de binomiale markt geïntroduceerd wordt. De aanpak is wat algemener dan veelal elders in de literatuur gevonden wordt; op en neergaande bewegingen in de markt mogen tijdsafhankelijk zijn. Daarna worden zichzelf financierende strategieën besproken, risico-neutrale kansen ingevoerd, waarmee vervolgens recurrente relaties voor de waarde van een zichzelf financierende portefeuille worden afgeleid. Volledigheid van de markt wordt bewezen en afwezigheid van arbitragemogelijkheden gekarakteriseerd. Tevens vinden we waarderingsformules voor derivaten. Hoewel de aanpak zuiver algebraïsch is, wordt regelmatig een probabilistische interpretatie gegeven.

In Deel II worden approximaties van een discrete markt besproken. In de eerste plaats een Poisson benadering. Deze benadering is gebaseerd op bij benadering constante opwaartse bewegingen van de aandelprijs op de handelstijdstippen met een klein relatief gewicht (te interpreteren als kans) en kleiner wordende neerwaartse bewegingen met een relatief groot gewicht. Voor het limietgeval vinden we dan weer recurrente betrekkingen (nu in de vorm van differentie-differentiaalvergelijkingen) voor de aandelprijs en de waarde van een portefeuille.

Het laatste hoofdstuk gaat over Gaussische benaderingen van een discrete markt. Deze vinden plaats onder de condities dat de opwaartse en neerwaartse bewegingen van de aandelprijs in eerste orde bij benadering even groot zijn met relatieve gewichten ongeveer gelijk aan een half. In dit hoofdstuk vinden we ook een constructie van de Brownse beweging (in navolging van Wiener) via zogeheten quasi-intervallen, partities van de verzameling van continue functies op een interval. Stochastische integratietheorie wordt kort aangestipt. Meer ruimte is er voor partiële differentiaalvergelijkingen, in het bijzonder de warmtevergelijking, de Fokker-Planckvergelijking en een aantal vergelijkingen die hieruit kunnen worden afgeleid door geschikte substituties van variabelen. Deze worden onder meer gebruikt voor de Gaussische approximatie van optiewaarderingsformules. Uiteindelijk wordt dan het Black-Scholes model behandeld inclusief resultaten over zichzelf financierende portefeuilles, hedge-strategieën (bijvoorbeeld een integraalrepresentatie voor het waardeproces) en wordt volledigheid van de markt aangetoond.

De aanpak is origineel en is duidelijk anders georiënteerd dan de meeste elementaire boeken op het terrein. Nadruk wordt gelegd op de toestanden waarin de markt zich kan bevinden en hoe deze zich dynamisch ontwikkelen. Een van de aardige resultaten in het boek is de beschrijving van portefeuilles in termen van Malliavin afgeleiden, zowel in discrete tijd (de aandelencomponent in de portefeuille valt te schrijven als de Malliavin afgeleide van de waarde naar de aandelprijs, hetgeen hier neerkomt op een zeker differentiequotient van de toestanden van waarde en prijs) als in de Poisson benadering en de klassiekere formulering (in de theorie van de Malliavin calculus) voor de Gaussische continue tijd modellen. Het gevolg hiervan is een representatie van de waarde van een hedge-portefeuille in de vorm van een Clark-Ocone formule.

De lezer wordt voor meer achtergrond en aanvullende resultaten regelmatig verwezen naar meer geavanceerde literatuur (vooral op het gebied van de stochastische processen), die in een bibliografie met 81 referenties is opgenomen. Hierdoor heeft deze syllabus toch wat meer weg van een monografie dan van een elementair studieboek. De syllabus is gebaseerd op een drietal artikelen van de auteur (een ervan in samenwerking met M.C.A. van Zuijlen), die eerder in speciale uitgaven van CWI Quarterly verschenen zijn.

P. Spreij

E.A. Gavosto, S.G. Krantz et al. (eds.)

Contemporary Issues in Mathematics Education

(MSRI Publications; 36)
Berkeley: MSRI, 1999
174 p., prijs £12.95
ISBN 0-521-65255-3

Volume 36 uit de reeks 'Mathematical Sciences Research Institute Publications' is een wat vreemde eend in de bijt. Alle 35 voorgaande delen zijn bijdragen met een hoog specialistisch gehalte aan specifieke deelgebieden uit de theoretische wiskunde. Deel 36 lijkt samengesteld te zijn uit de behoefte van enig tegenwicht voor zoveel zwaarwichtige theorie: het is het eerste volume dat zich niet richt op een specifieke subdiscipline uit de wiskunde, maar het onderwijs van de wiskunde als onderwerp heeft. Daarenboven: de toon waarin de bijdragen van deze bundel zijn geschre-

ven is welhaast een polemische, eentje die wil aantonen dat ook wiskunde spannend kan zijn in de zin dat het tot agressiviteit oproept. Twee bijdragen in de bundel over 'math wars' dragen dat wel heel expliciet uit. Na met enige verbazing de bundel gelezen te hebben (en dat gaat heel snel; het leest veelal als een detective) resteert dan ook een gevoel van jaloezie gericht op mijn Amerikaanse collega's: daar vindt het toch maar allemaal plaats. Wat tevens een eerste karakterisering van de bundel met zich meebrengt: een sterke etnocentristische (op de VS gerichte) inslag is een pregnant kenmerk. Mijn tweede kanttekening bij het boek is dat het enigszins gedateerd is. Het verslaat een in december 1996 in Berkeley gehouden onderwijskundige conferentie. Maar het boek verschijnt in 1999. Na lezing krijg je de indruk dat pas enige tijd nadat de conferentie plaatsvond de beslissing viel om deze proceedings samen te stellen. Sommige auteurs geven het ook aan: "dit is niet mijn conferentiebijdrage, maar recenter werk". Overigens, de combinatie van de twee genoemde nadelen vormt tegelijkertijd een voordeel voor een toch groot publiek: Europese en andere niet-Amerikaanse wiskundigen. De 'reform movement in mathematics teaching', de rode lijn door alle bijdragen heen, sijpelt betrekkelijk langzaam naar buiten het Amerikaanse continent. Veel van de discussies die worden verslagen vinden nog dagelijks plaats in de koffiekamer van onze faculteit, of moeten zelfs nog gevoerd gaan worden.

De samenstellers hebben de bundel in vier secties onderverdeeld: universitair wiskundeonderwijs, 'case studies' van vernieuwend wiskundeonderwijs, het debat over wiskundeonderwijs en ten slotte verslagen van werkgroepbijeenkomsten die tijdens de conferentie plaatsvonden. De toewijzing van bijdragen aan die eerste drie paragrafen lijkt nogal willekeurig: de meeste bijdragen vallen onder alle drie aanduidingen. Mijn classificatie is dan ook een andere:

- Beschrijvingen van hervormde curricula. Deze bijdragen zijn betrekkelijk anekdotisch van karakter, maar wat mij betreft zijn het de meest aantrekkelijke bijdragen, die de lezer een goede indruk geven van wat er mogelijk is in termen van daadwerkelijke implementatie van een vernieuwd curriculum. Het omvat voorbeelden uit Minnesota, Illinois, Ohio en Berkeley.
- Meer essayistische bijdragen die vooral tot doel hebben de noodzaak van hervormingen aan te tonen, zonder al te concreet in te gaan in het hoe ervan. Dit is in mijn ogen de categorie van ietwat overbodige bijdragen: de 'calculus reform' heeft inmiddels zo veel aandacht gekregen, dat degenen die nog niet van de zinvolheid ervan overtuigd zijn, zich ook niet gauw door deze pleidooien laten bekeren.
- Meer historisch getinte bijdragen die verslag doen van de moeizame weg die hervormers hebben te gaan (het zal duidelijk zijn: ook de 'math wars' bijdragen vallen hieronder).

De bundel richt zich op wiskundigen die (ook) betrokken zijn bij het onderwijs van wiskunde en die meer te weten willen komen over wat constructivistische leeropvattingen kunnen betekenen voor het wiskundeonderwijs. De deskundigen op dit vlak zullen er minder aan hebben: daarvoor is de bundel net te gedateerd (zo spelen de 'NCTM standards' een belangrijke rol in verschillende bijdragen, maar dan wel die van 1992, terwijl de discussie over de nieuwe 'NCTM 2000 standards' al in oktober 1998 met de publicatie van het concept begonnen is).

D. Tempelaar

M. Bence

Erdélyi és nemzetközi magyar matematikai versenyek

(Transylvanian and international Hungarian mathematical competitions)
Brasov: Fulgur Publishers, 1997

When I was asked to review the book, my first question was: would the problems in it, all of them in Hungarian, be understandable at all for the Dutch public? After having received it, I realized that much more has to be 'translated' for the Western reader, than just the annotation of formulas.

The title may already seem puzzling for the reader unfamiliar with Hungary's past and present. The book contains the problems and solutions of annual ladder competitions from two journals and twenty-one annual mathematical competitions with different sets of problems for different age groups, organised between 1984 and 1997 for secondary-school pupils of the Hungarian minority in Romania, mostly concentrated in the region known as Transylvania. The competitions are named after local Hungarian mathematicians. Only one of them, János Bolyai may be familiar to the Western reader, because of his non-Euclidean geometry. Hungarian minorities live in other parts of the Carpathian basin than Romania as well, and the International Hungarian Maths Competitions organized since 1992, that are also included in the book, were meant for all secondary-school pupils studying in Hungarian. Probably due to the very limited resources available to publish the collection, the cover looks sober, and the square grid design reminds one of a fence.

By now the reader may suspect, that the organization of these competitions is also a political act. That it is very much so is clear from the ten-page introduction. It starts with an account of the weathered history of Transylvanian mathematics and mathematicians since 1919 (when the division of Great Hungary took place), listing those who did and those who did not stay in Transylvania in the following decades. From the facts about the cat-and-mouse game between the Romanian authorities and the few devoted Hungarian maths teachers starting yet a new maths journal in Hungarian when the previous one was forbidden, one gets the idea, that the struggle for having Hungarian-language maths was motivated by the preservation not only of quality mathematical education in Hungarian, but also of the Hungarian language and culture. The rather impassioned closing call for the maths teachers and pupils to persevere and survive seems to belong to the 19th century rather than the 21st with its efforts towards a unified Europe, open borders and shared values.

On the other hand, it is sad that education in the mother-tongue is not a right of a minority that needs no further explanation, but depends on a few enthusiastic teachers doing unimaginable amounts and sorts of work. For example, most of the competitions were not only initiated by the author, but it was also he who provided many of the problems and was responsible for all administrative work and the correction of the solutions himself. And he performed an enormous and very good job. In the field of analysis, algebra, number theory and some geometry there are dozens of good exercises, or even exam problems for university maths students at Dutch universities.

Obviously, the topics and level of secondary school maths in Transylvania are very different from those in the Netherlands. All secondary schools have more or less the same maths curriculum, built up in the definition-theorem-proof style. In the collection

one hardly finds a single 'practical' or 'story-based' problem, and the description almost always starts with "Give those cases of x for which ..." or "Demonstrate that ...". Here are two examples from the 1992 international competition for secondary school finalists:

- Show that $1/3! + 1/5! + 1/7! + \dots$ is irrational.
- Divide a triangle in two pieces of identical area by a straight line in such a way, that the length of the line within the triangle is minimal.

Because of the mathematical nature of the problems, it is not at all hopeless for the foreign reader to try to decipher the annotations and find the solutions. It is rather the lack of an index for the problems and the unclear layout which limit the usefulness of the collection.

Z. Ruttkay



R.B. Banks

Slicing pizzas, racing turtles and further adventures in applied mathematics

Princeton: Princeton University Press, 1999

286 p., prijs \$24.95

ISBN 0-691-05947-0

Het is een goede gedachte om verschijnselen uit het dagelijkse leven zodanig te herformuleren en te bewerken dat er een hanteerbaar wiskundevraagstuk ontstaat, waarmee een geïnteresseerd middelbaar scholier, wiskundeleraar, of jongerejaarsstudent uit de voeten kan. Deze gedachte is door de schrijver in daden omgezet en wel in een aantrekkelijke vorm, al moet gezegd worden dat het er af en toe wel wat al te gezapig aan toe gaat. De resultaten van het numerieke rekenwerk neem ik op zijn gezag zonder meer aan. Wat me wel opvalt als ik de figuren nauwkeuriger bekijk, is de incorrecte afwerking van bepaalde krommen: ik noem de cardioïde, bladzijde 160, die een verkeerde raaklijn in zijn singulariteit heeft. Verder de logaritmische spiraal (bladzijden 90, 92, 134 en 135) waarvan het equi-angulaire karakter ten aanzien van de voerstraal en het verloop in de buurt van het vluchtpunt niet goed is getroffen. Ten slotte de involutie van een cirkel (pagina 270), waar de eerste figuur wel, maar de andere twee figuren niet correct zijn. Op bladzijde 273 vinden we ook nog een verkeerde figuur hiervan, maar die is kennelijk ontstaan door een verkeerde interpretatie van de onafhankelijke variabele bij het gebruik van poolcoördinaten op bladzijde 271. Kortom, voor iedere geïnteresseerde, met name uit de onderwijswereld, is het een aantrekkelijk boek, mede door de vele recente literatuurverwijzingen. Het boek moet alleen in sommige opzichten zeker niet voor zoete koek worden geslikt!

K.A. Post



A. Beck, M.N. Bleicher et al.

Excursions into mathematics

Natick: A K Peters, 2000

499 p., prijs \$34,-

ISBN 1-56881-115-2

Dit boek is een bijgewerkte versie van de eerste editie uit 1969. Het bevat zes onafhankelijk geschreven hoofdstukken over enkele centrale delen uit de wiskunde die ook voor niet-ingewijden interessant zijn. De omslag spreekt van een boek geschreven voor een algemeen publiek, maar het is zeker niet zo dat hiermee dan ook een breed, niet-universitair geschoold publiek kan worden bedoeld. De hoofdstukken gaan weliswaar over populaire onderwerpen als getaltheorie, niet-Euclidische meetkunde en speltheorie, maar de benadering is stellig wiskundig van aard en er wordt kwistig met mooie bewijzen gestrooid. De vele illustraties zijn zorgvuldig gemaakt en geven veel verheldering.

Toch bekruipt bij lezing het gevoel dat het boek, als het echt dertig jaar later was geschreven, er heel anders uit zou zien. Er wordt gesproken van een Millennium Editie, maar ontwikkelingen van de afgelopen decennia worden middels een symbool in de marge en een appendix van welgeteld 7 pagina's afgedaan. En deze appendix is inclusief een verbetering van de drukfouten. Pierre de Fermat komt zodoende uitgebreid aan de orde, terwijl Andrew Wiles het met nog geen twee regels moet doen. Het is des te irriterender om te merken dat men zelfs niet de moeite heeft genomen om de oude tekst aan te passen. Bij het vierkleurenprobleem staat de meest recente suggestie dat er wellicht een kaart bestaat die niet met vier kleuren kan worden ingekleurd en een kaart van Europa ter illustratie dateert van voor 1989. Bij de torens van Hanoi staat een opmerking over een mogelijk gevaar uit Hanoi die toen waarschijnlijk alleen door Amerikanen kon worden gemaakt en nu potsierlijk aandoet. De rol van de computer voor hedendaagse ontwikkelingen, blijft natuurlijk vrijwel buiten schot.

Het is dus een prachtig boek over recreatieve wiskunde met een zeer serieuze en niet-triviale inslag dat op zich een bijgewerkte versie verdient. Het resultaat had echter nog zoveel mooier kunnen zijn dan het nu is geworden.

C.P. Smit



Universitaire Wiskunde Competitie

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina <http://academics.its.tudelft.nl/uwc>

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Per nummer worden twee prijzen van 100 Euro toegekend: één aan de aanvoerder van de ladder (die daarna weer onderaan begint), en één aan de inzender van de oplossing die de meeste punten behaald heeft (die dan geen punten voor de ladder krijgt). Daarnaast zal twee maal per jaar een ster-opgave worden aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend. Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in $\text{\LaTeX}$ wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 augustus 2001. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

Eindredactie: Jan van Neerven
Redactieadres: Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
j.vanneerven@its.tudelft.nl

De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading.



Opgave A

Teken in een cirkel een regelmatige zeshoek. Beschrijf met de hoekpunten van deze zeshoek als middelpunten zes cirkels met een straal gelijk aan de straal van de eerste cirkel. Binnen de eerste cirkel ontstaat een bloemetje. Buiten de eerste cirkel ontstaan zes snijpunten van de getrokken cirkels. Kies deze zes hoekpunten weer als middelpunten van nieuwe cirkels, weer met dezelfde straal en teken weer de betreffende veelhoek. Zet dit procédé voort en beredeneer de structuur van de figuur die ontstaat.

Opgave B

Zij $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ de ring van polynomen met rationale coëfficiënten in de onbekenden $X_1, \dots, X_n$. We noemen $p \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ *homogeen van graad* $m \geq 1$ als

$$p(tX_1, \dots, tX_n) = t^m p(X_1, \dots, X_n)$$

voor alle $t \in \mathbb{Q}$. De deelverzameling van alle polynomen die homogeen zijn van graad m noteren we als $\mathbb{Q}^{(m)}[X_1, \dots, X_n]$.

Uit de identiteit

$$X_1 X_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)^2 - \frac{1}{2}X_1^2 - \frac{1}{2}X_2^2$$

volgt meteen dat ieder polynoom $p \in \mathbb{Q}^{(2)}[X_1, X_2]$ geschreven kan worden als een $\mathbb{Q}$ -lineaire combinatie van kwadraten van polynomen in $\mathbb{Q}^{(1)}[X_1, X_2]$.

Toon aan: voor alle $m, n \geq 1$ kan ieder polynoom $p \in \mathbb{Q}^{(m)}[X_1, \dots, X_n]$ geschreven kan worden als een $\mathbb{Q}$ -lineaire combinatie van m -de machten van polynomen in $\mathbb{Q}^{(1)}[X_1, \dots, X_n]$.

Opgave C

Toon aan dat de volgende functie

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{\ln(1+e^x)}{\ln(1+e^{-x})} \right)$$

strikt dalend is op $(0, \infty)$.

Editie 2000/4

Op de ronde 2000/4 van de Universitaire Wiskunde Competitie ontvingen we 10 inzendingen.

Opgave 2000/4-A

Gegeven vier punten in het vlak, waarvan er geen drie op een rechte lijn liggen. Kies drie van de vier punten. Deze vormen een driehoek $\triangle$, waarvan de omgeschreven cirkel middelpunt M en straal R heeft. Noem het vierde punt P . Toon aan:

$$\text{Oppervlakte}(\triangle) \times (PM^2 - R^2)$$

is onafhankelijk van de keuze van de drie punten.

Oplossing De opgave laat een generalisatie toe naar dimensies $d \geq 2$. In de navolgende oplossing beschouwen we het geval $d = 3$; deze oplossing geeft voldoende aanknopingspunten voor het algemene geval.

Van het vijftal punten $\{A, B, C, D, E\}$ liggen er geen vier in één vlak. We beschouwen twee viertallen, zeg $\{A, C, D, E\}$ en $\{B, C, D, E\}$. Deze hebben het drietal $\{C, D, E\}$ gemeenschappelijk; het middelpunt van hun omgeschreven cirkel nemen we als oorsprong van een cartesisch coördinatenstelsel. De coördinaten van een punt P noteren we als

UWC

oplossingen

$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$. Er geldt dan $|\mathbf{c}| = |\mathbf{d}| = |\mathbf{e}| =: r$. Kiezen we de x_1 -as loodrecht op het vlak opgespannen door C, D en E , dan liggen C, D en E blijkbaar op de cirkel

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2, \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Het middelpunt M_A van omgeschreven bol van de punten A, C, D en E heeft coördinaten $(m_A, 0, 0)$. De straal R_A van deze bol voldoet aan

$$r^2 + m_A^2 = R_A^2 = |AM_A|^2 = (a_1 - m_A)^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

zodat

$$2a_1 m_A = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - r^2.$$

Ook geldt $|BM_A|^2 = (b_1 - m_A)^2 + b_2^2 + b_3^2$, dus

$$|BM_A|^2 - R_A^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - r^2 - 2b_1 m_A.$$

Combinatie van deze gelijkheden geeft

$$a_1(|BM_A|^2 - R_A^2) = a_1(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - r^2) - b_1(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - r^2).$$

Analoog vinden we dat

$$b_1(|AM_B|^2 - R_B^2) = b_1(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - r^2) - a_1(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - r^2).$$

Dit geeft

$$a_1(|BM_A|^2 - R_A^2) = -b_1(|AM_B|^2 - R_B^2). \quad (*)$$

Het volume van de viervlakken opgespannen door A, C, D en E (respectievelijk B, C, D en E) wordt verkregen door $|a_1|$ (respectievelijk $|b_1|$) te vermenigvuldigen met $\frac{1}{3}$ maal de oppervlakte van de driehoek CDE . Bijgevolg geldt

$$\text{Volume}[ACDE] \cdot |BM_A|^2 - R_A^2 = \text{Volume}[BCDE] \cdot |AM_B|^2 - R_B^2.$$

Zoals de meeste inzenders opmerkten ontbraken de absolute waarde-strepen in de opgave. Als men 'oppervlakte' als 'georiënteerde oppervlakte' interpreteert, was de opgave echter correct (het min-teken in $(*)$ komt dan van de permutatie die $ABCDE$ in $BACDE$ overvoert).

Opgave 2000/4-B

Zij $p, k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Bewijs de volgende ongelijkheden:

$$\frac{(k^p - (k-1)^p)^2}{k^{2p-1} - (k-1)^{2p-1}} < \frac{((k+1)^p - k^p)^2}{(k+1)^{2p-1} - k^{2p-1}} < \frac{p^2}{2p-1}.$$

Oplossing De volgende uitwerking is gedeeltelijk gebaseerd op de oplossing van Tom Claeys. Beschouw de functie $f: [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(k) = \frac{((k+1)^p - k^p)^2}{(k+1)^{2p-1} - k^{2p-1}} = \left[\int_k^{k+1} x^{p-1} dx \right]^2 \left[\int_k^{k+1} x^{2p-2} dx \right]^{-1}. \quad (*)$$

De eerste ongelijkheid is bewezen als we kunnen aantonen dat $f'(k) > 0$ voor alle $k \in [2, \infty)$. Elementair rekenwerk laat zien:

$$\begin{aligned} f'(k) > 0 &\iff \int_k^{k+1} x^{2p-2} dx \int_k^{k+1} x^{p-2} dx - \int_k^{k+1} x^{2p-3} dx \int_k^{k+1} x^{p-1} dx > 0 \\ &\iff \int_k^{k+1} \int_k^{k+1} x^{2p-2} y^{p-2} - x^{2p-3} y^{p-1} dx dy > 0 \\ &\iff \int_k^{k+1} \int_k^{k+1} x^{2p-3} y^{p-2} (x - y) dx dy > 0 \\ &\iff \int_k^{k+1} \int_y^{k+1} (x^{2p-3} y^{p-2} - y^{2p-3} x^{p-2}) (x - y) dx dy > 0. \end{aligned} \quad (**)$$

UWC

oplossingen

Op het integratiegebied van de herhaalde integraal (**) geldt $x - y \geq 0$. Wegens $\frac{x}{y} \geq 1$ en $2p - 3 > p - 2 \geq 0$ geldt $(\frac{x}{y})^{2p-3} \geq (\frac{x}{y})^{p-2}$, zodat ook $x^{2p-3}y^{p-2} - y^{2p-3}x^{p-2} \geq 0$. In al deze ongelijkheden treedt gelijkheid alleen op de diagonaal $x = y$ op. Hieruit volgt dat de herhaalde integraal (**) strikt positief is. Dit bewijst de eerste ongelijkheid.

Schrijf nu

$$\begin{aligned} ((k+1)^p - k^p)^2 &= p^2 k^{2p-2} + g(k), \\ (k+1)^{2p-1} - k^{2p-1} &= (2p-1)k^{2p-2} + h(k), \end{aligned}$$

met g en h zekere polynomen van graad $2p - 3$. Dan geldt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{((k+1)^p - k^p)^2}{(k+1)^{2p-1} - k^{2p-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p^2 + g(k)/k^{2p-2}}{(2p-1) + h(k)/k^{2p-2}} = \frac{p^2}{2p-1}.$$

Omdat we al weten dat functie f in (*) strikt stijgend is in de variabele k , geeft dit de tweede ongelijkheid.

Opgave 2000/4-C

Men wil uit n personen (met $n \geq 2$) een winnaar aanwijzen door volmaakt eerlijke loting, maar heeft daartoe slechts de beschikking over één geldstuk. De kansen op kruis of munt zijn daarbij niet noodzakelijkerwijs $\frac{1}{2}$, maar wél is het zeker dat die kansen constant zijn. Een voorschrift voor het spel (en zo'n voorschrift zal een protocol genoemd worden) is bij $n = 2$ bijvoorbeeld het volgende: Men werpt net zolang twee keer achter elkaar totdat de uitkomsten van de laatste twee keer verschillend zijn. Is dat KM (K betekent kruis, M betekent munt) dan wint speler 1, is het MK dan wint speler 2. Er is een kans 0 dat het werpen oneindig lang duurt: dat nemen we voor lief.

De lengteverwachting van het protocol is de verwachtingswaarde van het aantal worpen. Gemakshalve wordt bij de berekening van die lengteverwachting ervan uitgegaan dat de kans op kruis $\frac{1}{2}$ is (terwijl het protocol juist bedoeld is voor de omgang met oneerlijke munten). In het bovengenoemde voorbeeld is de lengteverwachting 4.

- Toon aan dat er voor $n = 2$ een protocol bestaat met lengteverwachting $< \frac{7}{2}$.
- Voor $n = 3$ is er een eenvoudig protocol waarvan de lengteverwachting ook weer 4 is. Toon aan dat er een protocol bestaat met lengteverwachting < 4 .
- Bewijs dat er een constante C bestaat zo dat er bij elke n een protocol bestaat met lengteverwachting $< C \log n$.
- Bewijs dat er bij geen enkele n een getal G bestaat zodanig er een protocol is dat de afloop binnen G worpen garandeert.

Oplossing Deze uitwerking is gebaseerd op de oplossing van Herbert Beltman. We maken gebruik van het feit dat de kans op ieder rijtje bestaande uit k maal K (kruis) en m maal M (munt) gelijk is, ongeacht de volgorde waarin de K's en M's geworpen zijn. We gaan uit van n spelers. Het aantal rijtjes met k maal K en m maal M is $\binom{k+m}{k}$. Als $\binom{k+m}{k} \geq an$ voor zekere a , dan kunnen an van deze rijtjes eerlijk worden verdeeld onder de n spelers. Hoe dit gebeurt is verder niet van belang. Bijvoorbeeld als $n = 5$ dan kan na minimaal 4 beurten een winnaar worden bepaald, namelijk zodra er tweemaal K en tweemaal M is gegooid (bijvoorbeeld door de toekenningen KKMM: speler 1, MKMK: speler 2, KMMK: speler 3, MKKM: speler 4, MKMK: speler 5 en MMKK: onbeslist).

Voordat we het protocol geven dat een zo kort mogelijke lengteverwachting heeft, hebben we een aantal definities nodig. Een *scenario* is een opeenvolging van worpen. We onderscheiden *besliste* en *onbesliste* scenario's. Met $\rho_{k,m}$ noteren we het aantal scenario's bestaande uit k maal K en m maal M dat precies na $k + m$ worpen een winnaar aanwijst (beslist). Met $\theta_{k,m}$ noteren we het aantal onbesliste scenario's bestaande uit k maal K en m maal M. Laat $\binom{k+m}{k}_n = \binom{k+m}{k} \bmod n$. Nu geldt dat

$$\theta_{k,m} = \binom{k+m}{k}_n.$$

Dit kan worden aangetoond met behulp van inductie naar $k + m$. Eenvoudig wordt aangetoond dat

$$\theta_{k,m} = \theta_{k-1,m} + \theta_{k,m-1} \bmod n.$$

UWC

oplossingen

Merk op dat

$$\rho_{k,m} = \theta_{k-1,m} + \theta_{k,m-1} - \theta_{k,m},$$

immers door de laatste worp niet uit te voeren is het scenario zeker onbeslist. Er geldt nu voor de lengteverwachting E_n :

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot 2^{-t} \sum_{k=0}^t \rho_{k,t-k} = \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot 2^{-t} \sum_{k=0}^t (\theta_{k-1,t-k} + \theta_{k,t-k-1} - \theta_{k,t-k}) \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot 2^{-t} \sum_{k=0}^t \left(\binom{t-1}{k-1}_n + \binom{t-1}{k}_n - \binom{t}{k}_n \right) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \left((t+1) \cdot 2^{-t-1} \sum_{k=0}^t \binom{t}{k}_n \right) \\ &\quad + \sum_{t=0}^{\infty} \left((t+1) \cdot 2^{-t-1} \sum_{k=0}^t \binom{t}{k}_n \right) - \sum_{t=1}^{\infty} \left(t \cdot 2^{-t} \sum_{k=0}^t \binom{t}{k}_n \right) \\ &= 2 \binom{0}{0}_n \cdot 2^{-1} + \sum_{t=1}^{\infty} \left(2^{-t} \sum_{k=0}^t \binom{t}{k}_n \right) = \sum_{t=0}^{\infty} \left(2^{-t} \sum_{k=0}^t \binom{t}{k}_n \right). \end{aligned}$$

Let hierbij goed op de bereiken van de variabelen t en k . Hiermee is de formule afgeleid voor de lengteverwachting van de besliste scenario's.

We kunnen hiermee de deelvragen (1), (2) en (3) beantwoorden.

1. We kiezen in bovenstaande formule $n = 2$ en vinden:

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_{t=0}^{\infty} \left(2^{-t} \sum_{k=0}^t \binom{t}{k}_2 \right) \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \sum_{t=7}^{\infty} \left(2^{-t} \sum_{k=0}^t \binom{t}{k}_2 \right) \\ &\leq 3 \frac{5}{16} + \sum_{t=7}^{\infty} \frac{t+1}{2^t} = 3 \frac{29}{64}. \end{aligned}$$

Hierbij worden de eerste 7 termen simpelweg berekend en voor de rest wordt een afchatting gemaakt, waarbij we gebruikmaken van $\binom{t}{k}_2 \leq 1$.

2. Het bewijs gaat analoog aan (1). We berekenen de eerste 10 termen:

$$\begin{aligned} E_3 &= \sum_{t=0}^{\infty} \left(2^{-t} \sum_{k=0}^t \binom{t}{k}_3 \right) \\ &= 1 + 1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{13}{256} + \frac{1}{256} \\ &\quad + \sum_{t=10}^{\infty} \left(2^{-t} \sum_{k=0}^t \binom{t}{k}_3 \right) \\ &\leq \frac{503}{128} + \sum_{t=10}^{\infty} \frac{2(t+1)}{2^t} = 3 \frac{125}{128}. \end{aligned}$$

3. We dienen te bewijzen dat er een C bestaat waarvoor er voor elke n een protocol bestaat met lengteverwachting $< C \log n$. Volgens het bovengenoemde protocol geldt

$$E_n = \sum_{t=0}^{\infty} \left(2^{-t} \sum_{k=0}^t \binom{t}{k}_n \right).$$

We splitsen deze som in twee delen, namelijk

$$\sum_{t=0}^{y-1} \left(2^{-t} \sum_{k=0}^t \binom{t}{k}_n \right) \quad \text{en} \quad \sum_{t=y}^{\infty} \left(2^{-t} \sum_{k=0}^t \binom{t}{k}_n \right).$$

We zullen verderop y kiezen. In de eerste som maken we de afchatting $\binom{t}{k}_n \leq \binom{t}{k}$ en in de tweede som $\binom{t}{k}_n \leq n-1 < n$. Als we dit toepassen dan vinden we:

UWC

oplossingen

$$\begin{aligned}
 E_n &= \sum_{t=0}^{y-1} \sum_{k=0}^t \binom{t}{k}_n \cdot 2^{-t} + \sum_{t=y}^{\infty} \sum_{k=0}^t \binom{t}{k}_n \cdot 2^{-t} \\
 &< \sum_{t=0}^{y-1} 2^{-t} \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} + \sum_{t=y}^{\infty} 2^{-t} \sum_{k=0}^t n = \sum_{t=0}^{y-1} 1 + n \sum_{t=y}^{\infty} \frac{t+1}{2^t} \\
 &= y + \frac{n}{2^y} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{t+y+1}{2^t} = y + \frac{ny}{2^y} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2^t} + \frac{n}{2^y} \left(\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2^t} \right)^2 = y + \frac{2ny+4n}{2^y}.
 \end{aligned}$$

Kies nu y zo dat $n \leq 2^y < 2n$. We vinden nu voor E_n de ruime afschatting:

$$E_n < y + \frac{2ny+4n}{2^y} \leq 3y+4 \leq 4 \log_2 n,$$

voor voldoende grote waarden van n .

4. De volgende oplossing maakt gebruik van het feit dat we vooraf niet weten hoe vals de munt is. Stel dat er een $n \geq 2$ en G te vinden zijn waarbij elk protocol binnen G worpen een winnaar onder n spelers aanwijst. Laat $p > \frac{1}{2}$. We veronderstellen nu dat de munt waarmee wordt geworpen nogal vals is, zo vals namelijk dat de kans op het werpen van M gelijk is aan $p^{\frac{1}{G}}$. De kans dat met deze munt G maal M wordt geworpen is nu $p > \frac{1}{2}$. Als de worp ' G maal M ' wordt toegekend aan speler 1, dan heeft speler 1 meer dan kans $\frac{1}{2}$ om te winnen en is er geen sprake van een eerlijke loting. Als deze worp daarentegen aan geen van de spelers wordt toegekend hebben we na G worpen geen gegarandeerde winnaar.

Een slotopmerking: de rij

$$E_n = \sum_{t=0}^{\infty} \left(2^{-t} \sum_{k=0}^t \binom{t}{k}_n \right)$$

is niet monotoon stijgend. Een toename van n impliceert dus niet automatisch een toename van de lengteverwachting. Zo is bijvoorbeeld $E_8 = 6.44472 \dots$, $E_9 = 6.36007 \dots$ en $E_{10} = 6.30093 \dots$ $\leftarrow$

Uitslag 3e editie

De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

Naam	A	B	C	Totaal
1. Herbert Beltman (Twente)	6	8	11	105
2. Hendrik Hubrechts e.a. (Leuven)	8	8	8	96
3. Filip De Smet (Gent)	8	8	6	86
4. Bart Rodrigues e.a. (Leuven)	8	9	3	75
5. Tom Claeys (Leuven)	8	7	3	67

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie na vier ronden

We vermelden alleen de top 5. Voor de complete ladderstand zie de UWC-homepage.

Naam	Punten
1. Steven Lippens	256
2. Filip De Smet	241
3. Hendrik Hubrechts e.a.	191
4. Joeri Van der Veken e.a.	185
5. Herbert Beltman	177

Problemen

| Problem Section

Problem 18 (Alex Heinis)

Let a, k be positive numbers. Count the number of maps $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ such that $f^k(n) = n + a$ for all $n \in \mathbf{N}$.

Problem 19 (R. Ceulemans, open problem)

A billiard table T has the shape of a regular pentagon, with sides of length of 1 meter. You can put a billiard ball anywhere on the table and shoot it in any direction over a distance of 10 meters. Give the maximal number of times the ball can hit a side.

Problem 20 (A.F. Tiggelaar)

Suppose that ABC and DEF are two triangles in $\mathbf{R}^3$ and that V is the plane that contains ABC . Suppose that AD, BE and CF are perpendicular to V and that $AD = BC, BE = AC, CF = AB$. Construct the point in V that is equidistant to D, E and F .

Solutions to volume 1, number 4 (December 2000)

Problem 10

Let a, b, c be integers such that the symmetric matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

has three integer eigenvalues. Prove, or give a counterexample to, the following statement: either $abc = 0$ or $(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2) = 0$.

This open problem has been solved by Ronald van Luijk and by Raimundas Vidunas. The solution will appear in one of the next issues of Nieuw Archief.

Problem 11

An abc -triple is a triple of pairwise coprime positive integers a, b, c with $a + b = c$ for which the product r of the distinct prime numbers dividing abc satisfies $r < c$. Prove that there are infinitely many abc -triples.

Solution by Raimundas Vidunas. For each positive integer k , we have that $9^k = 8N + 1$ for some integer N . This gives an abc -triple $1, 8N, 9^k$ since $r \leq 6N < 9^k$.

Problem 12

Prove that there are infinitely many abc -triples for which a is equal to a given positive integer.

Solution by Hendrik Lenstra. Fix any a , and let p be an odd prime number not dividing a . By the Chinese remainder theorem we can choose a primitive root g modulo p^2 with $\gcd(g, a) = 1$. Let m be such that $p^{m-1} > ag$. Then g is a primitive root modulo p^m , so there exist infinitely many n with $g^n \equiv a \pmod{p^m}$ and $g^n > a$. For any such n , we can take $b = g^n - a, c = g^n$. These numbers are pairwise coprime, and since b is divisible by p^m we have $r \leq a \cdot (b/p^{m-1}) \cdot g < b < c$.

Problem 13

Let m be a positive integer. Prove that there is an abc -triple with the property that any odd prime number dividing abc exceeds m .

Solutions to the problems in this section can be sent to the editor — preferably by e-mail. The most elegant solutions will be published in a later issue. Readers are invited to submit general mathematical problems. Unless the problem is still open, a valid solution should be included.

Editor:

R.J. Fokkink

Technische Universiteit Delft

Faculteit Wiskunde

P.O. Box 5031

2600 GA Delft

The Netherlands

r.j.fokkink@its.tudelft.nl

Solution by Hendrik Lenstra. We may assume $m \geq 2$. Let k be the product of all prime numbers that are at most m . Denote by φ the Euler- φ -function. All primes dividing $\varphi(k/2)$ are at most m , so they divide k . Hence $\gcd((k+1)^2, \varphi(k/2)) = 1$, so there exists n with $n \cdot (k+1)^2 \equiv 1 \pmod{\varphi(k/2)}$. Put $c = (k+2)^{n \cdot (k+1)^2}$, $a = 1$, $b = c - 1$. Modulo the odd number $k/2$, we have $c \equiv 2^{n \cdot (k+1)^2} = 2^{1 \pmod{\varphi(k/2)}} \equiv 2^1 = 2$, so $b \equiv 1$ and $abc \equiv 2$. Hence abc is not divisible by any odd prime that is at most m . The residue class $k+2 \pmod{(k+1)^3}$ belongs to the set of units modulo $(k+1)^3$ that are $1 \pmod{k+1}$. That set is a group of order $(k+1)^2$, so $(k+2)^{(k+1)^2} \equiv 1 \pmod{(k+1)^3}$ and therefore $c \equiv 1 \pmod{(k+1)^3}$ and $b \equiv 0 \pmod{(k+1)^3}$. Therefore $r \leq (b/(k+1)^2) \cdot (k+2) < b < c$.

Problem 14

Let n be a positive integer. Prove that there exist n different abc -triples with the same value of c .

Solution by Hendrik Lenstra. Choose any $h > 1$ (for example, $h = 2$), and let P be any set of n prime numbers not dividing h . Choose n_0 such that for all $n \geq n_0$ and all $p \in P$ one has $p^{2n-1} > h \cdot (1 + hp^n)$. Choose m such that $h^m \equiv 1 \pmod{\prod_{p \in P} p^{n_0}}$. For each $p \in P$, let n_p be the number of factors p in $h^m - 1$; then we have $n_p \geq n_0$, and we can write $h^m = 1 + k_p \cdot p^{n_p}$ where p does not divide k_p . Choose l such that for all $p \in P$ one has $h^{ml} \equiv 1 + h \cdot p^{n_p} \pmod{p^{2n_p}}$; this can be done, since by $h^{ml} = (1 + k_p \cdot p^{n_p})^l \equiv 1 + l \cdot k_p \cdot p^{n_p} \pmod{p^{2n_p}}$ it suffices to solve $l_p \cdot k_p \equiv h \pmod{p^{n_p}}$ and to choose l such that for each $p \in P$ one has $l \equiv l_p \pmod{p^{n_p}}$. Now put $c = h^{ml}$ and $a_p = 1 + h \cdot p^{n_p}$, for $p \in P$, so that $c \equiv a_p \pmod{p^{2n_p}}$. We have $a_p \equiv 1 \pmod{h}$, so $\gcd(a_p, c) = 1$ and $a_p \neq c$. From

$$a_p = 1 + h \cdot p^{n_p} < h \cdot (1 + h \cdot p^{n_p}) < p^{2n_p-1} < p^{2n_p}$$

it follows that a_p is the least number in its residue class mod p^{2n_p} . Since c lies in the same residue class, one has $c > a_p$, so we can write $a_p + b_p = c$. The number b_p is divisible by p^{2n_p} , so we have $r \leq a_p \cdot (b_p/p^{2n_p-1}) \cdot h = b_p \cdot h \cdot (1 + hp^{n_p})/p^{2n_p-1} < b_p < c$. Therefore a_p, b_p, c constitute an abc -triple, for each $p \in P$. Because p is the unique prime number dividing $(a_p - 1)/h$, no two of these triples coincide.

Solutions to some problems of yore

Below are the solutions to the problems 972–979, which belong to the Problem Section of the fourth series of Nieuw Archief.

Problem 972 (H. Alzer)

For any pair x, y of distinct positive real numbers, we define

$$A(x, y) = \frac{x+y}{2}, G(x, y) = \sqrt{xy}, H(x, y) = \frac{2}{1/x + 1/y}.$$

Prove that if $x, y \geq e$ then

$$\begin{aligned} A(x, y)^{H(x, y)} &< \left(\frac{G(x, y) + A(x, y)}{2} \right)^{H(\sqrt{x}, \sqrt{y})^2} \\ &< G(x, y)^{G(x, y)} \\ &< H(\sqrt{x}, \sqrt{y})^{G(x, y) + A(x, y)} \\ &< H(x, y)^{A(x, y)} \end{aligned}$$

and if $x, y \leq e$ then we have the reverse inequalities.

Solutions by G.W. Veltkamp and H.J. Seiffert. Below is the solution by H.J. Seiffert which is remarkably short compared to the problem. Abbreviate $G = G(x, y)$ and $A = A(x, y)$.

Since $G < A$ we have

$$\frac{G^2}{A} < \frac{2G^2}{G+A} < G < \frac{G+A}{2} < A.$$

The function $F(t) = t^{1/t}$ is strictly increasing on $(0, e]$ and strictly decreasing on $[e, \infty)$. Apply f to the inequality and raise to the power G^2 , and observe that $H = G^2/A$ and $H(\sqrt{x}, \sqrt{y})^2 = 2G^2/(G + A)$.

Problem 973 (W. Bencze)

Prove for $n = 2, 3, \dots$ the inequalities

$$\frac{1}{2} + \sqrt{n - \frac{1}{2}} < \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \sqrt{n - 2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} < \frac{1}{2} + \sqrt{n + \frac{1}{4}}.$$

Solutions by J.H. van Geldrop, W. van der Meiden, G.W. Veltkamp, C. Jonkers, A.A. Jagers, H.J. Seiffert, R.H. Jeurissen. There was a misprint in the original problem where the final quotient $\frac{1}{4}$ was omitted. Some readers assumed the quotient to be $\frac{1}{2}$ which enables a crisp solution. For $n + \frac{1}{4}$ the problem is only slightly harder and essentially all solutions are the same. Denote the inequality by $\frac{1}{2} + \sqrt{n - \frac{1}{2}} < w_n < \frac{1}{2} + \sqrt{n + \frac{1}{4}}$. Apply induction. Clearly the inequality holds for $n = 2$. Assume it holds for $n - 1$. Squaring the inequality gives the equivalent form

$$\frac{1}{4} + \sqrt{n - \frac{1}{2}} < a_{n-1} < \frac{1}{2} + \sqrt{n + \frac{1}{4}},$$

which follows from the induction hypothesis and the inequality

$$-\frac{1}{4} + \sqrt{n - \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} + \sqrt{n - \frac{3}{2}}.$$

Problem 974 (M.L.J. Hautus)

Let $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ be a C^1 -function satisfying $|f'(x)/f(x)| \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow \infty$. Show that for every $n \in \mathbf{N}$ and every n -tuple of distinct pairs (a_i, b_i) with $a_i > 0$ and $b_i \in \mathbf{R}$, the functions $g_1, \dots, g_n$ defined by $g_i(x) = f(a_i x + b_i)$ are linearly independent.

Solution by A.A. Jagers. By the condition on f the zeroes of f' are bounded away from ∞ and hence so are all zeroes of f by a mean value theorem. Four possible cases arise, for x large enough. We only consider the case $f, f' > 0$, the other cases being similar, and use induction on n . Suppose that $\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n = 0$. Then for x large enough

$$\lambda_n = -\lambda_1 g_1(x)/g_n(x) - \dots - \lambda_{n-1} g_{n-1}(x)/g_n(x)$$

and for $i < n$ we have that $g_i(x)/g_n(x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \infty$. Indeed, for x large enough there exists an intermediate $\xi \in \mathbf{R}$ with $a_i x + b_i < \xi < a_n x + b_n$ such that

$$\log\{f(a_n x + b_n)/f(a_i + b_i x)\} = \log f(a_n x + b_n) - \log f(a_i + b_i x) = f'(\xi)/f(\xi)$$

for $x \rightarrow \infty$ by the condition on f . It follows that $\lambda_n = 0$.

Problem 975

No response.

Problem 976 (C. Notari)

Find all pairs (n, m) of positive integers such that $n^2 + n + 1 = m^3$.

Solutions by A.A. Jagers and H.J. Seiffert. Both remark that the solution is classical, $(n, m) = (18, 7)$, and refer to (L.J. Mordell, *Diophantine Equations*, (1969), p. 208-209). Jagers even includes a relatively recent paper on this problem (N. Tzanakis, *The Diophantine equation $x^3 - 3xy^2 - y^3 = 1$ and related equations*, J. Number Theory **18**, 192-205 (1984))

and he notes that a solution depends on the unique factorization in the ring $\mathbb{Z}[\rho]$ where $\rho = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

Problem 977 (J. Ponstein)

For a given $k \in \mathbb{N}$ we define the sequence $a(m)$ by $a(1) = k$ and

$$a(m) = k^m - \sum_{1 \leq i < m, i|m} a(i).$$

Show that m divides $a(m)$ for all $m \in \mathbb{N}$.

Solutions by R.H. Jeurissen, A.A. Jagers, H.J. Seiffert. All solutions depend on Möbius inversion, which gives that $a(m) = \sum_{i|m} k^i \mu(m/i)$ where μ denotes the Möbius function. Seiffert now concludes by invoking Gauss' generalization of the Fermat Little Theorem: $\sum_{i|m} k^i \mu(m/i) \equiv 0 \pmod{m}$ and the desired result follows.

Problem 978 (F. Rothe)

On a square lattice we consider *lattice triangles*, i.e. triangles with all three vertices lattice points. There exist lattice triangles with $i = 1, 2, 3, 4$ or 9 lattice points in their interior. For $i = 1, 2, 4, 9$ the centre of gravity can be a lattice point. Show that for $i = 3$ the centre of gravity cannot be a lattice point.

Solution by C.B.J. Jonkers, which is surprisingly short compared to the original four page proof by Rothe. Denote the integer lattice by R and denote the middle of lattice points P and Q by $m(PQ)$. We start with two observations. First that for every set of five points $P_i \in R$ there is at least one pair such that $m(P_i P_j) \in R$. Second that if ABC is a lattice triangle with $m(AB)$ and $m(AC)$ in R , then so is $m(BC)$.

Consider a triangle ABC with three interior points in R . Suppose that $Z \in R$ is the center of gravity of ABC . Observe that if $m(AB) \in R$ then $m(CZ) \in R$. There are two cases.

CASE 1. Suppose that $m(AZ), m(BZ), m(CZ)$ are not in R . Then $m(AB)$ cannot be a lattice point, since this would imply that $m(CZ) \in R$. Let P be a second interior point of ABC . By our first observation, one of the middles of A, B, C, Z, P is in R . There are four possibilities $m(AP), m(BP), m(CP)$ or $m(PZ)$, which are all interior points. The first three possibilities are equivalent and to fix ideas assume that $Q = m(PA) \in R$. Apply the first observation to B, C, P, Q, Z to find a fourth interior point, contradicting that the triangle only has three interior points. If $Q = m(PZ)$ then apply the argument to A, B, C, P, Q .

CASE 2. Suppose that $P = m(AZ) \in R$. This is equivalent to $m(BC) \in R$ and our second observation implies that $m(AB), m(AC)$ are not in R . Equivalently, $m(BZ)$ and $m(CZ)$ are not in R . There has to be a third interior point Q . One of the middles of A, B, C, P, Q is in R . Verify that this has to be an interior point, which contradicts that there are only three interior points.

Problem 979 (F.W. Steutel)

Prove that the function $g(x) = \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(tx + ct^2) dt$ is nonnegative for all $c \in \mathbb{R}$ if and only if $c = 0$.

Solutions by K.W. Lau, A.A. Jagers, G.W. Veltkamp. Solution by A.A. Jagers. Let $\varphi = \arg(1 + ic)$ or, equivalently, $c = \tan \varphi$ with $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. If $c = 0$ then $\varphi = 0$ and $g(x) = g(-x) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} > 0$. If $c \neq 0$ then $\varphi \neq 0$ and

$$\begin{aligned} (g(x) + g(-x))/2 &= \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty e^{-x^2/(4-ic)} \cos(tx) dt \right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-x^2/(4-4ic)}}{\sqrt{1-ic}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi \cos \varphi} e^{-(x \cos \varphi)^2/4} \cos \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{8} x^2 \right), \end{aligned}$$

which is not nonnegative for all $x \in \mathbb{R}$, but changes sign infinitely often.